تصميم المرشحات الرقمية ذات الاستجابة الاندفاعية محددة الطول FIR

Design of Finite Impulse Response FIR Digital Filters

(٨,١) مقدمة

لقد رأينا فى الفصل السابق الطرق المختلفة لتصميم المرشحات من النوع IIR ، وسنرى في هذا الفصل الطرق المختلفة لتصميم المرشحات من النوع FIR. قبل البدء في عرض هذه الطرق سنعيد هنا الخواص الهامة لهذا النوع من المرشحات والتي سبق ذكرها في الفصل السابع :

١- استجابة الصدمة للمرشحات من النوع FIR تكون محددة الطول ويمكن التعبير عنها بالمعادلة التالية :

$$h[n] \neq 0 \quad for \quad N_1 \leq n \leq (N_2 = N_1 + N - 1) \qquad (٨,١)$$

حيث N هي طول استجابة الصدمة والذي يمتد من N_1 إلى N_2 وN_1 من الممكن أن تكون صفراً أو هكذا تكون في العادة.

٢- الاستجابة الترددية H(w) للمرشحات FIR تكون كثيرة حدود في e^{jw}

obeikandl.com

ومحددة الطول ويمكن كتابتها على الصورة التالية :

$$H(w) = \sum_{n=N_1}^{N_2} h[n](e^{jw})^{-n} \qquad (٨,٢)$$

حيث N_1 وN_2 أرقام صحيحة تمثل أرقام أول وآخر عينة في استجابة الصدمة h[n]. معاملات استجابة الدفعة التي عددها N هي المعاملات المطلوب تحديدها عند تصميم هذا النوع من المرشحات.

٣- تصميم المرشح من النوع FIR هو حساب الاستجابة الترددية H(w) التي تكون أقرب ما يمكن من الاستجابة الترددية المطلوبة، ويتم ذلك عن طريق إيجاد أو حساب معاملات استجابة الصدمة h[n] التي تحقق ذلك. درجة المرشح أيضاً التي هي طوله N تعد أحد المتغيرات المستخدمة للحصول على الاستجابة الترددية المطلوبة.

٤- دالة الانتقال transfer function هي تحويل Z لاستجابة الصدمة وهي كثيرة حدود في المتغير المركب Z محدودة الطول وليس لها مقام ويمكن كتابتها على الصورة التالية :

$$H(z) = H(e^{jw})\big|_{e^{jw}=z} = \sum_{n=N_1}^{N_2} h[n]z^{-n} \qquad (٨,٣)$$

ونستنتج من ذلك أن هذا النوع من المرشحات يكون مستقراً دائماً لعدم وجود أقطاب في دالة الانتقال.

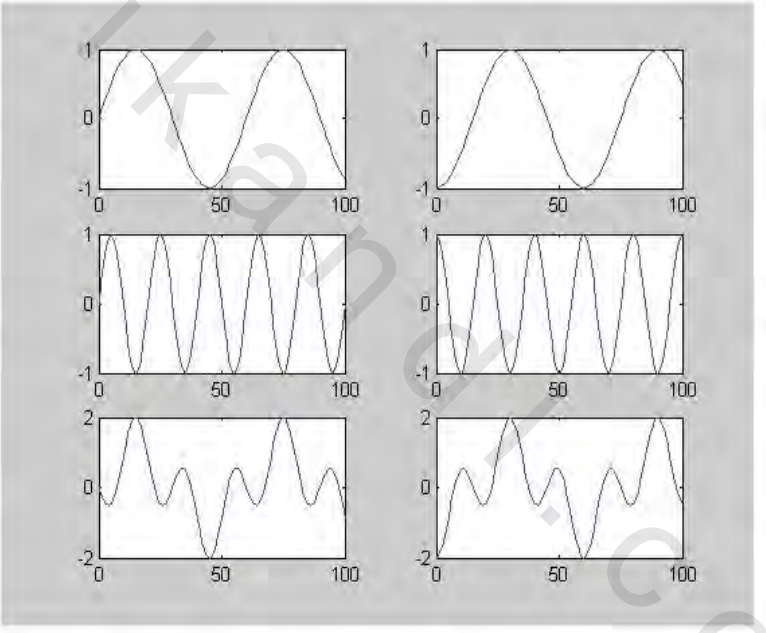
٥- هذا النوع من المرشحات FIR تكون زاوية الطور له θ(w) خطية دائماً على العكس من المرشحات IIR التي كانت زاوية الطور لها غير خطية. خطية زاوية الطور تجعل هذا النوع من المرشحات مناسباً جداً للكثير من التطبيقات كما سنرى في الفصول القادمة.

٦- بما أن طول استجابة الصدمة يكون ممدوداً فإنه يمكن في هذه الحالة

استخدام عملية الجمع الالتفافي convolution لتحقيق هذا النوع من المرشحات.

٧- هذه المرشحات ليست حساسة للضوضاء لعدم وجود تغذية عكسية، وعدم وجود أقطاب في معادلة دالة الانتقال كما كان في حالة المرشحات IIR.

٨- درجات هذه المرشحات N قد تمتد إلى قيم كبيرة جداً للحصول على مواصفات معينة للمرشح ، فقد تمتد إلى ٥٠٠ مثلاً، وهذا يجعل هذه المرشحات معقدة وتحتاج إلى وقت كبير لحساب معاملاتها calculation time كما أنها تسبب زمن تأخير كبير.



الشكل رقم (٨.١). إضافة طور ثابت لا يغير من شكل إشارة المجموع.

خاصية زاوية الطور الخطية التي يتميز بها هذا النوع من المرشحات تعد من الخواص المهمة بالذات في التطبيقات التي من الضروري الحفاظ فيها على شكل إشارة الخرج من المرشح بحيث تكون مثل شكل إشارة الدخل كما في المرشحات التي

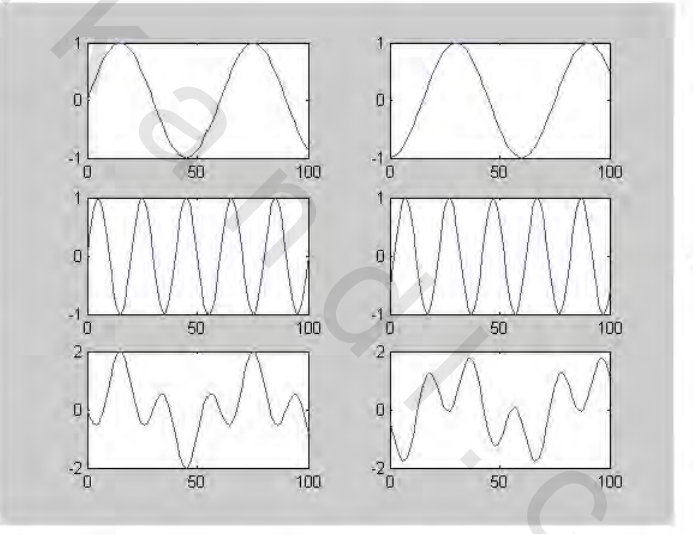
تستخدم في معالجة الصور. ولكي نرى كيف أن الطور الخطي يحافظ على شكل الإشارة سنعرض المثال التالي:

مثال رقم (٨,١). الشكل رقم (٨,١أ) يبين الإشارة:

$$X=\sin((\pi/30)*n) \qquad (٨,٤)$$

والشكل رقم (٨,١ب) يبين الإشارة:

$$Y=\sin((\pi/10)*n) \qquad (٨,٥)$$



الشكل رقم (٨,٢). إضافة طور متغير غير خطي لا يحافظ على شكل الإشارة الناتجة.

والشكل رقم (٨,١ج) يبين حاصل جمع هاتين الإشارتين. الآن سنقوم بإزاحة الطور للإشارة X تصبح:

$$X_1=\sin((\pi/30)*(n-15)) \qquad (٨,٦)$$

كما في الشكل رقم (٨,١د) وإزاحة الطور للإشارة Y بنفس المقدار لتصبح :

$$Y_1=\sin((\pi/10)*(n-15)) \quad (٨,٧)$$

كما في الشكل رقم (٨,١هـــــ) . حاصل جمع الإشارتين X_1 و Y_1 كما في الشكل رقم (٨,١و) نلاحظ من الشكلين رقمي (٨,١ج) و (٨,١و) أن إشارة المجموع متطابقة ولهما نفس الشكل تماماً سوى أن هناك إزاحة بينهما فى زاوية الطور.

الشكلان رقما (٨,٢أ) و (٨,٢ب) يبينان نفس الإشارتين السابقتين :

$$X=\sin((\pi/30)*n) \quad (٨,٨)$$

$$Y=\sin((\pi/10)*n) \quad (٨,٩)$$

ومجموعهما كما هو في الشكل رقم (٨,٢ج) . الآن سنغير طور الإشارة الأولى ليصبح :

$$X_1=\sin((\pi/30)*(n-15)) \quad (٨,١٠)$$

أما طور الإشارة الأخرى فسيتغير ولكن ليس بنفس المقدار ليصبح :

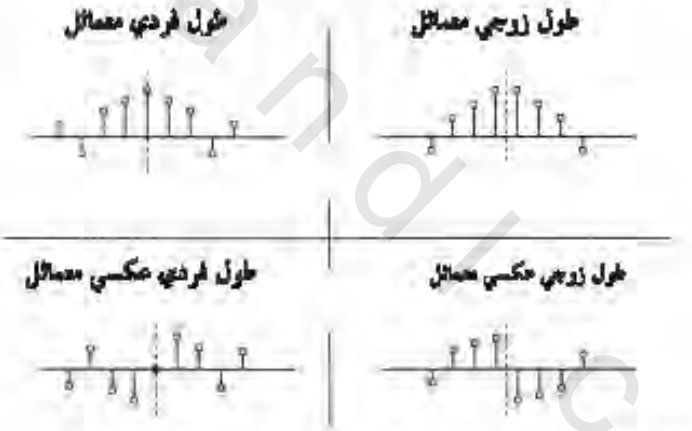
$$=\sin((\pi/10)*(n-2)) \quad (٨,١١)$$

مجموع الإشارتين X_1 و Y_1 هذه المرة موضح في الشكل رقم (٨,٢و). قارن الشكلين رقمي (٨,٢ج) و (٨,٢و) هذه المرة ستجد أنهما مختلفان في الشكل على عكس ما كان فى شكلي رقمي (٨,١ج) و (٨,١و). نستنتج من ذلك أن الإزاحة الثابتة في الطور أو الخطية تحافظ على شكل الإشارة، بينما الإزاحة غير الخطية فتغير من شكل الإشارة وميزة الحفاظ على شكل الإشارة تكون مهمة في الكثير من

التطبيقات بالذات المتعلق منها بالرؤية ، وهذا يوضح ميزة أن المرشحات FIR تعطي زاوية طور خطية وهي ميزة غير موجودة في المرشحات السابقة IIR.

(٨,٢) تصميم المرشحات FIR الخطية الطور باستخدام استجابة الاندفاع المتماثلة
Design of a Linear Phase FIR Filters Using Symmetric Impulse Response

سنرى في هذا الجزء أنه لكي يكون المرشح من النوع FIR خطي الطور فإنه لابد أن تكون استجابة الدفعة له impulse response متماثلة حول نقطة الأصل. هناك أربع حالات لهذا التماثل على حسب إذا كان طول هذه الاستجابة فردياً أو زوجياً وعلى حسب نوع التماثل كما في الشكل رقم (٨,٣) وكما سنرى في الأجزاء التالية :



الشكل رقم (٨,٣)-الحالات المختلفة لتمثيل طول المرشحات الخطية الطور من النوع FIR

(٨,٢,١) المرشح من النوع FIR الفردي الطول المتماثل

هذه المرشحات الفردية يمكن كتابة المعادلة العامة لها كما يلي :

$$h[n]=h[N-n], \quad 0\le n\le N \qquad (٨.١٢)$$

بفرض أن عدد عينات هذا الطول هو تسع عينات كمثال فقط، حيث ستكون N=8، وعلى ذلك يمكن كتابة دالة الانتقال كما يلي:

$$H(z)=h[8]+h[7]z^{-1}+h[6]z^{-2}+h[5]z^{-3}+h[4]z^{-4}+h[3]z^{-5}+h[2]z^{-6}+h[1]z^{-7}+h[0]z^{-8} \quad (٨,١٣)$$

لهذا الطول ستكون استجابة الصدمة متماثلة حول العينة h[4]، بحيث ستكون h[0]=h[8], h[1]=h[7], h[2]=h[6], h[3]=h[5]، وعلى ذلك يمكن كتابة المعادلة رقم (٨,١٣) كما يلي:

$$H(z)=h[0](1+z^{-8})+h[1](z^{-1}+z^{-7})+h[2](z^{-2}+z^{-6})+h[3](z^{-3}+z^{-5})+h[4]z^{-4} \quad (٨,١٤)$$

المعادلة رقم (٨,١٤) يمكن وضعها أيضا على الصورة التالية بأخذ z^{-4} مشترك:

$$H(z)=z^{-4}\{h[0](z^{4}+z^{-4})+h[1](z^{3}+z^{-3})+h[2](z^{2}+z^{-2})+h[3](z^{1}+z^{-1})+h[4]\} \quad (٨,١٥)$$

باستخدام بعض الدوال المثلثية يمكن كتابة المعادلة السابقة على صورة استجابة ترددية كما يلي:

$$H(e^{jw})=e^{-jw4}\{2h[0]\cos(4w)+2h[1]\cos(3w)+2h[2]\cos(2w)+2h[3]\cos(w)+h[4]\} \quad (٨,١٦)$$

من هذه المعادلة نرى أن زاوية الطور يمكن كتابتها كما يلي:

obeikandl.com

$$\Theta(w) = -4w \qquad (٨,١٧)$$

والتي تمثل دالة خطية فى متغير التردد w. يمكن أيضاً كتابة ما يسمى بمجموعة التأخير group delay والذى يساوى تفاضل زاوية الطور كما يلي :

$$GD = 4 \qquad (٨,١٨)$$

في النهاية يمكن كتابة الصورة العامة للاستجابة الترددية لهذا النوع من المرشحات كما يلي :

$$H(e^{jw}) = e^{-jwN/2}\left\{\sum_{n=0}^{N/2} a[n]\cos(wn)\right\} \qquad (٨,١٩)$$

حيث : $a[0]=h[N/2], \quad a[n]=2h[N/2-n], \quad 1\le n\le N/2$

(٨,٢,٢) المرشح من النوع FIR الزوجي الطول المتماثل

بفرض أن عدد عينات هذا الطول هو ثمان عينات كمثال فقط ، حيث ستكون N=7 ، وعلى ذلك يمكن تمثيل هذه العينات كما يلي : h[0]=h[7], h[1]=h[6], h[2]=h[5], h[3]=h[4] ويمكن كتابة دالة الانتقال كالتالى :

$$H(z)=h[0](1+z^{-7})+h[1](z^{-1}+z^{-6})+h[2](z^{-2}+z^{-5})+h[3](z^{-3}+z^{-4}) \qquad (٨,٢٠)$$

وبإجراء بعض الاختصارات كما فعلنا في الجزء السابق ، يمكن كتابة الاستجابة الترددية لهذا النظام كما يلي :

$$H(e^{jw})=e^{-jw7/2}\{2h[0]\cos(7w/2)+2h[1]\cos(5w/2)+ 2h[2]\cos(3w/2) +2h[3]\cos(w/2)\} \qquad (٨,٢١)$$

حيث نلاحظ أن معادلة زاوية الطور خطية فى المتغير w ويمكن كتابتها كما يلي :

$$\Theta(w) = -7w/2 \qquad (٨,٢٢)$$

وكذلك مجموعة التأخير ستكون : GD=7/2

يمكن كتابة الصورة العامة لمعادلة الاستجابة الترددية في هذه الحالة كما يلي :

$$H(e^{jw}) = e^{-jwN/2}\left\{\sum_{n=1}^{(N+1)/2} b[n]\cos(w(n-0.5))\right\} \qquad (٨,٢٣)$$

حيث : $b[n]=2h[(N+1)/2-n], \quad 1\le n\le (N+1)/2$

(٨,٢,٣) المرشح من النوع FIR الفردي الطول العكسي التماثل

في هذه الحالة يمكن التعبير عن استجابة الصدمة كما يلي :

$$h[n]=-h[N-n], \quad 0\le n\le N,\ h[N/2]=0$$

ويمكن كتابة دالة الانتقال والاستجابة الترددية بفرض أن طول استجابة الصدمة=٩ كما يلي :

$$H(z)=z^{-4}\{h[0](z^4-z^{-4})+h[1](z^3-z^{-3})+ h[2](z^2-z^{-2})+ h[3](z^1+z^{-1})\} \qquad (٨,٢٤)$$

$$H(e^{jw})=e^{-j(4w-\pi/2)}\{2h[0]\sin(4w)+2h[1]\sin(3w)+2h[2]\sin(2w)+ 2h[3]\sin(w)\} \qquad (٨,٢٥)$$

ومعادلة زاوية الطور ستكون :

$$\Theta(w) = -4w-\pi/2, \quad GD = 4 \qquad (٨,٢٦)$$

وستكون الصورة العامة للاستجابة الترددية كما يلي :

$$H(e^{jw}) = e^{-j(wN/2-\pi/2)}\left\{\sum_{n=1}^{N/2} c[n]\sin(wn)\right\} \qquad (٨,٢٧)$$

حيث : $c[n]=2h[N/2-n], \quad 1\le n\le N/2$

(٨,٢,٤) المرشح من النوع FIR الزوجي الطول العكسي التماثل

في هذه الحالة أيضاً وبفرض أن طول استجابة الصدمة = ٨ فإن معادلة دالة الانتقال والاستجابة الترددية يمكن كتابتهما كما يلي :

$$H(z)=z^{-7/2}\{h[0](z^{7/2}-z^{-7/2})+h[1](z^{5/2}-z^{-5/2})+h[2](z^{3/2}-z^{-3/2})+ h[3](z^{1/2}-z^{-1/2})\}H(e^{jw}) \quad (٨,٢٨)$$

$$=e^{-(jw7/2-\pi/2)}\{2h[0]\sin(7w/2)+2h[1]\sin(5w/2)+2h[2]\sin(3w/2)+ 2h[3]\sin(w/2)\}$$

حيث زاوية الطور ستعطى بالمعادلة التالية :

$$\Theta(w) = -7w/2 - \pi/2, \quad GD = 7/2 \quad (٨,٢٩)$$

والتي تمثل معادلة خطية في المتغير w أيضاً.

الصورة العامة للاستجابة الترددية ستكون :

$$H(e^{jw}) = e^{-j(wN/2-\pi/2)}\left\{\sum_{n=1}^{N/2} d[n]\sin(w(n-0.5))\right\} \quad (٨,٣٠)$$

حيث : $d[n]=2h[(N+1)/2-n], \quad 1\le n\le (N+1)/2$

(٨,٣) تحديد أماكن الأصفار للمرشحات من النوع FIR

سنفترض أولاً المرشحات المتماثلة، والتي يمكن كتابة دالة الانتقال لها كما يلي :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N} h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{N} h[N-n]z^{-n} \quad (٨,٣١)$$

obeikandl.com

وذلك باستخدام شرط التماثل h[n]=h[N-n]. بوضع m=N-n في المعادلة (٨,٣٢) يمكن إعادة كتابتها كما يلي :

$$H(z)=\sum_{m=0}^{N}h[m]z^{-N+m}=z^{-N}\sum_{m=0}^{N}h[m]z^{-m}=z^{-N}H(z^{-1}) \qquad (٨,٣٣)$$

وبنفس الطريقة يمكن كتابة دالة الانتقال للمرشح من النوع FIR العكسي التماثل كما يلي :

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N}h[n]z^{-n}=-\sum_{n=0}^{N}h[N-n]z^{-n}=-z^{-N}H(z^{-1}) \qquad (٨,٣٤)$$

وذلك باستخدام شرط التماثل العكسي h[n]=-h[N-n] أيضاً. من المعادلتين السابقتين يمكننا ملاحظة ما يلي :

١- نلاحظ من المعادلتين رقمي (٨,٣٤) و (٨,٣٤) أنه إذا كان $z=z_1$ يمثل صفراً zero لدالة الانتقال h(z) ، فإن $z=1/z_1$ ستكون صفرا أيضا لهذه الدالة.

٢- بالإضافة لذلك فإننا نعلم أن أي مرشح FIR تكون معاملات استجابة الاندفاع h[n] له حقيقية ، فإن أصفاره تكون في أزواج مركبة مترافقة complex conjugate pairs ، أي أن أي صفر عند $z=z_1$ مثلاً ، لابد أن يرافقه صفر عند $z=z_1^*$.

٣- وعلى ذلك فإن أي صفر مركب ليس على دائرة الوحدة لابد وأن يصاحبه أربعة أصفار كما يلي :

$$z=re^{\pm j\phi}, \quad z=\frac{1}{r}e^{\pm j\phi} \qquad (٨,٣٤)$$

أما بالنسبة للصفر على دائرة الوحدة r =1 فإن مقلوبه سيكون واحداً أيضاً وسيظهر في صورة زوج من الأصفار فقط كما يلي:

$$z = e^{\pm j\phi} \qquad (٨,٣٥)$$

وأما الصفر الحقيقي فسوف يظهر في صورة صفرين على المحور الحقيقي $z=\rho,\ z=1/\rho$، فإذا كانت $\rho=1$ فسوف يظهر كصفر واحد فقط.

شكل رقم (٨,٤أ) يبين كل هذه الأحوال لأصفار المرشح الفردي المتماثل.

٤- بالنسبة للمرشح الزوجي المتماثل يمكننا كتابة المعادلة التالية:

$$H(-1)=(-1)^N H(-1)=-H(-1) \qquad (٨,٣٦)$$

مما يعني أن $H(-1)=0$، أي أن هذا النوع من المرشحات لابد أن يكون له صفر عند $z=-1$، ووجود هذا الصفر يعنى أنه لا يمكن تصميم مرشح منفذ للترددات العالية HPF باستخدام هذا النوع. الشكل رقم (٨,٤ب) يبين هذا النوع.

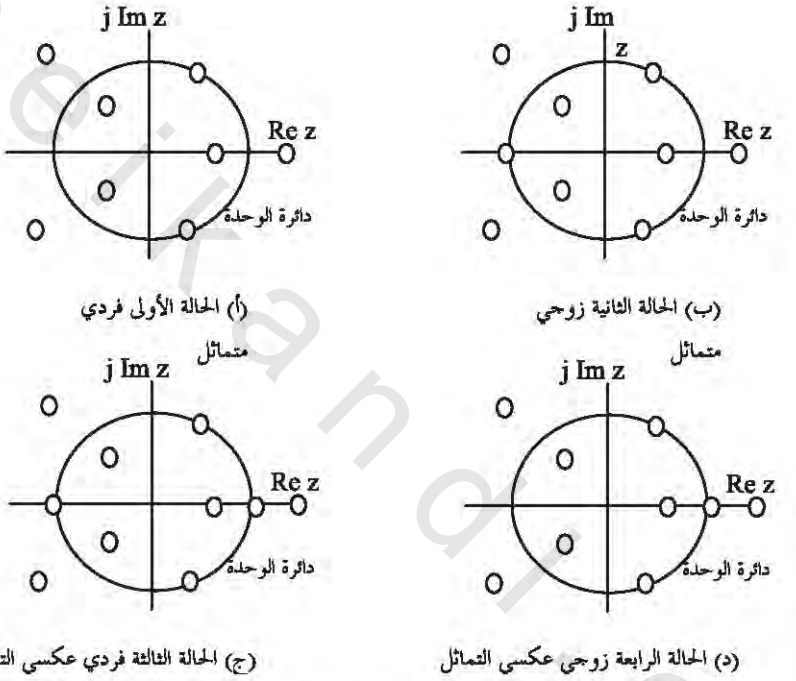
٥- بالنسبة للمرشحات العكسية التماثل فإن المعادلة رقم (٨,٣٤) تعني أن $H(1)=-H(1)$ مما يعني ضرورة وجود صفر عند النقطة $z=1$ سواء أكان المرشح زوجياً أم فردياً.

٦- بالنسبة للمرشح الفردي العكسي التماثل فأن $H(-1)=-H(-1)=(-1)^N H(-1)=-H(-1)$، مما يعني أن هذا النوع من المرشحات سيكون له صفر عند $z=1$ وآخر عند $z=-1$، وبذلك فإن هذا النوع لا يصلح للاستخدام لأي واحد من المرشحات LPF أو HPF أو BSF. الشكل رقم (٨,٤ج) يبين هذا النوع.

٧- بالنسبة للمرشح الزوجي المتماثل فإنه بنفس الطريقة سنجد أن له صفراً

عند النقطة z=1 وبذلك فإنه لا يصلح لتصميم مرشح منفذ للترددات المنخفضة LPF.

٨- من ذلك نرى أن المرشح الفردي الطول والمتماثل (النوع الأول) هو فقط الذي ليس عليه أي قيود ويمكن استخدامه في تصميم أي نوع من المرشحات.



الشكل رقم (٨,٣٤). توزيع الأصفار فى المستوى z المركب للمرشحات من النوع FIR

(٨,٤) تصميم المرشحات الرقمية من النوع FIR باستخدام النوافذ

في هذه الطريقة نبدأ من الاستجابة الترددية المطلوبة أو المرغوب فيها للمرشح Hd(w) في النطاق الترددي ، ومنها نحسب استجابة الصدمة لهذا المرشح hd[n] حيث أن كلاً من الاستجابتين السابقتين تربطهما علاقة تحويل فورير كما يلي :

$$Hd(w) = \sum_{n=0}^{\infty} hd[n]e^{-jwn} \quad (٨,٣٧)$$

$$hd[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(w)e^{jwn}dw \quad (٨,٣٨)$$

لذلك فإنه بمعرفة الاستجابة الترددية يمكن استنتاج استجابة الاندفاع hd[n] باستخدام المعادلة (٨,٣٨). لسوء الحظ أن هذه الاستجابة hd[n] تكون لانهائية الطول فى الاتجاه الموجب والسالب للمتغير n. لذلك فإنه للحصول على طول محدد لاستجابة الصدمة سنقوم بقطع عدد M-1 من العينات من الاستجابة hd[n]، وسيتم ذلك بضرب الاستجابة hd[n] في نافذة W[n] تكون مربعة الشكل طولها هو M-1 من العينات كما يلي:

$$h[n]=hd[n]W[n] \quad (٨,٣٩)$$

حيث:

- hd[n] هي استجابة الصدمة التي حصلنا عليها بالمعادلة رقم (٨,٣٨) من الاستجابة الترددية المرغوب فيها.
- h[n] هي استجابة الصدمة للمرشح من النوع FIR التي تم قطعها باستخدام النافذة W[n] والتي أصبحت محددة الطول كما يلي:

$$h[n] = \begin{cases} hd[n] & n=0,1,2,\ldots\ldots,M-1 \\ 0 & otherwisw \end{cases} \quad (٨,٤٠)$$

W[n] هي استجابة الصدمة للنافذة المستخدمة والمحددة بالعلاقة:

$$W[n] = \begin{cases} 1 & n=0,1,2,.....,M-1 \\ 0 & otherwisw \end{cases} \qquad (٨,٤١)$$

كما نعلم من خواص تحويل فورير فإن حاصل الضرب في النطاق الزمني يكافىء ضرب التفافى convolution فى النطاق الترددي ، وعلى ذلك فإن تحويل فورير للاستجابة h[n] فى المعادلة رقم (٨,٣٩) يمكن كتابتها كالتالي :

$$H(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Hd(v) W(w-v) dv \qquad (٨,٤٢)$$

حيث W(w) تمثل تحويل فورير للنافذة W[n] وتعطى بالعلاقة التالية :

$$W(w) = \sum_{n=0}^{M-1} W[n] e^{jwn} \qquad (٨,٤٣)$$

النافذة W[n] كما فى المعادلة رقم (٨,٤١) هي نافذة مربعة كل عيناتها تساوي واحداً في المدى من n=1 إلى n=M-1 ، وبتطبيق ذلك في المعادلة رقم (٨,٤٣) يمكننا أن نحصل على W(w) كما يلي :

$$W(w) = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-jwn}$$

$$= \frac{1-e^{-jwM}}{1-e^{-jw}} = e^{-jw(M-1)/2} \frac{\sin\left(\frac{wM}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w}{1}\right)} \qquad (٨,٤٤)$$

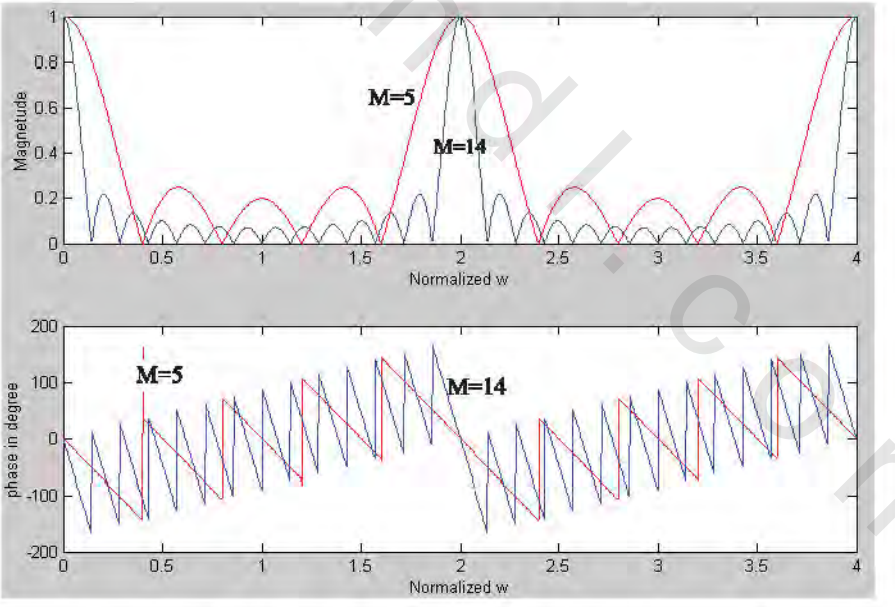
من المعادلة رقم (٨,٤٤) يمكننا أن نكتب مقدار الاستجابة الترددية للنافذة كما يلي :

$$|W(w)| = \frac{\left|\sin\left(\frac{wM}{2}\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{w}{1}\right)\right|} \qquad (٨,٤٥)$$

أما زاوية الطور θ(w) فيمكن كتابتها كالتالي :

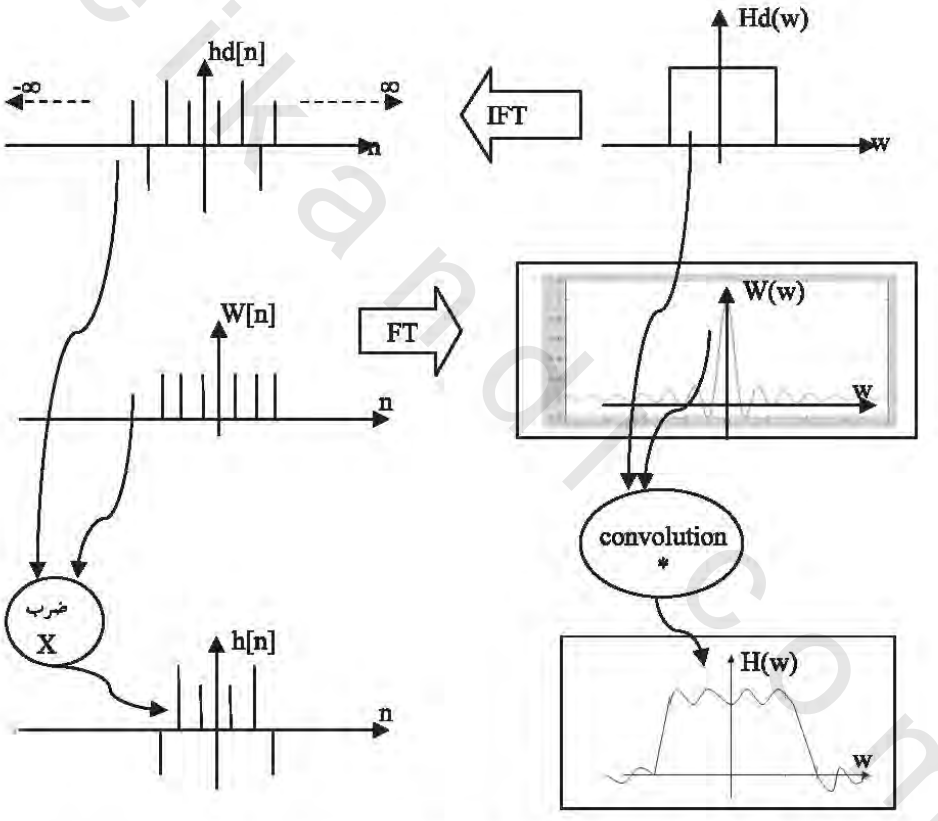
$$\theta(w) = \begin{cases} -\frac{w(M-1)}{2} & for \quad \sin\left(\frac{wM}{2}\right) \geq 0 \\ -\frac{w(M-1)}{2} + \pi & for \quad \sin\left(\frac{wM}{2}\right) < 0 \end{cases} \quad \frac{1-e^{-jwM}}{1-e^{-jw}} = e^{-jw(M-1)/2} \frac{\sin\left(\frac{wM}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w}{1}\right)} \qquad (٨,٤٦)$$

الشكل رقم (٨,٥) يبين الاستجابة الترددية لنافذة عرض استجابة الصدمة طولها ٥ وأخرى طولها ١٤. لاحظ في هذا الشكل أنه مع زيادة عرض النافذة فإن الجرس الأساسي main lobe في الاستجابة الترددية يكون أكثر حدية (ضيقاً) بينما عدد الأجراس الجانبية يكون أكثر وهذا سيكون له تأثير بالطبع على المرشح FIR الناتج كما سنرى.



الشكل رقم (٨,٥). الاستجابة الترددية والطور لنافذة طولها ٥ وأخرى طولها ١٤.

الشكل رقم (٨.٥) يبين كيفية الحصول على المرشح محدود الطول FIR باستخدام نافذة مربعة. من هذا الشكل نلاحظ أن عملية الضرب الالتفافي convolution على كل من W(w) وHd(w) كما في المعادلة رقم (٨.٤٢) ينتج عنها صورة مهزوزة smeared أو متموجة من الاستجابة الترددية Hd(w) وهي تمثل الاستجابة الترددية للمرشح الناتج.



الشكل رقم (٨.٦). الحصول على مرشح محدود الطول FIR باستخدام نافذة مربعة w[n]

هنا يمكن أن نستنتج تأثير عرض النافذة على الاستجابة الترددية الناتجة، سنجد أنه مع زيادة عرض النافذة فإن عدد التموجات الجانبية يزيد ومن ثم فإن الاستجابة الناتجة تكون أكثر خشونة أو تموجاً بينما يقل عرض مجال الانتقال transition band وهي أهم ميزة من زيادة عرض النافذة. إن عرض الجرس الأساسي main lobe الناتج من النافذة يساوي $4\pi/M$ حيث M هي عرض النافذة كما ذكرنا. لذلك مع زيادة M يقل عرض الجرس الأساسي ومن ثم يقل عرض مجال الانتقال كما ذكرنا.

كما لاحظنا فإن طبيعة وشكل النافذة المستخدمة يكون له أكبر الأثر في شكل الاستجابة الترددية الناتجة، لذلك كان لابد من تجربة أشكال أخرى لهذة النوافذ والتي لا تكون حادة الانقلاب من مجال النفاذ إلى مجال التوقف كما رأينا فى النافذة المربعة. وكان هذا موضوعاً للكثير من الأبحاث التي تمت في هذا المجال والتي جاءت بالعديد من النوافذ التي يحمل كل منها مميزات وعيوب كما سنرى حيث سنعرض في الجزء التالي بعضاً من هذه النوافذ سريعاً بما فيها النافذة المربعة.

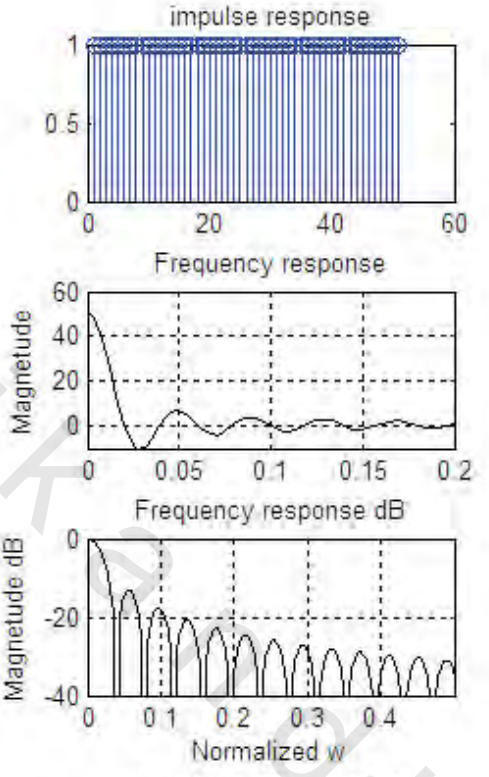
(٨,٤,١) النافذة المربعة

$$W[n] = \begin{cases} 1 & n=0,1,2,\ldots,M-1 \\ 0 & otherwisw \end{cases} \qquad (٨,٤٧)$$

الشكل رقم (٨,٦) يبين نافذة مربعة طولها ٥١ عينة وكذلك مقدار الاستجابة الترددية والاستجابة الترددية بالديسبل، وقد تم ذلك باستخدام برنامج MATLAB التالي:

```
%demonstrate rectangle window
N=51;
h=ones(1,N);
subplot(3,1,1);
stem(h);
title('impulse response');
w=0:pi/255:pi;
H=freqz(h,1,w);
m1=abs(H);
set(gcf, 'color', 'white');
subplot(3,1,2);
plot(w/pi,H,'k');grid;
ylabel('Magnetude');
AXIS([0 0.2 -10  60 ]);
title('Frequency response');
m1=20*log10(abs(H)/abs(H(1)));
subplot(3,1,3);
plot(w/pi,m1,'k');grid;
title('Frequency response dB');
AXIS([0 0.5  -40  0 ]);
ylabel('Magnetude dB');
xlabel('Normalized w');
```

الجدول رقم (٨,١) يبين المعاملات المختلفة للنافذة المربعة وبعض النوافذ الأخرى التي سنراها. لاحظ أن عرض مجال الانتقال transition band يعطى بالعلاقة (wp-ws) = c/M حيث wp هي تردد نهاية مجال النفاذ pass band وws هي تردد بداية مجال القطع أو المنع stop band وC ثابت يعتمد على نوع النافذة كما فى الجدول رقم (٨,١) وأما M فهى عرض النافذة. في الجدول رقم (٨,١) عرض الجرس الرئيس للنافذة main lobe width يُعرف على أنه المسافة بين نقطتى تقاطع الجرس الرئيس مع خط الصفر أو محور التردد w في منحنى الاستجابة الترددية للنافذة. المستوى النسبي للجرس الجانبي relative side lobe level هو الفرق بين مقدار أول جرس جانبي ومقدار الجرس الرئيس بالديسبل. لاحظ هذه المعاملات من الشكل رقم (٨,٦) للنافذة المربعة والأشكال التالية للنوافذ الأخرى.



الشكل رقم (٨,٤٢). النافذة المربعة .

(٨,٤,٢) نافذة بارتليت Bartlett Window

لتجنب الحواف الحادة في النافذة المربعة كان التفكير في نافذة مثلثة تم اقتراحها عن طريق بارتليت حيث تعطى بالعلاقة التالية :

$$w[n]=\begin{cases}\dfrac{2n}{M-1}, & 0\le n\le\dfrac{M-1}{2}\\ 2-\dfrac{2n}{M-1}, & \dfrac{M-1}{2}\le n\le M-1\\ 0 \quad\ldots\ldots\ldots & otherwise\end{cases} \qquad (٨,٤٨)$$

```
%demonstrate Bartlett window
N=51;
bar=bartlett(N);
subplot(3,1,1);
stem(bar);
title('impulse response');
w=0:pi/255:pi;
h=freqz(bar,1,w);
m1=abs(h);
set(gcf, 'color', 'white');
subplot(3,1,2);
plot(w/pi,h,'k');grid;
ylabel('Magnetude');
AXIS([0 0.2  -20  30 ]);
title('Frequency response');
m1=20*log10(abs(h)/abs(h(1)));
subplot(3,1,3);
plot(w/pi,m1,'k');grid;
title('Frequency response dB');
AXIS([0 0.5  -80  0 ]);
ylabel('Magnetude dB');
xlabel('Normalized w');
```

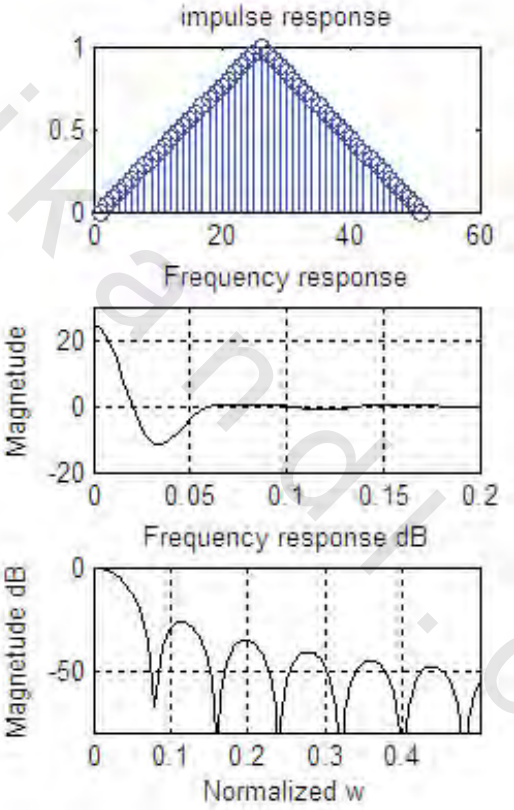
(٨,٤,٣) نافذة هانـنج Hanning Window

$$W[n]=\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{2\pi n}{2M+1}\right)\right], \quad -M<n\le M \qquad (٨,٤٩)$$

```
%demonstrate Hanning window
N=51;
han=hanning(N);
subplot(3,1,1);
stem(han);
title('impulse response');
w=0:pi/255:pi;
h=freqz(han,1,w);
m1=abs(h);
set(gcf, 'color', 'white');
subplot(3,1,2);
plot(w/pi,h,'k');grid;
ylabel('Magnetude');
AXIS([0 0.2  -20  30 ]);
title('Frequency response');
```

obeikandl.com

```
m1=20*log10(abs(h)/abs(h(1)));
subplot(3,1,3);
plot(w/pi,m1,'k');grid;
title('Frequency response dB');
AXIS([0 0.5 -80  0 ]);
ylabel('Magnetude dB');
: ('xlabel('Normalized w
```



الشكل رقم (٨,٨). نافذة بارتليت.

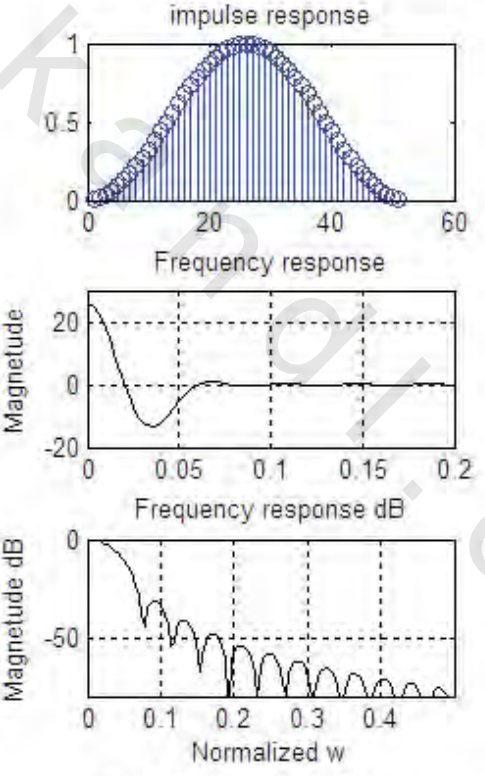
بنفس الطريقة يمكن رسم الاستجابة لباقي النوافذ وملاحظة الفروق بينها والتحقق من الجدول رقم (٨,١) .

(٨,٤,٤) نافذة هامنج Hamming Window

$$W[n] = 0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{2M+1}\right), \quad -M < n \le M \tag{٨,٥٠}$$

(٨,٤,٥) نافذة بلاكمان Blackman Window

$$W[n] = 0.42 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{2M+1}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{2M+1}\right), \quad -M < n \le M \tag{٨,٥١}$$



الشكل رقم (٨,٩). نافذة هامنج .

obeikandl.com

(٨,٤,٦) نافذة كايزر Kaiser window

$$W[n] = \frac{Io(\beta)}{I0(\alpha)}, \quad -M < n \le M \qquad (٨,٥٢)$$

حيث :

$$\beta = \alpha\sqrt{1-\left(\frac{2n}{2M+1}\right)^2}$$

$$Io(\chi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k\right]^2$$

و α عبارة عن متغير مستقل.

الجدول رقم (٨,٥٢) .

نوع النافذة Window type	عرض الجرس الرئيسى Main lobe width	مستوى الجرس الجانبى Relative side lobe level	أقل اضمحلال فى مجال الوقف Min. stop band attenuation	عرض مجال الانتقال Transition band width
Rectangle	4π/(2M+1)	13.3 dB	20.9 dB	1.8π/M
Hanning	8π/(2M+1)	31.5 dB	43.9 dB	6.2π/M
Hamming	8π/(2M+1)	42.7 dB	54.5 dB	6.6 π/M
Blackman	12π/(2M+1)	58.1 dB	75.3 dB	11π/M

مثال رقم (٨,١). صمم مرشح رقمى من النوع FIR بالمواصفات التالية :

تـردد حافـة مجـال المـرور wp=0.2π ، وتـردد حافـة مجـال الوقـف ws=0.3π ، والتموجات ripples في مقدار الاستجابة في مجال المرور Rp=0.25dB ، وأقصى مقدار للاستجابة في مجال الوقف As=50dB. استخدم طريقة النوافذ التي سبق شرحها.

كل من نافذتي الهامنج وكيزر يمكنهما تحقيق هذا القدر من مقدار الاستجابة فى مجال التوقف (أكثر من 50dB) ولذلك سنصمم هذا المرشح باستخدام هاتين النافذتين.

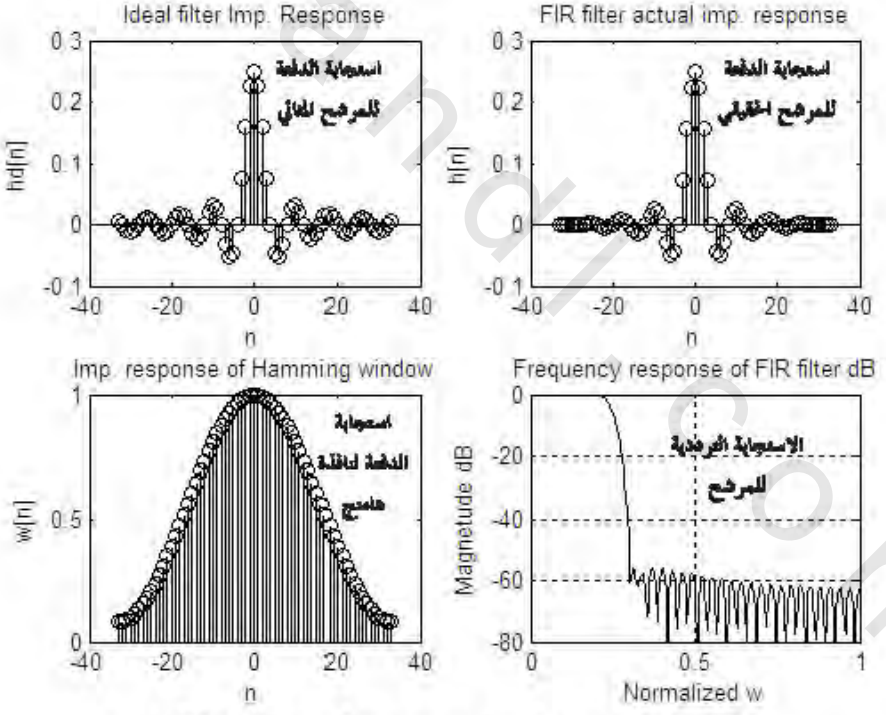
obeikandi.com

أولاً: باستخدام نافذة هامنج يوضح البرنامج التالي تصميم هذا المرشح باستخدام MATLAB.

```
%Design of FIR filter using Hamming window, Example 8-1a
wp=0.2*pi;
ws=0.3*pi;
tr_band=ws-wp;
M=ceil(6.6*pi/tr_band)+1; %required length of the resp. it is always
infinity
wc=(ws+wp)/2; %cuttoff frequency for the ideal filter
n=[0:1:(M-1)];
m=n-(M-1)/2+eps;  %eps is the smallest value to avoid division by zero
hd=sin(wc*m)./(pi*m);
subplot(2,2,1);
stem(m,hd,'k');
title('Ideal filter Imp. Response');
xlabel('n'); ylabel('hd[n]');
w_ham=(hamming(M))';
subplot(2,2,3);
stem(m,w_ham,'k');
title('Imp. response of Hamming window');
xlabel('n'); ylabel('w[n]');
h=hd.*w_ham;
subplot(2,2,2);
stem(m,h,'k');
title('FIR filter actual imp. response');
xlabel('n'); ylabel('h[n]');
w=0:pi/255:pi;
h=freqz(h,1,w);
set(gcf, 'color', 'white');
dB=20*log10(abs(h)/abs(h(1)));
subplot(2,2,4);
plot(w/pi,dB,'k');grid;
title('Frequency response of FIR filter dB');
axis([0 1  -80  0 ]);
ylabel('Magnetude dB');
xlabel('Normalized w');
Rp=min(dB(1:1:wp*255/pi))  %Ripples in the pass band
As=max(dB(round(ws*255/pi)+1:1:255)) %Max attenuation in the stop band
```

obeikandl.com

في بداية البرنامج تم تصميم مرشح مثالي، استجابة الاندفاع له هي hd وطول هذه الاستجابة من المفترض أن يمتد إلى المالانهاية، ولكن لصعوبة ذلك تم أخذ عدد من النبضات منه هو M فقط. هذه الاستجابة تم ضربها في استجابة النافذة w_ham لنحصل على الاستجابة للمرشح المطلوب h والتي منها تم حساب الاستجابة الترددية. الشكل رقم (٨.١٠) يبين استجابة الصدمة للمرشح المثالي ونافذة هامنج واستجابة الصدمة للمرشح المطلوب وكذلك الاستجابة الترددية لهذا المرشح. للتأكد من صحة التصميم فإن نهاية البرنامج تعطي أقل مقدار للتموجات الناتجة من هذا التصميم في مجال المرور Rp= 0.0017 وهو أفضل بكثير من المطلوب، كما أن أعلى اضمحلال تم



الشكل رقم (٨.١٠). خطوات تصميم مرشح رقمي باستخدام نافذة هامنج.

التوصل إليه بهذا المرشح فى مجال الوقف هو As = -55.86 وهو أيضا أفضل من المطلوب. ثانياً: باستخدام نافذة كيزر هناك قيم مختصرة للثابت β يمكن التعويض بها مباشرة بمعرفة قيمة أقل اضمحلال فى مجال الوقف كما يلي:

$$\beta = \begin{cases} 0.1101(As-8.7) & for\ As > 50 \\ 0.5842(As-21)+0.07886(As+21) & for\ 21 < As < 50 \\ 0 & for\ As < 21 \end{cases} \qquad (٨,٥٣)$$

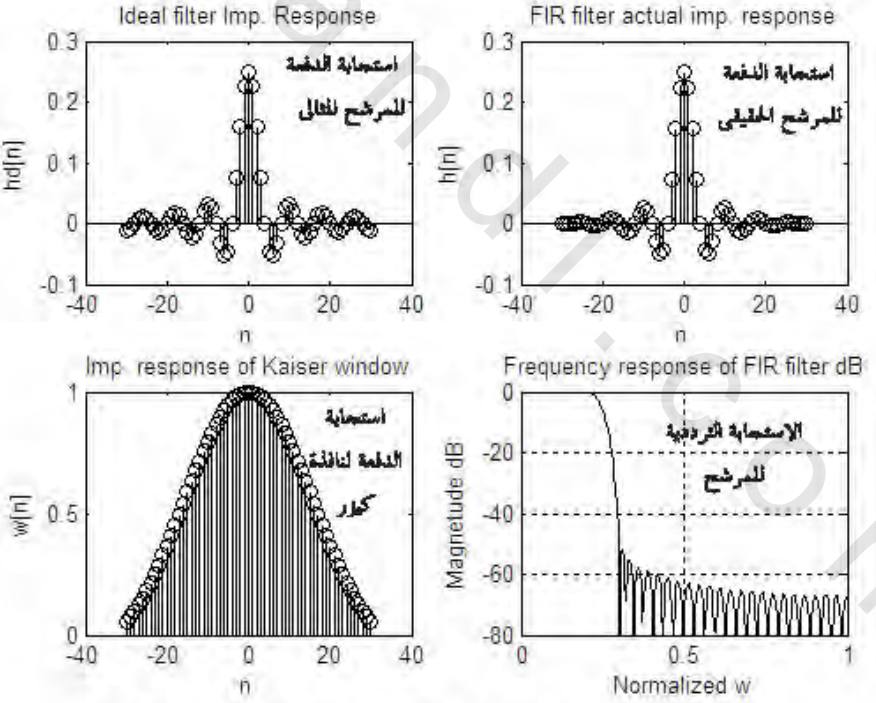
بالتعويض في المعادلة السابقة بقيمة As=50 سنحصل على β٤,٥٤٣=. بنفس الخطوات كما في الجزء السابق يمكن كتابة البرنامج التالي لتصميم المرشح باستخدام نافذة كيزر.

```
%Design of FIR filter using Kaiser window, Example 8-1b
wp=0.2*pi;As=50;
ws=0.3*pi;
tr_band=ws-wp;
M=ceil((As-7.95)/(14.36*tr_band/(2*pi))+1)+1; %required length of the resp. it
is always infinity
wc=(ws+wp)/2; %cuttoff frequency for the ideal filter
n=[0:1:(M-1)];
m=n-(M-1)/2+eps;  %eps is the smallest value to avoid division by zero
hd=sin(wc*m)./(pi*m);
subplot(2,2,1);
stem(m,hd,'k');
title('Ideal filter Imp. Response');
xlabel('n'); ylabel('hd[n]');
beta=0.1102*(As-8.7);
w_kaiser=(kaiser(M,beta))';
subplot(2,2,3);
stem(m,w_kaiser,'k');
title('Imp. response of Kaiser window');
xlabel('n'); ylabel('w[n]');
h=hd.*w_kaiser;
subplot(2,2,2);
stem(m,h,'k');
title('FIR filter actual imp. response');
```

obeikandl.com

```
xlabel('n'); ylabel('h[n]');
w=0:pi/255:pi;
h=freqz(h,1,w);
set(gcf, 'color', 'white');
dB=20*log10(abs(h)/abs(h(1)));
subplot(2,2,4);
plot(w/pi,dB,'k');grid;
title('Frequency response of FIR filter dB');
axis([0 1  -80  0 ]);
ylabel('Magnetude dB');
xlabel('Normalized w');
Rp=min(dB(1:1:wp*255/pi)) %Ripples in the pass band
As=max(dB(round(ws*255/pi)+1:1:255)) %Max attenuation in the stop band
```

الشكل رقم (٨,١١) يبين استجابة الصدمة للمرشح المثالي ونافذة كيزر واستجابة الصدمة للمرشح المطلوب وكذلك الاستجابة الترددية لهذا المرشح. للتأكـــد



الشكل رقم (٨,١١). خطوات تصميم مرشح رقمي باستخدام نافذة كيزر.

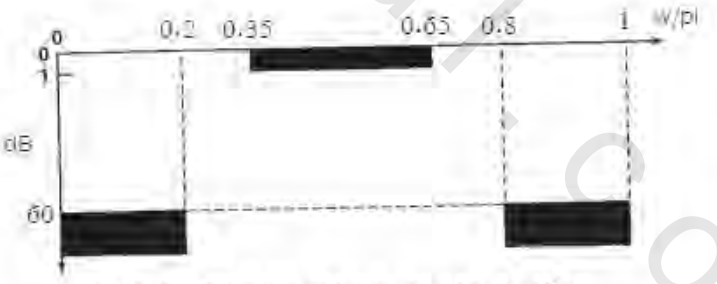
من صحة التصميم فإن نهاية البرنامج تعطى أقل مقدار للتموجات الناتجة من هذا التصميم في مجال المرور Rp= 0.0164 وهو أفضل بكثير من المطلوب، كما أن أعلى اضمحلال في مجال الوقف As= -51.6726 وهو أيضاً أفضل من المطلوب.

مثال رقم (٨,٢): سنرى في هذا المثال كيفية تصميم مرشح منفذ للترددات المتوسطة BPF باستخدام طريقة النوافذ التى سبق شرحها. مواصفات هذا المرشح كالتالي:

$ws_1 = 0.2\pi$ $wp_1 = 0.35\pi$ $As_1 = -60dB$ $Rp = 1dB$
$ws_2 = 0.8\pi$ $wp_2 = 0.65\pi$ $As_2 = -60dB$ $Rp = 1dB$

هذه الترددات يوضحها الشكل رقم (٨,١٢)

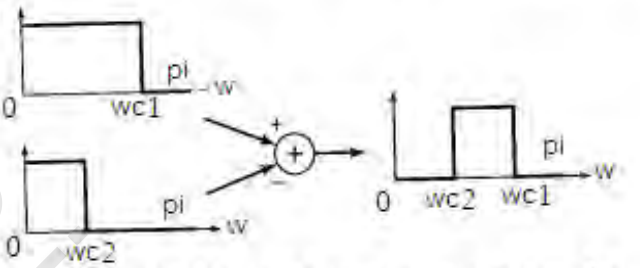
للحصول على مرشح مثالي منفذ للترددات المتوسطة سنقوم بطرح الاستجابة الترددية لمرشحين كل منهما منفذ للترددات المنخفضة على أن يكون تردد القطع لكل منهما يسمح بأن يكون ناتج طرحهما هو مرشح منفذ للترددات المتوسطة كما في



الشكل رقم (٨,١٢). مواصفات مرشح المثال رقم (٨,٢).

الشكل رقم (٨,١٣). بذلك يمكننا اتباع نفس الخطوات السابقة كما فى المثال رقم (٨,١) حيث يوضح البرنامج التالي و الشكل رقم (٨,١٤) نتيجة هذا التصميم. لاحظ

أننا استخدمنا نافذة بلاكمان في هذا التصميم لأنها هي التي تحقق أفضل اضمحلال في مجال التوقف كما في الجدول رقم الشكل رقم (٨.١).

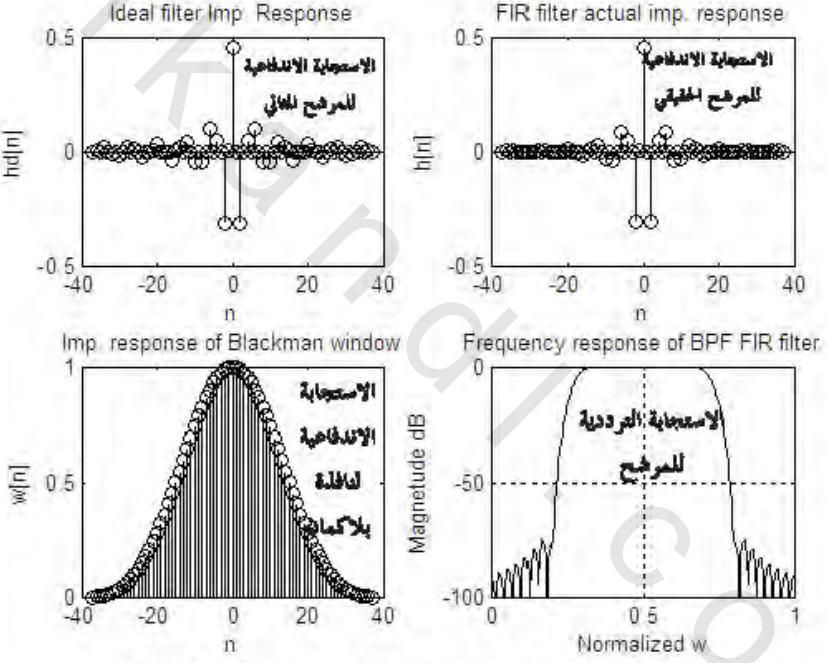


الشكل رقم (٨.١٣). مرشح نافذ للترددات المتوسطة للمثال رقم (٨.٢).

طول نافذة بلاكمان المستخدمة كان ٧٥ وذلك من البرنامج كما أن التموجات في مجال المرور كانت Rp = 0.0048dB وأعلى اضمحـــــلال في مجال التوقـــف كان As = -74.6195dB وهذا يحقق المطلوب من المرشح وأكثر كما في الشكل رقم (٨.١٤).برنامج هذا المرشح كالتالي:

```
%Design a BPF, FIR filter using Blackman window, Example 8-2
ws1=0.2*pi; wp1=0.35*pi; As=60;
wp2=0.65*pi; ws2=0.8*pi;
tr_band=min((wp1-ws1),(ws2-wp2));
M=ceil(11*pi/tr_band)+1 %required length of the resp. it is always infinity
wc1=(ws1+wp1)/2; %cutoff frequency for the ideal filter
wc2=(wp2+ws2)/2;  n=[0:1:(M-1)];
m=n-(M-1)/2+eps;  %eps is the smallest value to avoid division by zero
hd1=sin(wc1*m)./(pi*m); hd2=sin(wc2*m)./(pi*m);
hd=hd2-hd1;
subplot(2,2,1); stem(n,hd,'k');
title('Ideal filter Imp. Response'); xlabel('n'); ylabel('hd[n]');
w_blackman=(blackman(M))';
subplot(2,2,3); stem(n,w_blackman,'k');
title('Imp. response of Blackman window');
xlabel('n'); ylabel('w[n]');
h=hd.*w_blackman;
```

```
subplot(2,2,2); stem(m,h,'k');
title('FIR filter actual imp. response'); xlabel('n'); ylabel('h[n]');
w=0:pi/255:pi;
h=freqz(h,1,w);
set(gcf, 'color', 'white');
dB=20*log10(abs(h)/abs(h(125)));
subplot(2,2,4); plot(w/pi,dB,'k');grid;
title('Frequency response of BPF FIR filter');
axis([0 1-100  0 ]); ylabel('Magnetude dB'); xlabel('Normalized w');
Rp=min(dB(wp1*255/pi:1:wp2*255/pi))  %Ripples in the pass band
As=max(dB(round(ws2*255/pi)+1:1:255)) %Max attenuation in the stop band
```



الشكل رقم (٨,١٣). مرشح رقم (٨,٢) المنفذ للترددات المتوسطة BPF.

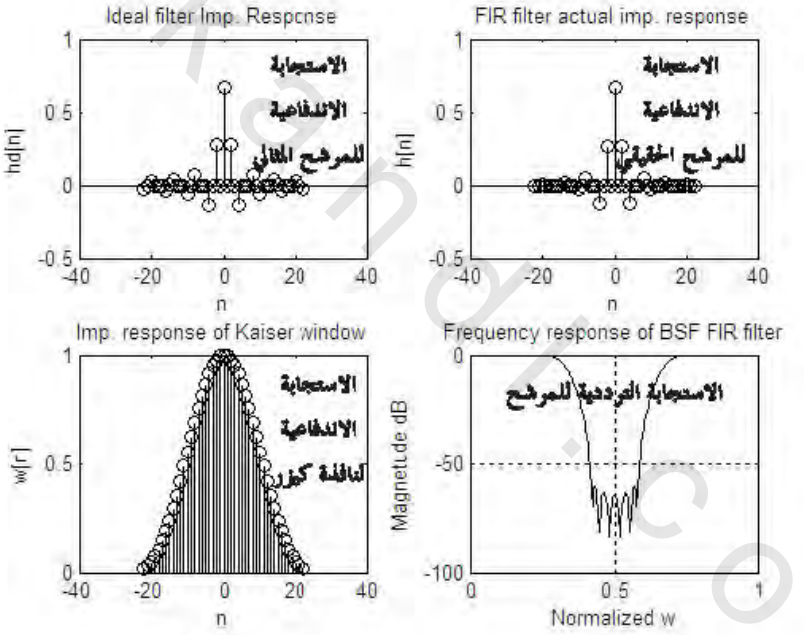
مثال رقم (٨,٣): تصميم مرشح رقمي FIR مانع للترددات الوسطى BSF بالمواصفات التالية كمرشح مثالي:

$$Hd(e^{jw}) = \begin{cases} 1 & 0 \le |w| < \pi/3 \\ 0 & \pi/3 \le |w| \le 2\pi/3 \\ 1 & 2\pi/3 \le |w| < \pi \end{cases}$$

استخدم نافذة كيزر أو أي نافذة أخرى على أن يكون طول النافذة ٤٥ وأعلى اضمحلال في مجال التوقف هو 60dB-. لاحظ أن عرض مجال الانتقال transition width فى هذا المثال غير معطى، لذلك سنصمم المرشح بالطول ٤٥ وبقيمة معينة للمتغير β بحيث إذا لم تتحقق مواصفات المرشح سنغير في طول النافذة وقيمة β وهذا هو السبب في إضافة ٠,٣ لقيمة beta في البرنامج. ترددات القطع لهذا المرشح هي $wc_1=\pi/3$ و$wc_2=2\pi/3$ ، لذلك للحصول على استجابة المرشح FIR المطلوب سنفترض أنها حاصل طرح مرشح مثالي منفذ لجميع الترددات hd(π) مطروح منها مرشح منفذ للترددات المنخفضة بتردد قطع wc_2 أى hd(2π/3) ومضافا إلى ذلك استجابة مرشح منفذ للترددات المنخفضة بتردد قطع wc_1 أى hd(π/3). البرنامج التالى سيوضح خطوات تصميم هذا المرشح والشكل رقم (٨,١٤) يوضح نتيجة هذا التصميم.

```
Design a BSF, FIR filter using Kaiser window, example 8-3%
; As=60; M=45
wc1=pi/3; wc2=2*pi/3; % first and second cuttoff freq. for ideal filter
; I(n=[0:1:(M-1
m=n-(M-1)/2+eps;  %eps is the smallest value to avoid division by zero
hd1=sin(pi*m)./(pi*m); hd2=sin(wc1*m)./(pi*m);
; (hd3=sin(wc2*m)./(pi*m
; hd=hd1+hd2-hd3
; ('subplot(2,2,1); stem(m,hd,'k
; ('title('Ideal filter Imp. Response'); xlabel('n'); ylabel('hd[n
; '((beta=0.1102*(As-8.7)+0.3; w_kaiser=(kaiser(M,beta
```

```
; ('subplot(2,2,3); stem(m,w_kaiser,'k
; ('title('Imp. response of Kaiser window'); xlabel('n'); ylabel('w[n
; h=hd.*w_kaiser
; ('subplot(2,2,2); stem(m,h,'k
; ('title('FIR filter actual imp. response');xlabel('n'); ylabel('h[n
; ('w=0:pi/255:pi; h=freqz(h,1,w);set(gcf, 'color', 'white
; (((dB=20*log10(abs(h)/abs(h(1
; subplot(2,2,4); plot(w/pi,dB,'k');grid
; ('title('Frequency response of BSF FIR filter
    ; ('axis([0 1  -100  0 ]);ylabel('Magnetude dB'); xlabel('Normalized w
```



الشكل رقم (٨,١٥). مرشح رقم (٨,٣) المعيق للترددات المتوسطة BSF.

(٨,٥) تصميم المرشحات الرقمية من النوع FIR عن طريق عينة الاستجابة الترددية
Frequency sampling technique

الطريقة الثانية من طرق تصميم المرشحات الرقمية من النوع FIR هي طريقة عينة الاستجابة الترددية. في هذه الطريقة يتم عينة sampling الاستجابة الترددية المثالية أو المحددة $Hd(e^{jw})$ على فترات منتظمة في عدد محدد من النقط مقدارها N على محور التردد كالتالي : $w_k=2\pi k/N$ ، حيث k=0,1,2,...,N-1. هذه النقاط تمثل تحويل فوريير المعينن DFT عددهم N من النقاط H[k] ، والتي يمكن حساب تحويل فوريير المعينن العكسي لها IDFT لحساب استجابة الاندفاع h[n] للمرشح المطلوب تصميمه. كما نعلم فإن الاستجابة الترددية $Hd(e^{jw})$ عبارة عن دالة دورية في المتغير w تتكرر كل 2π ترتبط باستجابة الصدمة hd[n] بعلاقة تحويل فوريير المعينن وعكسه كما يلي :

$$Hd(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} hd[n]e^{-jw} \qquad (٨,٥٤)$$

$$hd(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Hd(e^{jw})e^{jwn}dw \quad -\infty \le n \le \infty \qquad (٨,٥٥)$$

وعلى ذلك يمكن كتابة المعادلتين التاليتين :

$$H[k] = Hd(e^{jw}) = Hd(e^{-j2\pi kn/N}) \qquad (٨,٥٦)$$

$$h[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H[k]e^{j2\pi kn/N} \qquad (٨,٥٧)$$

دالة الانتقال H(z) للمرشح الناتج يمكن الحصول عليها بدلالة H(k) كما يلي :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] z^{-n} \qquad (٨,٥٨)$$

بالتعويض من المعادلة رقم (٨,٥٧) في المعادلة رقم (٨,٥٨) نحصل على:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{j2\pi kn/N} z^{-n} \qquad (٨,٥٩)$$

والتي يمكن كتابتها في النهاية وبعد القليل من الاختصارات كما يلي:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{1 - e^{j2\pi kn/N} z^{-n}} \qquad (٨,٦٠)$$

وعلى دائرة الوحدة في المستوى z المركب يمكن كتابة المعادلة السابقة كما يلي:

$$H(e^{jw}) = \frac{e^{-jw(N-1)/2}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] \frac{\sin\left(\frac{wN - 2\pi k}{2}\right)}{\sin\left(\frac{wN - 2\pi k}{2N}\right)} e^{j2\pi k(N-1)/N} \qquad (٨,٦١)$$

هذه المعادلة تمثل الاستجابة الترددية للمرشح المطلوب تصميمه بهذه الطريقة. في هذه المعادلة لو عوضنا بالقيم $w=2\pi k/N$ في المعادلة رقم (٨,٦١) سنحصل على قيم الاستجابة الترددية عند نقاط العينة بالضبط وأما قيمة الاستجابة فيما بين نقاط العينة فإنها تحسب بنفس المعادلة رقم (٨,٦١).

المثال رقم (٨,٤) : تصميم المرشح الرقمي في المثال رقم (٨,١) بطريقة عينة الاستجابة الترددية بالمواصفات التالية:

تردد حافة مجال المرور $wp=0.2\pi$ ، وتردد حافة مجال الوقف $ws=0.3\pi$ والتموجات ripples في مقدار الاستجابة في مجال المرور $Rp=0.25dB$ وأقصى مقدار

للاستجابة في مجال الوقف As=50dB .

سنفترض عيننة الاستجابة الترددية للمرشح المثالي باستخدام ٢٠ نقطة عيننة، ولذلك فإن النقطة wp=0.2π ستكون عند k=2 (لأن 2πk/20=0.2 عندما k=2) وكذلك النقطة ws=0.3π ستكون عند k=3. البرنامج التالى سيرسم الاستجابة الترددية ويوقع عليها نقاط التقسيم كما في الشكل رقم (٨,١٦أ). وهي تمثل الخطوة الأولى في التصميم بهذه الطريقة. الخطوة الثانية يتم فيها حساب استجابة الاندفاع للمرشح المطلوب. استجابة الاندفاع هي تحويل فورير العكسي للاستجابة الترددية التى حصلنا عليها في الخطوة الأولى والتي يمثلها المتغير hsamples في البرنامج بعد ضربه في زاوية الطور لكل نقطة والتي يمكن أخذها من المعادلة رقم (٨,٦١) والشكل رقم (٨,١٦ب) يبين استجابة الصدمة التي حصلنا عليها بناء على خطوات البرنامج. بذلك يمكن حساب الاستجابة الترددية ومقدارها من استجابة الاندفاع كما في باقي البرنامج والشكل رقم (٨,١٥ج) و رقم (٨,١٥د).

```
%Design a LPF, FIR filter using freq. Sampling tech. example 8-4
wp=0.2*pi; ws=0.3*pi; Rp=0.25; As=50;
M=20; samples=0:M-1; wsamples=(2*pi/M)*samples;
hsamples=[1,1,1,zeros(1,15),1,1];  %samples of the ideal LPF from 0 to 2pi
wdl=[0,0.25,0.25,1]; hdr=[1,1,0,0];%to draw solid line
set(gcf, 'color', 'white'); subplot(2,2,1);
plot(wsamples(1:11)/pi,hsamples(1:11),'ok',wdl,hdr);grid;
axis([0,1,-0.1,1.1]); title('Freq. Samples of ideal filter : M=20');
xlabel('Freq. in pi units'); ylabel('Magnitude');
k1=0:floor((M-1)/2); k2=floor((M-1)/2+1):M-1;%index to calculate the
phase
angleH=[-2*pi*((M-1)/2)/M*k1,2*pi*((M-1)/2)/M*(M-k2)];
H=hsamples.*exp(j*angleH);%This represent DFT of the imp. response
hi=real(ifft(H,M));
subplot(2,2,2);stem(samples,hi,'k');axis([-1,M,-0.1,0.3]);
title('Impulse response of desired filter');
xlabel('n');ylabel('h[n]');
w=0:pi/255:pi; h=freqz(hi,1,w);subplot(2,2,3);
```

```
plot(w/pi,abs(h),'k',wsamples(1:11)/pi,hsamples(1:11),'ok');grid;
title('Magnitude of freq. respons');
axis([0,1,-0.2,1.2]);xlabel('Freq. in pi units');ylabel('H(w)');
dB=20*log10(abs(h)/abs(h(1)));
subplot(2,2,4); plot(w/pi,dB,'k');grid;axis([0,1,-60,0]);
title('Frequency response dB'); xlabel('frequency in pi units');
ylabel('dB');
```

من الشكل رقم (٨,١٦د) نلاحظ أن أعلى اضمحلال في مجال الوقف حوالي 16dB وهذا بعيد جدا من القيمة المطلوبة وهي 50dB ولذلك فإن المطلوب من المرشح لم يتحقق بهذه الطريقة. لكي نحقق المطلوب فإن التفكير المنطقي هو أن نزيد قيمة M التي تمثل عدد نقاط العينة، ولكن المشكلة في ذلك هي أنه في هذه الحالة قد تقع بعض نقاط العينة في مجال الانتقال transition band مما سيضيف مجال مرور لم يكن موجوداً أصلاً في المرشح المثالي المفروض. لاحظ في المثال رقم (٨,٤) وبفرض M=20 كانت هناك نقطة تماما عند نهاية مجال السماح wp=0.2π ونقطة أخرى عند بداية مجال الوقف ws=0.3π. لذلك كان الاقتراح بألا نفترض أن مجال الانتقال منعدم أو صفر ولكننا سنفترض قيمة لمجال الانتقال وسنفترض فيه عدداً معيناً من النقاط وقيمة الاضمحلال عند هذه النقاط ستكون افتراضية بحيث أن عدد النقاط والاضمحلال عند كل نقطة ستكون متغيرات يمكن تغيرها للحصول على مرشح بأحسن الإمكانيات . المثال التالي سيوضح هذه الطريقة.

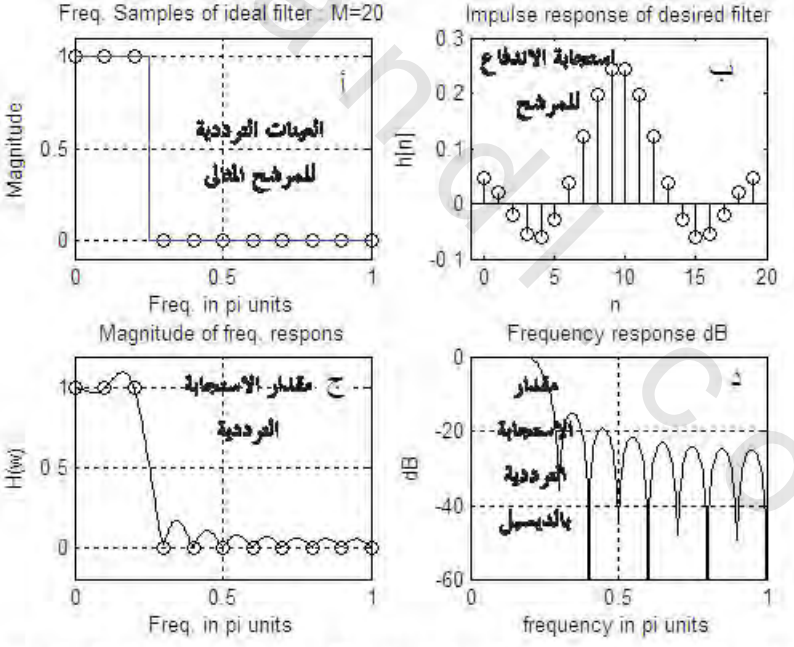
المثال رقم (٨,٥): لكي نوضح هذه الطريقة سنعيد تصميم المرشح في المثال السابق رقم (٨,٤) ولكن باستخدام عدد من نقاط العينة M=40 بدلاً من M=20. أقل مسافة بين نقطتين عينة متتاليتين ستكون 2π/40=0.05π مما يعني وجود نقطة عينة واحدة في مجال الانتقال 0.2π < w < 0.3π وهذه النقطة سيكون النقطة رقم خمسة، ولو نظرنا للاستجابة الكلية فهذه النقطة ستكون لها نظير عند النقطة رقم ٣٥ نظراً لتماثل

الاستجابة في المجال الترددي $< \pi > w < 0$ و $2\pi > w > \pi$. قيمة الاضمحلال عند النقطة ٥ و ٣٥ سنغيرها إلى أن نحصل على أحسن تصميم، وبذلك يمكن كتابة قيمة الاستجابة الترددية عند نقاط العينة الأربعين كما يلي:

Hr[k]=[1, 1, 1, 1, 1, T, 0,..29 zeros,..,0, T, 1, 1, 1, 1]

حيث Hr[k] ستمثل بالطبع كما عرفنا مقدار تحويل فوريير DFT لاستجابة الاندفاع للمرشح المطلوب تصميمه. زاوية الطور عند عند كل نقطة ستعطى بالمعادلة التالية كما رأينا سابقاً:

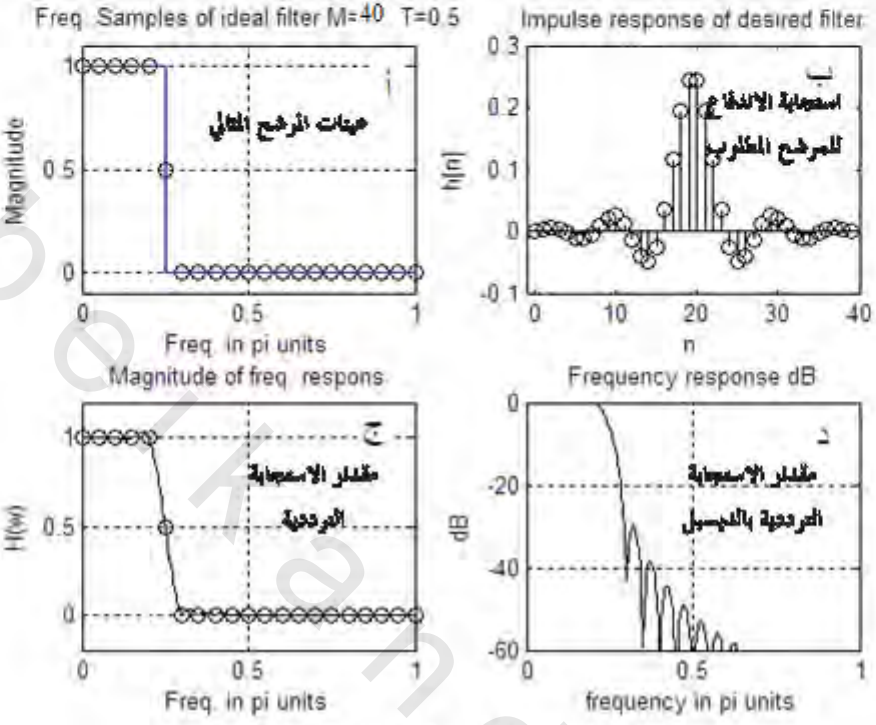
$$AngH[k] = \begin{cases} -\frac{M-1}{2}\frac{2\pi k}{M} = -0.975\,\pi k & 0 \le k \le 19 \\ \frac{M-1}{2}\frac{2\pi(M-k)}{M} = 0.975\,(40-k) & 20 \le k \le 39 \end{cases}$$



الشكل رقم (٨,١٦). تصميم مرشح رقمي باستخدام طريقة عينة الاستجابة الترددية مثال رقم (٨,٤).

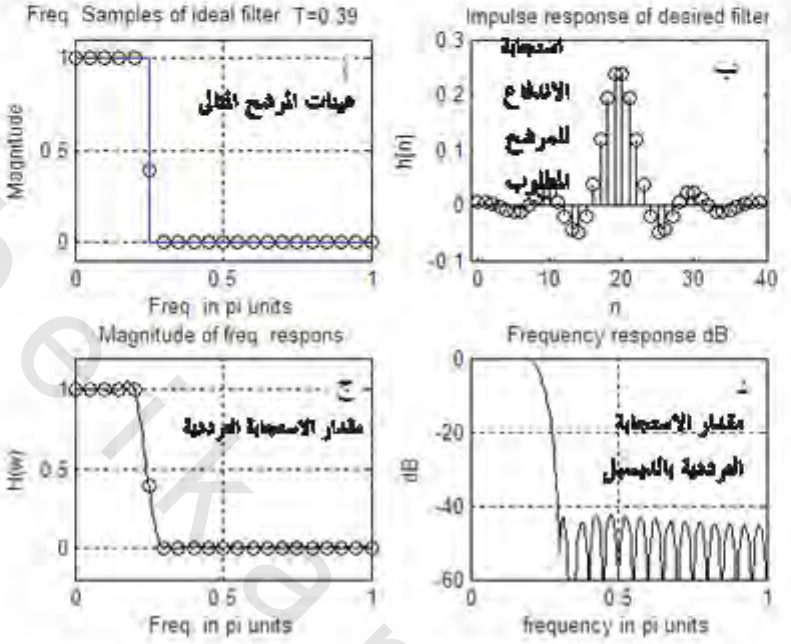
في أول محاولة للتصميم سنفترض T=0.5 وسنبدأ في تصميم المرشح بنفس الطريقة السابقة حيث سنحسب تحويل فوريير العكسي IDFT لنقاط العينة ومنها سنحسب الاستجابة الترددية للمرشح الناتج كما في البرنامج التالي والذي هو تعديل بسيط لبرنامج المثال رقم (٨,٤). الشكل رقم (٨,١٧) يبين نتيجة هذا التصميم حيث بالمقارنة بالشكل رقم (٨,١٦) نلاحظ أن أعلى اضمحلال في مجال الوقف أصبح حوالى 30dB بدلاً من ١٦ كما في الشكل رقم (٨,١٦).

```
%Design a LPF, FIR filter using freq. Sampling tech. adding transition band
example 8-5
wp=0.2*pi; ws=0.3*pi; Rp=0.25; As=50;
M=40; samples=0:M-1; wsamples=(2*pi/M)*samples;
hsamples=[ones(1,5),0.5,zeros(1,29),0.5,ones(1,4)];  %samples of the ideal
LPF from 0 to 2pi
wdl=[0,0.25,0.25,1]; hdr=[1,1,0,0];%to draw solid line
set(gcf, 'color', 'white'); subplot(2,2,1);
plot(wsamples(1:21)/pi,hsamples(1:21),'ok',wdl,hdr);grid;
axis([0,1,-0.1,1.1]);
title('Freq. Samples of ideal filter M=40, T=0.5');
xlabel('Freq. in pi units'); ylabel('Magnitude');
k1=0:floor((M-1)/2); k2=floor((M-1)/2+1):M-1;
%index to calculate the phase
angleH=[-2*pi*((M-1)/2)/M*k1,2*pi*((M-1)/2)/M*(M-k2)];
H=hsamples.*exp(j*angleH);%This represent DFT of the imp. response
hi=real(ifft(H,M));
subplot(2,2,2);stem(samples,hi,'k');axis([-1,M,-0.1,0.3]);
title('Impulse response of desired filter');xlabel('n');ylabel('h[n]');
w=0:pi/255:pi; h=freqz(hi,1,w);subplot(2,2,3);
plot(w/pi,abs(h),'k',wsamples(1:21)/pi,hsamples(1:21),'ok');grid;
title('Magnitude of freq. respons');
axis([0,1,-0.2,1.2]);xlabel('Freq. in pi units');ylabel('H(w)');
dB=20*log10(abs(h)/abs(h(1)));subplot(2,2,4); plot(w/pi,dB,'k');grid;
axis([0,1,-60,0]);title('Frequency response dB');
xlabel('frequency in pi units'); ylabel('dB');
```



الشكل رقم (٨,١٧). مرشح المثال رقم (٨,٥).

المثال رقم (٨,٦): لكي نرى كيف أن قيمة الاضمحلال عند النقطة الموجودة في مجال الانتقال يكون لها أثر كبير في نتيجة تصميم المرشح فإنه بعد العديد من المحاولات بقيم مختلفة للمتغير T في البرنامج السابق فإن أحسن قيمة تم افتراضها كانت T=0.39 حيث يبين الشكل رقم (٨,١٨). نتيجة هذا التصميم وكيف أن أكبر اضمحلال في مجال الوقف تغير من 30dB إلى 43dB ، ولن نعيد كتابة البرنامج مرة أخرى.

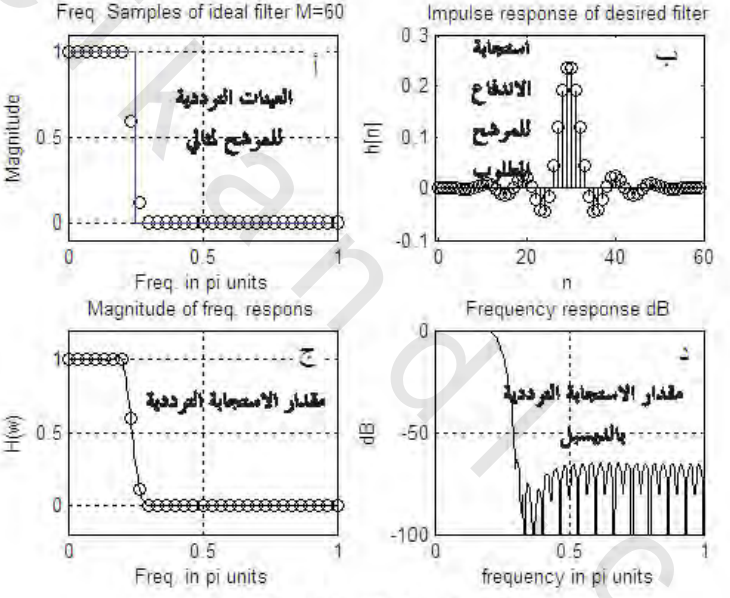


الشكل رقم (٨,١٨)- المثال رقم (٨,٦).

المثال رقم (٨.٧) : لقد رأينا كيف أن إضافة نقطة واحدة في مجال الانتقال حسنت من أداء المرشح ولكن كان على حساب اتساع مجال الانتقال وكما نعلم فإن هذا شيء غير مرغوب فيه. ولذلك أصبحت المشكلة التي تواجه الباحثين في هذا المجال هي الاختيار بين اتساع مجال الانتقال وفرض أكثر من نقطة فيه وبين الحصول على أداء أفضل للمرشح.

لاحظ أن التصميم أصبح الآن أكثر تعقيداً حيث إن عدد النقاط في مجال الانتقال، وقيمة الاضمحلال عند كل نقطة أصبحت كلها متغيرات يتم تغيرها ومحاولة أكثر من قيمة لكل منها حتى نحصل على أفضل تصميم. أفضل من تصدى لهذه المشكلة كان رابينر Rabiner والذي قام بوضع جداول تبين عدد النقاط المفروض

وأحسن اضمحلال يمكن فرضه عند كل نقطة ونحن هنا سنعيد المثال رقم (٨.٦). ولكن بفرض عدد نقاط ٦٠ نقطة بدلاً من ٤٠ حتى يكون هناك نقطتان في داخل مجال الانتقال. سنقوم بتعديل برنامج المثال رقم (٨.٦) على هذا الوضع وسنعرض هنا الخطوات التي تم تعديلها فقط في البرنامج، وقيمة الاضمحلال عند النقطتين سيتم أخذهما من ملحق مرجع رابينر حيث اضمحلال النقطة الأولى سيكون 0.5925 والاضمحلال عند النقطة الثانية سيكون 0.1099 كما في الشكل رقم (٨.١٩).



الشكل رقم (٨.١٩). المثال رقم (٨.٧).

```
M=60; samples=0:M-1; wsamples=(2*pi/M)*samples;
hsamples=[ones(1,7),0.5925,0.1099,zeros(1,43),0.1099,0.5925,ones(1,6)];
%samples of the ideal LPF from 0 to 2pi
```

بنفس الطريقة يمكن تصميم أي نوع من أنواع المرشحات BPF أو BSF أو HPF.

(٨,٦) تصميم المرشحات FIR مباشرة باستخدام MATLAB

برنامج MATLAB غني بالدوال التي يمكن استخدامها مباشرة في تصميم المرشحات من النوع FIR والتي لابد من الإشارة إليها في هذا الجزء بعد أن فهمنا القواعد الأساسية في تصميم هذا النوع من المرشحات وبالذات طريقة النوافذ.

(٨,٦,١) الدالة FIR1 ( )

الصورة العامة لهذه الدالة هي b=fir1(N, wn) حيث تقوم هذه الدالة بتصميم مرشح رقمي من النوع FIR المنفذ للترددات المنخفضة LPF والذي درجته N حيث تعطي هذه الدالة معاملات المرشح والتي تمثل استجابة الصدمة له بطول N+1 في المتجه b. تردد القطع لهذا المرشح cutoff frequency هى wn حيث 0<wn<π و π تمثل نصف معدل العينة sampling rate. معامل التكبير عند wn يساوي ٦dB. الطريقة المستخدمة هنا هي طريقة النوافذ كما درسناها.

(٨,٦,٢) الدالة b=fir1(N,wn,'high ')

تصمم مرشح رقمي FIR منفذ للترددات العالية HPF، لاحظ في حالة عدم كتابة نوع المرشح LPF أو HPF فإنه يعد أنه LPF، ولذلك فإن الصورة b=fir1(N,wn,'low ') تعد صحيحة مثل الصورة الأولى.

في حالة وضع $wn=[w_1,w_2]$ فإن كتابة الدالة على الصورة b=fir1(N,wn,'bandpass') ستصمم مرشحاً رقمياً من النوع FIR المنفذ للترددات المتوسطة BPF حيث سيكون مجال السماح أو المرور محدداً بـ $w_1 < w < w_2$. أما في حالة كتابة الدالة على الصورة b=fir1(N,wn,'stop') فإنها ستصمم مرشحاً رقمياً من النوع FIR المانع للترددات المتوسطة BSF حيث سيكون مجال المنع أو الوقف محدداً بـ $w_1 < w < w_2$.

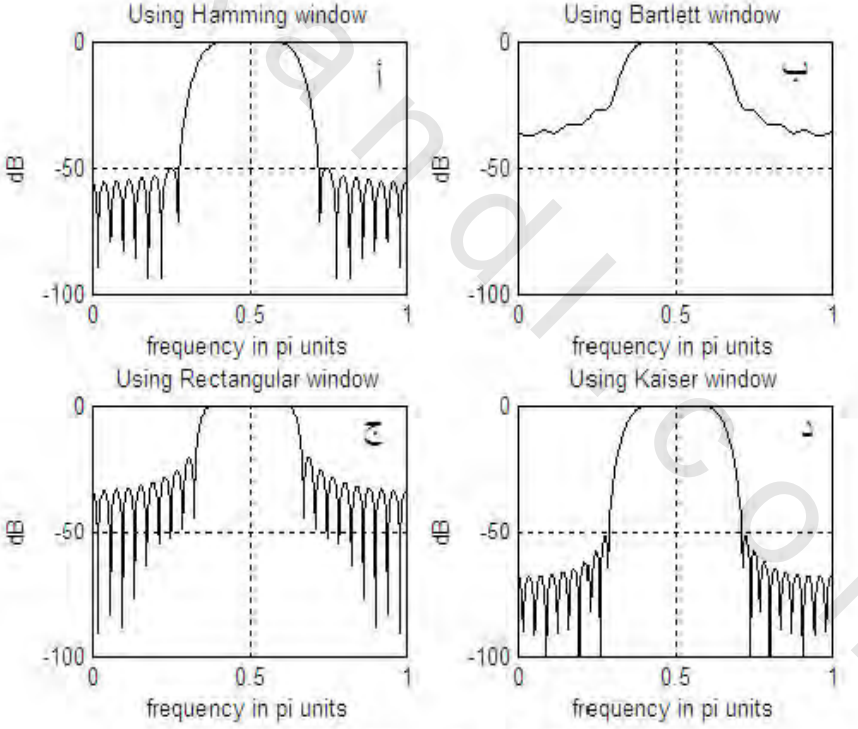
يمكن تصميم مرشح بأكثر من مجال للسماح وأكثر من مجال للوقف حيث في هذه الحالة يتم تعريف wn كالتالي : $wn = [w_1, w_2, w_3, \ldots, w_m]$ حيث المجال الأول هو $0 < w < w_1$ والمجال الثاني $w_1 < w < w_2$ وهكذا حتى المجال $w_m < w < \pi$. في هذه الحالة إذا كتبنا المعادلة على الصورة b = fir1(N,wn,'DC-1') فإنه سيصمم مرشح رقمي متعدد المجالات بحيث أول مجال هو مجال مرور والتالي وقف وهكذا. أما إذا كتبنا b=fir1(N,wn,'DC-0') فإنه سيصمم مرشحاً رقمياً متعدد المجالات بحيث يكون أول مجال عبارة عن مجال وقف والتالي مجال سماح وهكذا.

في كل صور الدالة السابقة التي لم يذكر فيها اسم النافذة المستخدمة تكون النافذة الافتراضية هي نافذة هامنج Hamming window. يمكن كتابة الدالة السابقة مع النص على نوع النافذة التي يجب استخدامها كالتالي : b = fir1(N,wn,window) حيث window هي متجه عمود يمثل معاملات النافذة المطلوبة ويجب أن يكون طولها N+1. هذه الدالة تسمح بالتعامل مع كثير من النوافذ ومنها النوافذ Hamming, Blackman, Kaiser, Bartlett والكثير من النوافذ الأخرى التي يمكن مراجعتها من مساعد MATLAB.

المثال رقم (٨,٨) : صمم مرشح رقمي من النوع FIR المنفذ للترددات المتوسطة BPF ومجال السماح هو : $0.35 < w < 0.65$. استخدم الدالة fir1 مع أى أربع نوافذ تختارها. الشكل رقم (٨,٢٠) يبين نتيجة هذا التصميم ونوع النوافذ المختلفة والبرنامج المستخدم كما يلي :

```
%example 8-8 variations of the fir1( )function
b3 = fir1(48,[0.35 0.65],rectwin(49));
b4 = fir1(48,[0.35 0.65],kaiser(49,4.55));w=0:pi/512:pi;
h1=freqz(b1,1,w);h2=freqz(b2,1,w);h3=freqz(b3,1,w);h4=freqz(b4
,1,w);
dB1=20*log10(abs(h1)/abs(h1(255)));
```

```
set(gcf, 'color', 'white');
subplot(2,2,1); plot(w/pi,dB1,'k');grid;axis([0,1,-100,0]);
title('Using Hamming window'); xlabel('frequency in pi units');
ylabel('dB');
dB2=20*log10(abs(h2)/abs(h2(255)));
subplot(2,2,2); plot(w/pi,dB2,'k');grid;axis([0,1,-100,0]);
title('Using Bartlett window'); xlabel('frequency in pi units');
ylabel('dB');
dB3=20*log10(abs(h3)/abs(h3(255)));
subplot(2,2,3); plot(w/pi,dB3,'k');grid;axis([0,1,-100,0]);
title('Using Rectangular window'); xlabel('frequency in pi units');
ylabel('dB');
dB4=20*log10(abs(h4)/abs(h4(255)));
subplot(2,2,4); plot(w/pi,dB4,'k');grid;axis([0,1,-100,0]);
title('Using Kaiser window'); xlabel('frequency in pi units');
ylabel('dB');
```



الشكل رقم (٨,٢٠). المثال رقم (٨,٨).

(٨,٦,٣) الدالة FIR2 ( )

هذه الدالة تصمم مرشحاً رقمياً من النوع FIR مثل الدالة fir1 ( ) غير أن الطريقة المستخدمة هنا هي طريقة عيننة الاستجابة الترددية التي سبق شرحها أيضاً. هذه الدالة أيضاً لها أكثر من صورة عامة كالتالي:

```
b = fir2(n,f,m)
b = fir2(n,f,m,window)
```

١- حيث b هو متجه يحتوي n+1 من المعاملات تمثل استجابة الاندفاع للمرشح FIR الذي درجته هي n التي يجب أن تكون زوجية.

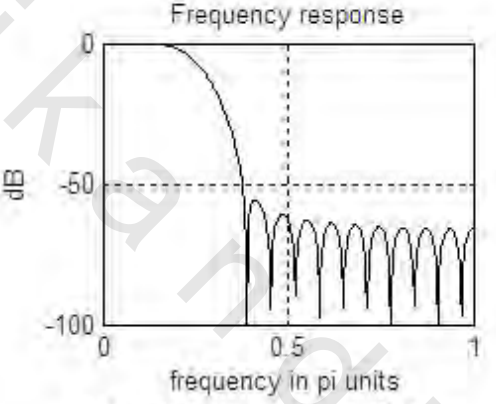
٢- f هو متجه نقاط التردد التي يتم عندها العيننة، وقيمها تتراوح من 0 إلى 1 بطريقة تصاعدية حيث الواحد يمثل نصف تردد العيننة.

٣- m هي متجه يحتوي قيمة الاستجابة الترددية عند نقاط التردد المحددة بالمتجه f.

٤- window هي النافذة التي يتم بها أخذ الاستجابة الترددية للمرشح بعد حساب ال ifft. هذه النافذة يمكن ذكرها كما ذكرناها مع الدالة fir1 ( )، وإن لم يتم ذكرها فإنها تؤخذ تلقائياً على أنها نافذة هامنج.

المثال رقم (٨,٩): في هذا المثال سنصمم مرشحاً رقمياً باستخدام الدالة fir2 ( ) وسنفترض ٣٠ نقطة تقسيم، أما قيمة الاستجابة عند كل نقطة تقسيم والتي ستمثل المتجه m سنأخذها من المثال رقم (٨,٧) كما في البرنامج التالي والشكل رقم (٨,٢١) الذي يبين نتيجة تنفيذ هذا البرنامج.

```
%example 8-9
n=30; samples=0:n-1; f=(1/(n-1))*samples;
m=[ones(1,7),0.5925,0.1099,zeros(1,21)]; %samples of the ideal LPF
from 0 to pi
set(gcf, 'color', 'white'); w=0:pi/512:pi;
b=fir2(n,f,m); h=freqz(b,1,w);
dB1=20*log10(abs(h)/abs(h(1)));
subplot(2,2,1); plot(w/pi,dB1,'k');grid; axis([0,1,-100,0]);
title('Frequency response'); xlabel('frequency in pi units');
ylabel('dB');
```

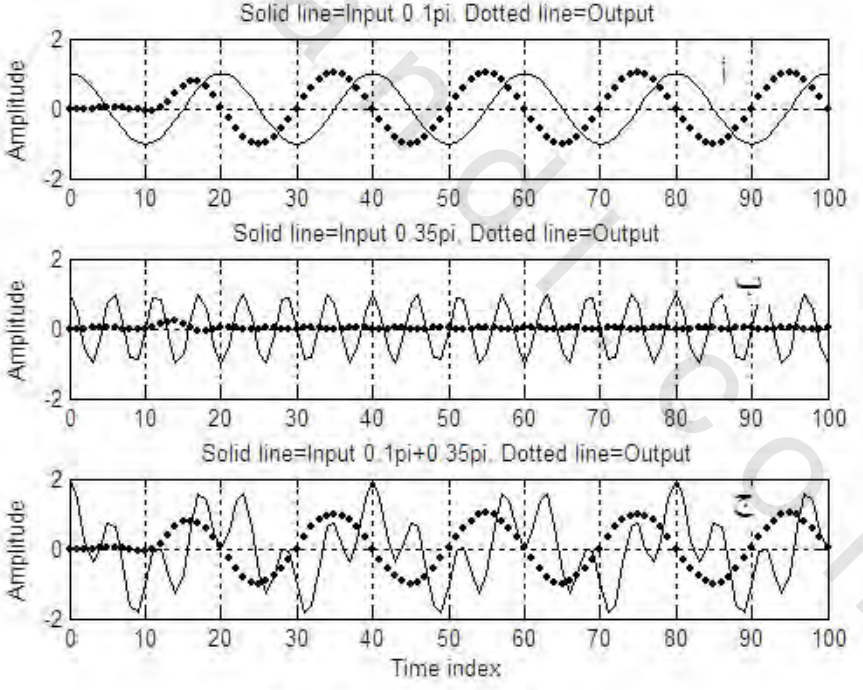


الشكل رقم (٨,٢١). المثال رقم (٨,٩).

(٨,٦,٤) الدالة Filter ( )

الصورة العامة لهذه الدالة هي : y = filter(b,a,X) حيث تقوم بترشيح البيانات X باستخدام المرشح الذي معاملاته هي كل b و a، حيث b هي معاملات كثيرة حدود البسط للمرشح، و a هي معاملات كثيرة حدود المقام. a من الممكن أن تساوي واحداً وفي هذه الحالة سيكون المرشح من النوع FIR وإذا اختلفت عن الواحد (بحيث لا تساوي الصفر) فسيكون المرشح من النوع IIR. نتيجة تطبيق المرشح على البيانات X ستوضع في المتجه y ، أي أن y ستمثل خرج المرشح بينما X هي الدخل.

المثال رقم (٨.١٠): في هذا المثال سنفترض المثال الذي سبق تصميمه في المثال رقم (٨.٩) وسندخل له إشارة جيبية ذات تردد في مجال السماح $w=0.1\pi$ كما في الشكل رقم (٨.٢٢أ) ونلاحظ أنها خرجت من المرشح كما هي من حيث المقدار غير أن هناك إزاحة في زاوية الطور بين الخرج والدخل. في الشكل رقم (٨.٢٢ب) أدخلنا إشارة ذات تردد خارج مجال السماح $w=0.35\pi$ حيث نلاحظ أنها اضمحلت بدرجة كبيرة، وفي الشكل رقم رقم (٨.٢٢ج) أدخلنا مجموع الإشارتين السابقتين فكانت النتيجة مرور الإشارة الأولى فقط وأما الثانية فقد اضمحلت إلى الصفر تقريباً. البرنامج التالي يوضح ذلك.



الشكل رقم (٨.٢٢). المثال رقم (٨.١٠).

```
%example 8-10
n=30; samples=0:n-1; f=(1/(n-1))*samples;
m=[ones(1,7),0.5925,0.1099,zeros(1,21)];  %samples of the ideal LPF
from 0 to pi
set(gcf, 'color', 'white');
w=0:pi/512:pi;  b=fir2(n,f,m);
n=0:1:100; x1=cos(0.1*pi*n); x2=cos(0.35*pi*n); y=filter(b,1,x1);
subplot(3,1,1); plot(n,x1,'-k',n,y,':k');axis([0,100,-2,2]);grid;
ylabel('Amplitude'); title('Solid line=Input 0.1pi, Dotted line=Output');
y=filter(b,1,x2); subplot(3,1,2);
plot(n,x2,'k',n,y,':k');axis([0,100,-2,2]);grid; y=filter(b,1,x1+x2);
ylabel('Amplitude');
title('Solid line=Input 0.35pi, Dotted line=Output'); subplot(3,1,3);
plot(n,x1+x2,'k',n,y,':k');axis([0,100,-2,2]);grid; ylabel('Amplitude');
xlabel('Time index');
title('Solid line=Input 0.1pi+0.35pi, Dotted line=Output');
```

في نهاية هذا الفصل نود أن نشير هنا أننا اكتفينا فقط بشرح طريقتين من طرق تصميم المرشحات الرقمية من النوع FIR على أنه هناك طرق أخرى لا يتسع مجال هذا الكتاب لشرحها ومن يريد الاستزادة منها فعليه الرجوع إلى مراجع هذا الكتاب. هذه الطرق الأخرى ممثلة أيضا بدوال في برنامج MATLAB بحيث يمكن التعامل المباشر معها.

(٨,٧) تمارين

١- مرشح غير تكراري nonrecursive له دالة الانتقال التالية:

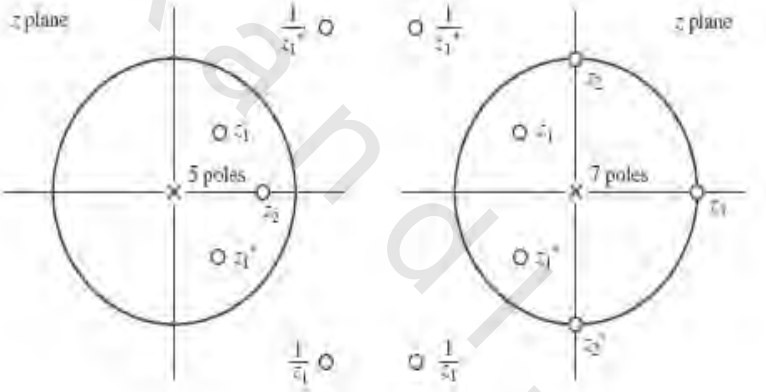
$$H(z) = \frac{1 + 2z + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 3z^{-4} + 2z^{-5} + z^{-6}}{z^{-6}}$$

احسب تأخير المجموعة group delay لهذا المرشح ، وهل هذا المرشح خطي؟ في أي نوع من التماثل تقع هذه الدالة؟

٢- أعد تمرين رقم ١ لدالة الانتقال التالية :

$$H(z) = \frac{1 - 2z + 3z^{-2} - 4z^{-3} + 3z^{-4} - 2z^{-5} + z^{-6}}{z^{-6}}$$

٣- الشكل رقم (٨,٣ت) يبين المستوى z لمرشحين ، اختبر الطور لكل من المرشحين :



الشكل رقم (٨,٣). المستوى z لمرشحين.

٤- افترض أن استجابة الصدمة لمرشح من النوع FIR هي h[n]=[1,1,1]، احسب استجابة المقدار والطور للمرشح ووضح أن المرشح سيكون خطي الطور.

٥- افترض أن استجابة الصدمة لمرشح خطي ثابتاً زمنياً time invariant تعطى

بالعلاقة التالية :

$$h[n]=a^n u[n]$$

وضح أن الخرج الناتج من دخل عبارة عن وحدة الخطوة unit step سيعطى بالعلاقة التالية :

$$y[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \quad n \geq 0$$

٦- افترض أن الاستجابة h[n] لها خاصية التماثل التالية : h[n]=h[-n] لكل n=0,1,...M وضح أن H(w) يمكن كتابتها على الصورة :

$$H(w) = h[0] + \sum_{n=1}^{M} 2h[n]\cos(wn)$$

٧- صمم مرشح منفذ للترددات المنخفضة من النوع FIR طوله L=5 وزاوية طور خطية ليحاكي مرشحاً مثالياً بتردد قطع $w_c=1$. استخدم نافذة هامنج .

٨- افترض استجابة الصدمة لمرشحات من النوع FIR كما يلي :

h[n]=[-4,1,-1,-2,5,0,-5,2,1,-1,4] (a)
h[n]=[-4,1,-1,-2,5,6,5,-2,-1,1,-4] (b)

استخدم الماتلاب لرسم مقدار الاستجابة والطور ، وكذلك مواضع الأصفار لدالة الانتقال للمرشحات H(z) .

٩- ارسم مقدار الاستجابة لمرشح خطي منفذ للترددات العالية من النوع FIR وتردد القطع $w_c=0.6\pi$ عن طريق قطع الاستجابة الترددية لمرشح مثالي منفذ للترددات العالية بطول L=2M+1 حيث M=32 مرة و M=64 مرة أخرى .

١٠- أعد المسألة السابقة مستخدماً نافذة هامنج مرة ونافذة بلاكمان مرة أخرى وقارن.

١١- استخدم نافذة كيزر لتصميم مرشح منفذ للترددات العالية بالمواصفات التالية :

$$w_s=0.4\pi,\quad A_s=60dB,\quad w_p=0.6\pi,\quad R_p=0.5dB$$

ارسم استجابة الصدمة ومقدار الاستجابة الترددية بالديسبل لهذا المرشح .

١٢- استخدم نافذة هامنج لتصميم مرشح منفذ لمجال متوسط من الترددات BPF بالمواصفات التالية :

$$w_{s1}=0.3\pi,\ w_{s2}=0.6\pi,\quad A_s=50dB,\quad w_{p1}=0.4\pi,\ w_{p2}=0.5\pi,\quad R_p=0.5dB$$

ارسم استجابة الصدمة ومقدار الاستجابة الترددية بالديسبل لهذا المرشح .

١٣- استخدم نافذة هامنج لتصميم مرشح مانع لمجال متوسط من الترددات BSF بالمواصفات التالية :

$$w_{s1}=0.4\pi,\ w_{s2}=0.6\pi,\quad A_s=40dB,\quad w_{p1}=0.3\pi,\ w_{p2}=0.7\pi,\quad R_p=0.5dB$$

ارسم استجابة الصدمة ومقدار الاستجابة الترددية بالديسبل لهذا المرشح .

١٤- صمم مرشح من النوع FIR بالمواصفات التالية :

$$H(w)=\begin{cases}1 & \text{for } 2.5 \le |w| \le 5\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}\\ 0 & \text{for } |w| < 2.5\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}\end{cases}$$

استخدم النافذة المستطيلة بفرض أن $w_s=10rad/s$ و $N=11$.

١٥- أعد التمرين رقم (١٤) بفرض أن $N=21$ مرة و $N=31$ مرة أخرى وقارن النتائج .

١٦- أعد التمرين رقم (١١) مستخدماً النوافذ هامنج وهاننج وبلاكمان بفرض $N=21$ وقارن النتائج .