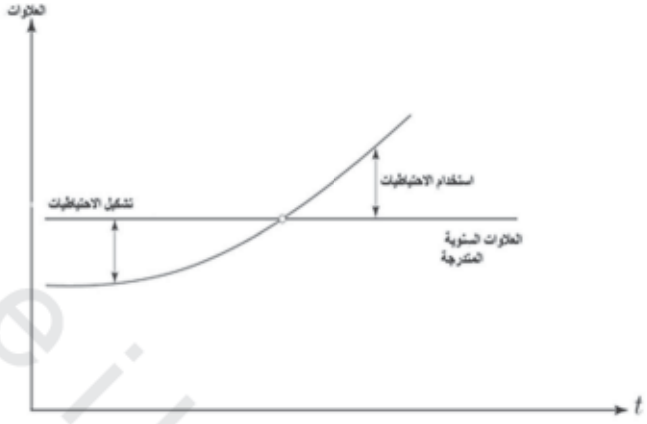
احتياطات رياضية

Rèserves Mathèmatiques

عند التعاقد بين مؤسسة تأمينات وأحد عملائها فإن مبدأ المعادلة الفردية ينص على وجوب معادلة القيمة الحالية للمستحقات (الخدمات المقدمة من المؤسسة) مع القيمة الحالية للمدفوعات (العلاوة التي يسددها العميل للشركة). ونفقد هذه العلاقة مباشرة مع دخول التأمين حيز التنفيذ. عندئذ لا يوجد تعادل بين العلاوات السنوية والخطورة السنوية، حيث يدفع صاحب بوليصة التأمين نفس العلاوات المتدرجة طيلة مدة العقد بينما يتعرض هذا الأخير إلى تطور غير محسوب لمخاطر الصرف من قبل المؤمن. في هذه الحالة واعتبارا لهذا الفارق الذي يفصل بين المؤمن والمؤمن له فإن المؤمن مطالب بتكوين احتياطي رياضي يسمى كذلك كفالة التغطية. ويسعى المؤمن من خلاله إلى تنفيذ جميع التزاماته المستقبلية. فهو يقوم –إذن– بدور إحمائي. وتوجد شروط قانونية عند إنشاء شركات التأمين تتعلق باستثمار الاحتياطي الرياضي مما يجعل من هذه الاستثمارات وسيلة لضمان الملاءمة (القدرة على الاستيفاء بالتعهدات).



الرمز:

${}_tV_x$:احتياطي رياضي على علاوة صافية في الزمن t .

يمكن حساب الاحتياطي الرياضي باستخدام "الطريقة الاستكشافية". وهو يساوي القيمة الحالية للمصروفات المستقبلية بعد طرح القيمة الحالية للعائدات المستقبلية، أي يمكن أن يكتب على النحو التالي:

$$\boxed{{}_tV_x = \text{القيمة الحالية للمصروفات المستقبلية} - \text{القيمة الحالية للعلاوات المستقبلية}} \qquad (13.1)$$

لنحاول من خلال المثال الآتي فهم مبدأ الاحتياطي الرياضي:

مثال: ليكن لدينا عقد تأميني يستوجب تسديد العلاوات السنوية طيلة 5 سنوات. يستحق المؤمن له الذي يبلغ من العمر 40 سنة من خلال هذا العقد رأس مال يقدر بـ €1000 إذا بقي على قيد الحياة بعد 10 سنوات. احسب باستخدام التبديلات المرفقة بالملحق الاحتياطي الرياضي الذي يسبق مباشرة العلاوة الثالثة وذلك بافتراض ما يلي:

(أ) الفائدة و الوفيات لا تندرجان ضمن العمليات الحسابية.

(ب) الفائدة فقط ونسبتها 3% هي التي تندرج ضمن العمليات الحسابية.

(جـ) الفائدة والوفيات تندرجان ضمن العمليات الحسابية.

الحلول:

الحالات الثلاث يمكن تمثيلها على النحو التالي:

(أ) مبدأ المعادلة : $1'000=5\ AP \Rightarrow 1\ AP = 200€$

وهكذا نحصل مباشرة قبل العلاوة الثالثة على:

القيمة الحالية للعلاوات المستقبلية: $200+200+200 = 600€$

القيمة الحالية للمصروفات المستقبلية:$1'000€$ وبالتالي:

$$_3V_{40} = 1'000 - 600 = 400€$$

(ب) مبدأ المعادلة: $1'000v^{10} = AP\ \ddot{a}_{\overline{5|}}$

$$\Rightarrow AP = \frac{1'000v^{10}}{\ddot{a}_{\overline{5|}}} = 157,74€$$

وهكذا نحصل مباشرة قبل العلاوة الثالثة على:

القيمة الحالية للعلاوات المستقبلية: $AP\ddot{a}_{\overline{5|}} = 459,58€$

القيمة الحالية للمصروفات المستقبلية: $1'000v^7 = 813,09\ €$ وبالتالي:

$$_3V_{40} = 813,09 - 459,58 = 353,51€$$

(جـ) مبدأ المعادلة: $1'000\ {}_{10}E_{40} = AP\ \ddot{a}_{40:\overline{5|}}$

$$\Rightarrow AP = \frac{1'000\ {}_{10}E_{40}}{\ddot{a}_{40:\overline{5|}}} = 154,06\ €$$

وهكذا نحصل مباشرة قبل العلاوة الثالثة على:

القيمة الحالية للعلاوات المستقبلية:$AP\ddot{a}_{42:\overline{3|}} = 447,86€$

القيمة الحالية للمصروفات المستقبلية: $1'000\ {}_8E_{42} = 770,98\ €$ وبالتالي:

$$_3V_{40} = 770,98 - 447,86 = 323,12€$$

oberkanal.com

ملاحظات:

- في بداية التعاقد الاحتياطي الرياضي يساوي صفر؛ لأن المخاطر المستقبلية متساوية مع العلاوات المستقبلية.
- العقود ذات العلاوات الوحيدة (UP) لها احتياطي رياضي ممثل من خلال القيمة الحالية للمصروفات المستقبلية فحسب، حيث إنه لا توجد علاوات للتحصيل في المستقبل.
- وأخيراً فإن العقود التي تتضمن علاوات سنوية يعاد حسابها سنويا (RAP) لا تتطلب احتياطيا رياضيا؛ لأن المعادلة بين العلاوة والمخاطرة المؤمنة تتحقق في كل سنة.

(13.1) احتياطات رياضية لتركيبات كلاسيكية

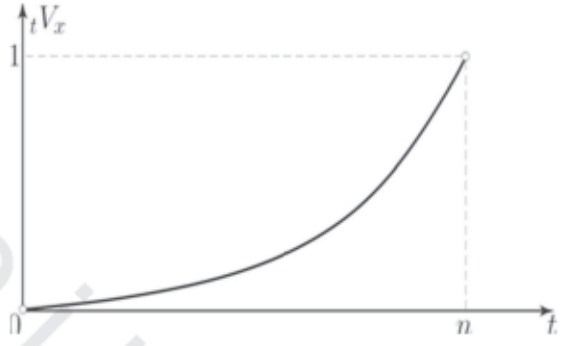
نكتفي في هذه الفقرة بتقديم القواعد المستخرجة من الطريقة الاستكشافية والمطبقة على التركيبات الكلاسيكية للتأمين. لكل تركيبة نقدم رسما بيانيا يوضح التطور في الاحتياطي الرياضي حسب الزمن إلى حين انتهاء فترة التعاقد n.

(13.1.1) رأس مال في حالة البقاء على قيد الحياة لعلاوات سنوية

القاعدة

$$\boxed{{}_tV_x = {}_{n-t}E_{x+t} - AP\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}} \qquad (13.2)$$

الرسم البياني

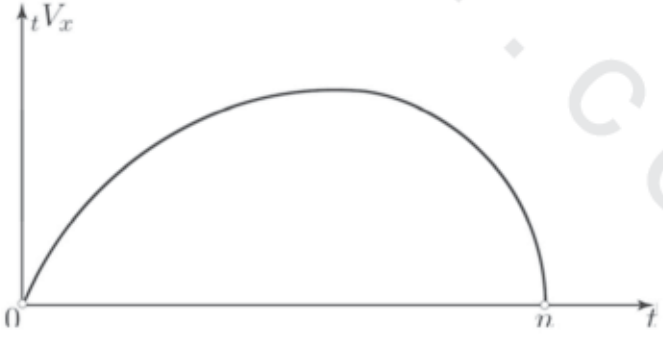


(13.1.2) رأس مال مؤقت عند الوفاة ولعلاوات سنوية

القاعدة

$$ {}_tV_x = {}_{|n-t}A_{x+t} - AP\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \qquad (13.3) $$

الرسم البياني



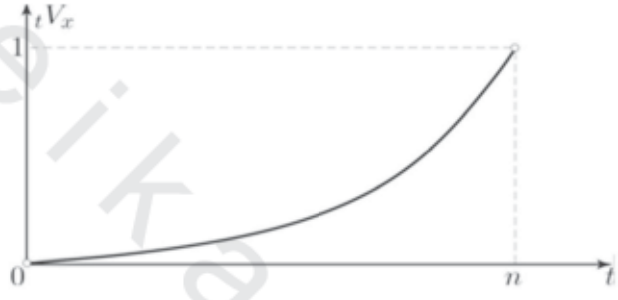
obeikandl.com

(13.1.3) تأمين مختلط لعلاوات سنوية

القاعدة

$$ {}_tV_x = A_{x+t:\overline{n-t}|} - AP\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \qquad (13.4) $$

الرسم البياني

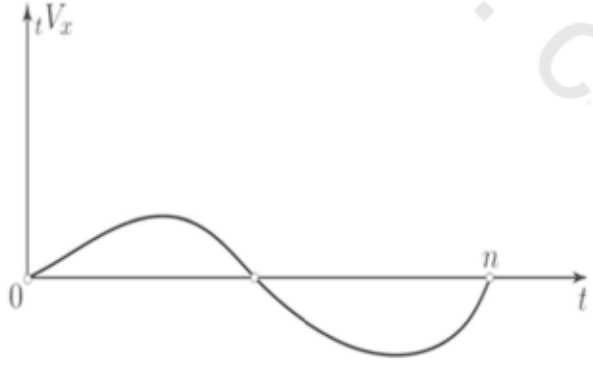


(13.1.4) دخل مؤقت للبقاء على قيد الحياة ولعلاوات سنوية

القاعدة

$$ {}_tV_x = \ddot{a}_{\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{\overline{n}|}\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad (13.5) $$

الرسم البياني



obeikandl.com

(13.1.5) دخل عمري مؤجل لعلاوات سنوية جارية

القواعد

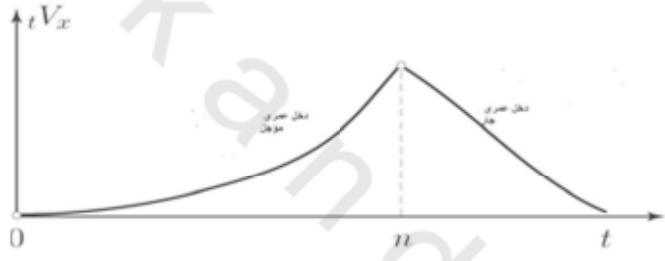
دخل عمري مؤجل

$$ {}_tV_x = {}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t} - AP\ddot{a}_{\overline{x+t:n-t|}} \qquad (13.6) $$

دخل عمري جاري

$$ {}_tV_x = \ddot{a}_{x+t} \qquad (13.7) $$

الرسم البياني



(13.2) احتياطي رياضي على العلاوات التجارية

يجب على المؤمن أن يأخذ في الاعتبار المصاريف المستقبلية عند احتسابه للاحتياطيات الرياضية. وبذلك فإن قاعدة الاحتياطي الرياضي على العلاوة التجارية تحرر على النحو التالي:

$$ {}_tV_x^{CP} = \text{القيمة الحالية للالتزامات المستقبلية} + \text{القيمة الحالية للمصروفات المستقبلية} - \text{القيمة الحالية للعلاوات المستقبلية} \qquad (13.8) $$

obeikandl.com

نعرف كذلك الاحتياطي الرياضي لـ "زيلمار" Zillmer (أكتواري ألماني عاش في الفترة1831–1893) بطرح الحصة المتناسبة وغير المستهلكة في عمولة الاكتساب من العبارة ${}_tV_x^{CP}$. فنحصل بالتالي على:

$$\boxed{{}_tV_x^{Zillmer} = {}_tV_x^{CP} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{\overline{x:n|}}}\ddot{a}_{\overline{x+t:n-t|}}} \qquad (13.9)$$

تمثل الاحتياطيات الرياضية في نهاية الأمر الدين المستحق من المؤمن إلى المؤمن له. وهذا الأخير يمكنه –جدلا– الحصول على هذا الاحتياط الرياضي في حال قرر وضع حد للعقد المبرم بينه وبين المؤمن. وهو ما يسمى باسترجاع البوليصة (إعادة شرائها). في هذه الحالة، يتم احتساب احتياطي زيلمار Zillmer كما نستخدمه كذلك إذا قرر المؤمن له تأمين رأس مال أقل دون إلغاء البوليصة تماما ونتحدث في هذه الحالة عن تخفيض.

مثال: لدينا المعطيات التالية لعقد تأمين:

تـأمين مخـتلط لعـلاوات سـنوية. رأس المـال المـؤمن: 20000 frs، $x = 35, n = 15$. كما تعرفنا على:

- عمولة الاكتساب: $\alpha = 3{,}5\%$.
- مصاريف التحصيل: $\beta = 2\%$.
- مصاريف إدارية: $\gamma = 0{,}25\%$.

افترض أن المؤمن له رفض تسديد العلاوة الحادية عشر، مما اضطر المؤمن إلى اقتراح لخفض رأس ماله المؤمن. أوجد رأس المال المؤمن الجديد (المخفض) باستخدام التبديلات المرفقة بالملحق.

الحل

نبدأ أولا بحساب العلاوة التجارية (CP) بحسب مبدأ المعادلة (12.1) ولرأس مال وحدة. نحصل على:

$$A_{35:\overline{15|}} + 0{,}035 + 0{,}02CP\ddot{a}_{35:\overline{15|}} + 0{,}0025\ddot{a}_{35:\overline{15|}} = CP\ddot{a}_{35:\overline{15|}}$$

يتم تجميع العبارات التي تحتوي على CP لكي نحصل على :

$$CP = \frac{A_{35:\overline{15|}} + 0{,}035 + 0{,}0025\ddot{a}_{35:\overline{15|}}}{\ddot{a}_{35:\overline{15|}}\,(1-0{,}02)}$$

بعد القيام بحساب القيم الحالية نجد:

$$CP = \frac{0{,}64638 + 0{,}035 + 0{,}0025 \times 12{,}14096}{12{,}14096\,(1-0{,}02)} = 0{,}059819$$

إذا كان رأس المال المؤمن يبلغ 20000 frs فإننا نحصل على:

$$CP = 20'000 \times 0{,}059819 = 1196{,}38\ frs$$

وبالتالي نكتب الاحتياط الرياضي قبل العلاوة الحادية عشر على النحو التالي:

$${}_{10}V_{35}{}^{CP} = A_{45:\overline{5|}} + 0{,}02CP\ddot{a}_{45:\overline{5|}} + 0{,}0025\ddot{a}_{45:\overline{5|}} - CP\ddot{a}_{45:\overline{5|}} = 0{,}600209$$

ولرأس مال مؤمن يقدر بـ$frs20000$ نحصل على:

$${}_{10}V_{35}{}^{CP} = 20'000 \times 0{,}600209 = 12'004{,}18\ frs$$

نستطيع بذلك حساب احتياط زيلمار Zillmer :

$${}_{10}V_{35}{}^{Zillmer} = V_{35}{}^{CP}_{10} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{35:\overline{15|}}}\ddot{a}_{45:\overline{5|}} = 0{,}586689$$

إذا كان المبلغ المؤمن يساوي $frs20000$ نحصل على:

$$_{10}V_{35}{}^{Zillmer} = 20'000 \times 0{,}586689 = 11'733{,}78\ frs$$

يستخدم احتياطي زيلمار Zillmer لتمويل تأمين مختلط لرأس مال مخفض (C)في شكل علاوة وحيدة، وهو المقدار الذي وجب إيجاده. وهذا التأمين الجديد لا يتضمن مصاريف التحصيل (β) ولا عمولة الاكتساب (α). وبالتالي يكتب مبدأ المعادلة:

$$_{10}V_{35}{}^{Zillmer} = UP = CA_{x+t:\overline{n-t|}} + C\gamma\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

وهي المعادلة التي تمكننا من إيجاد C:

$$C = \frac{_{10}V_{35}{}^{Zillmer}}{A_{45:5|}^{\overline{}} + 0{,}0025\ddot{a}_{45:\overline{5|}}} = 0{,}670402$$

وهذا يمكن في الأخير المؤمن له من إمكانية الحصول على المبلغ (رأس المال):

$$C = 20'000 \times 0{,}670402 = 13'408{,}04\ frs$$

(13.3) تمارين

1- أوجد العلاوة السنوية لتأمين مؤقت عند الوفاة على رأس مال بلغ 28000 € لفائدة مؤمن لها عمرها 24 سنة ولفترة تأمين بـ 36 سنة، ثم احسب الاحتياط الرياضي عند سن 40 عاما. استخدم أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

2- أوجد العلاوة الشهرية لتأمين مؤقت عند الوفاة على رأس مال بلغ 150000 € لفائدة مؤمن لها عمرها 24 سنة ولفترة تأمين بـ 36 سنة. ثم احسب الاحتياط الرياضي عند سن 40 عاما. استخدم أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

3- احسب العلاوة السنوية لتأمين مختلط على رأس مال يقدر بـ50000 frs لصالح مؤمن لها عمرها 50 سنة ولفترة تأمين مدتها 15 سنة. احسب بعد ذلك الاحتياط الرياضي عند سن 64 عاما مستخدما أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

4- احسب العلاوة السنوية لتأمين مختلط على رأس مال يقدر بـ50000 frs لصالح مؤمن لها عمرها 50 سنة ولفترة تأمين مدتها 15 سنة. علما بأن العلاوات تدفع بحد أقصى لفترة 10 سنوات، احسب بعد ذلك الاحتياط الرياضي عند سن 60 عاما مستخدما أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

5- احسب العلاوة الشهرية لدخل عمري مؤجل يقدر بـ2000 € شهريا ما قبل العد لفائدة مؤمن لها عمرها 30 سنة. تبقى العلاوات موجبة على المؤمن لها إلى حين بلوغها سن التقاعد، أي في عمر 65 سنة. احسب بعد ذلك الاحتياط الرياضي في سن 40 سنة مستخدما أعداد التبديلات المرفقة في الملحق.

6- احسب العلاوة السنوية لرأس مال عند البقاء على قيد الحياة إلى حين بلوغ 60 سنة يقدر بـ 100000 frs لفائدة مؤمن له عمره 25 سنة. تبقى العلاوات موجبة على المؤمن له إلى حين بلوغه 40 سنة. احسب بعد ذلك الاحتياط الرياضي في سن 40 سنة مستخدما أعداد التبديلات المرفقة في الملحق.

7- يرغب زوجان $x = 34$ و $y = 28$ في الحصول على رأس مال قدره 300000 € إذا بقيا على قيد الحياة حين يبلغ x 65 سنة. تدفع العلاوات من قبل المرأة طالما بقيت على قيد الحياة ولمدة أقصاها فترة التأمين. احسب هذه العلاوة السنوية مستخدما أعداد التبديلات المرفقة بالملحق. احسب بعد ذلك الاحتياط الرياضي عند بلوغ x 40 سنة.

8- ■ باستخدام التبديلات المرفقة بالملحق أوجد ما يلي:

(أ) العلاوة السنوية (AP) التجارية لتأمين مختلط بقيمة 50000 frs لفائدة مؤمن له عمره 50 سنة ولمدة 15 سنة.

(ب) الاحتياط الرياضي لعلاوة تجارية في سن 55 عاما.

(جـ) الاحتياط الرياضي لزيلمارZillmer في سن 55 عاما.

تدفع العلاوات بحد أقصى لمدة 10 سنوات وتكون المصاريف الأخرى كالآتي:

- عمولة الاكتساب: 3% من قيمة رأس المال المؤمن.
- مصاريف التحصيل: 2% من العلاوة التجارية السنوية طيلة فترة سداد العلاوات.
- مصاريف إدارية: 0,25% من قيمة رأس المال المؤمن تسدد طيلة الفترة التي تشملها التغطية.

9- ■ باستخدام التبديلات المرفقة بالملحق، ولمؤمن له عمره 50 سنة تعاقد على بوليصة تأمين دخل عمري قدره 12000 *frs* يصرف ما بعد العد في سن 65 سنة، احسب ما يلي:

(أ) العلاوة التجارية المتدرجة والمسددة إلى حين بلوغ 65 عاما.

(ب) الاحتياط الرياضي على علاوة تجارية قي ست 55 عاما.

(جـ) الاحتياط الرياضي في سن 70 سنة دون رسوم.

تدفع العلاوات بحد أقصى لمدة 10 سنوات وتكون المصاريف الأخرى كالآتي:

- مصاريف التحصيل: 2% من العلاوة التجارية السنوية طيلة فترة سداد العلاوات.
- مصاريف إدارية: 2% من قيمة الدخل المؤمن تسدد طيلة فترة التأجيل و2,5% من قيمة الدخل المؤمن تسدد طيلة فترة خدمة الدخل.

10- ■ ليكن لدينا تأمين مختلط يقدر بـ35000 € لفائدة مؤمن لها عمرها 30 سنة ولمدة 15 سنة. إذا علمت أن نسب المصاريف كانت كالآتي:

- عمولة الاكتساب: 3,5% من رأس المال المؤمن.

obeikandl.com

- مصارف التحصيل: 2% من العلاوة التجارية السنوية.
- مصاريف إدارية: 0,15% من رأس المال المؤمن تدفع طيلة سداد العلاوات.

استخدم التبديلات المرفقة بالملحق لإيجاد:

(أ) العلاوة التجارية المتدرجة التي تسدد طيلة كامل فترة التعاقد.

(ب) عند نهاية السنة العاشرة من التعاقد، الاحتياط الرياضي على علاوة تجارية، وكذلك الاحتياط الرياضي لزيلمار Zillmer~ .

(جـ) رأس المال المخفض، إذا علمنا أنه بداية من السنة الحادية عشر توقف سداد العلاوات.

(د) العلاوة التجارية الجديدة إذا انخفض رأس المال المؤمن بداية من السنة الحادية عشر لفترة التأمين ليصبح 30000 €.

obeikandl.com