الفصل الرابع

الدفعات الدورية (الأقساط)

Les Rentes

في الفصل السابق درسنا القيمة الحالية أو النهائية لرأس مال وحيد. الفصل الحالي يعتبر أكثر شمولية من الفصل السابق حيث يهتم بالقيم الحالية والمستقبلية لمجموعة من رؤوس الأموال المدفوعة.

ملاحظة: هذا الفصل يجب أن يقرأ بالتوازي مع الفصل التاسع المخصص لتأمين الأقساط. ولدراسة هذا الفصل يحتاج القارئ إلى التعرف على رمز الجمع Σ الذي تم شرحه في الفصل 17.

(4.1) تعريفات

القسط أو السنوية هي سلسلة من الدفوعات الدورية بفترات ثابتة ومدة محددة ومعروفة مسبقا. لإيجاد القيمة الحالية للقسط نستخدم القاعدة $C_0 = v^n C_n$ لكل قسط مسدد.

في المقابل إذا أردنا حساب القيمة المستقبلية للقسط نستعمل القاعدة $_n = C_0 \quad ^n$ لكل قسط مسدد.

مثال: نقوم بإيداع المبالغ التالية في حساب ادخار يوفر 5%:

المبلغ	تاريخ الإيداع
frs1000	اليوم
frs1000	بعد سنة

ما هو المبلغ الذي نحصل عليه بعد سنتين؟

الحل

المطلوب حساب القيمة النهائية (المستقبلية) لقسط قدره 1000 frs يدفع لمدة سنتين باستخدام القاعدة (3.1):

وهكذا فإن القيمة النهائية لهذا القسط تبلغ بعد سنتين:

$$1'000r^2 + 1'000r = 2'152{,}50\, frs$$

تمكّن دراسة هذا الفصل من تسهيل هذا النوع من العمليات وخاصة إذا كان عدد الأقساط كبيرا.

نتحدث عن قسط بمقادير ثابتة إذا كانت جميع الأقساط متساوية كما هو مبين في المثال السابق. في المقابل نتحدث عن قسط بمقادير متغيرة.

إذا كان القسط يدفع في نهاية الفترة فهو يسمى "ما بعد العد" postnumerando أما إذا دفع القسط في بداية الفترة فهو يسمى "ما قبل العد" preanumerando وهي الحالة في المثال الأخير.

في الرياضيات المالية ندرس الأقساط التي تسدد دائما (أقساط مؤكدة) والتي تكون مدتها محددة مسبقا (أقساط مؤقتة). نتحدث - إذن - عن أقساط مؤكدة ومؤقتة. في الرياضيات الأكتوارية تدفع الأقساط فقط في صورة بقاء المؤمن

له على قيد الحياة. نتحدث – إذن – عن أقساط عمرية (مرتبطة بالعمر). وهذه الأخيرة سوف نتناولها بتفصيل أكثر في الفقرات القادمة.

الرموز:

$a_{\overline{n|}}$: القيمة الحالية لقسط مقداره 1 € يدفع في نهاية الفترة (مؤخرة) لعدد من الفترات يساوي n.

$\ddot{a}_{\overline{n|}}$: القيمة الحالية لقسط مقداره 1 € يدفع في بداية الفترة (مسبقة) لعدد من الفترات يساوي n.

$s_{\overline{n|}}$: القيمة المستقبلية (النهائية) لقسط مقداره 1 € يدفع في نهاية الفترة (مؤخرة) لعدد من الفترات يساوي n.

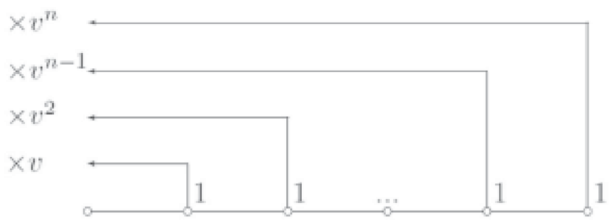
$\ddot{s}_{\overline{n|}}$: القيمة المستقبلية (النهائية) لقسط مقداره 1 € يدفع في بداية الفترة (مؤخرة) لعدد من الفترات يساوي n.

القواعد المبينة أدناه يمكن استنتاجها بسهولة بمساعدة القواعد عن المتواليات الهندسية التي تم عرضها في الفصل السادس عشر من هذا الكتاب.

(4.2) أقساط مؤخرة

(4.2.1) القيمة الحالية

الرسم البياني



القاعدة

$$\boxed{a_{\overline{n|}} = v + v^2 + \cdots + v^{n-1} + v^n} \qquad (4.1)$$

القاعدة المختصرة

$$\boxed{a_{\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} v^2} \qquad (4.2)$$

القاعدة المبسطة

$$\boxed{a_{\overline{n|}} = \frac{1 - v^n}{i}} \qquad (4.3)$$

مثال: احسب القيمة الحالية لقسط مؤخر يبلغ *frs*3500 مدفوع طيلة عشر سنوات ومحسوب بنسبة فائدة سنوية 6%؟

الحل

نستخدم القاعدة المبسطة التي تمكن من إيجاد الحل مباشرة. نحسب أولا:

$$i = 0{,}06 \; v = \frac{1}{1{,}06} \quad a_{\overline{10|}} = \frac{1-v^{10}}{i} = \frac{1-0{,}9433962^{10}}{0{,}06} = 7{,}360087$$

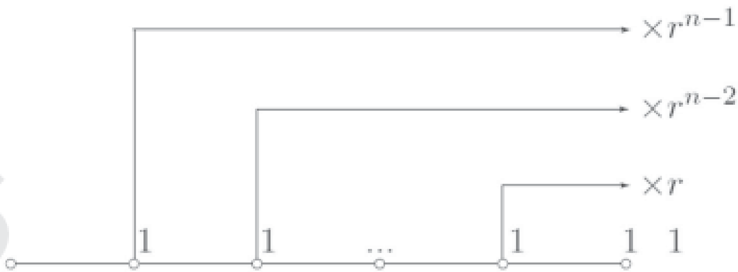
هذا المقدار يمثل القيمة الحالية لـ frs 1 مدفوع طيلة عشر سنوات، والدفعة الأولى تكون في نهاية السنة. بالنسبة لقسط يبلغ frs 3500 نضرب هذا الرقم بـ7,360087 وهو ما يعطينا:

القيمة الحالية $= 3'500 a_{\overline{10|}} = 3'500 \times 7{,}360087 = 25'670{,}30\ frs$

هذه القيمة تناسب المبلغ الذي يجب إيداعه في دفتر ادخار بعائد نسبته 6% لكي يكون بالإمكان سحب مبلغ قدره 3500 *frs* طيلة عشر سنوات إلى حين استنفاذ كافة المبلغ الموجود في دفتر الادخار.

(4.2.2) القيمة النهائية (المستقبلية)

الرسم البياني



القاعدة

$$\boxed{s_{\overline{n}|} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1}} \qquad (4.4)$$

القاعدة المختصرة

$$\boxed{s_{\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} r^t} \qquad (4.5)$$

القاعدة المبسطة

$$\boxed{s_{\overline{n}|} = \frac{r^n - 1}{i}} \qquad (4.6)$$

مثال: أوجد القيمة المستقبلية لقسط مؤخر يبلغ 3500 *frs* مدفوع طيلة عشر سنوات ومحسوب بنسبة فائدة سنوية تقدر بـ 6%

الحل

نستخدم القاعدة المبسطة التي تعطي الحل مباشرة. نسحب أولا:

$$i = 0,06 \quad r = 1 + i = 1,06 \quad s_{\overline{10}|} = \frac{r^{n-1}}{i} = \frac{1,06^{10}}{0,06} = 13,180795$$

هذا المبلغ يمثل القيمة المستقبلية لمقدار $frs1$ يدفع طيلة عشر سنوات. الدفعة الأولى تتم في نهاية السنة. بالنسبة لقسط يبلغ 3500 frs نضرب هذا الرقم بـ13,180795 وهو ما يعطينا:

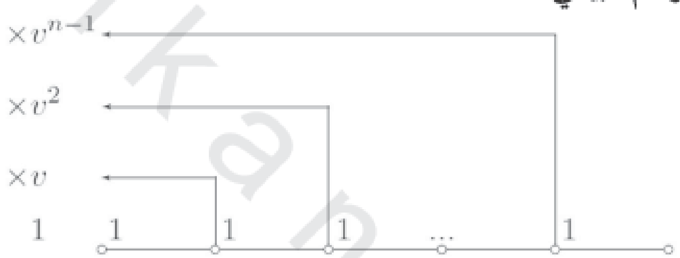
القيمة المستقبلية $= 3'500 s_{\overline{10|}} = 3'500 \times 13{,}18079546'132{,}80\ frs$

هذه القيمة تمثل– إذن – مقدار رأس المال الذي نحصل عليه بعد مرور عشر سنوات.

(4.3) القسط المسبق

(4.3.1) القيمة الحالية

الرسم البياني



القاعدة

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-2} + v^{n-1}} \qquad (4.7)$$

القاعدة المختصرة

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \ \ (4.8)} \qquad (4.8)$$

القاعدة المبسطة

$$\boxed{s_{\overline{n|}} = \frac{1 - v^n}{d}} \qquad (4.9)$$

حيث:

$$\boxed{d = \frac{i}{1 + i} = iv} \qquad (4.10)$$

مثال: أوجد القيمة الحالية لقسط مدفوع مسبقا يبلغ 3500 *frs* طيلة عشر سنوات ومحسوب بنسبة فائدة سنوية تقدر بـ6%.

الحل

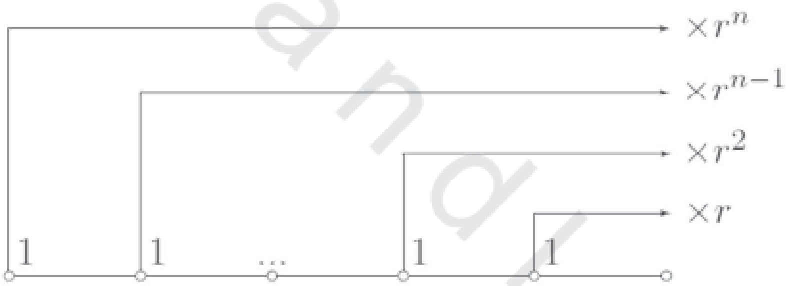
$i = 0{,}06 \; v = \frac{1}{1{,}06} \; d = \frac{0{,}06}{1{,}06} = 0{,}0566037$ ثم نحسب

$$3'500\ddot{a}_{\overline{n}|} = 3'500\frac{1-0{,}9433962^{10}}{0{,}0566037} = 27'305{,}92\ frs$$

ملاحظة: الرمز الجديد الذي تم إدراجه يمثل نسبة الخصم على سنة لنسبة الفائدة i

(4.3.2) القيمة المستقبلية

الرسم البياني



القاعدة

$$\boxed{\ddot{s}_{\overline{n}|} = r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + r^n} \tag{4.11}$$

القاعدة المختصرة

$$\boxed{\ddot{s}_{\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} r^t} \tag{4.12}$$

القاعدة المبسطة

$$\boxed{\ddot{s}_{\overline{n}|} = \frac{r^n - 1}{d}} \tag{4.13}$$

حيث: $d = \frac{i}{1+i}$

مثال: أوجد القيمة المستقبلية لقسط مدفوع مسبقا يبلغ $3500\ frs$ طيلة عشر سنوات ومحسوب بنسبة فائدة سنوية تقدر بـ6%.

الحل

$i = 0{,}06\ r = 1{,}06\ d = \frac{i}{1+i} = 0{,}0566037$ ثم نحسب

$$3'500\ddot{s}_{\overline{n|}} = 3'500\frac{1{,}06^{10}}{0{,}0566037} = 48'900{,}80\ frs$$

نحسب هذه القيمة المستقبلية لمعرفة القيمة المستقبلية لدفتر ادخار يتم تمويله بشكل دوري بمبالغ ثابتة علما بأن المبلغ الأول قد تم إيداعه مباشرة بعد فتح الدفتر.

إكسل

يمكن استخدام برنامج إكسل لحساب القيم الحالية والمستقبلية بكل سهولة وذلك من خلال الدوال المالية التالية التي توجد في البرنامج:

$$a_{\overline{n|}} = PV(i; n; -1; 0; 0) \Leftrightarrow a_{\overline{n|}}$$

$$s_{\overline{n|}} = FV(i; n; -1; 0; 0) \Leftrightarrow s_{\overline{n|}}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = PV(i; n; -1; 0; 1) \Leftrightarrow \ddot{a}_{\overline{n|}}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n|}} = FV(i; n; -1; 0; 1) \Leftrightarrow \ddot{s}_{\overline{n|}}$$

مثال: أودع مستثمر مبلغ 5000 € في حساب ينمو بنسبة 2,5%. كم كان المبلغ بعد نهاية السنة الرابعة؟

الحل

نبحث هنا عن القيمة المستقبلية لقسط يبلغ 5000 € يدفع مسبقا:

$$5'000\ddot{s}_{\overline{n|}} = 5'000 \times FV(0{,}025; 4; -1; 01) = 21'281{,}64\ €$$

الآلة الحاسبة TI-83

نستخدم برنامج الحل المالي الموجود بداخل الآلة تي-83. لذلك نقوم بالضغط فوق APPS ، 1:Finance ثم TVM Solver . بعد ذلك يتم إدخال المعطيات حسب متطلبات المسألة:

$a_{\overline{n\rceil}}$	$s_{\overline{n\rceil}}$	$\ddot{a}_{\overline{n\rceil}}$	$\ddot{s}_{\overline{n\rceil}}$
$N = n$ $1\% = i \times 100$ ·PV =? PMT = 1 FV = 0 P/Y = 1 C/Y = 1 PMT: END	$N = n$ $1\% = i \times 100$ PV = 0 PMT = −1 ·FV =? P/Y = 1 C/Y = 1 PMT: END	$N = n$ $1\% = i \times 100$ ·PV =? PMT = 1 FV = 0 P/Y = 1 C/Y = 1 PMT: BEGIN	$N = n$ $1\% = i \times 100$ PV = 0 PMT = −1 ·FV =? P/Y = 1 C/Y = 1 PMT: BEGIN

مثال: أودع مستثمر مبلغ 5000 € في حساب ينمو بنسبة 2,5%. كم كان المبلغ بعد نهاية السنة الرابعة؟

الحل

نبحث هنا عن القيمة المستقبلية لقسط قدره 5000 € يدفع مسبقا: $5'000\ \ddot{s}_{\overline{n\rceil}}$. ندخل القيم المبينة أدناه في صورة معامل ثم نضع المؤشر على مستوى ·FV حيث نقوم بإدخال قيمة عشوائية (مثال ·FV = 5) ثم نضغط على ALPHA ، SOLVE وهو ما يعطينا القيمة التالية: ·FV = 4,256328516

بمعنى: 5'000 ×4 , 256328516=21'281,64 €

N = 4
I%=2,5
PV=0
PMT=5000
·FV = 5
P/Y = 1
C/Y = 1
PMT: BEGIN

(4.4) العلاقة بين المتغيرات

(4.4.1) العلاقات بين المسبق/المؤخر المستقبلية/الحالية

يمكن بسهولة أن نثبت رياضيا مضمون العلاقات التالية:

العلاقة بين $a_{\overline{n|}}$ و $\ddot{a}_{\overline{n|}}$

$$\boxed{a_{\overline{n|}} = v\ddot{a}_{\overline{n|}}} \tag{4.14}$$

العلاقة بين $s_{\overline{n|}}$ و $\ddot{s}_{\overline{n|}}$

$$\boxed{s_{\overline{n|}} = v\ddot{s}_{\overline{n|}}} \tag{4.15}$$

العلاقة بين $a_{\overline{n|}}$ و $s_{\overline{n|}}$

$$\boxed{a_{\overline{n|}} = v^n s_{\overline{n|}}} \tag{4.16}$$

العلاقة بين $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ و $\ddot{s}_{\overline{n|}}$

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n|}} = v^n \ddot{s}_{\overline{n|}}} \tag{4.17}$$

مثال: نعلم القيمة الحالية لقسط مدفوع مسبقا:21088,33 €. لو تم حسابها مؤخرا لكانت 20088,33 €. أوجد نسبة الفائدة السنوية المستخدمة؟

الحل

باستخدام القاعدة (4.14) نجد:

$$v = \frac{20'277,24}{21'088,33} = 0,961538462$$

وبالتالي فإن: $i = \frac{1}{0,961538462} - 1 = 0,04$

(4.4.2) العمليات المتسلسلة

نسطيع التعبير عن أي قيمة حالية أو مستقبلية كمجموع عدد من القيم الحالية:

$$\boxed{a_{\overline{n+k}|} = a_{\overline{n}|} + v^n a_{\overline{k}|}} \qquad (4.18)$$

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n+k}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|} + v^n \ddot{a}_{\overline{k}|}} \qquad (4.19)$$

$$\boxed{s_{\overline{n+k}|} = r^n a_{\overline{n}|} + a_{\overline{k}|}} \qquad (4.20)$$

$$\boxed{\ddot{s}_{\overline{n+k}|} = r^n \ddot{s}_{\overline{n}|} + \ddot{s}_{\overline{k}|}} \qquad (4.21)$$

(4.4.3) العلاقات بين المعامل n و i

الإشكالية تتمثل في الآتي:

من خلال القاعدة $a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i}$ نبحث عن n بمعرفة $a_{\overline{n}|}$ و i أو نبحث عن i بمعرفة $a_{\overline{n}|}$ و n.

البحث عن قيمة i

هذه العملية هي صعبة للغاية لأنه لا يمكن كتابة i بدلالة بقية المعاملات. نستطيع – إذن – استخدام طريقة لتكرار العمليات (طريقة التصنيف أو طريقة النقطة الثابتة المعروضتين في الفصل السابع عشر) أو استخدام الدوال المضمنة لبرنامج إكسل أو للآلة الحاسبة تي-83.

إكسل

نعرض فيما يلي كيفية استخدام الدوال المالية في إكسل لإيجاد نسبة الفائدة في الحالات التالية:

$$i = RATE\left(n; -1; a_{\overline{n|}}; 0; 0\right) \;\Leftrightarrow\; a_{\overline{n|}}$$
$$i = RATE\left(n; -1; 0; s_{\overline{n|}}; 0\right) \;\Leftrightarrow\; s_{\overline{n|}}$$
$$i = RATE\left(n; -1; \ddot{a}_{\overline{n|}}; 0; 1\right) \;\Leftrightarrow\; \ddot{a}_{\overline{n|}}$$
$$i = RATE\left(n; -1; 0; \ddot{s}_{\overline{n|}}; 1\right) \;\Leftrightarrow\; \ddot{s}_{\overline{n|}}$$

مثال: لدينا اليوم مبلغ قدره 17572,22 € يمكننا من تسديد قسط سنوي يبلغ 2000 € طيلة عشر سنوات. ما هي نسبة الفائدة المستخدمة في هذه العملية؟

الحل

نستطيع كتابة العلاقة التالية:

$$2'000\ddot{a}_{\overline{10|}} = 17'572{,}22,\quad \text{أي}\quad \ddot{a}_{\overline{10|}} = \frac{17'572{,}22}{2'000} = 8{,}786109$$

باستخدام دالة الإكسل نجد: $RATE(10; -1; 8.786109; 0; 0) = 3\%$

الآلة الحاسبة TI-83

نستخدم الحل المالي للآلة تي-83. لذلك نضغط على $\boxed{\text{APPS}}$ ، $\boxed{\text{1:Finance}}$ ثم $\boxed{\text{TVM Solver}}$

مثال: يقوم مستثمر بإيداع مبلغ 5000 € سنويا في حساب توفير. وقد بلغ رأس المال عند نهاية السنة الرابعة مقدارا قدره. ما هي نسبة الفائدة المستخدمة؟

الحل

نبحث عن i التي تحقق المعادلة التالية: $5'000\,\ddot{}_{\overline{4|}} = 21'281{,}64$ أي: $\ddot{a}_{\overline{4|}} = \frac{21'281{,}64}{5'000} = 4{,}256328516$. ندخل القيم المبينة أدناه في صورة معامل ثم نضع المؤشر على مستوى 1%، حيث نقوم بإدخال قيمة عشوائية (مثال 5 = 1%) ثم نضغط على $\boxed{\text{ALPHA}}$ ، $\boxed{\text{SOLVE}}$ وهذا ما يعطينا القيمة التالية: 1% = 2.5%.

N=4
1% = 5
PV=0
PMT=-1
FV = 5
P/Y = 1
C/Y = 1
PMT: BEGIN

البحث عن قيمة n

سوف يقتصر موضوع الفقرة على القسط المؤخر (الذي يدفع في نهاية الفترة). بالنسبة للقيم الأخرى، يتم تطبيق القواعد بشكل مماثل.

عند البحث عن قيمة n بمعرفة $a_{\overline{n|}}$ و i يمكن أن نحصل على عدد غير صحيح. نبدأ بعزل n داخل القاعدة $a_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{i}$ وهو ما يعطي:

$$\boxed{n = \frac{\ln(1 - i a_{\overline{n|}})}{\ln v}} \qquad (4.22)$$

نسمي N العدد الصحيح الأصغر والأقرب من n و F الجزء العشري من n. من خلال المعادلة (4.18)، يمكن أن نكتب: $a_{\overline{n|}} = a_{\overline{N+F|}} = a_{\overline{N|}} + v^N \ a_{\overline{F|}}$

وبذلك فإن عدد الدفوعات المساوية لـ1 يبلغ N، إضافة إلى جزء آخر من القسط يقدر بـ $a_{\overline{F|}}$ ويدفع في آخر قسط.

لنفترض أن عقدا ينص على وجوب دفع الجزء من القسط سنة بعد نهاية السنة N، المطلوب – إذن – هو تسديد تكملة القسط البالغة $a_{\overline{F|}}$. وبالتالي فإن قاعدة تساوي القيم الحالية تكون قد تحققت: $a_{\overline{n|}} = a_{\overline{N+F|}} = a_{\overline{N|}} + v^{N+1} \ r a_{\overline{F|}}$

مثال: قرض يبلغ 1000 frs يتم تسديده على أقساط سنوية لفترة زمنية قدرها n. أوجد هذه الفترة الزمنية علما بأن نسبة الفائدة تبلغ 10%؟

الحل

نستطيع كتابة العلاقة التالية:

$400a_{\overline{n|}} = 1'000$ حيث $_{\overline{n|}} = \frac{1'000}{400} = 2,5$ يمكننا أن نحسب n على النحو التالي: $n = \frac{\ln(1 - ia_{\overline{n|}})}{\ln v} = \frac{\ln(1 - 0,1 \times 2,5)}{\ln v} = 3,018377187$

أي : N=3 و F=0,018377187 ثم نحسب القيمة $a_{\overline{F|}}$ بالاستعانة بالقاعدة (4.1)، وهو ما يعطينا: $a_{\overline{F|}} = 0,0175$. وبذلك يضاف إلى القسط الثالث البالغ 400 الجزء من القسط البالغ $400a_{\overline{F|}} = 400 \times 0,0175 = 7\ frs$ وذلك عند بلوغ أجل دفع هذا القسط.

يمكن أن ينص العقد كذلك على دفع الجزء من القسط بعد سنة. وفي هذه الحالة فإن القسط الأخير يساوي: $400ra_{\overline{F|}} = 400 \times 1,1 \times 0,0175 = 7,7\ frs$.

إكسل

تمكن الدوال المالية الموجودة في إكسل من حساب الفترة الزمنية من خلال القاعدة (4.22) ولكنها لا تمكن من حساب الجزء من القسط المدفوع مع آخر قسط:

$$a_{\overline{n|}} \Leftrightarrow n = NPER\left(i; -1; a_{\overline{n|}}; 0; 0\right)$$
$$s_{\overline{n|}} \Leftrightarrow n = NPER\left(i; -1; 0; s_{\overline{n|}}; 0\right)$$
$$\ddot{a}_{\overline{n|}} \Leftrightarrow n = NPER\left(i; -1; \ddot{a}_{\overline{n|}}; 0; 1\right)$$
$$\ddot{s}_{\overline{n|}} \Leftrightarrow n = NPER\left(i; -1; 0; \ddot{s}_{\overline{n|}}; 1\right)$$

مثال: نمتلك اليوم مبلغا قدره 17000 € يمكن من تسديد مقدار قسط بـ2000 € سنويا. كم الفترة الزمنية التي تسمح بمواصلة دفع هذا القسط علما بأن نسبة الفائدة هي 3%؟

الحل

يمكن كتابة العلاقة التالية:

$17'000 = 2'000\ \ddot{a}_{\overline{n|}}$ أي $8,5 = \frac{17'000}{2'000} = \ddot{a}_{\overline{10|}}$ باستخدام دالة الإكسل:

$NPE(0.03; -1; 8.5; 0; 0) = 9,958829123$ أي 9 أقساط بـ2000 € وجزء من القسط يبلغ: $2'000\ \ddot{a}_{\overline{0,958829123|}} = 1'918,82$ €

الآلة الحاسبة TI-83

في الآلة تي-83 نستخدم الحل المالي بوضع المؤشر على القيمة المجهولة N .

مثال: نمتلك اليوم مبلغا قدره 17000 € يمكن من تسديد مقدار قسط بـ2000 € سنويا. كم الفترة الزمنية التي تسمح بمواصلة دفع هذا القسط علما بأن نسبة الفائدة هي 3%؟

الحل

حسب المثال السابق المطلوب هو حساب القيمة: $8,5 = \frac{17'000}{2'000} = \ddot{a}_{\overline{10|}}$

وهو ما يؤدي إلى إدخال القيم التالية ثم نضغط على $\boxed{\text{ALPHA}}$ ، $\boxed{\text{SOLVE}}$ كي نحصل على القيمة التالية: N = 9,958829123

N = 1

1% = 3

PV=8.5

PMT=-1

FV = 0

P/Y = 1

C/Y = 1

PMT: BEGIN

(4.5) الأقساط المخصصة

(4.5.1) القسط الأبدي

هذا القسط الأبدي هو متوالية هندسية لا نهائية.

الرموز:

$a_{\overline{\infty|}}$: القيمة الحالية لقسط لا نهائي مؤخر (يدفع في نهاية الفترة)

$\ddot{a}_{\overline{\infty|}}$: القيمة الحالية لقسط لا نهائي مسبق (يدفع في بداية الفترة)

القاعدة المستخدمة لـ$a_{\overline{\infty|}}$

$$\boxed{a_{\overline{\infty|}} = v + v^2 + v^3 + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} v^t} \tag{4.23}$$

القاعدة المبسطة (انظر الفصل السادس عشر)

$$\boxed{a_{\overline{\infty|}} = \frac{1}{i}} \tag{4.24}$$

القاعدة المستخدمة لـ$\ddot{a}_{\overline{\infty|}}$

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{\infty|}} = v + v^2 + v^3 + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} v^t} \tag{4.25}$$

القاعدة المبسطة

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{\infty|}} = \frac{1}{d}} \tag{4.26}$$

مثال: نرغب في إحداث جائزة نوبل للرياضيات المالية. نمتلك رأس مال قدره € 500000. ما هو مقدار الجائزة التي نستطيع منحها كل سنة دون توقف إذا أمكن لرأس المال أن ينمو بنسبة 2,5% سنويا؟

الحل

هذه الحالة هي لقسط أبدي حيث الفائدة فقط هي التي يتم صرفها (على الجائزة) في صورة قسط. والمبلغ الأصلي لن يتم استخدامه أبدا. وبالتالي من خلال القاعدة (4.24) ومعرفة كل من $_{\overline{\infty|}}$ و i نحصل على:

القسط السنوي $= ia_{\overline{\infty}|} = 0{,}025 \times 500'000 = 12'500€$ تدفع للمرة الأولى في نهاية السنة.

(4.5.2) القسط المؤجل

التعريف:

القسط المؤجل هو القسط الذي يبدأ نفاذه بعد فترة زمنية محددة تسمى الزمن المؤجل. قاعدة التحيين تنجز على مرحلتين: يتم تحيين القسط إثر تسديده ثم يتم تحيين إجمالي الفترة الزمنية المؤجلة.

الرموز:

$_{k|}a_{\overline{n}|}$: القيمة الحالية لقسط مؤخر (يدفع في نهاية الفترة) ومؤجل بعدد k من السنوات.

$_{k|}\ddot{a}_{\overline{n}|}$: القيمة الحالية لقسط مسبق (يدفع في بداية الفترة) ومؤجل بعدد k من السنوات.

نستلهم القواعد من التعريف ونكتبها على النحو التالي:

$$\boxed{_{k|}a_{\overline{n}|} = v^k a_{\overline{n}|}} \tag{4.27}$$

$$\boxed{_{k|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^k \ddot{a}_{\overline{n}|}} \tag{4.28}$$

ملاحظة:

القسط السنوي المؤخر والمؤجل يبدأ فعليا نفاذه سنة بعد الزمن المؤجل. في المقابل فإن القسط السنوي المسبق والمؤجل يبدأ مع نهاية الزمن المؤجل. وهذا ما يمكن من كتابة المعادلة التالية:

$$\boxed{{}_{k|}a_{\overline{n|}} = {}_{k+1|}\ddot{a}_{\overline{n|}}} \tag{4.29}$$

مثال: احسب القيمة الحالية لقسط قيمته 4000 frs سنويا لمدة 5 سنوات ومؤجل بفترة زمنية قدرها 3 سنوات ونصف. هذا القسط سيتم تسديده عند نهاية الفترة الزمنية المؤجلة مباشرة. نسبة الفائدة المستخدمة :3%

الحل

بما أن : $n = 5$ $k = 3{,}5$ $i = 0{,}03$ و $d = 0{,}029126213$

فإن: $\ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{d} = \frac{1-0{,}97087378^5}{0{,}029126213} = 4{,}717098403$

وبذلك نحصل على: $4'000\,{}_{3,5|}\ddot{a}_{\overline{5|}} = 4'000v^{3,5}\ddot{a}_{\overline{5|}} = 17'013{,}90\,frs$

(4.5.3) القسط المجزأ على فترات

يحدث في الواقع أن يتم دفع الأقساط التي حان أجلها بصورة مجزأة على عدد من الدفوعات. مثال: يمكن لقسط سنوي يبلغ 12000 frs أن يتم تجزئته إلى أقساط جزئية تدفع شهريا بحساب 1000 frs للشهر الواحد. في هذه الحالة نتحدث عن أقساط بقيم مجزأة.

تعريف:

نعرف الرمز $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}}$ بأنه القيمة الحالية لقسط مسبق قدره 1 € يدفع جزئيا بنسبة $\frac{1}{m}$. القسط الأول الذي يبلغ $\frac{1}{m}$ يدفع بعد فترة زمنية قدرها $\frac{1}{m}$.

وبذلك فإن $12'000\ddot{a}^{(12)}_{\overline{n|}}$ تمثل القيمة الحالية لقسط سنوي يبلغ 12'000 frs، مدفوع شهريا بمقدار 1000 frs، المرة الأولى يدفع في نهاية الشهر.

طريقة الحساب:

الطريقة الأسهل هي استخدام مقياس زمني آخر ويتم ذلك من خلال كتابة نسبة الفائدة السنوية i بدلالة m.

وهذا ما يؤدي إلى تحويل القواعد المبسطة لـ $a_{\overline{n}|}, \ddot{a}_{\overline{n}|}, s_{\overline{n}|}, \ddot{s}_{\overline{n}|}$ باستخدام الفترة الزمنية المحولة إلى m أي nm.

إذا كانت X تمثل القسط السنوي فإن قاعدة التحويل تكتب كالآتي:

$$\boxed{X a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{X}{m} a_{\overline{nm}|} i_m} \tag{4.30}$$

وحيث إن فهم القواعد الأكتوارية للأقساط (الفصل التاسع) يتطلب كتابة القواعد المتضمنة للقيم الحالية المؤخرة والمسبقة وبصورتها العادية والمختصرة نورد هذه القواعد في الآتي:

القسط المؤخر (يدفع في نهاية الفترة):

$$\boxed{a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m} v^{\frac{2}{m}} + \cdots + \frac{1}{m} v^{\frac{nm}{m}} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{nm} v^{\frac{t}{m}}} \tag{4.31}$$

القسط المسبق (يدفع في بداية الفترة):

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} + \cdots + \frac{1}{m} v^{\frac{nm-1}{m}} = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{nm-1} v^{\frac{t}{m}}} \tag{4.32}$$

مثال: أوجد القيمة الحالية لقسط سنوي يبلغ 12000 € يدفع على خمس سنوات بأقساط مجزأة شهريا بحساب 1000 € القسط الواحد. نسبة الفائدة السنوية المستخدمة تساوي 10%؟

الحل

نبدأ بحساب النسبة المعادلة i_{12} :

$$i_{12} = (1 + 0{,}1)^{\frac{1}{12}} = 0{,}00797414$$

نكتب بعد ذلك الفترة بالأشهر: شهر $nm = 5 \times 12 = 60$

يبقى أن نحسب: $1000a_{\overline{60|}}$ حيث $v = \frac{1}{1+i_{12}} = 0,9920889435$ وبذلك

نحصل على: $1000a_{\overline{60|}} = 47'538,50$ €

(4.5.4) القسط "أي كان"

هذه الفقرة تعتبر أكثر شمولية من الفقرات السابقة في دراسة الأقساط، حيث سيتم حساب القيمة الحالية لأقساط مختلفة في المقادير ونسب فوائدها مختلفة كذلك من فترة زمنية إلى أخرى.

الرموز:

i_t : نسبة الفائدة في الزمن t.

v_t : نسبة الخصم في الزمن t.

R_t : المبلغ المدفوع في الزمن t.

n : فترات الدفوعات بالسنوات.

نحصل على القيمة الحالية لقسط من خلال القاعدة التالية:

$$\boxed{\text{القيمة الحالية} = \sum_{t=0}^{n-1} v_t^t R_t} \qquad (4.33)$$

مثال: نقوم بإيداع المبالغ التالية: €300 حالا، €2000 بعد سنة و€1000 بعد سنتين. احسب القيمة الحالية لهذه المبالغ المودعة. نسبة الفائدة في السنة الأولى 3%، في السنة الثانية 2% وفي السنة الثالثة 1,5%.

الحل

يمكن تصميم الجدول التالي لتوضيح الحالة:

الزمن t	R_t	i_t	v_t^t	$v_t^t R_t$
0	300	0,03	1	300
1	2000	0,02	0,98039216	1960,78
2	1000	0,015	0,97066175	970,66

وبذلك تكون القيمة الحالية كالتالي: $\sum_{t=0}^{2} {}_{t}^{t}R_t = 3'231,44€$

(4.6) التمارين

1- احسب القيم التالية باستخدام نسبة فائدة 10%:

(أ) $800\ddot{a}_{\overline{10}|}$	(ب) $400a_{\overline{10}|}$	(جـ) $100\, s_{\overline{3}|}$
(د) $50\ddot{s}_{\overline{3}|}$	(هـ) $800a_{\overline{10}|}^{(12)}$	(و) $600s_{\overline{5}|}^{(4)}$
(ز) $50a_{\overline{\infty}|}$	(ح) $100\,{}_{8|}\ddot{a}_{\overline{9}|}$	(ط) $100\,{}_{8|}s_{\overline{9}|}^{(12)}$

2- ■ احسب $\sum_{t=1}^{50} s_{\overline{2t}|}$

3- اختزل العبارة التالية:

$$\frac{a_{\overline{40}|}}{a_{\overline{20}|}\,(2-ia_{\overline{20}|})}$$

4- ما هي القيمة الحالية لقسط مؤخر يقدر بـ10000 € يدفع كل سنتين طيلة عشر سنوات بنسبة فائدة 3%؟

5- اقترض شخص مبلغ 50000 *frs* من أحد المؤسسات البنكية. وقد تم الاتفاق بأن يسدد نفس المبلغ طيلة عشر سنوات. كم يقدر المبلغ المقرض إذا كان البنك يستخدم نسبة فائدة 10%؟

6- يقول المسؤول في البنك لسيليا: ' بإمكانك سحب مبلغ 4870,75 € سنويا طيلة 15 سنة لكي تستنفذي رصيدك في الحساب'. ما هو المبلغ الذي تمتلكه سيليا في حسابها إذا كان الحساب ينمو بنسبة 3%؟

7- يرغب أحد المدخرين في جمع مبلغ من المال عبر إيداع 100 *frs* في نهاية كل شهر في حساب ادخار ينمو بنسبة 4% طيلة 15 سنة. يتساءل المدخر عن الفرق في نهاية الأمر بين ادخاره بهذه الطريقة أو إيداعه لمبلغ 1200 *frs* في نهاية كل سنة؟

8- كم نحصل في نهاية السنة الثالثة إذا استثمرنا 2000 € عن كل سنة بنسبة فائدة 4% علما بأن القسط الأول تم إيداعه حالا؟

9- كم يبلغ رأس المال الذي وجب امتلاكه اليوم لكي نستطيع تمويل أقساط بـ3000 *frs* في نهاية كل شهر ولمدة خمسة سنوات وكذلك قسطا نهائيا يقدر بـ60000 *frs* يدفع في الشهر الذي يلي آخر شهر في الأقساط؟ نسبة الفائدة المستخدمة: 2%.

10- يعرض أحد البنوك اليوم شروطا للاقتراض لفائدة الخواص بنسبة فائدة سنوية تساوي 9%. أوجد مبلغ القسط المطلوب تسديده شهريا للحصول على قرض يقدر بـ60000 € يسدد على 60 شهرا.

11- إذا دفعنا اليوم مبلغ 12988 € فذلك يغطي مجموع 3 أقساط بـ3000 € للقسط الواحد علما بأن القسط الأول يدفع بعد سنة. ما هي نسبة الفائدة المستخدمة في هذه العملية؟

12- يبلغ القسط السنوي لقرض يقدر بـ 100000 *frs* مقدار 12500 *frs* حيث يسدد القسط الأول سنة بعد الحصول على المبلغ المقرض. إذا كانت نسبة الفائدة تساوي 5,75 % سنويا، كم عدد الأقساط المطلوب سدادها وما هو مقدار القسط الأخير؟

13- يبلغ دخل (قسط) أحد المؤمن لهم البالغ من العمر 43 سنة، 5000 € يدفع شهريا لمدة خمس سنوات. هذا الدخل سوف يصرف للمؤمن له في نهاية كل فترة وحين يبلغ الستين من عمره. ما هو مقدار العلاوة (مبلغ الاشتراك) المطلوب سداده الآن لتمويل هذا الدخل العمري علما بأن نسبة الفائدة تبلغ 3,3%؟

14- ■ ترغب إحدى الجمعيات الخيرية في تقديم الجائزة التالية من خلال منحة حصلت عليها اليوم تقدر بـ 100000 *frs* :

- جائزة تقدر بـ 1000 *frs* تصرف بداية من السنة القادمة ولمدى الحياة.
- جائزة قدرها 5000 *frs* تصرف كل خمس سنوات.
- الرصيد المتبقي يصرف كعلاوة نهاية السنة إلى إجمالي موظفي الجمعية طيلة عشرين سنة.

أوجد مقدار العلاوة الإجمالية المطلوب صرفها إلى الموظفين إذا علمت أن رأس المال ينمو سنويا بنسبة 2,5%؟

15- ■ يدفع أحد الأقساط البالغ 1000 € طيلة خمس سنوات، والقسط الأول يدفع آخر السنة. بداية من السنة الثانية تم توظيف نسبة جديدة على القسط تقدر بـ 2% سنويا مصدرها غلاء المعيشة. أوجد القيمة الحالية لهذا القسط إذا كانت نسبة الفائدة تساوي 5%؟

16- أوجد القيمة الحالية للدفوعات التالية مستخدما عددا من القواعد:

الزمن	0	1	2	3	4	5	6	7
المبلغ		10	20	20	20		50	50

17- أوجد العلاوة P التي تمكن من صرف المبالغ المبينة في الجدول التالي (باليورو):

(أ) بنسبة فائدة 0% . (ب) بنسبة فائدة 5%.

الزمن	0	1	2	3	4	5	6
المبلغ	P	1000	1000	1000	1000	1000	1000

18- أوجد العلاوة P التي تمكن من صرف المبالغ المبينة في الجدول التالي (باليورو) وبنسبة فائدة 5%:

الزمن	0	1	2	3	4	5	6
المبلغ	P	P	P	P	1000	1000	1000

19- ■ أوجد العلاوة P التي تمكن من صرف المبالغ المبينة في الجدول التالي (باليورو) وبنسبة فائدة 5%:

الزمن	0	1	2	3	4	5	6
المبلغ	P	P	*1000*	*2000*	2000	6000	6000

20- ■ ولد السيد X بتاريخ 15.12.1942 وهو بإمكانه تحسين وضعه المالي من خلال إيداع مبالغ مالية غير موجبة في صندوق المعاشات الذي اختاره. وهذه الإيداعات ترصد في حساب ادخار.

في تاريخ 1/ 1/ 1993 أودع لأول مرة مبلغ 15000 *frs* . وبداية من شهر يناير التالي لعيد ميلاده الثالث والخمسين قام بإيداع مبلغ 2000 *frs* في بداية كل سنة. في شهر ديسمبر 2002، أعلمه صندوق المعاشات بأن حسابه لم يعد ينمو بأكثر من 2,5% وهو ما أدى بالسيد X إلى التوقف عن إيداع مبالغ في حسابه.

(أ) كم يبلغ رصيد الحساب في تاريخ 1.1.1993 بعد أن كان ينمو إلى حد هذا التاريخ بنسبة 4,5%؟

(ب) ما هو المبلغ الذي يفترض أن يودعه السيد X بتاريخ 1.1.1993 بدلا عن المقدار 15000 *frs* ليحصل على نفس الرصيد دون إيداع مبالغ سنوية إلى تاريخ 1.1.2003.

(جـ) ما هو رصيد حساب السيد X في 1 يناير الموالي لعيد ميلاده الثالث والستين.