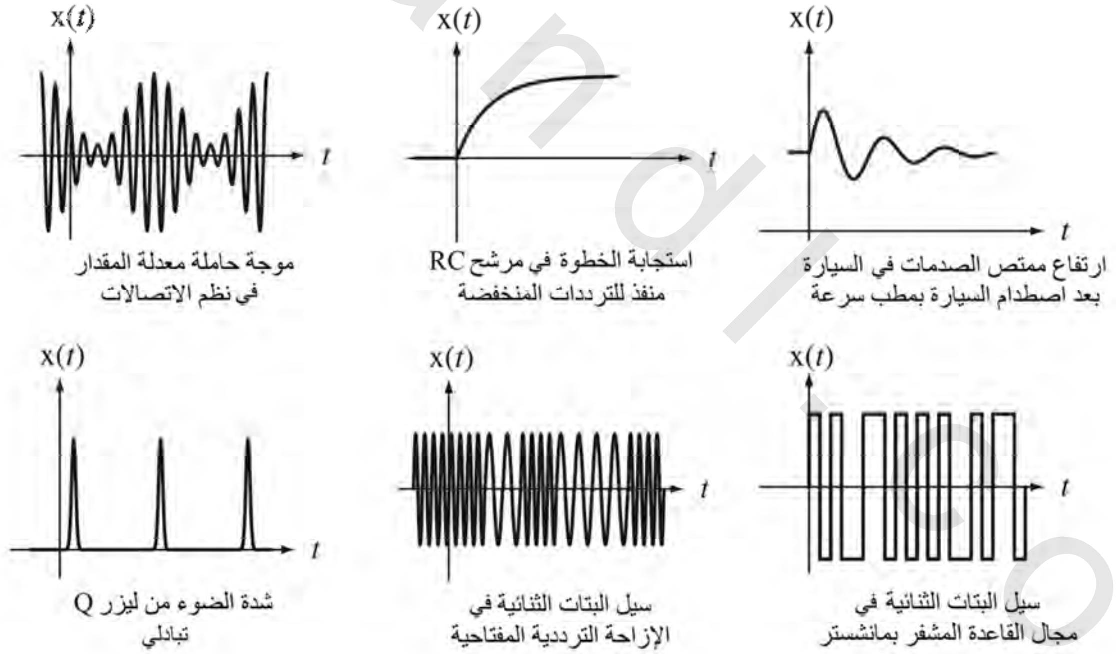
الوصف الرياضي للإشارات المستمرة زمنياً

(٢,١) المقدمة والأهداف

على مدار السنين، قام محللو الإشارات والأنظمة بملاحظة العديد من الإشارات وتوصلوا إلى أن الإشارات يمكن تصنيفها إلى مجموعات متشابهة في السلوك. شكل (٢,١) يبين بعض الأمثلة على هذه الإشارات.



شكل رقم (٢,١) أمثلة على الإشارات

يتم وصف الإشارات عن طريق دوال حسابية في تحليل الإشارات والأنظمة. بعض الدوال التي تصف الإشارات الحقيقية يجب أن تكون شائعة، أسية أو جيبية مثلا، وتحدث هذه الدوال عادة في تحليل الإشارات والأنظمة. مجموعة من هذه الدوال تم تعريفها لكي تصف التأثيرات على إشارات عمليات التبديل التي تحدث عادة في الأنظمة. بعض الدوال الأخرى تظهر في عملية التطوير لطرق تحليل بعض الأنظمة المعينة، التي سيتم تقديمها في فصول لاحقة. هذه الدوال تم اختيارها بعناية بحيث تكون متعلقة ببعضها ببساطة، وأن تكون من السهل تغييرها عن طريق مجموعة جيدة الاختيار من عمليات الإزاحة و/أو التحجيم. إنها عبارة عن نماذج أولية من الدوال، والتي بها تعريفات مبسطة، ومن السهل تذكرها بسهولة. أنواع التشابهات والنماذج التي تحدث عادة في الإشارات الحقيقية سيتم تحديدها، وسيتم استكشاف تأثيراتها على تحليل الإشارات.

أهداف الفصل

١- تحديد بعض الدوال الحسابية التي يمكن استخدامها لوصف الإشارات.

٢- تطوير طرق لإزاحة هذه الدوال، وتحجيمها، وتجميعها لتمثل الإشارات الحقيقية.

٣- التعرف على بعض التشابهات، والنماذج؛ لتبسيط تحليل الإشارات والأنظمة.

(٢,٢) رموز الدوال

الدالة عبارة عن مقابلة بين معاملات هذه الدالة، التي تقع في نطاقها، والقيمة المسترجعة عن طريق هذه الدالة، والتي تقع في مداها. أشهر الدوال تكون على الصورة $g(x)$ حيث المعامل x هو رقم حقيقي والقيمة المسترجعة عن طريق الدالة g تكون أيضاً رقماً حقيقياً. ولكن النطاق و/أو المدى لأي دالة من الممكن أن يكون أرقاماً مركبة، أو أرقاماً صحيحية، أو أنواعاً من اختيارات أخرى من القيم المسموحة.

سيظهر لنا في هذا الكتاب خمسة أنواع من الدوال كالتالي:

١- النطاق — الأرقام الحقيقية، والمدى — الأرقام الحقيقية

٢- النطاق — الأرقام الصحيحة، والمدى الأرقام الحقيقية

٣- النطاق — الأرقام الصحيحة، والمدى الأرقام المركبة

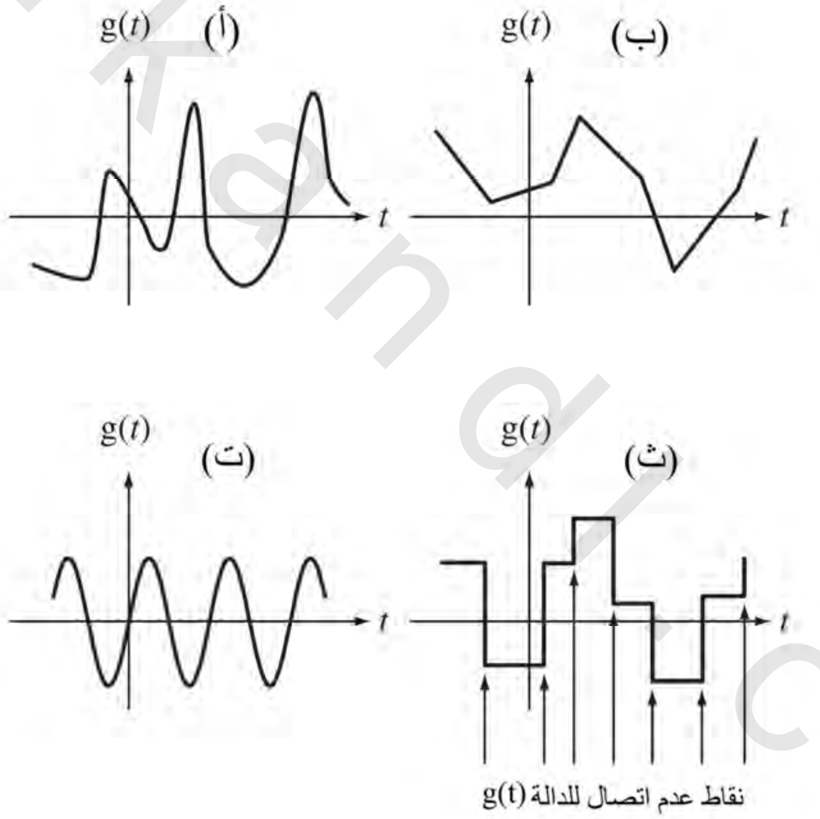
٤- النطاق — الأرقام الحقيقية، والمدى الأرقام المركبة

٥- النطاق — الأرقام المركبة، والمدى الأرقام المركبة

بالنسبة للدوال التي يكون نطاقها إما أرقاماً حقيقية، أو أرقاماً مركبة، فإن المعاملات سيتم وضعها بين قوسين عاديين (.). بالنسبة للدوال التي نطاقها أرقام صحيحة، فإن المعاملات سيتم وضعها بين قوسين مربعين [.]. هذه الأنواع من الدوال سيتم شرحها بالتفصيل عند تقديمها.

(٢,٣) دوال الإشارات المستمرة زمنياً

إذا كان المتغير المستقل لأي دالة هو الزمن t وكان نطاق الدالة هو الأرقام الحقيقية، وإذا كانت الدالة g(t) لها قيمة محددة عند كل قيمة للزمن t، فإن الدالة في هذه الحالة تسمى دالة مستمرة زمنياً. شكل (٢- ٢) يبين بعض الدوال المستمرة زمنياً.



شكل رقم (٢,٢) أمثلة على الدوال المستمرة زمنياً

شكل (٢,٢د) يبين دالة بها عدم اتصال، حيث عند نقطة عدم الاتصال تكون قيمة نهاية الدالة عند الاقتراب من هذه النقطة من الناحية الأعلى لا تساوي قيمة نهاية الدالة عند الاقتراب من النقطة نفسها من أسفل. إذا كانت القيمة $t=t_0$ تمثل نقطة عدم اتصال لدالة g(t) فإن:

$$\lim_{\varepsilon\to0} g(t_0+\varepsilon) \neq \lim_{\varepsilon\to0} g(t_0-\varepsilon)$$

كل الدوال الأربع، (أ) حتى (د) في شكل (٢,٢) تمثل دوال مستمرة زمنياً لأن قيمها تكون محددة لكل القيم الحقيقية للزمن t. لذلك فإن التعبيرات "مستمرة" و "مستمرة زمنياً" تعني أشياء مختلفة. كل الدوال المستمرة في الزمن تكون دوال دوال مستمرة زمنياً، ولكن ليس كل الدوال المستمرة زمنياً تكون دوال مستمرة في الزمن.

الأسس المركبة والجيوب

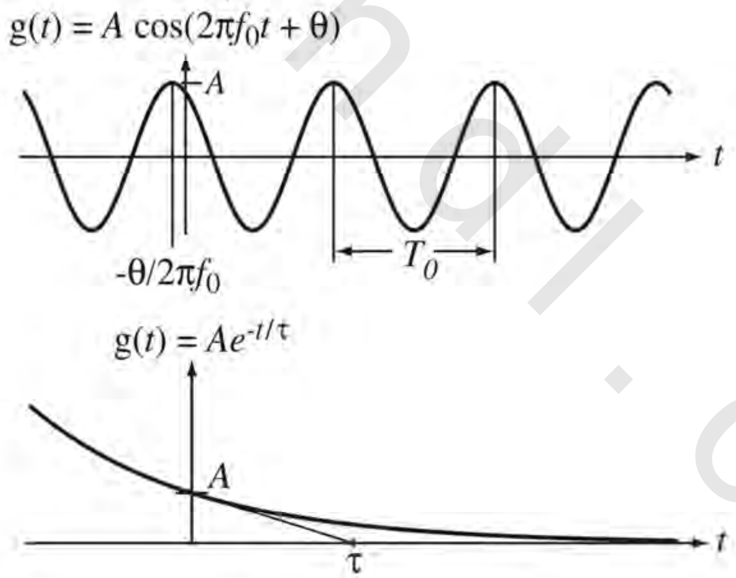
الجيوب ذات القيمة الحقيقية والدوال الأسية يجب أن تكون معروفة مبدئيا. في الدالة :

$$g(t) = Acos\left(\frac{2\pi t}{T_0}+\theta\right) = Acos(2\pi f_0 t+\theta) = Acos(\omega_0 t+\theta)$$

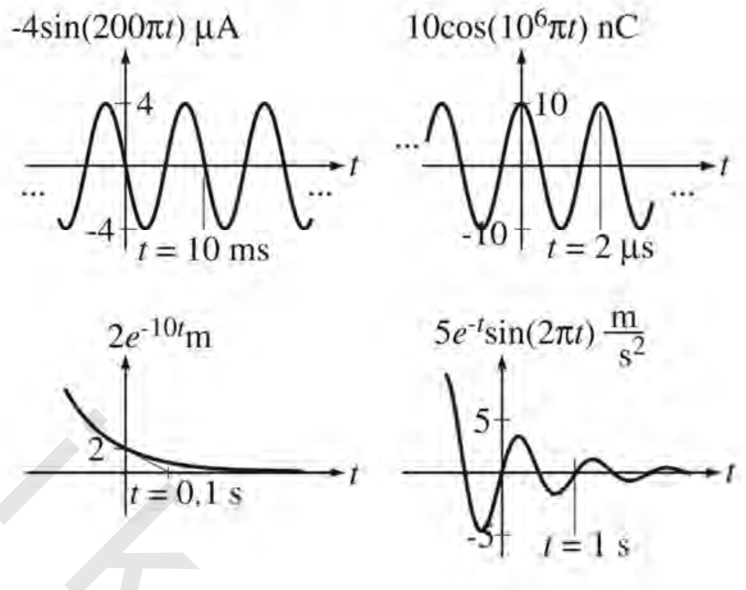
و

$$g(t) = Ae^{(\sigma_0+j\omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t}[\cos(\omega_0 t) + jsin(\omega_0 t)]$$

تكون A هي المقدار، و T_0 هي الفترة أو الدورة الأساسية، و f_0 هي التردد الدوري الأساسي، و ω_0 هي التردد الزاوي الأساسي للجيب، و t هو الزمن و σ_0 هي معدل الاضمحلال للدالة الأسية (وهي مقلوب ثابتها الزمني τ) كما في شكل (٢,٣) وشكل (٢,٤). كل هذه المعاملات يمكن أن تكون أي رقم حقيقي.



شكل رقم (٢,٣) دالة جيبية حقيقية ودالة أسية حقيقية بمعاملات موضحة تخطيطياً.



شكل رقم (٢,٤) أمثلة على إشارات موصوفة بجيوب، وجيوب تمام وأسس حقيقية

في الشكل (٢- ٤) توضح الوحدات أي نوع من الإشارات الطبيعية يتم وصفها. من المعتاد جداً في تحليل الأنظمة، عندما يتم تتبع إشارة واحدة فقط خلال أحد الأنظمة، فإن الوحدات يتم إهمالها بغرض الإيجاز، أو الاختصار.

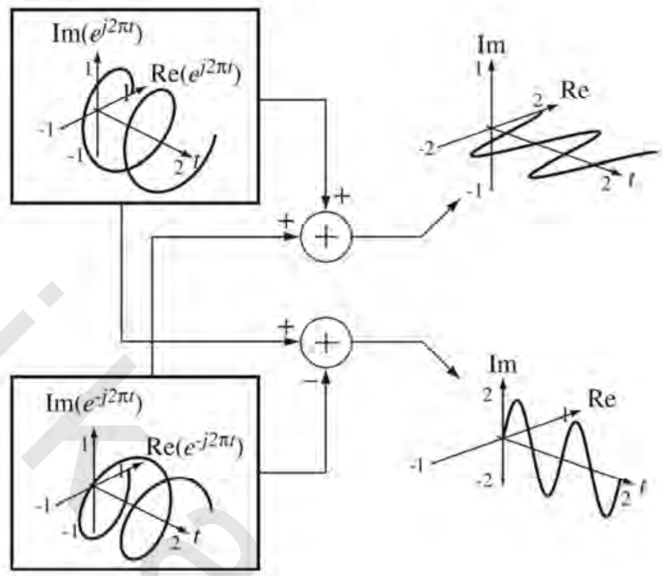
الأسس (exp) والجيوب (sin و cos) تعتبر من الدوال الضمنية، أو الجوهرية في ماتلاب. تعرف المعاملات لدوال sin و cos بالراديان، أو الزاوية القطرية وليس بالدرجات:

```
>> [exp(1),sin(pi/2),cos(pi)]
ans =
2.7183 1.0000 -1.0000
```

(pi في ماتلاب هي الرمز π).

الجيوب والأسس شائعة جداً في تحليل الإشارات والأنظمة نتيجة أن معظم أنظمة الزمن المستمر يمكن وصفها، على الأقل بالتقريب، عن طريق معادلات تفاضلية اعتيادية، وخطية، وذات معاملات ثابتة، التي تكون دالتها الذاتية عبارة عن أسس مركبة، أي قوى مركبة من e، والتي هي قاعدة الخواريزم الطبيعي. الدالة الذاتية eigenfunction تعني "الدالة المميزة"، وهذه الدوال المميزة لها علاقات مهمة خاصة مع المعادلة التفاضلية. إذا كان الأس e حقيقياً، فإنه في هذه الحالة تكون الأسس المركبة هي نفسها مثل الأسس الحقيقية. من خلال معادلة أويلر Euler، $e^{jx}=\cos(x)+j\sin(x)$ والعلاقات $\cos(x)=(1/2)(e^{jx}+e^{-jx})$ و $\sin(x)=(1/2)(e^{jx}-e^{-jx})$، فإننا نرى أن الأسس المركبة

والجيوب ذات القيمة الحقيقية تكون مرتبطة بدرجة كبيرة. إذا كان في أي دالة على الصورة e^{jx} ، x عبارة عن متغير مستقل له قيمة حقيقية ، فإن هذه الحالة الخاصة من الأس المركب تسمى الجيب المركب كما في شكل (٢,٥).



شكل رقم (٢,٥) العلاقة بين الجيوب الحقيقية والمركبة

في تحليل الإشارات والأنظمة ، يتم التعبير عن الجيوب إما بالتردد الدوري f على الصورة $A\cos(2\pi f_0 t+\theta)$ ، أو بالتردد الزاوي القطري ω على الصورة $A\cos(\omega_0 t+\theta)$. مميزات الصورة f هي كما يلي :

١- الدورة الأساسية T_0 والتردد الدوري الأساسي f_0 يكون كل منهما معكوس الآخر ببساطة.

٢- في تحليل أنظمة الاتصالات ، يتم في العادة استخدام المحلل الطيفي ، ويتم عادة معايرة تدريج عرضه بالهرتز Hz ، ولذلك فإن f تكون هي المتغير المباشر الذي تتم ملاحظته.

٣- تحديد تحويل فورير في الفصل ٦ وبعض التحويلات الأخرى وعلاقات هذه التحويلات تكون أبسط على الصورة f عنها على الصورة ω.

مميزات استخدام الصورة ω هي كما يلي :

١- التردد الرنيني للأنظمة الحقيقية ، معبراً عنها مباشرة بدلالة المعاملات الطبيعية ، يتم التعبير عنها في الصورة ω ببساطة عنها في الصورة f. التردد الرنيني لمذبذب LC تتم كتابته كالتالي : $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = (2\pi f_0)^2$ وتردد نصف الطاقة الركني لمرشح RC منفذ للترددات المنخفضة يمكن كتابته كالتالي : $\omega_c = 1/RC = 2\pi f_c$.

٢- تحويل لابلاس في الفصل ٨ يتم تحديده في صورة تكون ببساطة أكثر متعلقة بالصورة ω عنها بالصورة f.

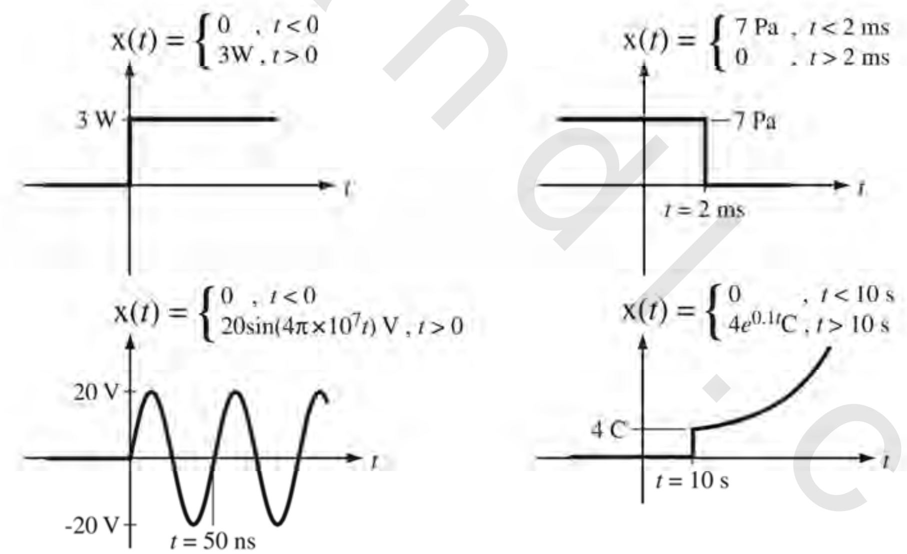
٣- بعض تحويلات فورير تكون أكثر بساطة في الصورة ω.

٤- استخدام ω في بعض التعبيرات يجعل هذه التعبيرات أكثر اندماجاً. فمثلاً $A\cos(\omega_0 t+\theta)$ تكون أكثر اندماجا عن الصورة $A\cos(2\pi f_0 t+\theta)$.

الجيوب والأسس تكون مهمة في الإشارات والأنظمة نتيجة أنها تظهر طبيعياً في حلول المعادلات التفاضلية التي تصف ديناميكية النظام في العادة. كما سنرى عند دراسة تتابع فورير وتحويل فورير، حتى ولو كانت الإشارات ليست جيبية، فإن معظم هذه الإشارات يمكن التعير عنها كمجموع خطي من هذه الجيوب.

الدوال التي بها نقاط عدم اتصال

الجيوب وجيوب التمام والأسس المستمرة زمنياً كلها تكون مستمرة وقابلة للتفاضل عند كل نقطة في الزمن، ولكن العديد من الأنواع الأخرى من الدوال المهمة التي تحدث في الأنظمة العلمية لا تكون مستمرة، أو قابلة للتفاضل عند كل مكان. عملية شائعة في الأنظمة هي جعل أي إشارة تعمل أو لا تعمل عند أي لحظة كما في شكل (٢- ٦).



شكل رقم (٢،٦) أمثلة على الإشارات التى تتحول من إيقاف لتشغيل عند لحظة معينة

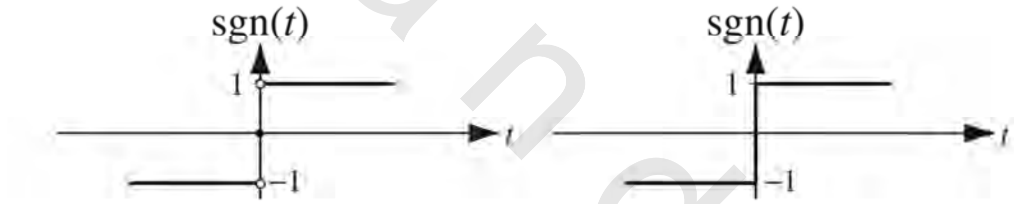
الوصف الوظيفي للإشارات في شكل (٢،٦) كامل ودقيق ولكنه في صورة معقدة. يمكن وصف الإشارات من هذا النوع حسابيا بطريقة أفضل عن طريق ضرب أي دالة تكون مستمرة وقابلة للتفاضل عند كل الأزمنة بدالة أخرى تتحول من صفر لواحد أو من واحد لصفر عند زمن محدد.

في تحليل الإشارات والأنظمة يمكن استخدام دوال متفردة، أو مميزة تكون مرتبطة ببعضها بعضاً من خلال التكاملات والتفاضلات، في الوصف الحسابي للإشارات التي لها عدم اتصال أو تفاضلات غير متصلة. هذه الدوال، والدوال جيدة الصلة بها من خلال بعض عمليات الأنظمة الشائعة ستكون هي موضوع هذا الجزء. عند اعتبار الدوال المتفردة سنحاول مد، وتعديل، و/أو تعميم بعض المفاهيم والعمليات الحسابية الأساسية، لكي تسمح لنا بأن نحلل بكفاءة الإشارات، والأنظمة الحقيقية. سننشر مفهوم ما هو التفاضل، وسنتعلم أيضاً كيف نستخدم أي كيان حسابي مهم، والنبضة، التي تكون مشابهة أكثر للدالة، ولكنها ليست دالة بالمعنى العادي.

دالة الإشارة signum function

للمعادلات التي لا تساوي الصفر، فإن دالة الإشارة يكون لها مقدار يساوي الواحد وإشارة تكون هي إشارة الإشارة المذكورة نفسها كمعامل، كالتالي وكما هو موضح في شكل (٢,٧):

$$sign(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$ المعادلة رقم (٢,١)



شكل رقم (٢,٧) دالة الإشارة

المخطط الموجود على اليسار في شكل (٢,٧) يبين التحديد الحسابي الدقيق لهذه الدالة. المخطط الأيمن هو طريقة شائعة للتعبير عن الدالة للأغراض الهندسية. لا توجد إشارة عملية يمكن أن تتغير بصورة متقطعة، أو غير مستمرة، ولذلك فإذا تم عمل تقريب لدالة الإشارة، وتم توليدها عن طريق مولد إشارة ورؤيتها على مبين الذبذبات، أو الأسولوسكوب، فإنها ستبدو كما في المخطط الأيمن. دالة الإشارة دالة ضمنية في ماتلاب وتسمى الدالة sign.

دالة وحدة الخطوة Unit step

يتم تحديد دالة الوحدة كما يلي:

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 1/2 & t=0\\ 0 & t<0\end{cases}$$ المعادلة رقم (٢.٢)

شكل (٢.٨) يبين دالة وحدة الخطوة. إنها تسمى وحدة الخطوة؛ لأن الخطوة يكون ارتفاعها وحدة واحدة بوحدات النظام المستخدم لوصف الإشارة.

شكل رقم (٢.٨) دالة وحدة الخطوة

بعض المؤلفين يعرف دالة وحدة الخطوة كما يلي:

$$u(t)=\begin{cases}1 & for & t>0\\ 0 & for & t\le 0\end{cases}$$

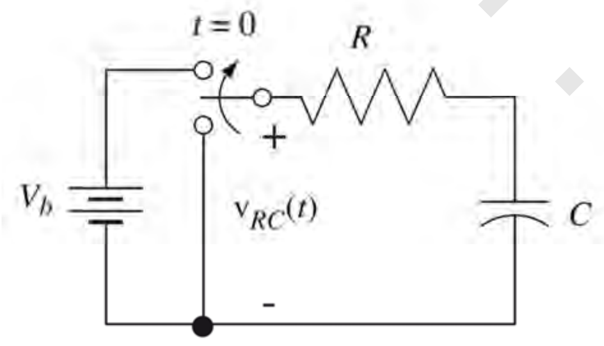
أو

$$u(t)=\begin{cases}1 & for & t>0\\ 0 & for & t<0\end{cases}$$

أو

$$u(t)=\begin{cases}1 & for & t\ge 0\\ 0 & for & t<0\end{cases}$$

في التعريف الأوسط تكون القيمة عند t=0 غير محددة. وحدة الخطوة المعرفة بهذه التعريفات يكون لها التأثيرات نفسها على أي نظام طبيعي.



شكل رقم (٢.٩) دالة بها مفتاح تأثيره يعبر عن وحدة الخطوة

دالة الخطوة يمكنها أن تمثل حدثاً شائعاً في الأنظمة الطبيعية الحقيقية، إنه الانتقال السريع من حالة معينة لحالة أخرى. في الدائرة المبينة في شكل (٢,٩) ينتقل المفتاح من موضع لآخر عند الزمن t=0. الجهد المطبق على دائرة RC يكون $v_{RC}=V_b u(t)$، ويكون التيار خلال المقاومة والمكثف يساوي :

$$i(t) = (\frac{V_b}{R})e^{-t/RC}u(t)$$

والجهد على المكثف سيكون $v(t) = V_b\left(1 - e^{-t/RC}\right)u(t)$.

هناك دالة ضمنية في ماتلاب تسمى heaviside تعود بالقيمة واحد للمعاملات الموجبة والقيمة صفر للمعاملات السالبة وقيمة غير محدد NaN للمعاملات الصفرية. ثابت ماتلاب NaN يعني "ليس رقم" أو "Not a Number" وهو يعني أيضاً قيمة غير محددة. هناك بعض المشكلات العملية مع استخدام هذه الدالة في الحسابات الرقمية حيث إن القيمة غير المحددة من الممكن أن تنهي البرامج، أو تتسبب في أن البرنامج يؤول إلى قيم لا فائدة منها.

من الممكن أن ننتج الدالة الخاصة بنا في ماتلاب بحيث يمكن النداء على هذه الدوال من قبل المستخدم مثل : الدوال الضمنية cos و sin و exp وإلخ. تتحدد دوال ماتلاب عن طريق تخليق ملف يسمى ملف إم m file، وهو ملف يكون اسمه له الامتداد ".m". يمكننا تخليق ملف يعطي وتر المثلث القائم الزاوية بمعلومية طول كل من الضلعين الآخرين فيه :

%دالة لتوليد طول وتر مثلث قائم الزاوية بمعلومية طول الضلعين الآخرين

%

a % طول أحد الضلعين هو

b % طول الضلع الآخر هو

c % طول الوتر هو

%الدالة هي function c=hyp(a,b) %

```
Function c=hyp(a,b)
   c=sqrt(a^2+b^2);
```

التسعة خطوط الأولى في هذا المثال، التي تبدأ بالحرف % تمثل تعليقات، بمعنى أوامر غير قابلة للتنفيذ، ولكنها تشرح كيفية استخدام الدالة. الأمر الأول القابل للتنفيذ يجب أن يبدأ بالكلمة المفتاحية function، وباقي الخط الأول يكون كما يلي :

```
result=name (arg1, arg2, …)
```

حيث result ستحتوي القيمة العائدة من الدالة، التي من الممكن أن تكون كمية قياسية، أو متجه، أو مصفوفة (أو حتى مصفوفة خلية أو هيكل، والتي هي خارج نطاق هذا الكتاب)، و name هو اسم الدالة، و arg1، و arg2، وهي المعاملات التي يتم تمريرها للدالة. المعاملات يمكن أن تكون أيضاً كميات قياسية أو متجهات، أو مصفوفات (أو خلية متجهات أو هيكل). اسم الملف الذي سيحتوي تحديد الدالة يجب أن يكون على الصورة name.m.

فيما يلي سنعرض قائمة أوامر لدالة ماتلاب لتنفيذ دالة خطوة الوحدة في الحسابات الرقمية : صفر في المائة
دالة وحدة الخطوة التي تعطي صفراً عندما تكون قيم معاملات الدخل أقل من الصفر، في المئة
وتعطي ½ لقيم المعاملات التي تساوي صفر، في المئة
وتعطي واحد عندما تكون قيم المعاملات أكبر من الصفر،
هذه الدالة تستخدم دالة الإشارة sign لتنفيذ دالة وحدة الخطوة، ولذلك فإن القيمة عند t=0 تكون محددة ٪
وهذا يتجنب استخدام قيم غير محددة أثناء تنفيذ أي برنامج يستخدم هذه الدالة %

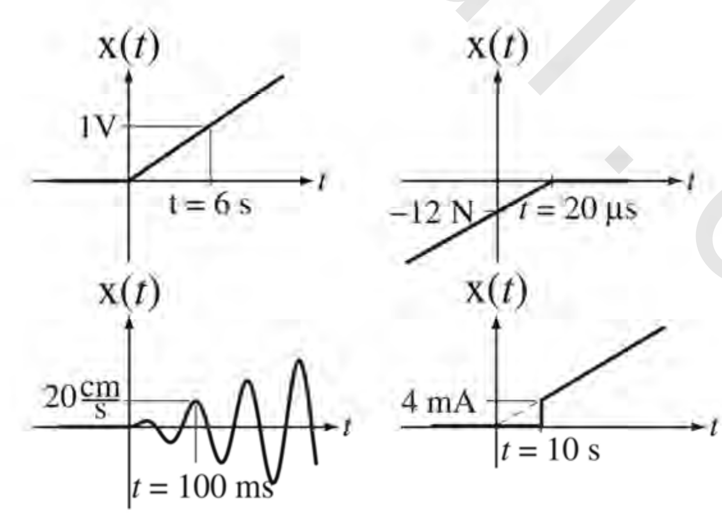
```
%
%  function y = us(x)
Function y = us(x)
     Y = (sign(x)+1)/2   ;
```

هذه الدالة يجب تخزينها في ملف اسمه "us.m".

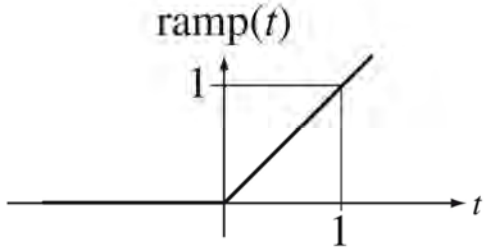
دالة انحدار الوحدة

نوع آخر من الإشارات التي تحدث عادة في الأنظمة هي الإشارة التي تبدأ عند زمن معين وتتغير خطيا بعد هذا الزمن، أو أنها تتغير خطيا قبل زمن معين وتنتهي عند هذا الزمن كما في شكل (٢,١٠). الإشارات من هذا النوع يمكن وصفها باستخدام الدالة ramp. الدالة الانحدارية في شكل (٢,١١) هي تكامل دالة الخطوة. إنها تسمى دالة وحدة الانحدار لأنها، لقيم t الموجبة، يكون ميلها هو مقدار الوحدة لكل وحدة زمن.

$$ramp(t) = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} = \int_{-\infty}^{t} u(\lambda)\, d\lambda = tu(t)$$ المعادلة رقم (٢,٣)

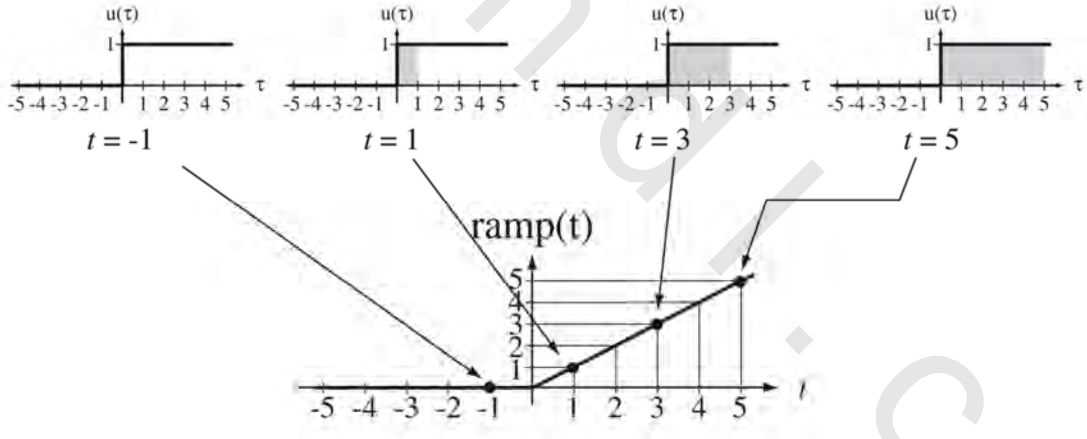


شكل رقم (٢,١٠) دوال تتغير خطياً قبل أو بعد زمن معين، أو مضروبة في دوال تتغير خطياً قبل أو بعد زمن معين



شكل رقم (٢,١١) دالة وحدة الانحدار

يحدد الانحدار بالدالة $ramp(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$. في هذه الدالة، الرمز τ هو المتغير المستقل لدالة وحدة الخطوة وهو متغير التكامل. ولكن t هي المتغير المستقل لدالة الانحدار. هذه المعادلة تقول، "لإيجاد قيمة دالة الانحدار عند أي قيمة للزمن t، فإننا نبدأ بقيمة τ عند سالب ما لانهاية ونتحرك بزيادة τ حتى τ=t، بينما يتم تراكم المساحة تحت دالة وحدة الخطوة. المساحة المتراكمة الكلية من τ=-∞ حتى τ=t هي قيمة دالة الانحدار عند الزمن t كما في شكل (٢,١٢). لقيم t الأقل من الصفر، لن تكون هناك مساحة متراكمة. لقيم t الأكبر من الصفر، فإن المساحة المتراكمة تساوي t لأنها مساحة مستطيل عرضه t وارتفاعه واحد.



شكل رقم (٢,١٢) العلاقة التكاملية بين وحدة الخطوة ووحدة الانحدار

بعض المؤلفين يفضلون استخدام التعبير t u(t) بدلاً من ramp(t)، وحيث إنهما متساويان، فإن استخدام أيهما يكون صحيحاً ويكون قانونياً كالآخر. فيما يلي ملف إم ماتلاب لدالة الانحدار:

دالة ماتلاب لحساب دالة الانحدار التي تعطي صفراً لقيم المعاملات الأقل من أو تساوي صفر في المائة.

وتساوي قيمة المعامل نفسه لقيم المعاملات الأكبر من أو تساوي الصفر في %.

وتستخدم دالة الوحدة us(x) %

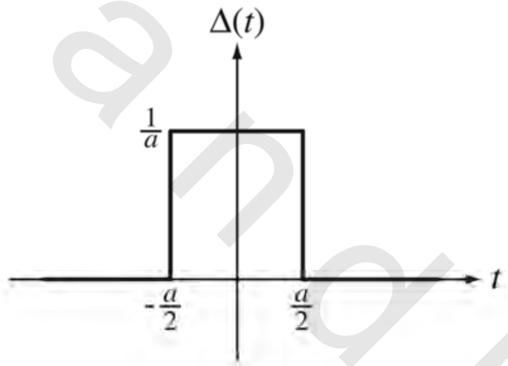
```
%
% function y = ramp(x)
%
function y = ramp(x)
      y =x.*us(x)     ;
```

دالة وحدة النبضة unit impulse

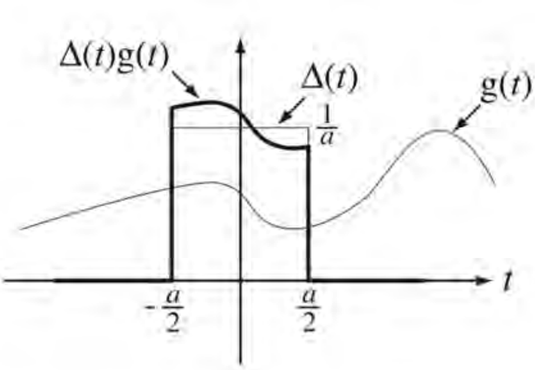
قبل تحديد وحدة النبضة سنستكشف أولاً فكرة مهمة. افترض نبضة مستطيلة مساحتها تساوي الوحدة تحدد كما يلي، وكما في شكل (٢،١٣):

$$\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & |t| \le a/2 \\ 0 & |t| > a/2 \end{cases}$$

دع هذه الدالة تضرب في الدالة g(t) المحددة والمستمرة عند الزمن t=0 ونوجد المساحة A تحت حاصل ضرب الدالتين $A = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(t) g(t) dt$ كما في شكل (٢- ١٤).



شكل رقم (٢،١٣) نبضة مستطيلة مساحتها تساوي الوحدة وعرضها a



شكل رقم (٢،١٤) حاصل ضرب نبضة مستطيلة مساحتها الوحدة متمركزة عند t=0 ودالة g(t) محددة ومستمرة عند t=0

باستخدام التعريف Δ(t) يمكننا إعادة كتابة التكامل كما يلي :

$$A = \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} g(t)\, dt$$

الدالة g(t) تكون مستمرة عند t=0 ، ولذلك فإنه يمكن التعبير عنها بتتابع ماكلورين McLaurin كما يلي :

$$g(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g^{(m)}(0)}{m!} t^m = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{g^{(m)}(0)}{m!}t^m + \cdots$$

وبالتالي يصبح التكامل كما يلي :

$$A = \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2}\left[g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{g^{(m)}(0)}{m!}t^m + \cdots\right] dt$$

كل القوى الفردية للزمن t لا تشارك في التكامل لأنها مأخوذة على الحدود المتماثلة حول t=0. بتنفيذ هذا التكامل نحصل على :

$$A = \frac{1}{a}\left[a g(0) + \left(\frac{a^3}{12}\right)\frac{g''(0)}{2!} + \left(\frac{a^5}{80}\right)\frac{g^{(4)}(0)}{4!} + \cdots\right]$$

بأخذ حدود هذا التكامل مع اقتراب a من الصفر نحصل على :

$$\lim_{a\to 0} A = g(0)$$

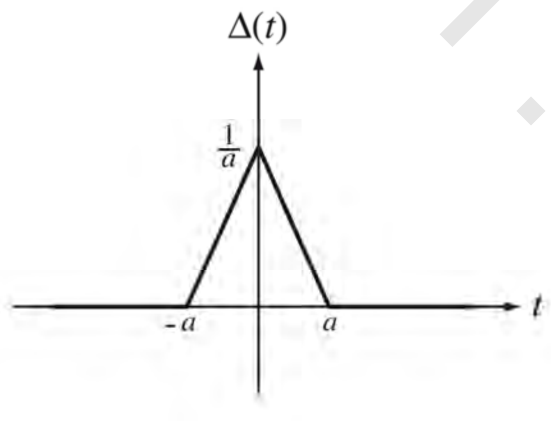
عند الحد مع اقتراب a من الصفر ، فإن الدالة Δ(t) تستخلص قيمة أي دالة مستمرة محددة g(t) عند الزمن t=0 ، عندما يتم تكامل حاصل ضرب كل من Δ(t) و g(t) على المدى الزمني الذي يشتمل على الزمن t=0.

الآن سنحاول مع تعريفات مختلفة للدالة Δ(t). افترض التعريف التالي الآن كما في شكل (٢,١٥) :

$$\Delta(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{|t|}{a}\right), & |t| \le a \\ 0, & |t| > a \end{cases}$$

إذا افترضنا الجدل السابق نفسه فسنحصل على المساحة التالية :

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(t) g(t) dt = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left(1 - \frac{|t|}{a}\right) g(t) dt$$



شكل رقم (٢,١٥) نبضة مثلثة مساحتها الوحدة ونصف عرض قاعدتها يساوي a

بأخذ الحد مع اقتراب a من الصفر، فإننا نحصل مرة أخرى على g(0)، وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها مع التعريف السابق لـ Δ(t). التعريفان السابقان لـ Δ(t) لهما نفس التأثير عند الحدود عندما تقترب a من الصفر (وليس قبل ذلك). إن شكل الدالة لا يكون هو المهم عند الحدود، ولكن مساحتها تكون هي المهمة. في أي من الحالتين فإن Δ(t) تكون دالة مساحتها تساوي الواحد، دون الاعتماد على قيمة a. (مع اقتراب a من الصفر فإن هذه الدوال لا يكون لها شكل بالمعنى الأولي؛ لأنه لا يوجد زمن يتم فيه بناء هذا الشكل). هناك العديد من التعريفات الأخرى لـ Δ(t) التي يمكن استخدامها التأثير نفسه تماما عند الحدود.

وحدة النبضة δ(t) يمكن تعريفها الآن بشكل مطلق عن طريق الخاصية بأنه عند ضربها في أي دالة g(t) مستمرة ومحددة عند الزمن t=0 وتكامل هذا الضرب على فترة زمنية تشتمل على الزمن t=0، فإن نتيجة التكامل تكون g(0) كما يلي:

$$g(0) = \int_{\alpha}^{\beta} \delta(t)g(t)dt, \quad \alpha < 0 < \beta$$

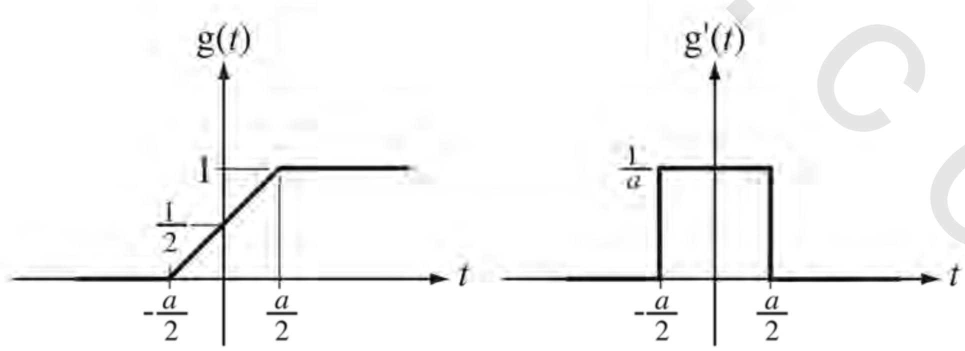
أو بمعنى آخر فإن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)g(t)dt = \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(t)g(t)dt \qquad \text{المعادلة رقم (٢,٤)}$$

حيث Δ(t) هي واحدة من العديد من الدوال التي تكون لها الخواص السابق ذكرها. إن الرمز δ(t) يعتبر رمزاً مبسطاً ومريحاً يتجنب الاستمرار في إجراء الحدود عند استخدام الصدمات.

النبضة، ووحدة الخطوة، والتفاضلات العامة

واحدة من طرق تقديم وحدة النبضة هي عن طريق تعريفها بأنها تفاضل دالة وحدة الخطوة، وبالتحديد، فإن تفاضل وحدة الخطوة u(t) يكون غير معرف عند t=0. ولكن افترض أي دالة g(t) في الزمن وتفاضلها الزمني g’(t) كما هو موضح في شكل (٢,١٦):



شكل رقم (٢,١٦) الدوال التى تقترب من وحدة الخطوة ووحدة النبضة

تفاضل الدالة g(t) يوجد عند كل الأزمنة t ما عدا عند الزمن t=-a/2 والزمن t=+a/2. مع اقتراب a من الصفر، فإن الدالة g(t) تقترب من وحدة الخطوة. عند الحدود نفسها ، فإن العرض المختلف عن الصفر للدالة g'(t) يقترب من الصفر، بينما تظل مساحتها كما هي تساوي الواحد. وعلى ذلك، فإن g'(t) تكون نبضة قصيرة الزمن مساحتها تساوي دائماً الواحد، وهو ما حصلنا عليه مع التعريف نفسها الابتدائي السابق لـ Δ(t)، ونفس الآثار المترتبة عليه. إن الحد الذي نحصل عليه مع اقتراب a من الصفر للدالة g'(t) يسمى التفاضل العام للدالة u(t). ولذلك فإن وحدة النبضة هي التفاضل العام لوحدة الخطوة.

التفاضل العام لأي دالة g(t) مع عدم اتصال عند t=0 يمكن كتابته كما يلي :

$$\frac{d}{dt}\big(g(t)\big) = \underbrace{\frac{d}{dt}\big(g(t)\big)_{t\neq t_0} + \lim_{\varepsilon\to 0}[g(t+\varepsilon) - g(t-\varepsilon)]}_{\text{حجم عدم الاتصال}}\,\delta(t-t_0), \quad \varepsilon > 0$$

وحدة الخطوة تساوي تكامل وحدة النبضة :

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda)\, d\lambda$$

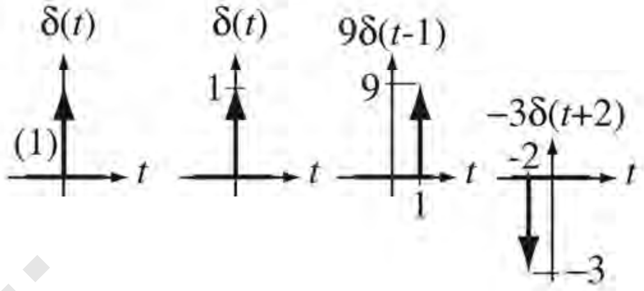
تفاضل وحدة الخطوة u(t) تكون صفراً في كل الأوقات ماعدا t=0، وعلى ذلك فإن وحدة النبضة تكون صفراً في كل الأماكن ماعدا عند t=0. حيث إن وحدة الخطوة تساوي تكامل وحدة النبضة، فإن التكامل المحدود لوحدة النبضة على مدى يشتمل على t=0 يجب أن تكون قيمته تساوي الواحد. هاتان الحقيقتان تستخدمان عادة في تعريف وحدة النبضة كما يلي :

$$\delta(t) = 0,\ \ t \neq 0\ \ and\ \ \int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\, dt = \begin{cases} 1 & t_1 < 0 < t_2 \\ 0 & otherwis \end{cases}$$ المعادلة رقم (٢,٥)

تسمى المساحة تحت النبضة بالشدة، أو أحياناً يطلق عليها الوزن. أي نبضة بمساحة تساوي الواحد تسمى وحدة النبضة. التعريق الدقيق وخواص النبضة يتطلبان الغوص، أو التعمق في النظرية العامة للدوال. سيكون من الكافي هنا أن نفترض أن وحدة النبضة تكون ببساطة نبضة ذات مساحة تساوي الواحد وفترة زمنية صغيرة جداً بحيث يكون أي تصغير لهذه الفترة أكثر من ذلك لن يحدث أي تغيير مهم في أي إشارة في النظام يتم تطبيق النبضة عليها.

لا يمكن رسم النبضة بالطريقة نفسها مثل الدوال الأخرى؛ لأن قيمتها تكون غير معرفة عندما يكون معاملها يساوي صفراً. العرف السائد لرسم النبضة هو استخدام السهم الرأسي. أحياناً تتم كتابة شدة النبضة بجوار السهم

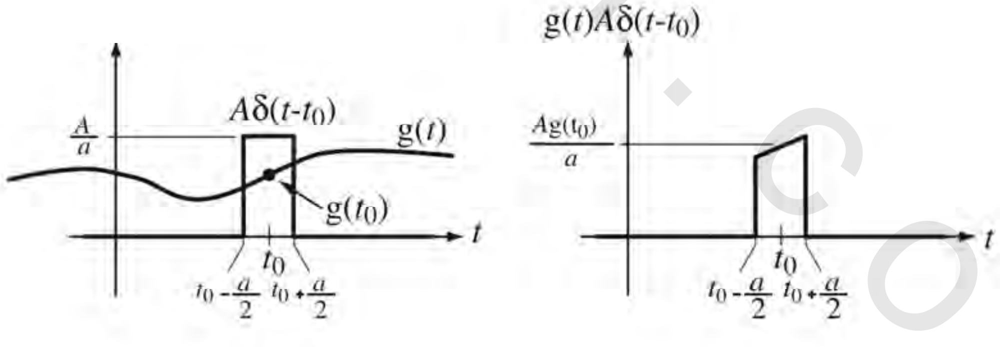
بين قوسين، وأحياناً يكون ارتفاع السهم مبيناً لشدة النبضة. شكل (٢,١٧) يوضح بعض الطرق للتعبير عن النبضة بيانيا أو من خلال الرسم.



شكل رقم (٢,١٧) التعبير البياني أو مخطط الصدمات

خاصية التكافؤ للنبضة

واحدة من العمليات الحسابية الشائعة في تحليل الإشارات والأنظمة هي ضرب النبضة مع دالة أخرى مثل، $g(t)A\delta(t-t_0)$. افترض أن النبضة $A\delta(t-t_0)$ هي الحد لنبضة مساحتها A متمركزة عند $t=t_0$، وعرضها و a، عندما تقترب a من الصفر كما في شكل (٢,١٨). حاصل الضرب هو النبضة التي يكون ارتفاعها عند نقطة المنتصف يساوي $Ag(t_0)/a$ والتي عرضها يساوي a. مع اقتراب a من الصفر، فإن النبضة تصبح نبضة وشدة هذه النبضة يساوي $Ag(t_0)$. لذلك يمكننا كتابة ما يلي:



شكل رقم (٢,١٨) حاصل ضرب دالة g(t) ودالة مستطيلة يصبح نبضة مع اقتراب العرض من الصفر

$$g(t)A\delta(t-t_0)=g(t_0)A\delta(t-t_0) \quad \text{المعادلة رقم (٢,٦)}$$

إن هذا يسمى أحياناً بخاصية التكافؤ للنبضة.

خاصية أخذ العينة (العيننة) للنبضة

خاصية أخرى مهمة لوحدة النبضة يتم استنتاجها من خاصية التكافؤ وهي خاصية العيننة.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t-t_0)dt = g(t_0)$$ المعادلة رقم (٢،٧)

تبعاً لخاصية التكافؤ، فإن حاصل الضرب $g(t)\delta(t-t_0)$ يساوي $g(t_0)\delta(t-t_0)$. وحيث إن t_0 هي قيمة خاصة من t، فإنها تكون ثابتاً وكذلك تكون قيمة $g(t_0)$ ثابتاً أيضاً، وبالتالي فإن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t-t_0)\,dt = g(t_0)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt}_{=1} = g(t_0)$$

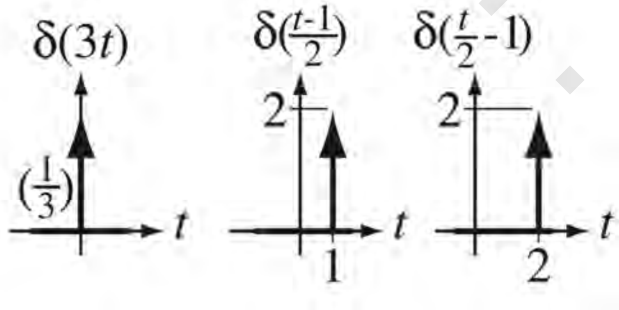
المعادلة (٢،٧) تسمى خاصية العيننة للنبضة؛ لأنه في التكامل الذي من هذا النوع يتم أخذ عينة من قيمة الدالة $g(t)$ عند الزمن $t=t_0$. (الاسم القديم لها كان خاصية الغربلة، حيث إن النبضة تقوم بغربلة قيمة الدالة $g(t)$ عند الزمن $t=t_0$).

خاصية التحجيم للنبضة

خاصية أخرى مهمة للنبضة هي خاصية التحجيم المعرفة كما يلي:

$$\delta(a(t-t_0)) = \frac{1}{|a|}\delta(t-t_0)$$ المعادلة رقم (٢،٨)

وهذه يمكن إثباتها من خلال تغير المتغيرات في تعريف التكامل وفص افتراض القيم الموجبة والسالبة للقيمة a (انظر التمرين ٢٩). شكل (٢،١٩) يوضح بعض التأثيرات لخاصية التحجيم للنبضة.



شكل رقم (٢،١٩) أمثلة على تأثيرات خاصية التحجيم للنبضة

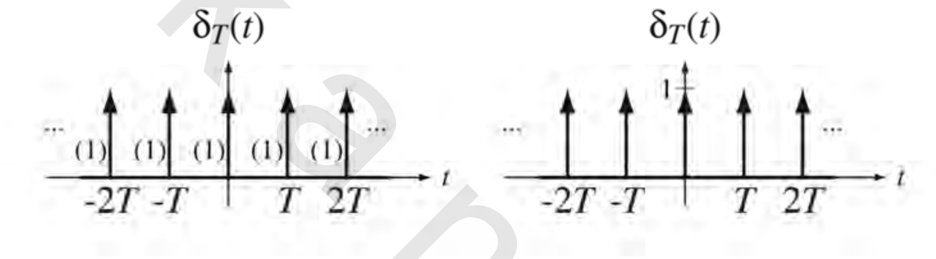
هناك دالة في ماتلاب تسمى dirac تعطي وحدة النبضة بمعنى محدود. إنها تعطي صفراً لكل المعاملات التي لا تساوي الصفر وتعطي inf للمعامل الذي يساوي الصفر. إن ذلك لا يكون مفيداً في الحسابات الرقمية، ولكنه

يفيد في التحليل الرمزي. إن النبضة المستمرة زمنياً ليست دالة عادية. أحياناً يمكن كتابة دالة ماتلاب يمكن استخدامها، في نوع معين من الحسابات، لتحاكي النبضة وتعطي نتائج رقمية مفيدة. ولكن يجب عمل ذلك بحرص شديد، واعتماد على الفهم الكامل لخواص النبضة. لن نقدم دالة ماتلاب هنا للنبضة المستمرة زمنياً نتيجة هذا التعقيد.

وحدة النبضة الدورية أو تتابع الصدمات

واحدة أخرى من الدوال المهمة العامة هي النبضة الدورية، أو تتابع الصدمات كما في شكل (٢,٢٠)، الذي هو عبارة عن تتابع لا نهائي من الصدمات المنتظم المسافات والمعرف كما يلي:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \qquad \text{المعادلة رقم (٢,٩)}$$



شكل رقم (٢,٢٠) النبضة الدورية

يمكننا استنتاج خاصية تحجيم للنبضة الدورية. من التعريف التالي:

$$\delta_T\big(a(t-t_0)\big) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\big(a(t-t_0) - kT\big)$$

باستخدام خاصية التحجيم للنبضة يمكننا كتابة:

$$\delta_T\big(a(t-t_0)\big) = \left(\frac{1}{|a|}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0 - kT/a)$$

حيث يمكن التعرف على المجموع على أنه نبضة دورية دورتها تساوي T/a كما يلي:

$$\delta_T\big(a(t-t_0)\big) = \left(\frac{1}{|a|}\right) \delta_{T/a}(t - t_0)$$

يمكن النظر للنبضة والنبضة الدورية على أنهما يبدوان نظريات تجريدية وغير حقيقية. ستظهر النبضة بعد ذلك في عملية أساسية في تحليل الأنظمة الخطية، وهي الالتفاف التكاملي. على الرغم من أنه، كواقع، فإنه يستحيل توليد النبضة الحقيقية، إلا أن النبضة الحسابية والنبضة الدورية مفيدتان جدا في تحليل الإشارات والأنظمة. باستخدامهما مع عملية الالتفاف، فإنه يمكننا التعبير حسابياً، وبترميز مدمج، عن العديد من الإشارات التي من الممكن أن يكون التعبير عنها ثقيلاً أو متعباً بأي طريقة أخرى.

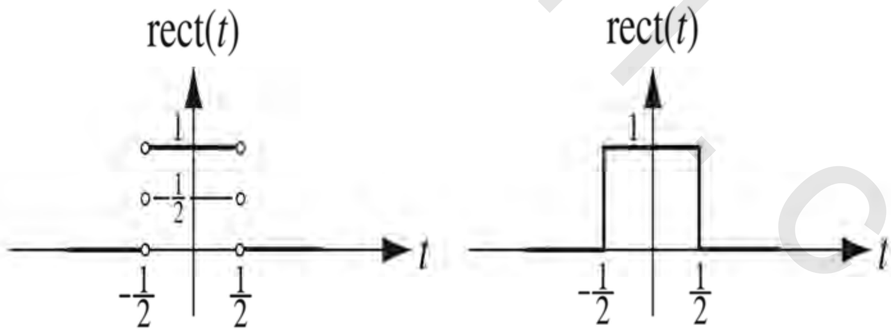
الترميز المنسق للدوال الأحادية

وحدة الخطوة، ووحدة النبضة، ووحدة الانحدار تمثل أهم الأعضاء في الدوال الأحادية. في بعض مطبوعات الإشارات والأنظمة يتم بيان هذه الدوال بالرمز المنسق $u_k(t)$ والذي فيه قيمة k تحدد الدالة. فمثلا، $u_0(t)=\delta(t)$، و $u_{-1}(t)=u(t)$، و $u_{-2}(t)=ramp(t)$. في هذا الترميز فإن الرقم الجانبي يبين كم مرة يتم تفاضل النبضة للحصول على الدالة المطلوبة والإشارة السالبة الجانبية تدل على إجراء التكامل بدلا من التفاضل. unit doublet $u_1(t)$ أو واحدة الاثنين تعرف على أنها التفاضل العام لوحدة النبضة، و unit triplet $u_2(t)$ أو الواحد من ثلاثة تعرف على أنها التفاضل العام لواحد الاثنين، وهكذا. على الرغم من أن دالة الواحد من اثنين والواحد من ثلاثة والتفاضلات العامة الأعلى تكون أقل في الجانب العملي عن وحدة النبضة، إلا أنها تكون مفيدة أحياناً في نظريات الإشارات والأنظمة.

دالة وحدة المستطيل

نوع من الإشارات شائع الحدوث جداً في الأنظمة وهو الإشارة التي تبدأ عند زمن معين، ثم تنتهي عند زمن آخر. من المريح أن نعرف دالة وحدة المستطيل كما في شكل (٢,٢١) لاستخدامها في وصف هذا النوع من الإشارات كما يلي:

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ \frac{1}{2} & |t| = 1/2 \\ 0 & |t| > 1/2 \end{cases}$$
المعادلة رقم (٢,١٠)



شكل رقم (٢,٢١) دالة وحدة المستطيل

إنها دالة وحدة مستطيل لأن عرضها، وارتفاعها، ومساحتها كلها تساوي آحاداً. إن استخدام دالة المستطيل يقصر من عملية الترميز عند وصف بعض الإشارات. يمكن التفكير في دالة وحدة المستطيل على أنها دالة

"بوابة gate". عند ضربها في دالة أخرى، فإن حاصل الضرب يكون صفراً خارج النطاق الذي لا تساوي فيه صفراً وتساوي الدالة الأخرى في داخل النطاق الذي لا تكون فيه الدالة المستطيلة تساوي صفراً. أي أن دالة المستطيل تفتح البوابة لتسمح بمرور الدالة الأخرى، وبعد ذلك تغلق البوابة مرة أخرى. جدول (٢،١) يعرض ملخصاً لهذه الدوال والنبضة والنبضة الدورية التي وصفها فيما سبق.

دالة وحدة المستطيل، باستخدام دالة وحدة الخطوة us(x) ٪

```
%
% function y = rect(x)
%
 function y = rect(x)
       y = us(x+0.5) – us(x-0.5);
```

جدول ٢,١ ملخص لدوال إشارات الزمن المستمر، والنبضة، والنبضة الدورية

الجيب Sin	$\sin(\omega_0 t)$ أو $\sin(2\pi f_0 t)$
جيب التمام Cosine	$\cos(\omega_0 t)$ أو $\cos(2\pi f_0 t)$
الأس Exponential	e^{st}
وحدة الخطوة Unit step	$u(t)$
الإشارة Signum	$\mathrm{sgn}(t)$
وحدة الانحدار Unit ramp	$\mathrm{ramp}(t)=t\,u(t)$
وحدة النبضة Unit impulse	$\delta(t)$
النبضة الدورية Periodic impulse	$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$
وحدة المستطيل Unit rectangle	$\mathrm{rect}(t)=u(t+1/2)-u(t-1/2)$

(٢,٤) تراكيب الدوال

الرمز القياسي لدالة في الزمن المستمر هو $g(t)$ الذي تكون فيه g اسم الدالة وكل شيء داخل القوسين (.) يسمى معاملات الدالة. تتم كتابة المعاملات بدلالة المتغير المستقل. في حالة الدالة $g(t)$، تكون t هي المتغير المستقل والتعبير هو من أبسط التعبيرات الممكنة بدلالة t، وهو المتغير t نفسه. أي دالة $g(t)$ تعطى أو تعود بالقيمة g عند كل قيمة للمتغير t. في الدالة $g(t)=2+4t^2$، لأي قيمة للمتغير t هناك قيمة مقابلة للدالة g. إذا كانت t تساوي 1، فإن g تساوي 6 ويمكن الرمز لذلك كما يلي: $g(1)=6$.

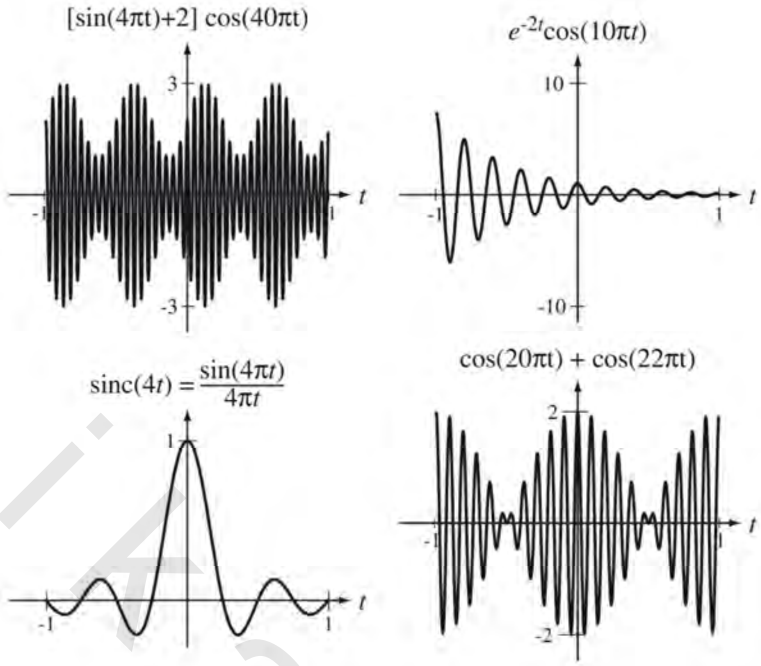
ليس بالضرورة أن تكون معاملات الدالة ببساطة هي المتغير المستقل. إذا كانت $g(t)=5e^{-2t}$، فما هي قيمة $g(t+3)$؟ إننا نستبدل t بـ t+3 في كل مكان على جانبي الدالة $g(t)=5e^{-2t}$ لنحصل على $g(t+3)=5e^{-2(t+3)}$. لاحظ أننا لم نحصل على $5e^{-2t+3}$ حيث t كانت مضروبة في 2- في الأس e، ولذلك فإن كل التعبير (t+3) يجب ضربه أيضاً في 2- في

الأس الجديد e. أي شيء يتم إجراؤه على t في الدالة $g(t)$ يجب إجراؤه على كل التعبير expression المشتمل على t في أي دالة أخرى $g(\text{expression})$. إذا كانت $g(t)=3+t^2-2t^3$ فإن $g(2t)=3+(2t)^2-2(2t)^3=3+4t^2-16t^3$ ، و $g(1-t)=3+(1-t)^2-2(1-t)^3=2+4t-5t^2+2t^3$. إذا كانت $g(t)=10\cos(20\pi t)$ فإن $g(t/4)=10\cos(20\pi t/4)=10\cos(5\pi t)$ ، و $g(e^t)=10\cos(20\pi e^t)$. وإذا كانت $g(t)=5e^{-10t}$ فإن $g(2x)=5e^{-20x}$ ، و $g(z-1)=5e^{10}e^{-10z}$.

في ماتلاب، عند النداء على أي دالة عن طريق تمرير المعاملات إليها، فإن ماتلاب يقوم بتقييم المعاملات، وبعد ذلك يحسب قيمة الدالة. في معظم الدوال، إذا كان المعامل عبارة عن متجه، أو مصفوفة، فإن ماتلاب يعود بقيمة لكل عنصر في المتجه، أو المصفوفة. لذلك فإن دوال ماتلاب تقوم بعمل ما وصفناه مسبقاً بالضبط على المعاملات التي تكون دالة في المتغير المستقل: إنها تستقبل أرقاماً وتعطي أرقاماً أخرى.

```
>> exp(1:5)
ans =
2.7183 7.3891 20.0855 54.5982 148.4132
>> us(-1:0.5:1)
ans =
0 0 0.5000 1.0000 1.0000
>> rect([-0.8:0.4:0.8]')
ans =
        0
        1
        1
        1
        0
```

في بعض الأحوال يمكن لدالة حسابية واحدة أن تصف إشارة معينة بالكامل. ولكن في العادة لاتكون دالة واحدة كافية للوصف الدقيق لبعض الإشارات. هناك عملية تسمح بالتنوع في التعبير الحسابي عن الإشارات وهي ربط أو تجميع اثنين، أو أكثر من الدوال. هذا الربط بين الدوال من الممكن أن يكون في صورة جمع، أو فروق، أو ضرب و/أو حواصل قسمة دوال. شكل (٢،٢٢) يبين بعض الأمثلة على المجاميع، والضرب، وحاصل قسمة الدوال. (الدالة sinc سيتم تعريفها في الفصل ٦).



شكل رقم (٢,٢٢) أمثلة على المجاميع، والضرب، وحاصل القسمة للدوال

مثال ٢,١

رسم تجميعات الدوال بماتلاب

باستخدام ماتلاب، ارسم تجميعات الدوال التالية:

$$x_1(t) = e^{-t}\sin(20\pi t) + e^{-t/2}\sin(19\pi t)$$
$$x_2(t) = rect(t)\cos(20\pi t)$$

برنامج لرسم بعض الأمثلة على تجميعات الدوال المستمرة زمنياً %

t = 0:1/240:6; ٪ متجه النقاط الزمنية لرسم x_1

٪ توليد قيم x_1 للرسم

x1 = exp(-t).*sin(20*pi*t) + exp(-t/2).*sin(19*pi*t) ;

subplot(2,1,1) ; ٪ الرسم في النصف الأعلى من نافذة الرسم

p = plot(t, x1, 'k') ; ٪ رسم المخطط بالخطوط السوداء

set(p, 'LineWidth', 2) ; ٪ ضبط عرض الخط على ٢

٪ عنوان المحور الأفقي والرأسي

```
xlabel('\itt', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 24);
ylabel('x_1({\itt})', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 24);
set(gca,'FontName','Times','FontSize',18) ; grid on ;
```

t=-2:1/240:2 ; ٪ متجه النقاط الزمنية لرسم x2

توليد قيم x2 للرسم ٪

```
x2 = rect(t).*cos(20*pi*t) ;
```

الرسم في النصف الأسفل من نافذة الشكل ٪ subplot(2,1,2) ;

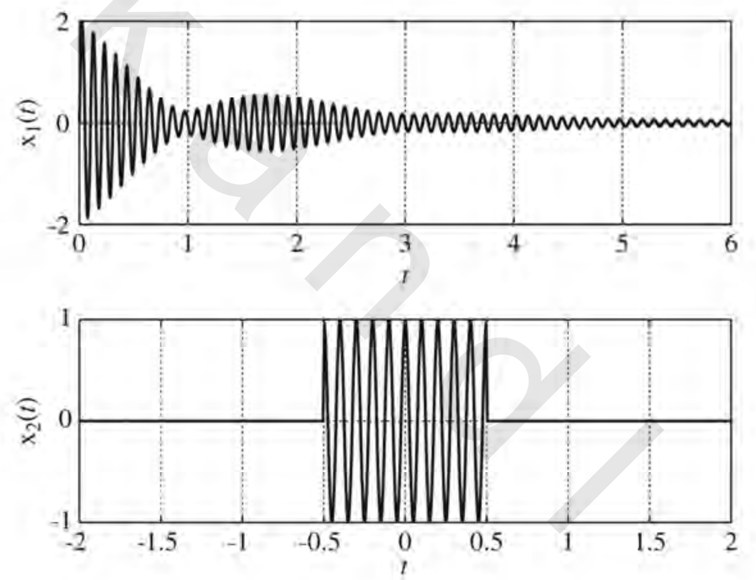
عرض الرسم بخطوط سوداء ٪ p = plot(t, x2, 'k');

تثبيت عرض الخط على ٢ ٪ set(p, 'LineWidth', 2) ;

عنوان المحور الأفقي والرأسي ٪

```
xlabel('\itt', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 24);
ylabel('x_2({\itt})', 'FontName', 'Times', 'FontSize', 24);
set(gca,'FontName','Times','FontSize',18) ; grid on ;
```

شكل رقم (٢,٢٣) يبين الأشكال الناتجة من هذا البرنامج.



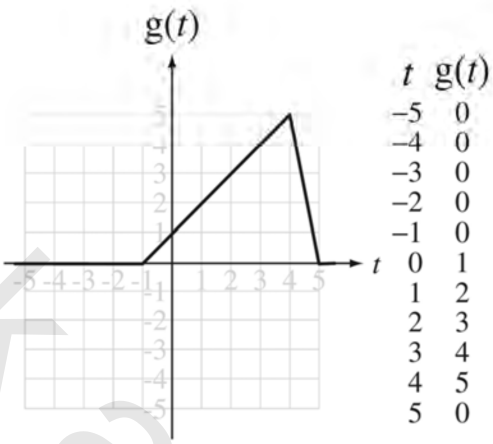
شكل رقم (٢,٢٣) نتائج الرسم بماتلاب

(٢,٥) الإزاحة والتحجيم

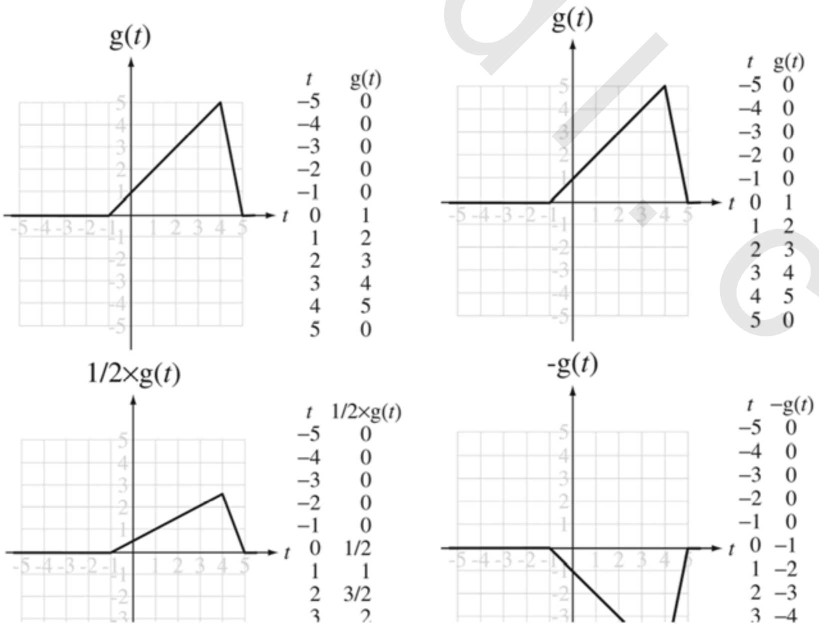
من المهم أن نكون قادرين على وصف الإشارات تحليليا وبيانيا وأن نكون قادرين على ربط هذين النوعين المختلفين من الوصف مع بعضهما بعضاً. افترض الدالة g(t) المعرفة كما في شكل (٢,٢٤) مع بعض القيم المختارة في الجدول الذي على يمين الشكل. لكي نكمل وصف الدالة سنفترض g(t)=0 لكل |t|>5.

تحجيم المقدار

افترض عملية ضرب دالة في ثابت. يمكن توضيح ذلك بالرمز g(t)→Ag(t). لذلك فإن g(t)→Ag(t) ستضرب الدالة g(t) عند كل قيمة للزمن t في الثابت A. إن هذا يسمى تحجيم المقدار amplitude scaling. شكل (٢,٢٥) يبين مثالين على تحجيم المقدار للدالة g(t) المعرفة في شكل (٢,٢٤).



شكل رقم (٢,٢٤) التعريف البياني لدالة g(t)



شكل رقم (٢,٢٥) يبين مثالين على تحجيم المقدار

معامل تحجيم المقدار السالب يقوم بقلب الدالة عمودياً. إذا كان معامل التحجيم يساوي - ١ كما في هذا المثال، فإن الانقلاب سيكون هو التأثير الوحيد. إذا كان معامل التحجيم يساوي أي معامل آخر A وكانت A سالبة، فإن التحجيم المقداري يمكن النظر إليه على أنه اثنان من العمليات المتتابعة $g(t)\rightarrow -g(t)\rightarrow |A|(-g(t))$، وهي الانقلاب المصحوب بالتحجيم المقداري الموجب. التحجيم المقداري يؤثر مباشرة على المتغير التابع g. الجزءان التاليان يقدمان تأثيرات تغيير المتغير المستقل t.

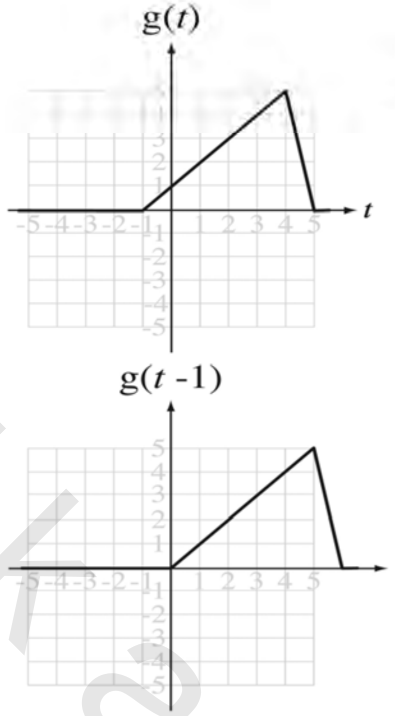
الإزاحة الزمنية

إذا كان الرسم الموضح في الشكل (٢,٢٤) يعرف g(t)، فما هو شكل g(t-1)؟ يمكننا أن نفهم هذا التأثير عن طريق رسم قيمة الدالة g(t-1) عند عدد من النقاط كما في شكل (٢,٢٦). يجب أن يكون من الواضح بعد فحص الأشكال والداول التي تستبدل t بـ t-1 بأنها تزيح الدالة وحدة واحدة ناحية اليمين كما في شكل (٢,٢٦). التغيير $t\rightarrow t-1$ يمكن وصفه عن طريق القول "لكل قيمة للزمن t، ننظر للخلف وحدة زمنية واحدة، ونحصل على قيمة g عند هذا الزمن، ونستخدمها كقيمة لـ g(t-1) عند الزمن t ". إن هذا يسمى الإزاحة الزمنية، أو الانتقال الزمني.

يمكننا أن نلخص الإزاحة الزمنية عن طريق القول بأن التغيير في المتغير المستقل $t\rightarrow t-t_0$ حيث t_0 هي أي ثابت، يكون له تأثير إزاحة g(t) ناحية اليمين بمقدار t_0 من الوحدات. (إن ذلك يتوافق مع التفسير المقبول عن الأرقام السالبة، إذا كانت t_0 سالبة، فإن الإزاحة تكون ناحية اليسار بمقدار $|t_0|$ من الوحدات).

شكل (٢,٢٧) يبين بعض الإزاحات الزمنية والتحجيم المقداري لدالة وحدة الخطوة. الدالة المستطيلة تساوي الفرق بين دالتي وحدة الخطوة وهما مزاحتان زمنياً في اتجاهين متعاكسين $rect(t)=u(t+1/2)-u(t-1/2)$.

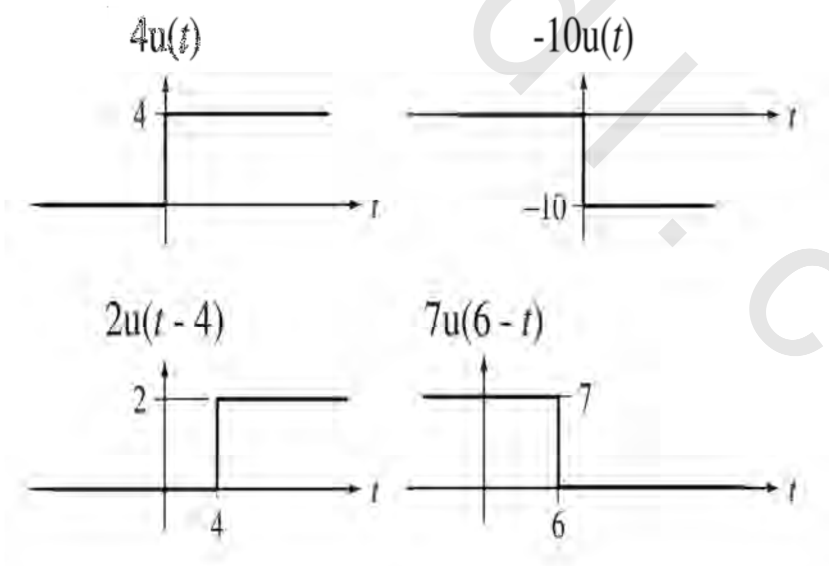
الإزاحة الزمنية تتم عن طريق تغيير في المتغير المستقل. هذا النوع من التغيير يمكن أن يحدث على أي متغير مستقل، وليس بالضرورة أن يكون الزمن. الأمثلة التي قدمناها هنا كانت تستخدم الزمن، ولكن المتغير المستقل يمكن أن يكون بعداً مساحياً. في هذه الحالة يمكننا أن نطلق عليه الإزاحة الفراغية. بعد ذلك، وفي الفصول عن التحويلات، سنعرض دوالّ في متغير مستقل وهو التردد، وهذا التغير سيطلق عليه الإزاحة الترددية. إن المفهوم الحسابي يكون هو نفسه بصرف النظر عن الإسم المستخدم للمتغير المستقل.



t	$g(t)$
−5	0
−4	0
−3	0
−2	0
−1	0
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5
5	0

t	$t-1$	$g(t-1)$
−5	−6	0
−4	−5	0
−3	−4	0
−2	−3	0
−1	−2	0
0	−1	0
1	0	1
2	1	2
3	2	3
4	3	4
5	4	5

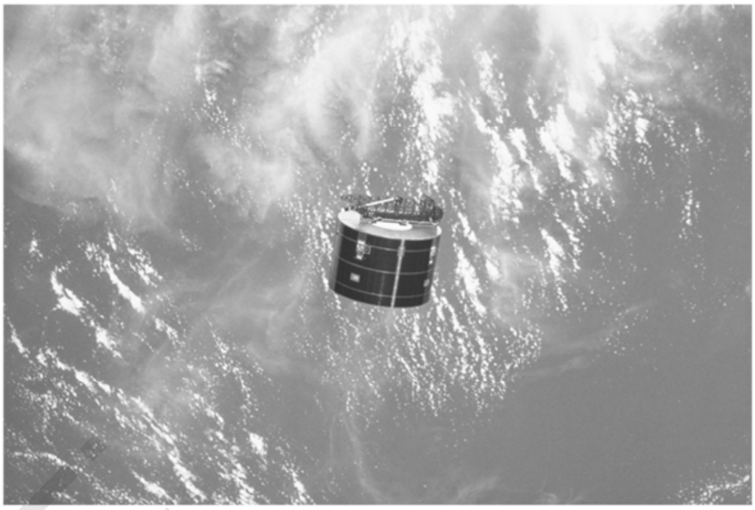
شكل رقم (٢,٢٦) شكل (g(t-1 كعلاقة مع (g(t موضحا الإزاحة الزمنية



شكل (٢,٢٧) التحجيم المقداري والإزاحة الزمنية لدالة وحدة الخطوة

التحجيم المقداري والإزاحة الزمنية يحدثان في العديد من الأنظمة الطبيعية العملية. في نظام المحادثة العادي يكون هناك تأخير بسبب الانتشار، وزمن الانتشار هو الزمن اللازم للموجة الصوتية لكي تنتقل من فم الشخص المتكلم إلى أذن الشخص المستمع. إذا كانت هذه المسافة تساوي 2 متر وسرعة الصوت هي 330 متر في الثانية، فإن زمن التأخير بسبب الانتشار الموجي تكون حوالي 6 ميللي ثانية، وهذا التأخير لا يمكن ملاحظته. ولكن افترض شخصاً يلاحظ سائقاً يصطدم بكومة من على مسافة مقدارها 100 متر. في البداية سيستشعر الملاحظ صورة السائق وهو يصطدم بالكومة. سيكون هناك تأخير قليل نتيجة سرعة الضوء من سائق الكومة حتى العين ولكن هذا الزمن يكون أقل من ميكروثانية واحدة. صوت اصطدام السائق بالكومة يصل لأذن الملاحظ متأخراً حوالي 0.3 ثانية بعد ذلك. يعتبر ذلك مثالاً على الإزاحة الزمنية. صوت الاصطدام تكون شدته أعلى كثيراً بالقرب من السائق عنها عند المسافة 100 متر، وهذا يعتبر مثالاً على التحجيم المقداري. مثال مشهور آخر هو زمن التأخير بين رؤية البرق وسماع صوت الرعد الذي ينتج عنه.

مثال آخر أكثر تقنية، إفترض نظام الاتصالات بالقمر الصناعي كما في شكل (٢،٢٨). ترسل المحطة الأرضية إشارة كهرومغناطيسية قوية إلى القمر الصناعي. عندما تصل الإشارة إلى القمر الصناعي يكون المجال الكهرومغناطيسي أكثر ضعفاً عنه عند المحطة الأرضية، كما أنها تصل متأخرة نتيجة التأخير الانتشاري. إذا كان القمر الصناعي متزامناً أرضياً فإنه يكون على بعد حوالي 36000 كيلومتر فوق الأرض، ولذلك إذا كانت المحطة الأرضية تحت القمر الصناعي مباشرة، فإن زمن التأخير الناتج عن صعود الإشارة يكون حوالي 120 ميللي ثانية. بالنسبة للمحطات الأرضية التي ليست تحت القمر مباشرة سيكون هذا التأخير أعلى. إذا كانت الإشارة المرسلة هي $Ax(t)$، فإن الإشارة المستقبلة ستكون $Bx(t-t_p)$ حيث B تكون أقل كثيراً من A والزمن t_p هو زمن التأخير الناتج عن الانتشار الموجي. في روابط الاتصالات بين المواضع المختلفة المتباعدة عن بعضها على الأرض، فإن الأمر قد يتطلب أكثر من رابط صاعد وآخر هابط لإتمام عملية الاتصالات. إذا كانت عملية الاتصالات هي اتصالات صوتية بين مركز تليفزيوني في نيويورك ومراسل في كالكاتا، فإن زمن التأخير الكلي من الممكن أن يكون ببساطة ثانية واحدة، وهذا يعتبر زمن تأخير يمكن ملاحظته، ومن الممكن أن يسبب عدم راحة مقلقة في المحادثة. تخيل مشكلة الاتصالات مع أول رائد فضاء سيصل إلى المريخ. إن أقل زمن تأخير في اتجاه واحد عندما تكون الأرض والمريخ عند أقرب مسافة بينهما سيكون أكثر من أربع دقائق !



شكل رقم (٢,٢٨) قمر صناعي للاتصالات في مداره

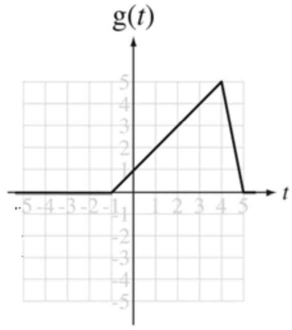
في حالة المدى الطويل، والاتصالات في الاتجاهين، يكون زمن التأخير مشكلة كبيرة. في المواقف الأخرى من الممكن أن يكون زمن التأخير مفيداً جداً، كما هو الحال في الرادار والسونار. في هذه الأحوال يكون زمن التأخير بين لحظة إرسال النبضة ولحظة استقبال انعكاسها تبين المسافة إلى الهدف الذي عكس النبضة، مثلاً طائرة، أو غواصة.

التحجيم الزمني

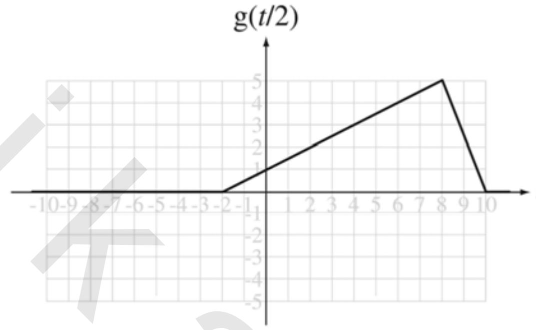
سنفترض الآن التغيير في المتغير المستقل والموضح بـ $t \to t/a$. إن ذلك يمدد، أو يوسع الدالة $g(t)$ أفقياً بمقدار المعامل a في الدالة $g(t/a)$. إن ذلك يسمى التحجيم الزمني. كمثال على ذلك سنرسم قيم مختارة للدالة $g(t/2)$ كما في شكل (٢,٢٩).

افترض الآن التغيير $t \to -t/2$، وهذا مثل المثال السابق تماماً فيما عدا أن معامل التحجيم أصبح الآن -2 بدلاً من 2 كما في شكل (٢,٣٠). التحجيم الزمني $t \to t/a$ يمدد الدالة أفقياً بمقدار المعامل $|a|$، وإذا كان $a<0$، فإن الدالة تنعكس زمنياً أيضاً. الانعكاس الزمني يعني انقلاب المنحني أفقياً. يمكن التفكير في حالة كون a سالبة على أنها $t \to -t$ متبوعة بـ $t \to t/|a|$، حيث العملية الأولى $t \to -t$ تعكس الدالة زمنياً بدون تغيير في تحجيمها الأفقي. العملية الثانية $t \to t/|a|$ تؤدي إلى التحجيم الزمني للدالة التي تم انعكاسها بمقدار معامل التحجيم $|a|$.

من الممكن أن يكون التحجيم الزمني أيضاً على الصورة $t \to bt$، وهذا لا يعتبر جديداً، لأنه يشبه تماماً التحجيم $t \to t/a$ حيث $b=1/a$. وعلى ذلك فإن كل قوانين التحجيم ما زالت مطبقة مع وجود هذه العلاقة بين ثابتي التحجيم a و b.

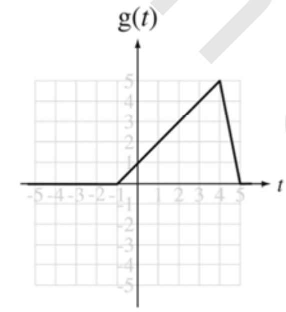


t	$g(t)$
−5	0
−4	0
−3	0
−2	0
−1	0
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5
5	0

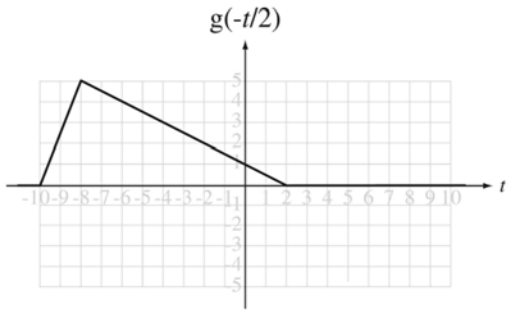


t	$t/2$	$g(t/2)$
−10	−5	0
−8	−4	0
−6	−3	0
−4	−2	0
−2	−1	0
0	0	1
2	1	2
4	2	3
6	3	4
8	4	5
10	5	0

شكل رقم (٢,٢٩) مخطط يوضح الدالة $g(t/2)$ كعلاقة مع الدالة $g(t)$ مبينا التحجيم الزمني



t	$g(t)$
−5	0
−4	0
−3	0
−2	0
−1	0
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5
5	0



t	$-t/2$	$g(-t/2)$
−10	5	0
−8	4	5
−6	3	4
−4	2	3
−2	1	2
0	0	1
2	−1	0
4	−2	0
6	−3	0
8	−4	0
10	−5	0

شكل رقم (٢,٣٠) مخطط للدالة $g(-t/2)$ كعلاقة مع الدالة $g(t)$ مبيناً التحجيم الزمني في وجود معامل تحجيم سالب

شكل رقم (٢,٣١) رجال الإطفاء على عربة الإطفاء

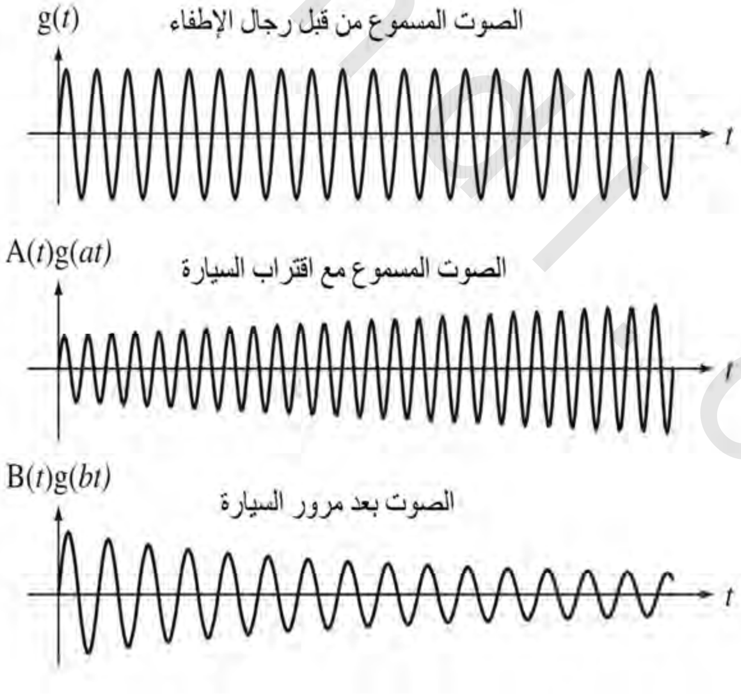
واحدة من الخبرات الشائعة التي تبين التحجيم الزمني هي تأثير الدوبلر Doppler. إذا وقفنا على جانب طريق وكانت عربة إطفاء تقترب مشغلة صوت النفير الخاص بها، فإنه مع مرور عربة الإطفاء، فإن كل من شدة الصوت وتردده، أو ذبذباته تبدو أنها تتغير كما في شكل (٢,٣١). شدة الصوت تتغير نتيجة اقتراب العربة، أو مصدر الصوت، كلما كانت السيارة أقرب إلينا كلما كان صوتها أعلى. ولكن لماذا يتغير التردد، أو الذبذبة الخاصة بالصوت؟ إن مصدر الصوت يعمل الشيء نفسها تماماً ودائماً، وعلى ذلك فإنه ليس تردد صوت السيارة هو الذي يتغير في الحقيقة، ولكن الذي تغير هو التردد الذي يصل أذننا. مع اقتراب عربة الإطفاء منا، فإن كل تتابع ضغطي للهواء الناتج من هورن السيارة يحدث على مسافة أقرب إلينا من التضاغطات السابقة، ولذلك فإنها تصل إلى أذننا في زمن أقل وهذا يجعل تردد الصوت عند أذننا أعلى من التردد عند مصدر الصوت. مع مرور عربة الإطفاء من أمامنا تحدث التأثيرات العكسية لما سبق ، حيث تصبح الترددات التي تصل إلى أذننا أقل من ترددات المصدر. بينما نشعر بتغيرات في تردد الصوت ونحن واقفون على جانب الطريق والسيارة تمر من أمامنا، فإن رجال الإطفاء الراكبين على العربة يستمعون إلى تردد ثابت للصوت.

لنفترض أن الصوت المسموع عن طريق رجال الإطفاء يتم وصفه بالدالة $g(t)$. مع اقتراب عربة الإطفاء، فإن الصوت الذي سنسمعه سيكون $A(t)g(at)$ حيث $A(t)$ تكون عبارة عن دالة متزايدة في الزمن، تأخذ في الاعتبار التغير في شدة الصوت، و a عبارة عن رقم أكبر من الواحد قليلاً. التغير في المقدار كدالة في الزمن يسمى تعديل المقدار في أنظمة الاتصالات. بعد مرور السيارة، تصبح المعادلة المعبرة عن الصوت هي $B(t)g(bt)$ حيث $B(t)$ عبارة

عن دالة متناقصة مع الزمن، و b أقل قليلاً من الواحد كما في شكل (٢,٣٢). (في شكل (٢,٣٢) يتم استخدام الجيوب المعدلة للتعبير عن الصوت المسموع. إن ذلك ليس دقيقاً ولكنه يخدم في بيان بعض النقاط المهمة).

تحدث الإزاحة الدوبلرية أيضاً مع الموجات الضوئية. إن الضوء الأحمر ينزاح في الطيف الضوئي من النجوم البعيدة، وهذا ما أوضح في البداية أن الكون يتمدد. عندما يبتعد أي نجم بعيداً عن الأرض، فإن الضوء الذي نستقبله على الأرض سيمر بإزاحة دوبلرية تقلل تردد كل الضوء المنبعث من النجم كما في شكل (٢- ٣٣). حيث إن الضوء الأحمر يكون له أقل تردد يمكن رؤيته أو كشفه بالعين البشرية، فإن أي نقص في التردد يسمى بالإزاحة الحمراء، لأن خواص الطيف المرئي تبدو كلها متحركة ناحية النهاية الحمراء من الطيف. الضوء المنبعث من النجم يكون له العديد من تغيرات الخواص مع التردد نتيجة تكوين النجم والمسار من النجم إلى الملاحظ. يمكن تحديد كمية الإزاحة عن طريق مقارنة نماذج الطيف للضوء القادم من النجم مع نموذج طيفي معروف على الأرض في أحد المعامل.

التحجيم هو تغيير في المتغير المستقل. كما كان حقيقياً في الإزاحة الزمنية، فإن مثل هذا النوع من التغيير يمكن تنفيذه على أي متغير مستقل، وليس بالضرورة أن يكون الزمن. في فصل آخر قادم سنقوم بعمل التحجيم الترددي.



شكل رقم (٢,٣٢) توضيح التأثير الدوبلري

شكل رقم (٢,٣٣) سديم البحيرة the Lagoon nebula

الإزاحة والتحجيم المتزامنان

كل التغيرات الثلاثة في الدالة، تحجيم المقدار، وتحجيم الزمن، والإزاحة الزمنية، يمكن تطبيقها في الوقت نفسه أو بالتزامن كما يلي:

$$g(t) \rightarrow Ag\left(\frac{t-t_0}{a}\right)$$ المعادلة رقم (٢,١١)

لكى نفهم التأثير الكلي، فإنه من المستحسن في العادة أن نقسم التغيرات المتعددة مثلما في المعادلة (٢,١١) إلى تغيرات متتابعة بسيطة كما يلي:

$$g(t) \xrightarrow{amplitude\ scaling\ A} Ag(t) \xrightarrow{t \to t/a} Ag\left(\frac{t}{a}\right) \xrightarrow{t \to t-t_0} Ag\left(\frac{t-t_0}{a}\right)$$ المعادلة رقم (٢,١٢)

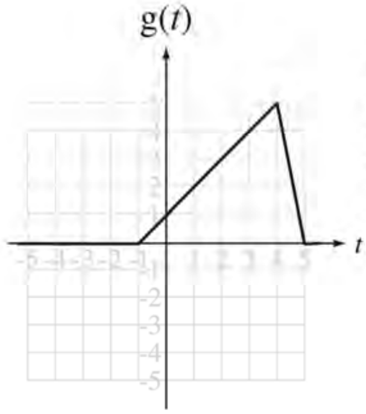
لاحظ هنا أن ترتيب التغيرات يكون مهماً. إذا بدلنا ترتيب عمليتي التحجيم الزمني، والإزاحة الزمنية في المعادلة (٢,١٢) نحصل على ما يلي:

$$g(t) \xrightarrow{amplitude\ scaling\ A} Ag(t) \xrightarrow{t \to t-t_0} Ag(t-t_0) \xrightarrow{t \to t/a} Ag\left(\frac{t}{a}-t_0\right) \neq Ag\left(\frac{t-t_0}{a}\right)$$

هذه النتيجة مختلفة عن النتيجة السابقة (إلا إذا كانت $a=1$ و $t_0=0$). بالنسبة لنوع آخر من التغيرات المتعددة، قد يكون تتابع مختلف هو الأفضل، فمثلاً $Ag(bt-t_0)$. في هذه الحالة سيكون التتابع، التحجيم المقداري، ثم الإزاحة الزمنية، ثم التحجيم الزمني هو المسار الأبسط إلى النتيجة الصحيحة.

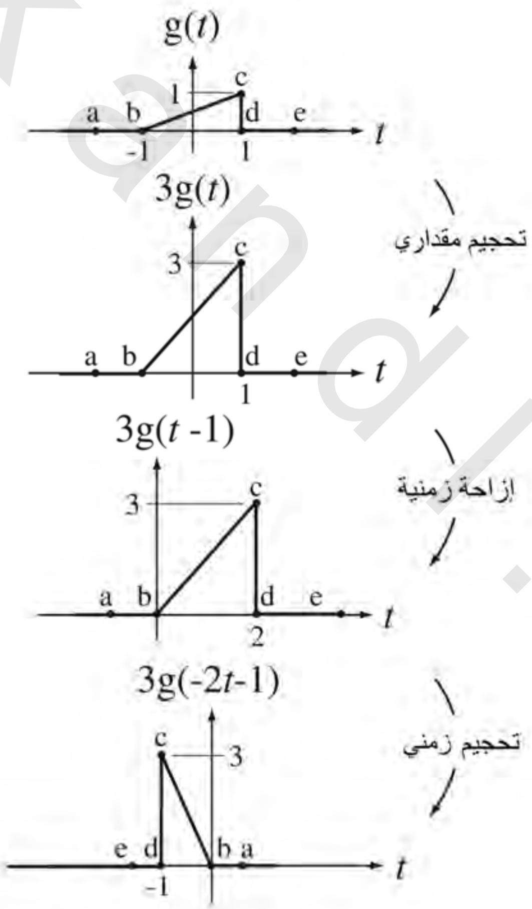
$$g(t) \xrightarrow{amplitude\ scaling\ A} Ag(t) \xrightarrow{t \to t-t_0} Ag(t-t_0) \xrightarrow{t \to bt} Ag(bt-t_0)$$

شكل (٢,٣٤) وشكل (٢,٣٥) يبينان بعض هذه الخطوات عملياً لدالتين مختلفتين. في هذه الأشكال تم تعليم بعض النقاط بأحرف، تبدأ بـ "a" وتستمر أبجدياً. مع عمل كل تغيير في أي دالة، فإن كل نقطة مقابلة يكون لها الحرف نفسه.



t	$g(t)$
−5	0
−4	0
−3	0
−2	0
−1	0
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5
5	0

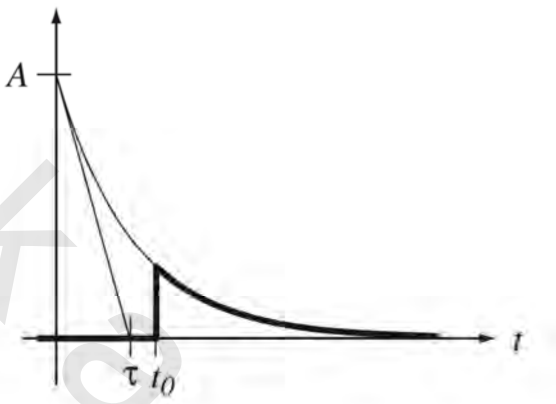
شكل رقم (٢,٣٤) تتابع تحجيم مقداري، ثم تحجيم زمني، ثم إزاحة زمنية على دالة



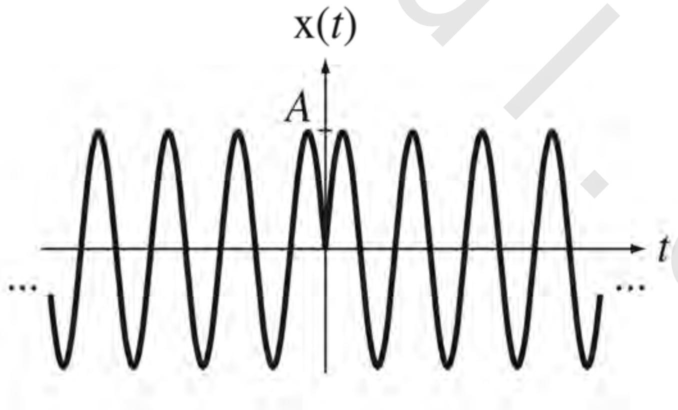
شكل رقم (٢,٣٥) تتابع تحجيم مقداري، ثم إزاحة زمنية، ثم تحجيم زمني على دالة

الدوال التي سبق تقديمها، مع تحجيم الدوال وإزاحتها تسمح لنا بوصف العديد من الإشارات. الإشارة التي لها شكل يتناقص أسياً بعد زمن معين $t=t_0$ وتكون صفراً قبل هذا الزمن يمكن تمثيلها بطريقة حسابية مدمجة كما في الدالة $x(t)=Ae^{-t/\tau}u(t-t_0)$ وكما في شكل (٢,٣٦).

الإشارة التي شكلها دالة جيب سالبة قبل زمن $t=0$ ودالة جيب موجبة بعد الزمن $t=0$ يمكن تمثيلها بالدالة $x(t)=A\sin(2\pi f_0 t)\text{sgn}(t)$ كما في شكل (٢,٣٧).

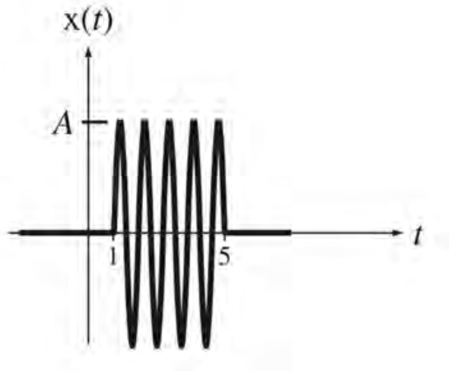


شكل رقم (٢,٣٦) أس متناقص يبدأ عند الزمن t=t0



شكل رقم (٢,٣٧) حاصل ضرب دالة جيب ودالة إشارة

الإشارة التي تكون دفعة من دالة الجيب بين الزمن $t=1$ والزمن $t=5$ وتساوي صفراً فيما عدا ذلك يمكن تمثيلها بالدالة $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\theta)\text{rect}((t-3)/4)$ كما في شكل (٢,٣٨).



شكل رقم (٢,٣٨) إشارة دفعة من دالة الجيب

مثال ٢,٢

رسم تحجيم دالة وإزاحتها باستخدام ماتلاب

باستخدام ماتلاب ارسم الدالة المعرفة كما يلي :

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < -2 \\ -4 - 2t, & -2 < t < 0 \\ -4 + 3t, & 0 < t < 4 \\ 16 - 2t, & 4 < t < 8 \\ 0, & t > 8 \end{cases}$$

وبعد ذلك ارسم الدوال 3g(t+1) و (1/2)g(3t) و -2g((t-1)/2).

يجب أن نختار أولا المدى الذي سنرسم خلاله الدالة، والمسافة بين نقط الزمن t لكي تعطي منحنى يقترب فعلاً من الدالة الحقيقية. دعنا نختار المدى الزمني -5<t<20، والمسافة بين النقاط الزمنية لتكون 0.1. أيضاً، دعنا نستخدم خواص دالة ماتلاب التي تسمح لنا بتعريف الدالة g(t) كبرنامج ماتلاب منفصل m file. ولذلك يمكننا الرجوع إليها، أو النداء عليها عند رسم الدوال المحولة، بحيث لا نضطر لإعادة كتابة الدالة في كل مرة. الملف g.m يحتوي الأكواد التالية :

```
function y=g(t)
% حساب تغيرات الدالة لكل فترة زمنية، t
y1 = -4 - 2*t ; y2 = -4 + 3*t ; y3 = 16 - 2*t ;
% تجميع تغيرات الدالة مع بعضها بعضاً كل واحدة في موضع تحققها
y = y1.*(-2<t & t<=0) + y2.*(0<t & t<=4) + y3.*(4<t & t<=8) ;
```

برنامج ماتلاب يحتوي على الكود التالي :

```
% برنامج لرسم الدالة g(t) وبعد ذلك يرسم الدوال 3*g(t+1) و g(3*t)/2 و -2*g((t-1)/2)
tmin =-4;  tmax =20;    % تثبيت المدى الزمني للرسم
dt = 0.1;     % تثبيت الزمن بين النقاط
```

```
t = tmin:dt:tmax;     %   تثبيت متجه الزمن للرسم
g0 = g(t)  ;          %   حساب الدالة الأصلية "g(t)"
g1 = 3*g(t+1);        %   حساب التغير الأول
g2 = g(3*t)/2 ;       %   حساب التغير الثاني
g3=-2*g((t-1)/2);     %   حساب التغير الثالث
% حساب القيمة العظمى والصغرى للدالة g في كل الدوال المحجمة أو المزاحة
% واستخدامها لتحجيم كل الرسومات الناتجة
gmax = max([max(g0), max(g1), max(g2), max(g3)]) ;
gmin = min([min(g0), min(g1), min(g2), min(g3)]) ;
% رسم كل الأربع دوال في تنظيم من ٤ رسومات
% ارسم كل الأشكال على محاور بتدريج متساوٍ
% ارسم شبكة ، باستخدام الأمر grid ، للمساعدة في قراءة القيم
subplot (2,2,1) ; p = plot(t,g0,'k') ; set(p,'LineWidth',2) ;
xlabel ('t') ; ylabel('g(t)') ; title('Original Function, g(t)') ;
axis ([tmin,tmax,gmin,gmax]) ; grid ;
subplot (2,2,2) ; p = plot(t,g1,'k') ; set(p,'LineWidth',2) ;
xlabel ('t') ; ylabel('3g(t+1)') ; title('First Change) ;
axis ([tmin,tmax,gmin,gmax]) ; grid ;
subplot (2,2,3) ; p = plot(t,g2,'k') ; set(p,'LineWidth',2) ;
xlabel ('t') ; ylabel('g(3t)/2') ; title('Second Change) ;
axis ([tmin,tmax,gmin,gmax]) ; grid ;
subplot (2,2,4) ; p = plot(t,g3,'k') ; set(p,'LineWidth',2) ;
xlabel ('t') ; ylabel('-2g((t-1)/2)') ; title('Third Change) ;
axis ([tmin,tmax,gmin,gmax]) ; grid ;
```

شكل (٢,٣٩) يوضح الرسم الناتج من هذا البرنامج.

(٢,٦) التفاضل والتكامل

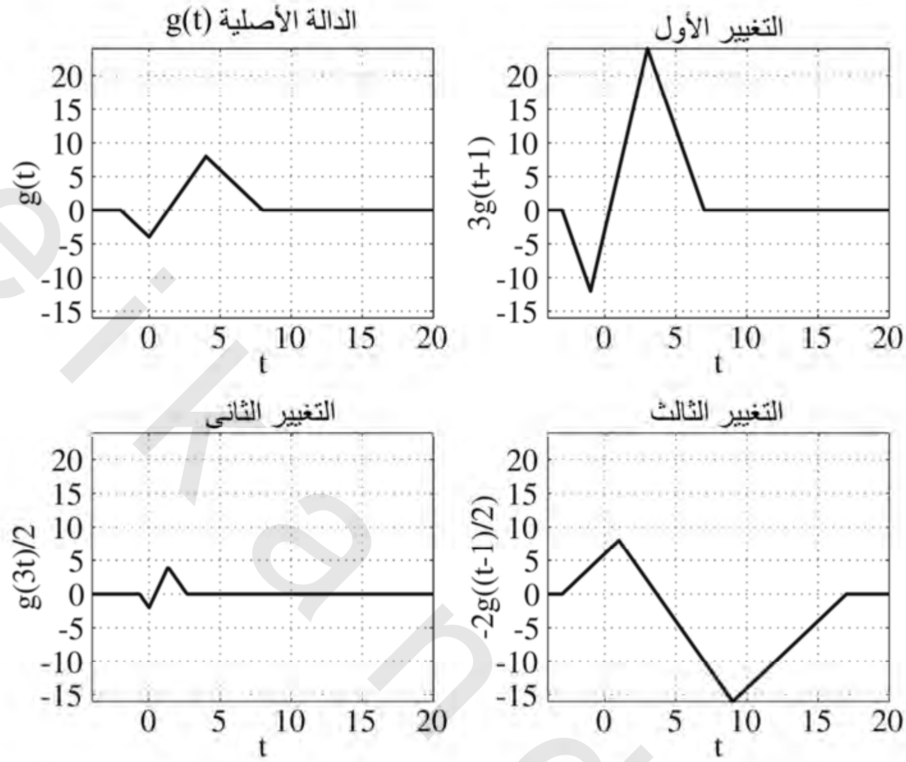
تعتبر عمليات التفاضل والتكامل من عمليات معالجة الإشارة الشائعة في الأنظمة العملية. تفاضل أي دالة عند أي زمن t هو ميل هذه الدالة عند هذا الزمن ، وتكامل أي دالة عند أي زمن t هو المساحة المتراكمة تحت هذه الدالة حتى هذا الزمن. شكل (٢,٤١) يبين بعض الدوال وتفاضلها. عبور الصفر لكل التفاضلات تم بيانه بخط عمودي خفيف يؤدي إلى قيمة ، عظمى أو قيمة صغرى مقابلة في الدالة.

هناك دالة تسمى diff في ماتلاب تقوم بعملية التفاضل الرمزي.

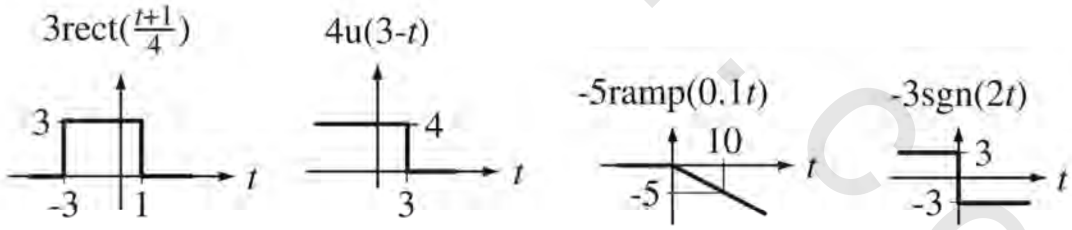
```
>> x = sym('x') ;
>> diff(sin(x^2))
ans =
```

2*cos(x^2)*x

هذه الدالة يمكن استخدامها أيضاً عددياً لإيجاد الفروق بين القيم المتجاورة في أي متجه. هذه الفروق المحددة يمكن تقسيمها بعد ذلك عن طريق التزايد في المتغير المستقل لتقريب بعض تفاضلات الدالة التي تنتج المتجه.

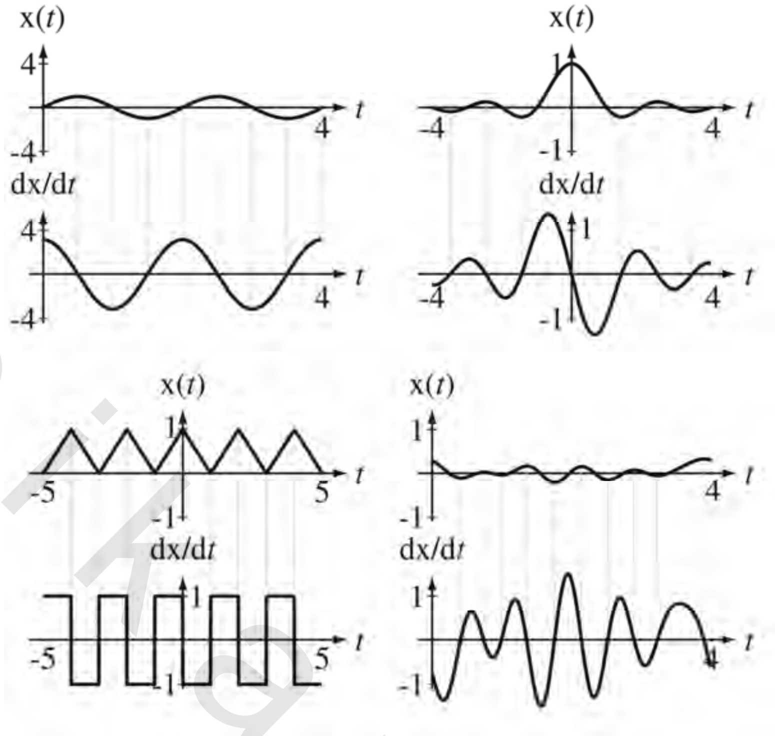


شكل رقم (٣,٣٩) أشكال الرسم بماتلاب للدوال المحجمة و/أو المزاحة



شكل رقم (٢,٤٠) أمثلة أكثر على تحجيم المقدار، والإزاحة الزمنية، والتحجيم الزمني للدوال

شكل (٢,٤٠) يعرض أمثلة أكثر على تحجيم المقدار، والإزاحة الزمنية، والتحجيم الزمني لبعض الدوال التي درسناها مسبقاً.



شكل رقم (٢,٤١) بعض الدوال وتفاضلاتها

```
>> dx = 0.1 ; x = 0.3:dx:0.8 ; exp(x)
ans =
1.3499  1.4918  1.6487  1.8221  2.0138  2.2255
>> diff (exp(x))/dx
ans =
1.4197  1.5690  1.7340  1.9163  2.1179
```

التكامل يكون أكثر تعقيداً إلى حد ما عن التفاضل. بمعلومية أي دالة، فإن تفاضلها يمكن تحديده بطريقة لا لبس فيها (إذا كان موجوداً). على الرغم من ذلك، فإن تكاملها لا يمكن تحديده بطريقة لا لبس فيها بدون بعض المعلومات الإضافية. إن ذلك يكون متأصلاً في واحد من الأساسيات الأولى التي تعلمناها في حساب التكامل. إذا كانت أي دالة g(x) لها التفاضل g'(x)، فإن الدالة g(x)+K (حيث K ثابت) سيكون لها التفاضل نفسه g(x) أيضاً بصرف النظر عن قيمة الثابت K. حيث إن التكامل يكون عكس التفاضل، فما هو تكامل g'(x) ؟ إنه من الممكن أن يكون g(x)، ومن الممكن أن يكون أيضاً g(x)+K.

اللفظ تكامل يكون له معانٍ مختلفة في السياقات المختلفة. عموماً، التكامل والتفاضل عمليتان متعاكستان. عكس التفاضل لأي دالة في الزمن g(t) يكون أي دالة في الزمن، عند تفاضلها بالنسبة للزمن، تعطي g(t). عكس التفاضل يتم بيانه بعلامة التكامل بدون حدود. مثلاً :

$$\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi} = \int \cos(2\pi t)\, dt$$

في كلمات، فإن الدالة $\sin(2\pi t)/2\pi$ تمثل التفاضل العكسي للدالة $\cos(2\pi t)$. التكامل غير المحدود هو عكس التفاضل بالإضافة لقيمة ثابتة. فمثلاً، $h(t) = \int g(t)dt + C$. التكامل المحدود هو تكامل محدود بين حدين، مثل $A = \int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt$. إذا كان كل من α و β ثوابت، فإن A تكون قيمة ثابتة أيضاً، وهي المساحة تحت الدالة $g(t)$ بين كل من α و β. في تحليل الإشارات والأنظمة، يتم في العادة استخدام الصورة الخاصة للتكامل المحدود وهي $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)d\tau$. متغير التكامل هو τ، ولذلك فإنه أثناء عملية التكامل، فإن حد التكامل الأعلى t يتم التعامل معه على أنه ثابت. ولكن بعد الانتهاء من التكامل، فإن t تصبح المتغير المستقل في $h(t)$. مثل هذا النوع من التكامل يتم تسميته أحياناً بالتكامل الجاري، أو التكامل المتراكم. إنه المساحة المتراكمة تحت الدالة لكل الأزمنة قبل t وهذا يعتمد على ما هي t.

في العادة، وعملياً، نعرف أن أي دالة من الممكن أن تكون صفراً قبل $t=t_0$، وعلى ذلك، فإننا نعرف أن $\int_{-\infty}^{t_0} g(t)dt$ ستكون صفراً. على ذلك فإن تكامل هذه الدالة بداية من أي زمن $t_1<t_0$ حتى الزمن $t>t_0$ يكون لا لبس فيه. إنها من الممكن فقط أن تكون المساحة تحت الدالة من الزمن $t=t_0$ حتى الزمن t كما يلي:

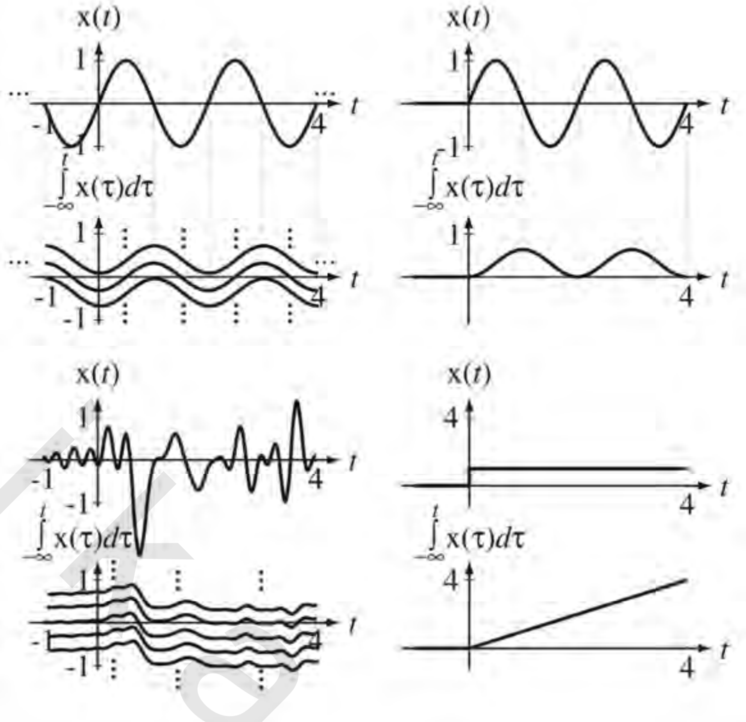
$$\underbrace{\int_{t_1}^{t} g(\tau)d\tau =}_{=0}\int_{t_1}^{t_0} g(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} g(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} g(\tau)d\tau$$

شكل (٢،٤٢) يبين بعض الدوال وتكاملها.

في شكل (٢- ٤٢) الدالتان اللتان على اليمين تساويان صفراً قبل الزمن $t=0$ والتكاملات المبينة تفترض حداً أدنى للتكامل أقل من الصفر، ولذلك فإنه ينتج قيمة وحيدة لا لبس فيها. الدالتان على اليسار مبينتان مع العديد من التكاملات الممكنة، وكل منهم يختلف عن الآخر بثابت. كل هذه الدوال لها التفاضل نفسه وكلها بالتساوي ترشيحات محققة للتكامل في غياب المعلومات الإضافية.

هناك الدالة int في ماتلاب التي تعطي التكامل الرمزي.

```
>> sym (‘x’) ;
>> int (1/(1+x^2))
ans =
atan (x)
```



شكل رقم (٢,٤٢) بعض الدوال وتكاملاتها

هذه الدالة لا يمكن استخدامها لإجراء التكامل العددي. هناك دالة أخرى، وهي cumsum يمكن استخدامها لإجراء التكامل العددي.

```
>> cumsum (1:5)
ans =
1 3 6 10 15
>> dx = pi/16 ; x = 0:dx:pi/4 ; y = sin(x)
y =
     0  0.1951   0.3827   0.5556   0.7071
>> cumsum (y)*dx
ans =
     0   0.0383   0.1134   0.2225   0.3614
```

هناك أيضاً حالات أكثر تطوراً في دوال التكامل العددي في ماتلاب، مثلاً، الدالة trapz التي تستخدم تقريب شبه المنحرف، والدالة quad التي تستخدم طريقة سمبسون التربيعية المتكيفة للتقريب.

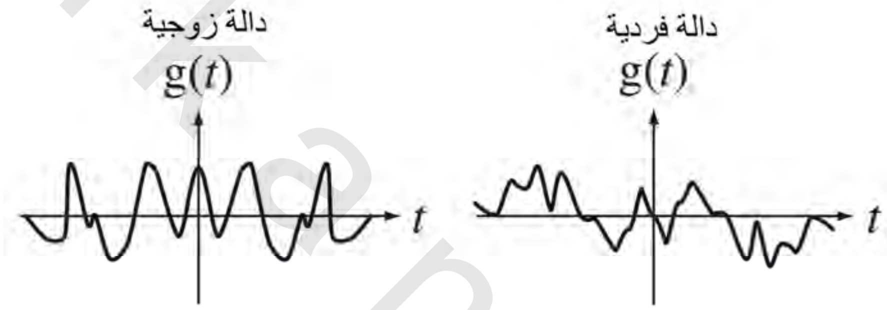
(٢,٧) الإشارات الزوجية والفردية

لبعض الدوال خاصية أنها عندما تخضع لأنواع معينة من الإزاحة و/أو التحجيم، فإن قيم الدالة لا تتغير. إنها ثابتة، أو غير متغيرة تحت تأثير هذه الإزاحة و/أو التحجيم. أي دالة زوجية في الزمن t تكون ثابتة تحت تأثير

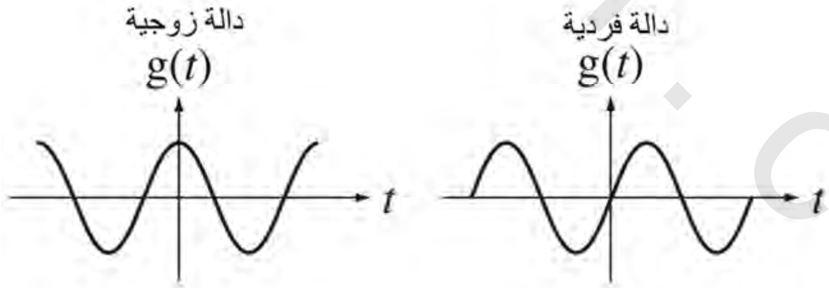
الانعكاس الزمني t→-t ، والدالة الفردية في الزمن t تكون ثابتة تحت تأثير تحجيم المقدار والانعكاس الزمني g(t)→- .g(-t)

الدالة الزوجية g(t) هي الدالة التي تحقق g(t)=g(-t) والدالة الفردية هي الدالة التي تحقق g(t)=-g(-t).

طريقة مبسطة لرؤية الدوال الزوجية والفردية هي أن نتصور أن المحور الرأسي (محور g(t)) عبارة عن مرآة. بالنسبة للدوال الزوجية ، فإن جزء الدالة g(t) للزمن t>0 وجزءها للزمن t<0 يكون كل منهما صورة مرآة للآخر. بالنسبة للدالة الفردية ، فإن الجزأين نفسهما للدالة يكون كل منهما صورة مرآة سالبة للآخر كما في شكل (٢,٤٣) وشكل (٢,٤٤).



شكل رقم (٢,٤٣) أمثلة على الدوال الزوجية والفردية.



شكل رقم (٢,٤٤) إثنتان من الدوال الأكثر شيوعا وفائدة، واحدة زوجية وأخرى فردية.

بعض الدوال تكون زوجية ، وبعضها يكون فردياً والبعض الآخر لا يكون زوجياً ولا فردياً. ولكن أي دالة g(t) تكون مجموعاً لجزء زوجي ، وجزء فردي ، $g(t)=g_e(t)+g_o(t)$. الجزءان الزوجي والفردي لأي دالة g(t) يمكن كتابتهما كما يلي :

$$g_e(t) = \frac{g(t)+g(-t)}{2}, \quad g_o(t) = \frac{g(t)-g(-t)}{2}$$ المعادلة رقم (٢،١٣)

إذا كان الجزء الفردي لأي دالة يساوي صفراً، فإن هذه الدالة تكون زوجية، وإذا كان الجزء الزوجي لأي دالة يساوي صفراً، فإن هذه الدالة تكون فردية.

مثال ٢،٣

الأجزاء الزوجية والفردية لأي دالة

ما هو الجزء الزوجي والجزء الفردي للدالة g(t)=t(t2+3) ؟

هذه الأجزاء ستكون كما يلي:

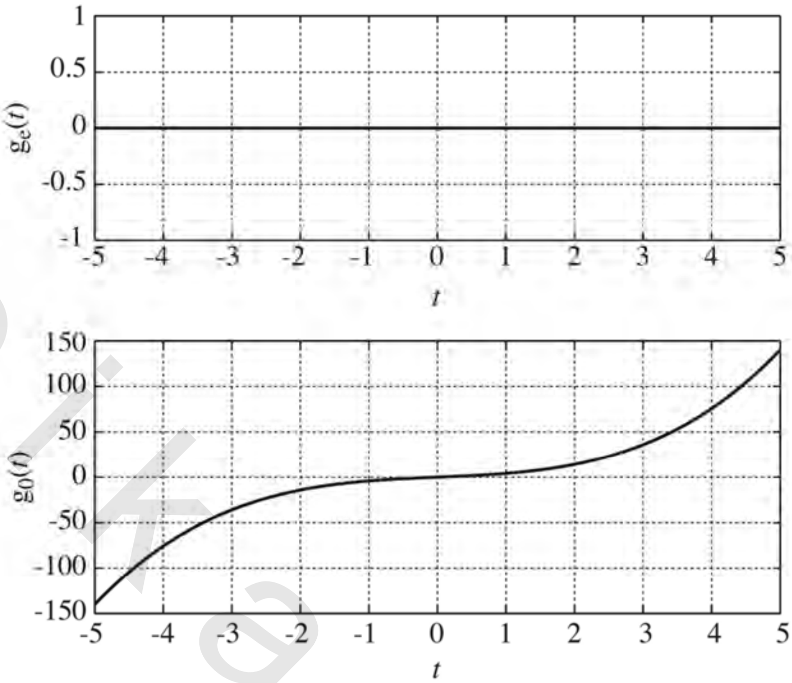
$$g_e(t) = \frac{g(t)+g(-t)}{2} = \frac{t(t^2+3)+(-t)[(-t)^2+3]}{2} = 0$$

$$g_o(t) = \frac{t(t^2+3)-(-t)[(-t)^2+3]}{2} = t(t^2+3)$$

وعلى ذلك، فإن g(t) تكون دالة فردية.

```
% برنامج لرسم الجزء الزوجي والجزء الفردي لدالة
function  GraphEvenAndOdd
t = -5:0.1:5 ;     % تثبيت منحنى زمني للرسم
ge = (g(t) + g(-t))/2 ;    % حساب قيم الجزء الزوجي
go = (g(t) - g(-t))/2 ;    % حساب قيم الجزء الفردي
% رسم الجزء الزوجي والجزء الفردي
subplot (2,1,1) ;
ptr = plot(t,ge,'k') ;  set(ptr,'LineWidth',2) ;  grid on ;
xlabel('\itt','FontName','Times','FontSize',24) ;
ylabel('g_e({\itt})','FontName','Times','FontSize',24) ;
subplot(2,1,2) ;
ptr = plot(t,go,'k') ; set(ptr,'LineWidth',2) ; grid on ;
xlabel('\itt','FontName','Times','FontSize',24) ;
ylabel('g_o({\itt})','FontName','Times','FontSize',24) ;
function y = g(x)   %  g(x)   تعريف الدالة
y = x.*(x.^2+3) ;
```

شكل (٢،٤٥) يوضح الرسم الناتج من هذا البرنامج.



شكل رقم (٢،٤٥) الرسم الناتج من برنامج ماتلاب لحساب الجزء الزوجي والفردي.

هذا البرنامج يبدأ بالكلمة المفتاحية function. ملف برنامج ماتلاب الذي لا يبدأ بكلمة function يسمى ملف سكربت script، وأما البرنامج الذي يبدأ بكلمة function، فإنه يعرف دالة function. هذا الكود يحتوي تعريفاً لدالتين. الدالة الثانية تسمى دالة جانبية subfunction. إنها تستخدم فقط عن طريق البرنامج الأساسي (في هذه الحالة هو Graph Even And Odd) ولا يتم استخدامها عن طريق أي دالة، أو سكربت خارج تعريف هذه الدالة. أي دالة من الممكن أن تحتوي أي عدد من الدوال الجانبية. ملف السكربت لا يمكنه استخدام أي دالة جانبية.

تجميع الإشارات الزوجية والفردية

افترض أن كلاً من الدالتين $g_1(t)$ و $g_2(t)$ دوال زوجية. وعلى ذلك فإن $g_1(t)=g_1(-t)$ و $g_2(t)=g_2(-t)$. افترض الدالة $g(t)=g_1(t)+g_2(t)$. وعلى ذلك، فإن $g(-t)= g_1(-t)+g_2(-t)$، وباستخدام خاصية الزوجية لكل من $g_1(t)$ و $g_2(t)$ فإن $g(-t)= g_1(t)+g_2(t)=g(t)$، مما يثبت أن مجموع أي دالتين زوجيتين يكون زوجياً أيضاً. الآن افترض أن $g(t)=g_1(t)g_2(t)$، وبالتالي، فإن $g(-t)=g_1(-t)g_2(-t)= g(t)=g_1(t)g_2(t)=g(t)$، مما يثبت أن حاصل ضرب أي دالتين زوجيتين يكون دالة زوجية أيضاً.

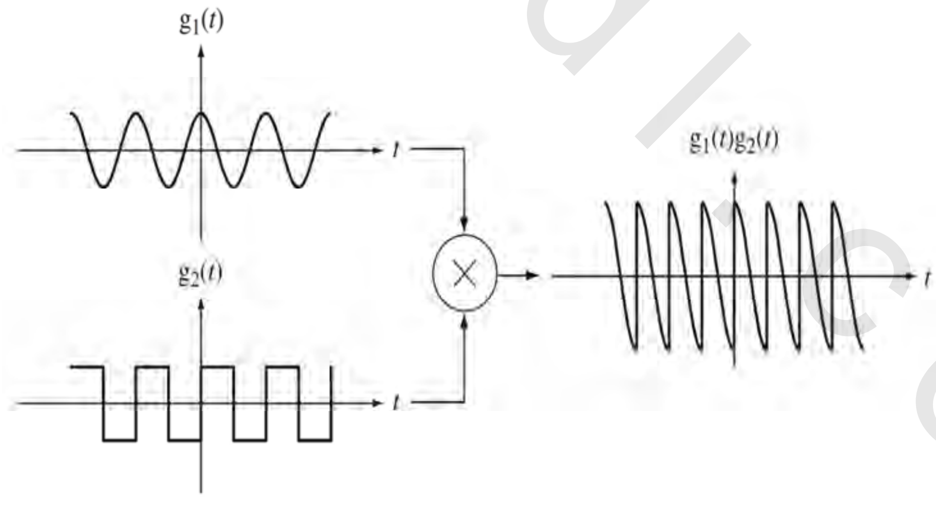
الآن افترض أن كلاً من الدالتين $g_1(t)$ و $g_2(t)$ دوال فردية. بالتالي فإن $g(-t)=g_1(-t)+g_2(-t)=-g_1(t)-g_2(t)=-g(t)$، مما يثبت أن مجموع أي دالتين فرديتين يكون دالة فردية. بعد افترض أن $g(-t)=g_1(-t)g_2(-t)=[-g_1(t)][-g_2(t)]=g_1(t)g_2(t)=g(t)$، مما يثبت أن حاصل ضرب أي دالتين فرديتين يعطي دالة زوجية.

بنفس الطريقة يمكننا أن نثبت أنه إذا كانت هناك دالتان زوجيتان، فإن مجموعهما، والفرق بينهما، وحاصل ضربهما، ونتيجة قسمتهما ستكون زوجية أيضاً. وأيضاً إذا كان لدينا دالتان فرديتان، فإنه يمكننا إثبات أن مجموعهما، والفرق بينهما سيكون فردياً، بينما حاصل ضربهما، ونتيجة قسمتهما ستكون زوجية. إذا كانت إحدى الدوال زوجية والأخرى فردية، فإن حاصل ضربهما ونتيجة قسمتهما ستكون فردية كما في شكل (٢،٤٦).

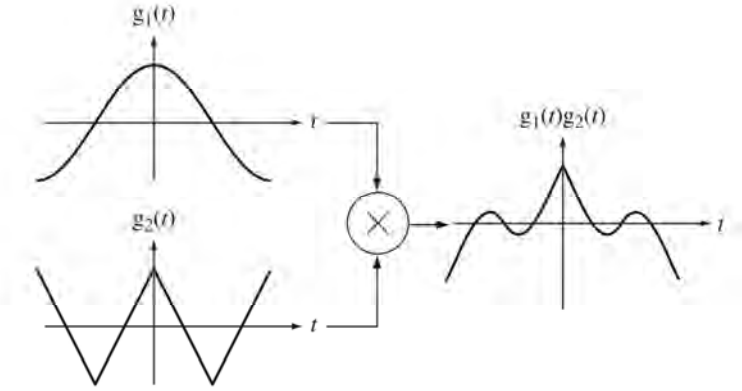
نوع الدالة	المجموع	الفرق	حاصل الضرب	نتيجة القسمة
كلاهما زوجي	زوجي	زوجي	زوجي	زوجي
كلاهما فردي	فردي	فردي	زوجي	زوجي
واحدة زوجي، والأخرى فردي	لازوجي ولافردي	لازوجي ولافردي	فردي	فردي

شكل (٢،٤٦) تجميعات الدوال الزوجية والفردية.

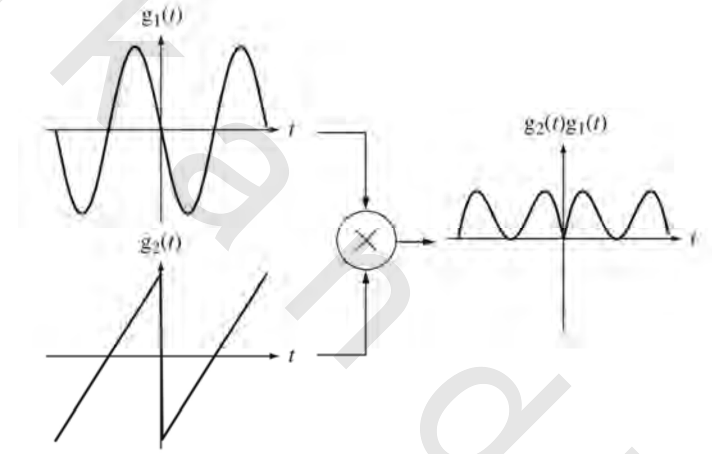
من أهم الدوال الزوجية والفردية في تحليل الإشارات والأنظمة دالتا الجيب sine وجيب التمام cosine، حيث إن دوال جيب التمام تكون زوجية ودوال الجيب تكون فردية. تبين الأشكال من شكل (٢،٤٧) حتى شكل (٢،٤٩) بعض الأمثلة على ضرب الدوال الزوجية والفردية.



شكل رقم (٢،٤٧) حاصل ضرب دالة زوجية وأخرى فردية



(٢-٤٨) حاصل ضرب دالتين زوجيتين



شكل رقم (٢,٤٩) حاصل ضرب دالتين فرديتين

لنفترض أن لدينا الدالة g(t) كدالة زوجية، وبالتالي فإن g(t)=g(-t). باستخدام قانون السلسلة في التفاضل، فإن تفاضل الدالة g(t) سيكون g'(t)=-g'(-t)، الذي هو دالة فردية. وبالتالي فإن تفاضل أي دالة زوجية سيكون دالة فردية. بنفس الطريقة، فإن تفاضل أي دالة فردية يكون دالة زوجية. يمكننا أن نحول المعاملات لنقول أن تكامل أي دالة زوجية سيكون دالة فردية بالإضافة إلى ثابت تكامل، وتكامل أي دالة فردية سيكون دالة زوجية بالإضافة إلى ثابت تكامل (ولذلك فإنها ستكون زوجية نتيجة أن الثابت يكون دالة زوجية) كما في شكل (٢- ٥٠).

نوع الدالة	التفاضل	التكامل
زوجية	فردية	فردية + ثابت
فردية	زوجية	زوجية

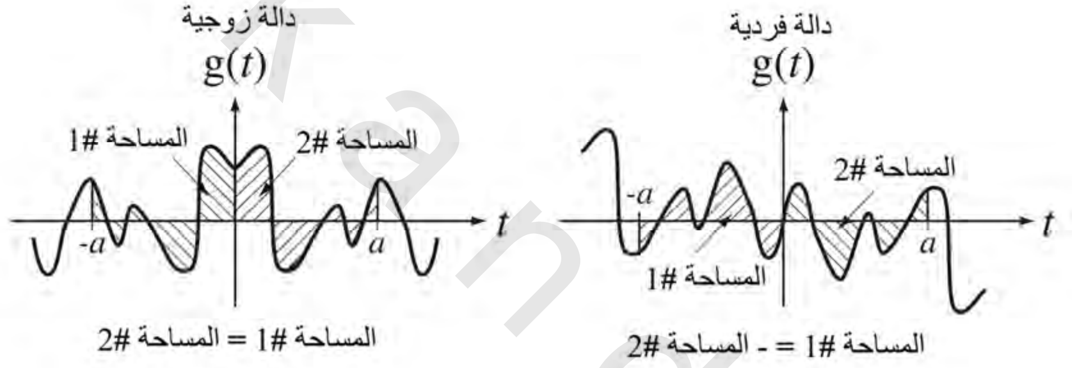
شكل (٢,٥٠) أنواع الدوال وأنواع الدوال الناتجة عن تفاضلها وتكاملها

التفاضل والتكامل للإشارات الزوجية والفردية

التفاضل المحدود للدوال الزوجية والفردية يمكن تبسيطه في بعض الحالات المعينة المعروفة. إذا كانت الدالة g(t) عبارة عن دالة زوجية و a عبارة عن ثابت حقيقي، فإن:

$$\int_{-a}^{a} g(t)dt = \int_{-a}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{a} g(t)dt = -\int_{0}^{-a} g(t)dt + \int_{0}^{a} g(t)dt$$

بإجراء تغيير على المتغيرات كالتالي: $\tau=-t$ في التكامل الأول من على اليمين وباستخدام $g(\tau)=g(-\tau)$، وبالتالي فإن $\int_{-a}^{a} g(t)dt = 2\int_{0}^{a} g(t)dt$ وهذا يكون واضحا هندسيا بالنظر إلى الدالة الموضحة في شكل (٢,٥١أ). بنفس الطريقة، إذا كانت الدالة g(t) دالة فردية، فإن $\int_{-a}^{a} g(t)dt = 0$ وهذا واضح أيضاً هندسيا كما في شكل (٢,٥١ب).



شكل رقم (٢,٥١) تكامل (أ) دالة زوجية و (ب) دالة فردية على حدود متماثلة

(٢,٨) الإشارات الدورية

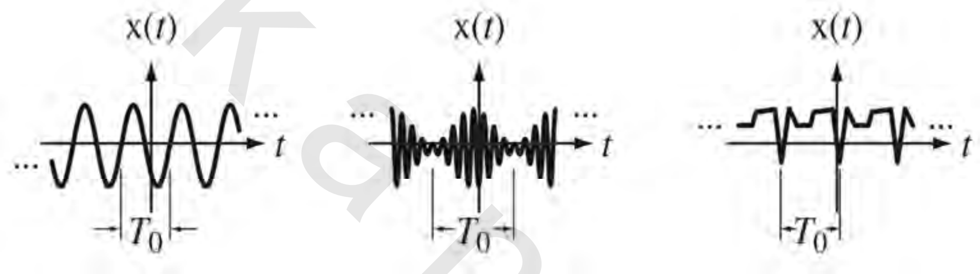
الإشارة الدورية هي الإشارة التي تكرر نموذجاً معيناً في زمن شبه لانهائي وتستمر في تكرار هذا النموذج لزمن شبه لا نهائي أيضاً.

الدالة الدورية g(t) هي الدالة التي تحقق المعادلة $g(t)=g(t+nT)$ لأي قيمة صحيحية للرقم n، و T هي الدورة الزمنية للدالة.

طريقة أخرى لكي نقول إن دالة معينة في الزمن t تكون دورية هي إن نقول أن هذه الدالة لا تتغير تحت تأثير الإزاحة $t\rightarrow nT$، أي أن الدالة تتكرر كل زمن مقداره T من الثواني. بالطبع فإنها تكرر نفسها أيضاً كل 2T، و 3T، و nT من الثواني حيث n رقم صحيح. ولذلك فإن 2T أو 3T أو nT تكون كلها دورات للدالة. أقل فترة زمنية موجبة

تتكرر عندها الدالة تسمى الدورة الأساسية T_0. التردد الدوري الأساسي f_0 هو مقلوب الدورة الأساسية، أي أن $f_0=1/T_0$ والتردد الزاوي الأساسي بالراديان هو $w_0=2\pi f_0=2\pi/T_0$.

بعض الأمثل الشائعة على الدوال الدورية هي الدوال الجيبية الحقيقية، أو المركبة وتجميعات من الجيوب الحقيقية و/أو المركبة. سنرى فيما بعد أنواعاً أخرى مركبة من الدوال الدورية بدورات مختلفة وأشكال مختلفة يمكن توليدها ووصفها حسابياً. شكل (٢,٥٢) يعطي بعض الأمثلة على الدوال الدورية. الدالة غير الدورية تسمى aperiodic أو دالة غير دورية. (نتيجة التشابه بين العبارة "aperiodic function" التي تعني دالة غير دورية والعبارة "a periodic function" والتي تعني دالة دورية، فإنه ربما يكون من الأفضل عند الحديث أن نستخدم العبارة "nonperiodic" أو "not periodic" وكل منهما تعني غير دورية أيضاً، وذلك لتجنب اللبس، أو سوء الفهم نتيجة التشابه في الألفاظ الإنجليزية").



شكل رقم (٢,٥٢) أمثلة على الدوال الدورية بدورة أساسية مقدارها T0

في الأنظمة العملية، فإن أي إشارة لن تكون حقيقة دورية؛ لأنها وجدت عند زمن محدد في الماضي، وستقف أيضاً عند زمن محدد في المستقبل. على الرغم من ذلك، فإن أي إشارة في العادة تتكرر منذ زمن كبير قبل زمن التحليل وستستمر تتكرر لزمن طويل جداً بعد هذا الزمن. في العديد من الأحوال، فإن تقريب الإشارة عن طريق دالة دورية يعطي بعض الخطأ الذي يمكن إهماله. الأمثلة على الإشارات التي يمكن تقريبها جيداً عن طريق دوال جيبية من الممكن أن تكون الدوال الجيبية الموحدة في محولات AC إلى DC، وإشارات التزامن الأفقي في التليفزيون، والموضع الزاوي لعمود المحور في مولد القدرة في محطات التوليد، ونموذج الإشعال في شمعات الإشعال في سيارة تسير بسرعة منتظمة، وتذبذب بللورة الكريستال في ساعة اليد، والموضع الزاوي للبندول في ساعة الحائط القديمة وهكذا. العديد من الظواهر الطبيعية تكون، لكل الأغراض العملية، دورية، مثل العديد من الكواكب، ومدارات الأقمار الصناعية والمذنبات، وأطوار القمر، والمجال الكهربي المنبعث عن طريق رنين ذرة السيزيوم، ونماذج هجرة الطيور، ومواسم تزاوج الوعول، وهكذا. تؤدي الظواهر الدورية دوراً مهماً في كل من الحياة الطبيعية، وفي دنيا الأنظمة الصناعية.

موقف شائع في تحليل الإشارات والأنظمة هو أن يكون لدينا إشارة تساوي مجموع إشارتين دوريتين. افترض أن $x_1(t)$ دالة دورية بدورة مقدارها T01 ، وأن x2(t) دالة دورية بدورة أساسية مقدارها T02 ، وافترض أيضاً أن x(t)=x1(t)+x2(t). سواء كانت x(t) دورية أم لا ، يعتمد على العلاقة بين الدورتين T_{01} وT_{02} . إذا أمكن إيجاد T التي تكون رقماً صحيحاً من T_{01} ورقماً صحيحاً أيضاً من T_{02} ، فإن T ستكون دورة لكل من $x_1(t)$ و $x_2(t)$ و

$$x_1(t)=x_1(t+T), \text{ and } x_2(t)=x_2(t+T)$$ المعادلة رقم (٢,١٤)

الإزاحة الزمنية لـ $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ مع $t\to t+T$ ستعطي :

$$x(t+T)= x_1(t+T)+x_2(t+T)$$ المعادلة رقم (٢,١٥)

بدمج المعادلتين (٢,١٥) و (٢,١٤)، فإن :

$$x(t+T)=x_1(t)+x_2(t) = x(t)$$

مما يثبت أن x(t) تكون دورية بدورة مقدارها T. أقل قيمة موجبة لـ T التي تكون رقماً صحيحاً لكل من T_{01} و T_{02} تكون هي الدورة الأساسية T_0 لـ x(t). هذه القيمة الصغرى لـ T تسمى القيمة الصغرى المتعددة أو المضاعفة least common multiple, LCM لكل من T_{01} و T_{02}. إذا كانت T_{01}/T_{02} تساوي رقماً نسبياً (نسبة لرقمين صحيحين)، فإن LCM ستكون محددة و x(t) ستكون دورية. وإذا كانت T_{01}/T_{02} ليست رقماً نسبياً ، فإن x(t) ستكون غير دورية.

في بعض الأحيان تكون أي طريقة بديلة لإيجاد دورة مجموع دالتين دوريتين أسهل من إيجاد LCM لدورتي الدالتين. إذا كانت الدورة الأساسية للمجموع هي LCM للدورتين الأساسيتين للدالتين، فإن التردد الأساسي للمجموع سيكون القاسم المشترك الأعظم greatest common divisor, GCD للترددين الأساسيين، ولذلك فإنه سيساوي مقلوب LCM للدورتين الأساسيتين.

مثال ٢,٤

الدورة الأساسية لإشارة

أي واحدة من هذه الدوال ستكون دورية ، وإذا كانت دورية ، فما هي الدورة الأساسية لها ؟

أ- $\mathbf{g(t)=7\sin(400\pi t)}$

إن الدالة الجيبية تتكرر عندما تزداد معاملاتها الكلية ، أو تنقص بأي قيمة صحيحة متعددة من 2π. ولذلك فإن :

$$\text{Sin}(400\pi t\pm 2n\pi)=\sin[(400\pi(t\pm nT_0)]$$

بتساوي معاملات الطرفين :

$$400\pi t\pm 2n\pi=400\pi(t\pm nT_0)$$

أي أن :

$\pm 2n\pi=\pm 400\pi n T_0$

وبالتالي :

$T_0=1/200$

طريقة بديلة لإيجاد الدورة الأساسية هي أن نفهم أن $7\sin(400\pi t)$ هي في الأصل على الصورة $A\sin(2\pi f_0 t)$ أو $\sin(\omega_0 t)$ ، حيث f_0 هي التردد الدوري الأساسي و ω_0 هي التردد الزاوي الأساسي. في هذه الحالة فإن $f_0=200$ و $\omega_0=400\pi$. وحيث إن الدورة الأساسية تكون مقلوب التردد الدوري الأساسي ، فإن $T_0=1/200$.

ب– $g(t)=3+t^2$

هذه عبارة عن كثيرة حدود من الدرجة الثانية. مع زيادة أو نقصان الزمن t من الصفر ، فإن قيمة الدالة تزداد تدريجياً (ودائماً في الاتجاه نفسه). لا توجد دالة تزداد تدريجياً وباستمرار وتكون دورية في الوقت نفسه لأنه إذا تم زيادة كمية ثابتة لمعامل الدالة t ، فإن الدالة ستصبح أكبر أو أقل من قيمتها عند هذه اللحظة ، وهذا يعني أن هذه الدالة ليست دورية.

ج– $g(t)=e^{-j60\pi t}$

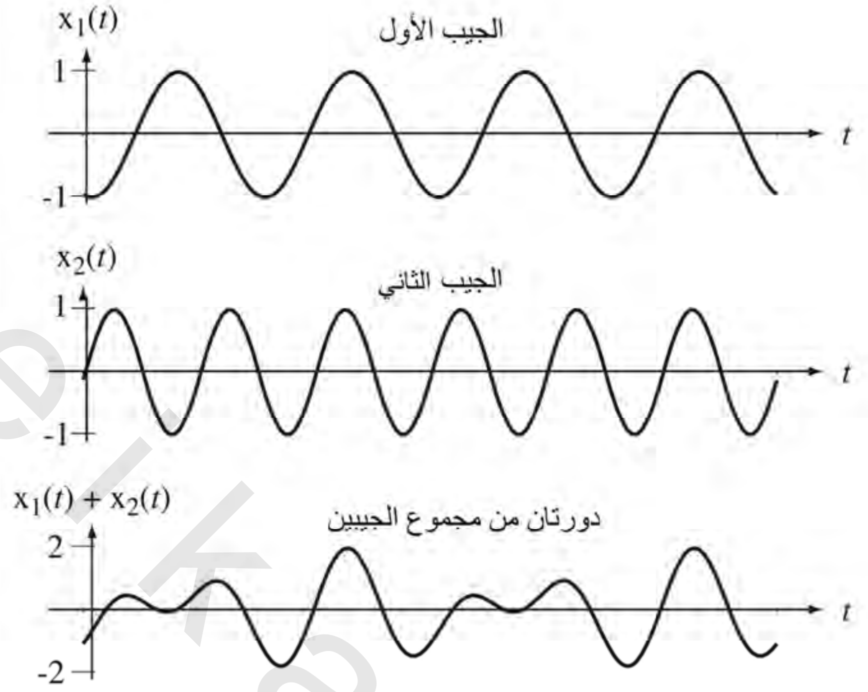
هذه الدالة عبارة عن دالة جيبية مركبة. يمكن أن نرى ذلك عن طريق التعبير عنها كمجموع من دالتي الجيب وجيب التمام تبعا لقانون أويلركالتالي :

$g(t)=\cos(60\pi t)-j\sin(60\pi t)$

هذه الدالة عبارة عن مجموع خطي لدالتين لهما التردد الدوري نفسه $60\pi/2\pi=30$. لذلك فإن التردد الأساسي للدالة $g(t)$ يساوي 30 هرتز والدورة الأساسية تساوي 1/30 ثانية.

$g(t)=10\sin(12\pi t)+4\cos(18\pi t)$

إن هذا هو مجموع دالتين كل منهما دالة دورية. الدورة الأساسية لكل منهما هي 1/6 للأولى و 1/9 للثانية. LCM يساوي 1/3. (أنظر ملحق الويب B لطريقة نظامية لإيجاد التعداد المشترك الأقل). هناك دورتان أساسيتان للدالة الأولى ، وثلاث دورات أساسية للدالة الثانية في هذا الوقت. ولذلك فإن الدورة الأساسية للدالة الكلية ستكون 1/3 ثانية كما في شكل (٢٫٥٣). الترددان الأساسيان هما 6 و 3 هرتز. GCD لهماهو 3 هرتز وهي مقلوب 1/3 ثانية للدورتين الأساسيتين.



شكل رقم (٢,٥٣) إشارتان بالتردد 6 و 9 هرتز ومجموعهما

د- g(t)=10sin(12πt)+4cos(18t)

هذه الدالة تشبه تماما الدالة الموجودة في (ث) فيما عدا غياب π في المعامل الثاني. الدورات الأساسية في هذه الحالة هي 1/6 و π/9 ثانية ، والنسبة بين الدورتين الأساسيتين ستكون إما 2π/3 أو 3/2π ، وكل منهما ليست نسبية أو عقلانية ، ولذلك فإن g(t) لن تكون دورية. هذه الدالة ، على الرغم من أنها مكونة من مجموع اثنين من الدوال الدورية ، إلا أنها ليست دورية ؛ لأنها لن تتكرر في زمن محدد بالضبط. (إنها أحياناً تسمى "تقريباً دورية" لأنه بالنظر إلى شكل الدالة المرسومة ، فإنها تبدو كما لو كانت تتكرر في زمن محدد ، ولكنها ليست في الحقيقة دورية).

هناك دالة في ماتلاب تسمى 1cm تعطي التعداد المشترك الأصغر. إنها تكون محدودة أحياناً ؛ لأنها تقبل معاملين فقط ، وهذان المعاملان يمكن أن يكونا أرقاماً صحيحة قياسية ، أو مصفوفات من الأرقام الصحيحة. هناك أيضاً الدالة gcd التي تعطي المضاعف المشترك الأعظم لرقمين صحيحين ، أو مصفوفتين من الأرقام الصحيحة.

```
>> lcm(32,47)
ans =
      1504
>> gcd([93,77],[15,22])
ans =
       3     11
```

(٢,٩) طاقة الإشارة وقدرتها

كل الأنشطة الطبيعية يتم تداولها عن طريق نقل الطاقة، كما أن الأنظمة الطبيعية الحقيقية تستجيب لطاقة أي إثارة. من المهم عند هذه النقطة نضع بعض المصطلحات التي تصف طاقة وقدرة الإشارات. عند دراسة الإشارات في الأنظمة، يتم في العادة التعامل مع الإشارات بتجريد رياضي. في العادة يتم إهمال الدلالة الطبيعية للإشارة من أجل تبسيط التحليل. الإشارات الحقيقية في الأنظمة الكهربية تكون جهود وتيارات، ولكنها يمكن أن تكون أيضاً شحنة أو مجالاً كهربياً أو أي كمية طبيعية أخرى. في الأنواع الأخرى من الأنظمة يمكن للإشارة أن تكون قوة، أو درجة حرارة، أو تركيزاً كيميائياً، أو فيضاً من النيوترونات، وهكذا. نتيجة الأنواع المختلفة المتعددة من الإشارات الطبيعية التي يمكن العمل عليها عن طريق الأنظمة، فإن مصطلح طاقة الإشارة قد تم تحديده. طاقة الإشارة (في مقابل الطاقة فقط)، لأي إشارة يتم تحديدها على أنها المساحة تحت مربع مقدار الإشارة. وعلى ذلك فإن طاقة الإشارة، للإشارة x(t) ستكون:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \qquad \text{(٢,١٦) المعادلة رقم}$$

وحدات طاقة الإشارة تعتمد على وحدات الإشارة نفسها. إذا كانت وحدات الإشارة هي الفولت (V)، فإن طاقة الإشارة يتم التعبير عنها بـ V^2s. طاقة الإشارة تتناسب مع الطاقة الطبيعية التي يتم توفيرها عن طريق الإشارة ولكنها ليس بالضرورة ستساوي هذه الطاقة الطبيعية. في حالة إشارة التيار i(t) التي تمر خلال مقاومة R فإن الطاقة الحقيقية التي سيتم إمداد المقاومة بها ستكون:

$$Energy = \int_{-\infty}^{\infty} |i(t)|^2\, R dt = R \int_{-\infty}^{\infty} |i(t)|^2 dt = RE_i$$

تتناسب طاقة الإشارة مع الطاقة الحقيقية وثابت التناسب، في هذه الحالة، هي R. بالنسبة للإشارات المختلفة، فإن ثابت التناسب من الممكن أن يكون مختلفاً. في الأنواع المختلفة من تحليل الأنظمة فإن استخدام طاقة الإشارة يكون أكثر راحة من استخدام الطاقة الطبيعية الحقيقية.

مثال ٢,٥

طاقة الإشارة لأي إشارة

احسب طاقة الإشارة لـ:

$$x(t) = \begin{cases} 3(1 - \left|\frac{t}{4}\right|, & |t| < 4 \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

من تعريف طاقة الإشارة :

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-4}^{4} \left|3(1-\left|\tfrac{t}{4}\right|)\right|^2 dt$$

بالاستفادة من ميزة أن الإشارة x(t) دالة زوجية :

$$E_x = 2x3^2 \int_0^4 \left(1-\tfrac{t}{4}\right)^2 dt = 18\int_0^4 \left(1-\tfrac{t}{2}+\tfrac{t^2}{16}\right) dt$$

$$= 18\left[t-\tfrac{t^2}{4}+t^3/48\right]_0^4 = 24$$

قدرة الإشارة

سنجد للعديد من الإشارات أن $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt$ لا تصل إلى تقارب نتيجة أن الطاقة تكون لا نهائية. إن ذلك يحدث في العادة نتيجة أن الإشارة لا تكون محدودة الزمن. (مصطلح أن الإشارة تكون محدودة الزمن يعني أن الإشارة لا تساوي الصفر في زمن محدود فقط). مثال على إشارة ذات طاقة غير محدودة هو الإشارة $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t)$ ، و $A\neq 0$. على مدى الفترة الزمنية غير المحدودة سنجد أن المساحة تحت مربع هذه الإشارة ستكون لا نهائية. بالنسبة للإشارات التي من هذا النوع، فإنه من الأفضل أن يتم التعامل مع متوسط قدرة الإشارة بدلاً من طاقة الإشارة. متوسط قدرة الإشارة لأي إشارة تعطى بالمعادلة التالية :

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt$$ المعادلة رقم (٢,١٧)

هذا التكامل هو قدرة الإشارة على طول الفترة الزمنية T وبعد ذلك تمت قسمته على هذا الزمن T ، لكي يعطي متوسط قدرة الإشارة على هذه الفترة الزمنية. وبالتالي فمع اقتراب T من المالانهاية ، فإن متوسط قدرة هذه الإشارة ستصبح متوسط قدرة الإشارة على كل الأزمنة.

بالنسبة للإشارات الدورية ، فإن حسابات هذه القدرة من الممكن أن تكون أبسط ، حيث إن القيمة المتوسطة لأي دالة دورية تساوي القيمة المتوسطة على دورة من دوراتها. وعلى ذلك ، فحيث إن مربع أي دالة دورية يكون دورياً أيضاً ، فيمكننا كتابة معادلة القدرة للدالة الدورية كما يلي :

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\,dt$$

حيث الرمز $\int_T$ يعني التكامل نفسه مثل $\int_{t_0}^{t_0+T}$ لأي قيمة اختيارية لـ t_0 ، و T من الممكن أن تكون أي دورة لـ $|x(t)|^2$.

مثال ٢,٦

قدرة الإشارة لإشارةجيبية

احسب القدرة المتوسطة للإشارة $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\theta)$.

من تعريف القدرة المتوسطة للإشارات الدورية يمكننا كتابة ما يلي :

$$P_x=\frac{1}{T}\int_T |A\cos(2\pi f_0 t+\theta)|^2\,dt=\frac{A^2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\cos^2(\frac{2\pi t}{T_0}+\theta)\,dt$$

باستخدام قاعدة حساب التالية :

$$\cos(x)\cos(y)=(1/2)[\cos(x-y)+\cos(x+y)]$$

نحصل على مايلي :

$$P_x=\frac{A^2}{2T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\left[1+\cos(\frac{4\pi t}{T_0}+2\theta)\right]dt+\frac{A^2}{2}\underbrace{\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}dt+\frac{A^2}{2T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\cos\left(\frac{4\pi t}{T_0}+2\theta\right)dt}_{=0}=\frac{A^2}{2}$$

التكامل الثاني على اليمين يساوي صفراً ؛ لأنه عبارة عن تكامل جيب تمام على دورة أساسية كاملة. قدرة الإشارة هي : $P_x=A^2/2$. هذه النتيجة لا تعتمد على الزاوية θ ولا على التردد f_0. إنها تعتمد فقط على مقدار الإشارة A.

الإشارات التي لها طاقة محددة تسمى إشارات طاقة energy signals ، والإشارات التي لها طاقة غير محددة ولكن لها متوسط قدرة محدد تسمى إشارات قدرة power signals. لا يوجد في الطبيعة إشارة لها طاقة غير محددة أو متوسط قدرة غير محدد ؛ لأنه لا توجد طاقة أو قدرة كافية في العالم. ولكننا في العادة نحلل الإشارات التي ، تبعا لتعريفها المحدد ، يكون لها طاقة لا نهائية مثل إشارة الجيب مثلاً. ما هي أهمية التحليل إذا كان سيتم إجراؤه على إشارات لا يمكن أن تكون موجودة في الطبيعة؟ إنها غاية في الأهمية !. السبب في أن دوال الجيب الحسابية لها طاقة إشارة لا نهائية هي أنها توجد دائماً وتظل موجودة دائماً. إنها كلها يجب أن تبدأ عند زمن محدد وكلها يجب أن تنتهي عند زمن محدد. إنها في الحقيقة محدودة الزمن ولها طاقة إشارة محدودة. ولكن في الكثير من تحليل الأنظمة يكون التحليل تحليلاً مستقر الحالة للنظام والذي فيه يتم التعامل مع الإشارات على أنها دورية. إن هذا التحليل لا يزال مهماً ومفيداً لأنه تقريب جيد للحقيقة ، إنه غالباً يكون أبسط كثيراً عن التحليل الدقيق ، كما أنه يعطي نتائج مفيدة. كل الإشارات الدورية تكون إشارات طاقة (فيما عدا الإشارة غير المهمة $x(t)=0$) لأنها كلها تستمر أو تدوم إلى ما لا نهائية.

مثال ٢,٧

حساب الطاقة والقدرة للإشارات باستخدام ماتلاب

باستخدام ماتلاب، احسب طاقة الإشارة والقدرة للإشارات التالية :

أ- $x(t) = 4e^{-t/10}rect\left(\frac{t-4}{3}\right)$

ب- إشارة دورية دورتها الأساسية تساوي 10 موصوفة على مدار دورة واحدة بالعلاقة :

x(t)=-3t, -5<t<5.

بعد ذلك قارن النتائج مع الحسابات التحليلية.

برنامج لحساب الطاقة والقدرة لبعض الإشارات كأمثلة %

أ- %

تثبيت متجه الأزمنة التي سيتم حساب الدوال عندها، % ; dt = 0.1 ; t = -7:dt:13

الفترة الزمنية تساوي % 0.1

حساب قيم الدوال ومربعاتها %

```
x = 4*exp(-t/10).*rect((t-4)/3) ;
xsq = x.^2 ;
```

استخدام قانون شبه المنحرف للتكامل العددي لحساب % ; Ex = trapz(t,xsq)

المساحة تحت مربع الدالة وعرض النتيجة %

```
disp([ (a) Ex =, num2str(Ex)]) ;
```

ب- %

الدورة الأساسية تساوي 10% ; T0 = 10

تثبيت متجه أزمنة يتم حساب الدالة عنده % ; dt = 0.1 ; t = -5:dt:5

الفترة الزمنية تساوي % 0.1

حساب قيم الدالة ومربعاتها على دورة أساسية واحدة % ; x = -3*t ; xsq = x.^2

استخدام قانون شبه المنحرف للتكامل العددي لحساب % ; Px = trapz(t,xsq)/T0

المساحة تحت مربع الدالة وعرض النتيجة %

```
disp([‘(b)  Px = ‘, num2str(Px)]) ;
```

خرج هذا البرنامج سيكون كالتالي :

أ- Ex=21.5177

ب- Px=75.015

الحسابات التحليلية ستكون كما يلي :

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_{2.5}^{5.5} \left|4e^{-t/10}\right|^2 dt$$
$$= 16\int_{2.5}^{5.5} e^{-t/5}\, d\tau = -5x16\left[e^{-t/5}\right]_{2.5}^{5.5} = 21.888$$

(الفرق البسيط في النتائج ربما يكون نتيجة خطأ كامن في قانون شبه المنحرف للتكامل. يمكن تقليل هذا الخطأ عن طريق استخدام نقاط أكثر تقارباً من بعضها)

$$P_x = \frac{1}{10}\int_{-5}^{5} (-3t)^2\, dt = \frac{1}{5}\int_{0}^{5} 9t^2\, dt = \frac{1}{5}(3t^2)_0^5 = \frac{375}{5} = 75$$

(٢,١٠) ملخص لبعض النقاط المهمة

١- المصطلح مستمر، والمصطلح مستمر زمنياً يعنيان أشياء مختلفة.

٢- النبضة المستمرة زمنياً، على الرغم من أنها مفيدة جداً في تحليل الإشارات والأنظمة، إلا أنها ليست دالة بالمعنى العادي.

٣- العديد من الإشارات العملية يمكن وصفها عن طريق تجميع الدوال القياسية المزاحة و/أو المحجمة، وترتيب عمليات الإزاحة والتحجيم يكون مهماً.

٤- طاقة الإشارة، هي في العادة، ليست الشيء نفسه مثل الطاقة الطبيعية الحقيقية التي توفرها الإشارة.

٥- الإشارة التي لها طاقة محددة تسمى إشارة طاقة، والإشارة التي لها طاقة غير محددة ومتوسط قدرة محدد تسمى إشارة قدرة.

تمارين مع إجاباتها

(الإجابات المقدمة مرتبة عشوائياً في كل تمرين)

دوال الإشارات

١- إذا كانت $g(t)=7e^{-2t-3}$، أكتب وبسط الدوال التالية :

أ- $g(3)$ ب- $g(2-t)$ ت- $g((t/10)+4)$ ث- $g(jt)$ ج- $\frac{g(jt)+g(-jt)}{2}$

هـ- $\frac{g\left(\frac{jt-3}{2}\right)+g\left(\frac{-jt-3}{2}\right)}{2}$

الإجابة:

$7\cos(t)$ ، $7e^{-7+2t}$ ، $7e^{-(t/5)-11}$ ، $7e^{-3}\cos(2t)$ ، $7e^{-9}$.

٢- إذا كانت $g(x)=x^2-4x+4$، اكتبْ وبَسِّطْ المعادلات التالية :

أ- $g(z)$ ، ب- $g(u+v)$ ، ت- $g(e^{jt})$ ث- $g(g(t))$ ج- $g(2)$

الإجابة:

$(e^{jt}-2)^2$ ، z^2-4z+4 ، 0 ، $u^2+v^2+2uv-4u-4v+4$ ، $t^4-8t^3+20t^2-16t+4$

٣- ما هي قيمة g في كل أمر من أوامر ماتلاب التالية :

```
t = 3 ;   g = sin(t) ;
x = 1:5 ;   g = cos(pi*x) ;
f = -1:0.5:1 ;    w = 2*pi*f ;    g = 1./(1+j*w') ;
```

الإجابة:

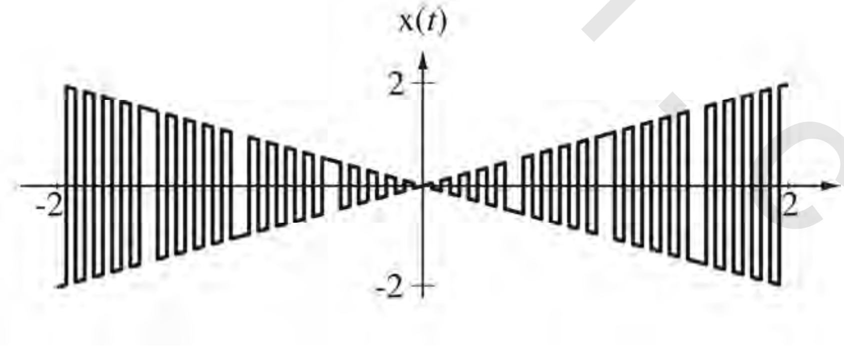
$$0.1411,\quad [-1,1,-1,1,-1],\quad \begin{bmatrix} 0.0247+j0.155 \\ 0.0920+j0.289 \\ 1 \\ 0.0920-j0.289 \\ 0.0247-j0.155 \end{bmatrix}$$

٤- افترض الدالتين المعرفتين كما يلي :

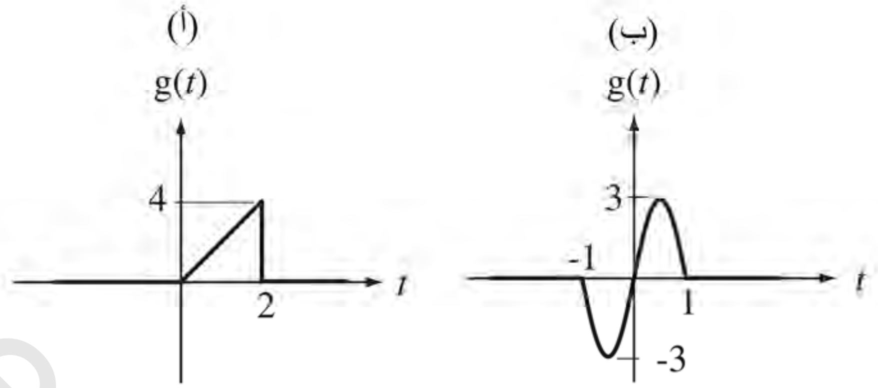
$$x_1(t)=\begin{cases}1, & \sin(20\pi t)\ge 0\\ -1, & \sin(20\pi t)<0\end{cases} \quad \text{و} \quad x_2(t)=\begin{cases}t, & \sin(2\pi t)\ge 0\\ -t, & \sin(2\pi t)<0\end{cases}$$

ارسم حاصل ضرب هاتين الدالتين مع الزمن في المدى -2<t<2.

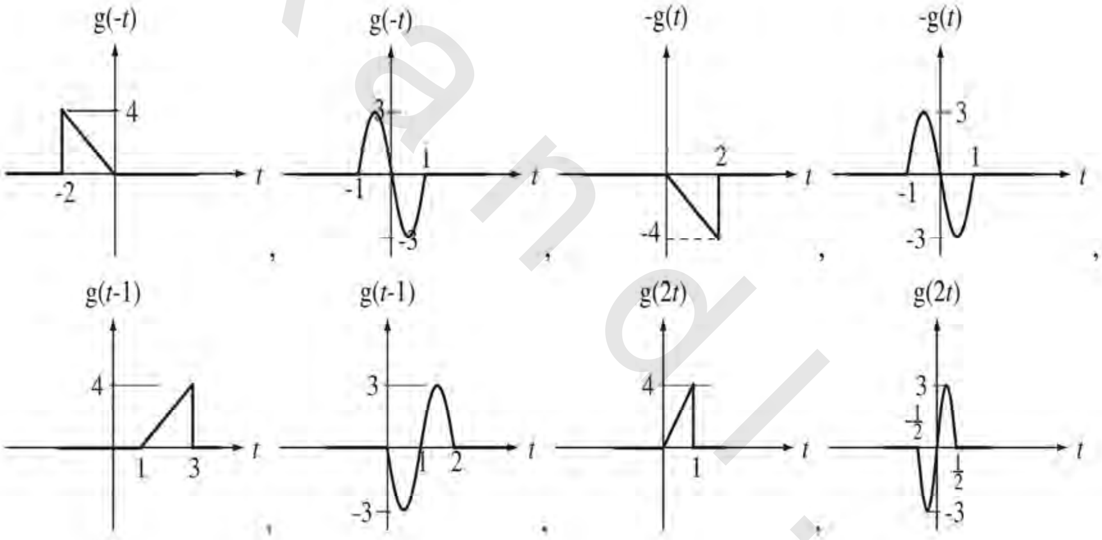
الإجابة:



٥- لكل دالة g(t) إرسم g(-t) و –g(t) و g(t-1) و g(2t).



الإجابة:



٦- احسب قيم الإشارات التالية عند الزمن الموضح

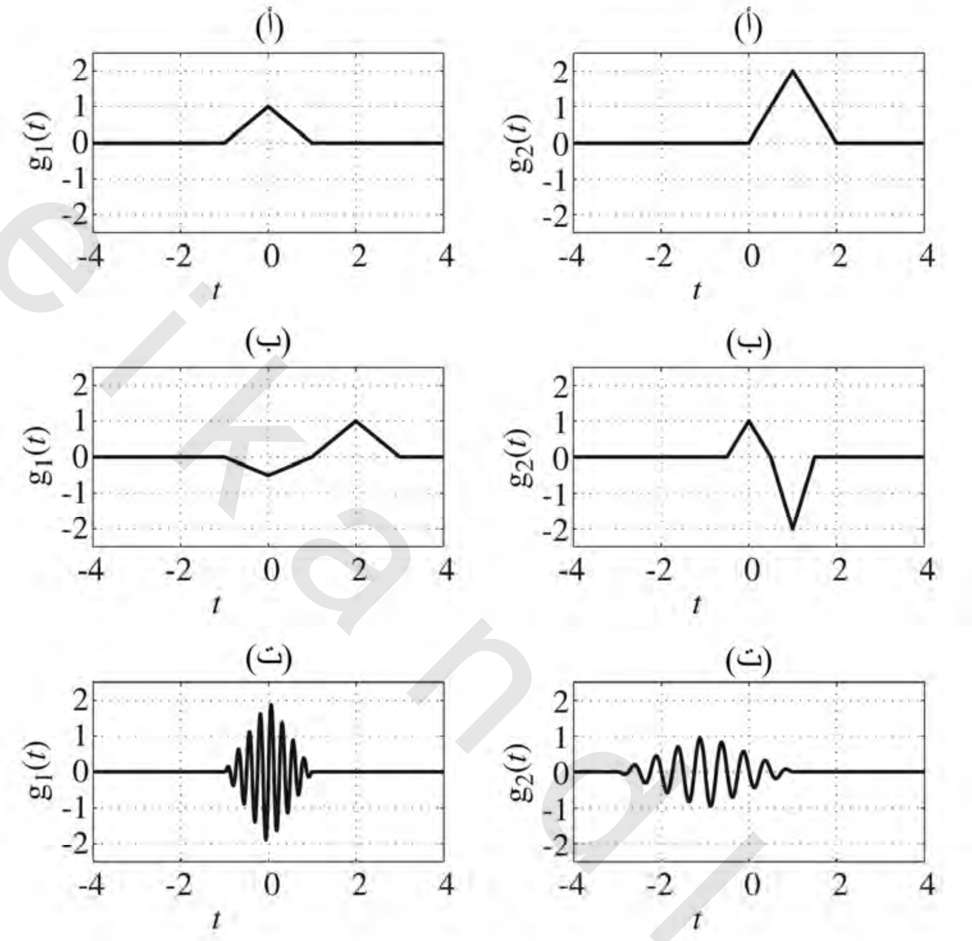
أ- $x(t)=2rect(t/4), \quad x(-1)$

ب- $x(t)=5rect(t/2)sgn(2t), \quad x(0.5)$

ت- $x(t)=9rect(t/10)sgn(3(t-2)), \quad x(1)$

الإجابة: **5 ,2 ,9–**

٧- لكل زوج من الدوال الموضحة في شكل (م.٧) احسب قيم الثوابت A و t_0 و ω في الإزاحة و/أو التحجيم في الدالة $g_2(t)=Ag_1((t-t_0)/\omega)$.

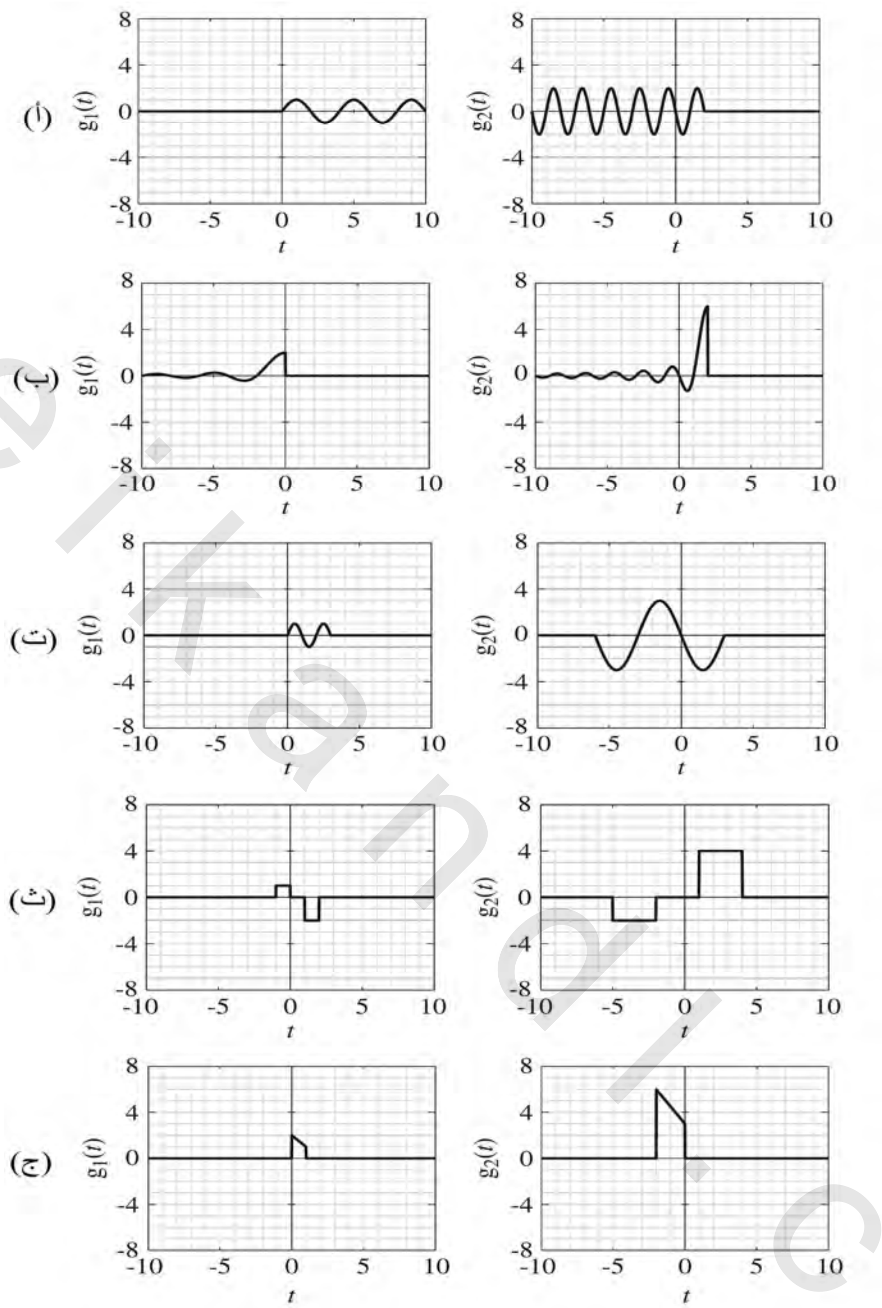


شكل رقم (م،٧)

الإجابة:

$A=2, t_0=1, \omega=1$ و $A=-1/2, t_0=-1, \omega=2$ و $A=-2, t_0=0, \omega=1/2$

٨- لكل زوج من الدوال الموضحة في شكل (م،٨) احسب قيم الثوابت A و t_0 و ω في الإزاحة و/أو التحجيم في الدالة $g_2(t)=Ag_1((t-t_0)/\omega)$.



شكل رقم (م،٨)

الإجابة : $A=3, t_0=2, \omega=2$

$A=-3, t_0=-6, \omega =1/3$ أو $A=-3, t_0=3, w=-1/3$

$A=-2, t_0=-2, \omega =1/3$

$A=3, t_0=-2, \omega =1/2$

$A=2, t_0=2, \omega =-2$

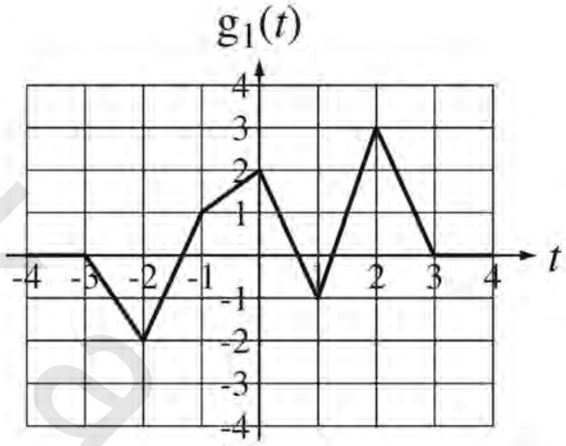
٩- شكل (م، ٩) يُبِّين رسماً للدالة g(t)، التي تساوي صفراً لكل الأزمنة خارج المدى الموضح في الشكل.

افترض دوال أخرى معرفة كما يلي:

$g_2(t)=3g_1(2-t)$, $g_3(t)=-2g_1(t/4)$, $g_4 = g_1\left(\frac{t-3}{2}\right)$

إحسب هذه القيم:

(أ) $g_2(1)$ (ب) $g_3(-1)$ (ت) $[g_4(t)g_3(t)]_{t=2}$ (ث) $\int_{-3}^{-1} g_4(t)\,dt$



شكل رقم (م،٩)

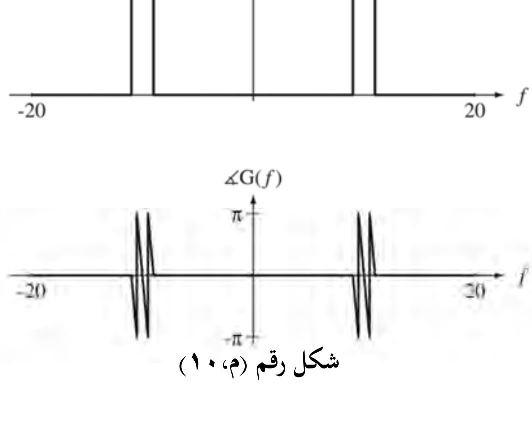
الإجابة:

-7/2, -3/2, -2, -3

١٠- افترض الدالة G(f) المعرفة كما يلي:

$$G(f) = e^{-j2\pi f}rect(f/2)$$

ارسم مقدار وزاوية الدالة G(f-10)+G(f+10) على المدى -20<f<20.



شكل رقم (م،١٠)

الإجابة:

$$G(f-10)+G(f+10)=e^{-j2\pi(f-10)}rect\left(\frac{f-10}{2}\right)+e^{-j2\pi(f+10)}rect\left(\frac{f+10}{2}\right)$$

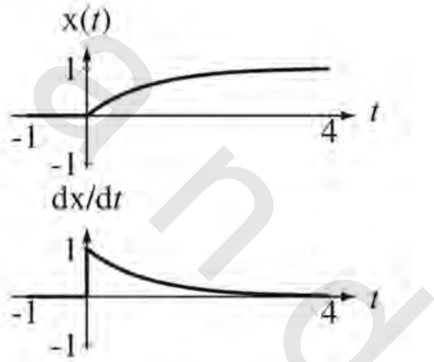
١١- أكتبْ تعبيراً يتكون من مجموع دوال وحدة الخطوة ليعبر عن إشارة تتكون من نبضة مستطيلة عرضها ٦ ميللي ثانية وارتفاعها يساوي 3، والتي تحدث بمعدل منتظم مقداره 100 نبضة في الثانية بحيث تبدأ الحافة الأمامية عند الزمن t=0.

الإجابة: $x(t)=3\sum_{n=0}^{\infty}[u(t-0.01n)-u(t-0.01n-0.006)]$

التفاضلات والتكاملات

١٢- ارسم تفاضل الدالة $x(t)=(1-e^{-t})u(t)$.

الإجابة:



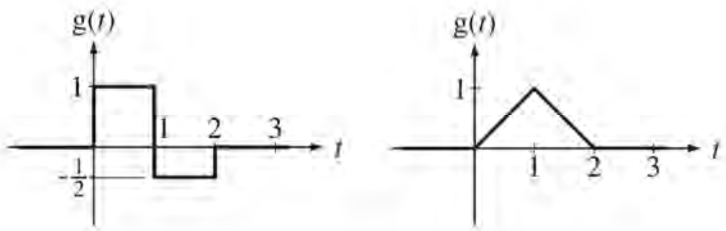
شكل رقم (م،١٢)

١٣- احسب القيمة العددية لكل من التكاملات التالية:

(أ) $\int_{-1}^{\infty}[\delta(t+3)-2\delta(4t)]\,dt$ (ب) $\int_{1/2}^{5/2}\delta_2(3t)\,dt$

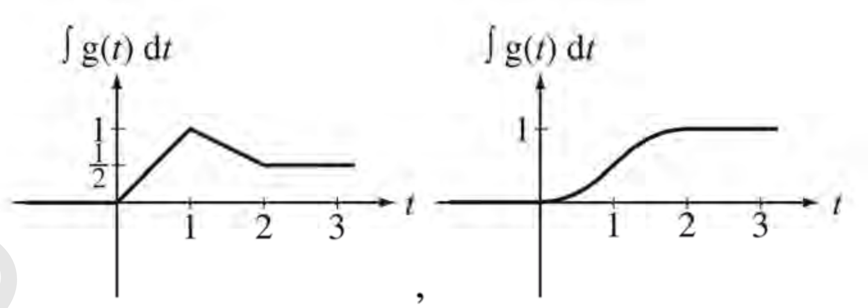
الإجابة: -1/2, 1

١٤- ارسم التكامل من سالب ما لا نهاية حتى t للدوال الموضحة في شكل (م، ١٤).



شكل رقم (م، ١٤أ)

الإجابة:



شكل رقم (م،١٤ب)

الإشارات الزوجية والفردية

١٥- دالة زوجية g(t) موصوفة على الفترة الزمنية $0<t<10$ بالمعادلة التالية :

$$g(t) = \begin{cases} 2t, & 0 < t < 3 \\ 15 - 3t, & 3 < t < 7 \\ -2, & 7 < t < 10 \end{cases}$$

(أ) ما هي قيمة الدالة g(t) عند الزمن $t=-5$ ؟

(ب) ما هي قيمة التفاضل الأول للدالة g(t) عند الزمن $t=-6$ ؟

الإجابة: 3, 0

١٦- احسب الأجزاء الزوجية والفردية للدوال التالية :

(أ) $g(t)=2t^2-3t+6$ (ب) $g(t)=20\cos(40\pi t-\pi/4)$

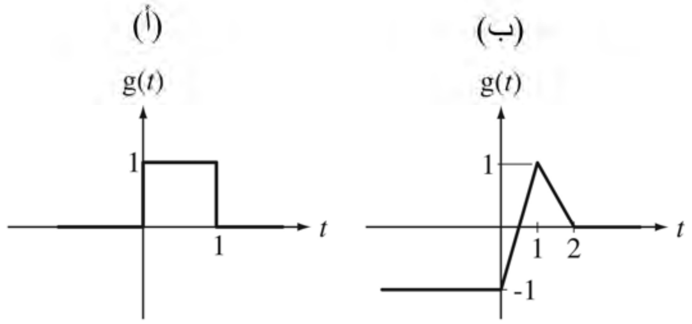
(ب) $g(t) = \frac{2t^2-3t+6}{1+t}$ (ث) $g(t)=t(2-t^2)(1+4t^2)$

(ج) $g(t)=t(2-t)(1+4t)$

الإجابة : $t(2-4t^2)$, $(20/\sqrt{2})\cos(40\pi t)$, 0, $-t\,\frac{2t^2+9}{1-t^2}$, $7t^2$,

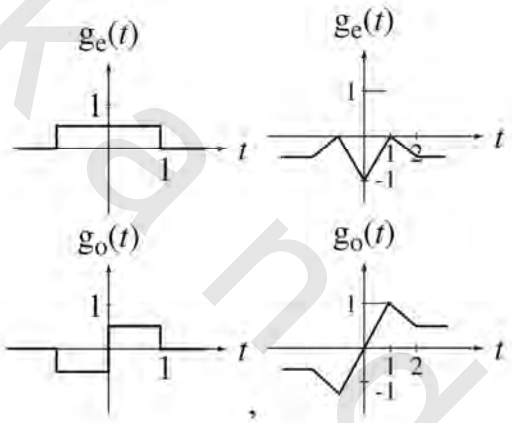
$(20/\sqrt{2})\sin(40\pi t)$, $2t^2+6$, $t(2-t^2)(1+4t^2)$, $\frac{6+5t^2}{1-t^2}$, $-3t$

١٧- ارسم الأجزاء الزوجية والفردية للدوال الموضحة في شكل (م، ١٧):



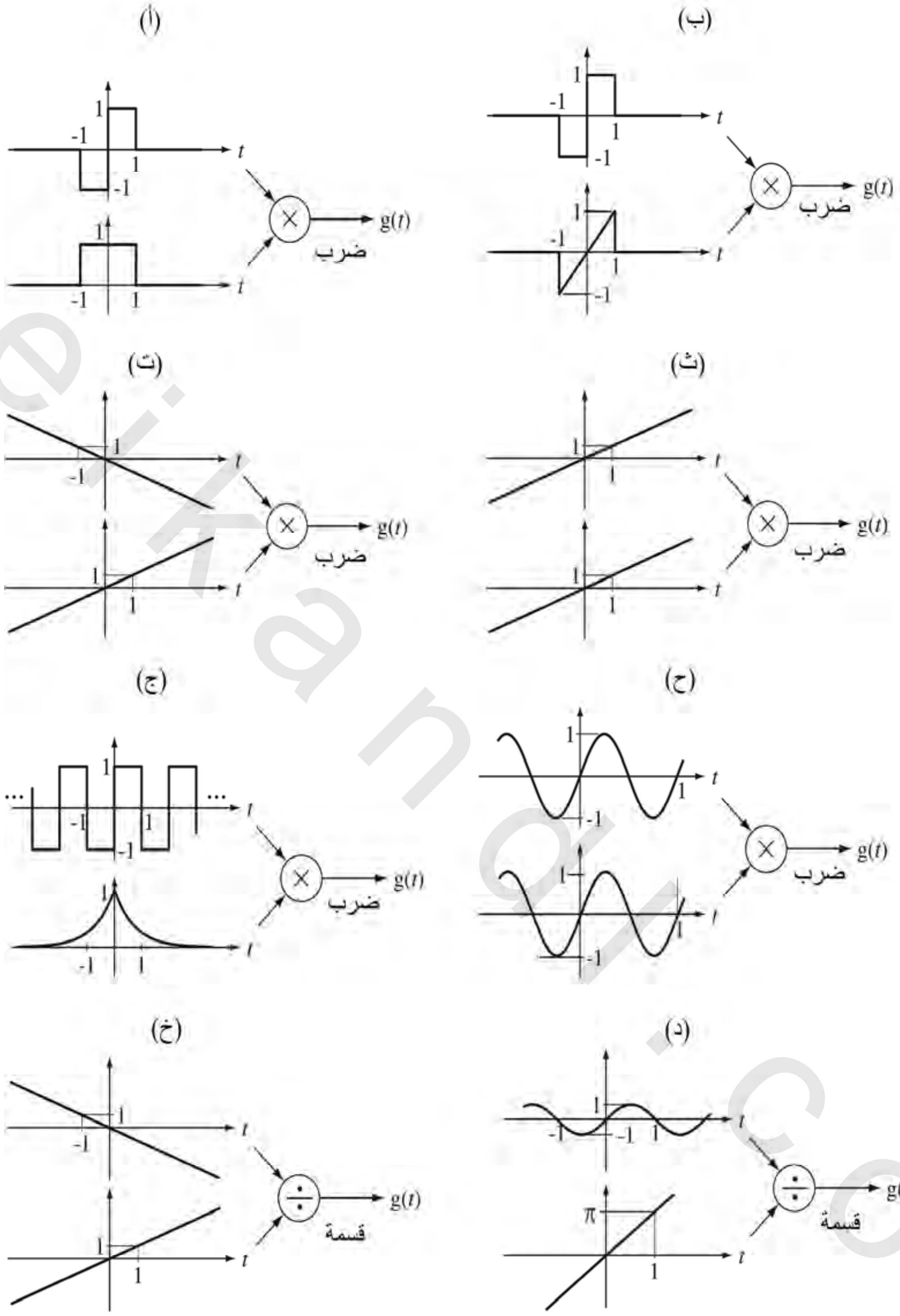
شكل رقم (م،١٧أ)

الإجابة:



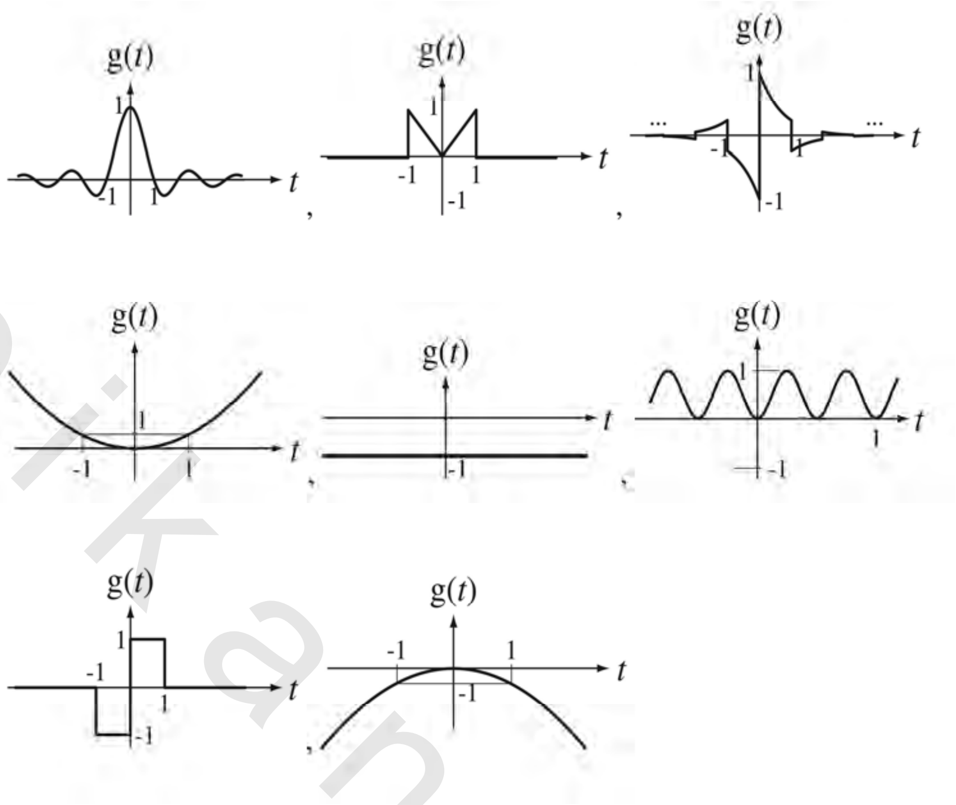
شكل رقم (م،١٧ب)

١٨- ارسم حاصل الضرب أو ناتج القسمة g(t) للدوال الموضحة في شكل (م، ١٨):



شكل رقم (م،١٨أ)

الإجابة :



شكل رقم (م،١٨ب)

١٩- استخدم خواص تكامل الدوال الزوجية والفردية لحساب التكاملات التالية في أسرع طريقة :

(أ) $\int_{-1}^{1}(2+t)\,dt$ (ب) $\int_{-1/20}^{1/20}[4\cos(10\pi t)+8\sin(5\pi t)]\,dt$

(ب) $\int_{-1/20}^{1/20}4t\cos(10\pi t)dt$ (ت) $\int_{-1/10}^{1/10}t\sin(10\pi t)\,dt$

(ت) $\int_{-1}^{1}e^{-|t|}dt$ (ج) $\int_{-1}^{1}te^{-|t|}dt$

الإجابة : 0, 8/10π, 1/50π, 0, 1.264, 4

الإشارات الدورية

٢٠- احسب الدورة الأساسية والتردد الأساسي للدوال التالية :

(أ) g(t)=10cos(50πt)

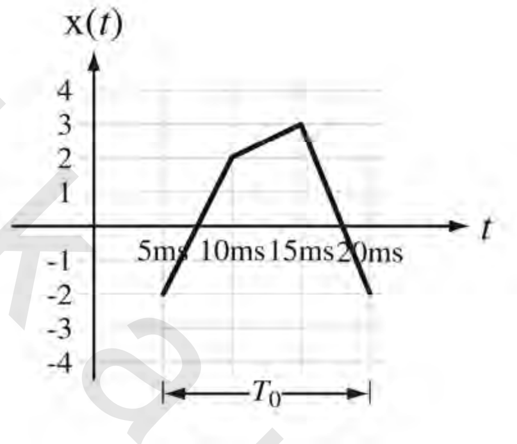
(ب) g(t)=10cos(50πt+π/4)

(ت) $g(t)=\cos(50\pi t)+\sin(15\pi t)$

(ث) $g(t)= \cos(2\pi t)+\sin(3\pi t)+ \cos(5\pi t-3\pi/4)$

الإجابة : 2s, 1/25 s, 2.5Hz, 1/25 s, 1/2Hz, 0.4 s, 25Hz, 25 Hz

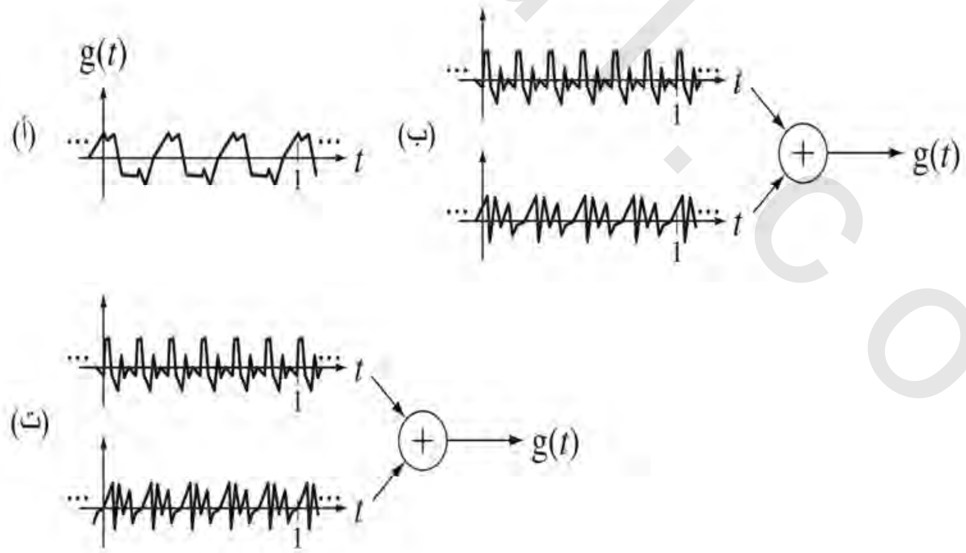
٢١- إحدى الدورات في الدالة الدورية $x(t)$ التي دورتها الأساسية تساوي T_0 مرسومة في شكل (م،٢١). ما هي قيمة الدالة $x(t)$ عند الزمن $t=220$ ms ؟



شكل رقم (م،٢١)

الإجابة: 2

٢٢- في شكل (م، ٢٢) إحسب الدورة الأساسية والتردد الأساسي للدالة $g(t)$.



شكل رقم (م،٢٢)

الإجابة: 1Hz, 2Hz, ½ s, 1s, 1/3 s, 3Hz

طاقة وقدرة الإشارة

٢٣- احسب طاقة الإشارة للإشارات التالية :

(أ) x(t)=rect(t)

(ب) x(t)=A(u(t)-u(t-10))

(ت) x(t)=u(t)-u(10-t)

(ث) x(t)=rect(t)cos(2πt)

(ج) x(t)=rect(t)cos(4πt)

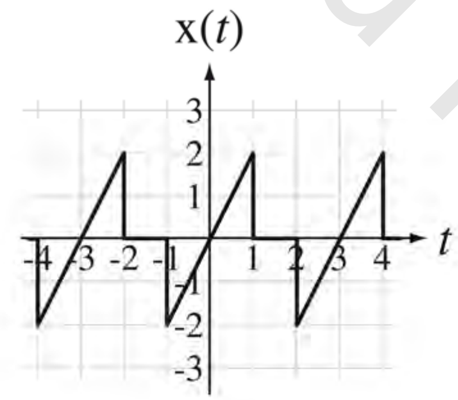
(ح) x(t)=rect(t)sin(2πt)

الإجابة: ½, ∞, $10A^2$, ½, 4, ½

٢٤- إشارة موصوفة بالمعادلة التالية x(t)=Arect(t)+Brect(t-0.5) فما هي طاقة هذه الإشارة ؟

الإجابة: A^2+B^2+AB

٢٥- احسب قدرة الإشارة المتوسطة للإشارة الدورية x(t) الموضحة في الشكل (م، ٢٥).



شكل رقم (م،٢٥)

الإجابة: 8/9.

٢٦- احسب قدرة الإشارة المتوسطة للإشارات التالية :

(أ) $x(t)=A$

(ب) $x(t)=u(t)$

(ت) $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\theta)$

الإجابة : $A^2, A^2/2, ½$

تمارين بدون إجابة

دوال الإشارات

٢٧- افترض تعريفات الدوال التي على اليسار ، واحسب قيمة الدوال على اليمين :

أ- $g(0.001)$ $g(t)=100\sin(200\pi t+\pi/4)$

ب- $g(2)$ $g(t)=13-4t+6t^2$

ج- $g(1/4)$ $g(t)=-5e^{-2t}e^{-j2\pi t}$

٢٨- افترض التعبير التالي لدالة وحدة النبضة :

$$\delta(x) = \lim_{a\to 0}\left(\frac{1}{a}\right) rect(\frac{x}{a}), \quad a > 0$$

الدالة $(1/a)rect(x/a)$ لها مساحة تساوي واحد بصرف النظر عن قيمة a.

أ- ما هي مساحة الدالة $\delta(4x) = \lim_{a\to 0}(\frac{1}{a})\, rect(\frac{4x}{a})$

ب- ما هي مساحة الدالة $\delta(-6x) = \lim_{a\to 0}(1/a)\, rect(-\frac{6x}{a})$

ج- ما هي مساحة الدالة $\delta(bx) = \lim_{a\to 0}(1/a)\, rect(\frac{bx}{a})$ عندما تكون b موجبة وعندما تكون b سالبة ؟

٢٩- استخدم التغيير في المتغيرات وتعريف وحدة الخطوة ، اثبتْ أن :

$$\delta(a(t-t_0)) = (\frac{1}{|a|})\delta(t-t_0)$$

٣٠- باستخدام النتائج التي حصلت عليها في تمرين ٢٩ وضح أن :

أ- $\delta_1(ax) = \frac{1}{|a|}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-\frac{n}{a})$

ب- القيمة المتوسطة لـ $\delta_1(ax)$ تساوي واحداً ، ولا تعتمد على قيمة a.

ج- على الرغم من أن $\delta(at)=(1/|a|)\delta(t)$ فإن $\delta_1(ax)\neq(1/|a|)\delta_1(x)$.

التحجيم والإزاحة

٣١- ارسم الدوال المتفردة التالية والدوال المتعلقة بها :

أ- $g(t)=2u(4-t)$

ب- $g(t)=u(2t)$

ج- $g(t)=5sgn(t-4)$

د- $g(t)=1+sgn(4-t)$

هـ- $g(t)=5ramp(t+1)$

و- $g(t)=-3ramp(2t)$

ز- $g(t)=2\delta(t+3)$

ح- $g(t)=6\delta(3t+9)$

ط- $g(t)=-4\delta(2(t-1))$

ي- $g(t)=2\delta_1(t-1/2)$

ك- $g(t)=8\delta_1(4t)$

ل- $g(t)=6\delta_2(t+1)$

م- $g(t)=2rect(t/3)$

ن- $g(t)=4rect((t+1)/2)$

س- $g(t)=-3rect(t-2)$

ع- (ق) $g(t)=0.1rect((t-3)/4)$

٣٢- ارسم الدوال التالية :

أ- $g(t)=u(t)-u(t-1)$

ب- $g(t)=rect(t-1/2)$

ج- $g(t)=-4ramp(t)u(t-2)$

د- $g(t)=sgn(t)\sin(2\pi t)$

هـ- $g(t)=5e^{-t/4}u(t)$

و- $g(t)=rect(t)\cos(2\pi t)$

ز- $g(t)=-6rect(t)\cos(3\pi t)$

ح- $g(t)=u(t+1/2)ramp(1/2-t)$

ط- $g(t)=rect(t+1/2)-rect(t-1/2)$

ي- $g(t)=\int_{-\infty}^{t}[\delta(\lambda+1)-2\delta(\lambda)+\delta(\lambda-1)]d\lambda$

ك- $g(t)=2ramp(t)rect((t-1)/2)$

ل- $g(t)=3rect(t/4)-6rect(t/2)$

٣٣- ارسم الدوال التالية :

أ- $g(t)=3\delta(3t)+6\delta(4(t-2))$

ب- $g(t)=2\delta_1(-t/5)$

ج- $g(t)=\delta_1(t)\mathrm{rect}(t/11)$

د- $g(t)=\int_{-\infty}^{t}[\delta_2(\lambda)-\delta_2(\lambda-1)]d\lambda$

٣٤- للدالة g(t) الوصف التالي: إنها تساوي صفراً لكل t<-5، وميلها يساوي 2- في المدى من 2->t>5-. هذه الدالة لها شكل الدالة الجيبية بمقدار يساوي واحداً، وتردد يساوي 1/4Hz بالإضافة لثابت في المدى .2>t>2-بالنسبة للقيم t>2 فإنها تتناقص في اتجاه الصفر بثابت زمنى مقداره 2 ثانية، وهي مستمر في جميع الأجوال.
أكتب وصفاً رياضياً كاملاً ودقيقاً لهذه الدالة.

أ- ارسم g(t) في المدى 10>t>10-.

ب- ارسم g(2t) في المدى 10>t>10-.

ج- ارسم 2g(3-t) في المدى 10>t>10-.

د- ارسم 2g((t+1)/2)- في المدى 10>t>10-.

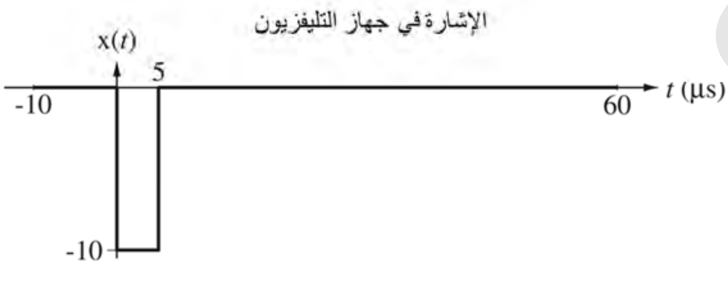
٣٥- باستخدام ماتلاب، لكل من الدوال التالية ارسم الدالة الأساسية والدالة المزاحة و/أو المحجمة:

أ- $g(t)=\begin{cases}-2, & t<-1\\ 2t, & -1<t<1\\ 3-t^2, & 1<t<3\\ -6, & t>3\end{cases}$ ، -3g(4-t) مع الزمن t

ب- $g(t)=\mathrm{Re}(e^{j\pi t}+e^{j1.1\pi t})$ ، g(t/4) مع الزمن t

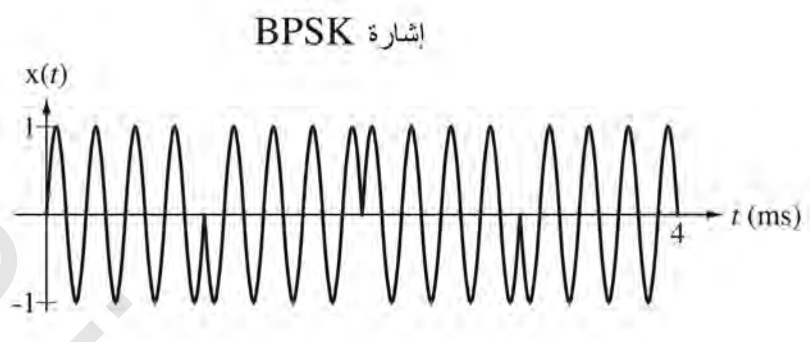
ج- $G(f)=\left|\frac{5}{f^2-j2+3}\right|$ ، |G(10(f-10))+G(10(f+10))| مع التردد f

٣٦- إحدى الإشارات التي تحدث في جهاز التليفزيون موضحة في شكل (م،٣٦). اكتبْ وصفاً حسابياً لهذه الإشارة:



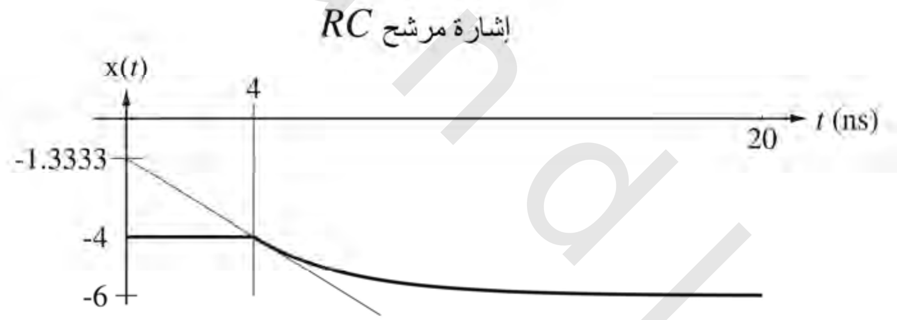
شكل رقم (م،٣٦) إحدى الإشارات التي تحدث في جهاز التليفزيون

٣٧- الإشارة الموضحة في شكل (م ، ٣٧) هي جزء من الإزاحة الطورية المفتاحية الثنائية binary phase shift keyed, BPSK في التراسل الرقمي. أكتب الوصف الحسابي لها.



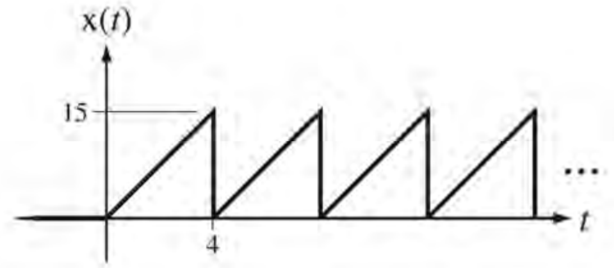
شكل رقم (م،٣٧) إشارة ال BPSK

٣٨- الإشارة الموضحة في شكل (م ، ٣٨) تمثل استجابة مرشح منفذ للترددات المنخفضة RC لتغير مفاجئ في إشارة الدخل له. اكتب الوصف الحسابي لهذه الإشارة :



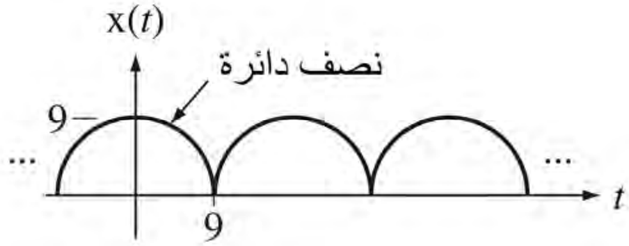
شكل رقم (م،٣٨) الاستجابة الوقتية لمرشح RC

٣٩- صف الإشارة الموضحة في شكل (م ، ٣٩) كدالة خطية مطروحاً منها مجموعة دوال خطوة.



شكل رقم (م،٣٩)

٤٠- صف الإشارة الموضحة في شكل (م، ٤٠):



شكل رقم (م،٤٠)

٤١- افترض الدالتين التاليتين المعرفتين كما يلي:

$x_2(t)=\sin(2\pi t/10)$ و $x_1(t) = \begin{cases} 1, & \cos(2\pi t) \geq 0 \\ 0, & \cos(2\pi t) < 0 \end{cases}$

ارسم حاصل ضرب الدوال التالية في المدى $-5<t<5$:-

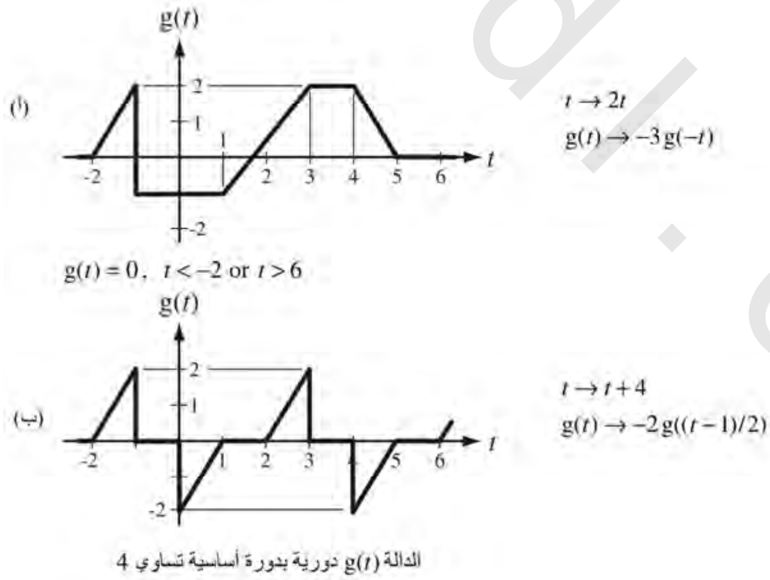
أ- $x_1(2t)x_2(-t)$

ب- $x_1(t/5)x_2(20t)$

ج- $x_1(t/5)x_2(20(t+1))$

د- $x_1((t-2)/5)x_2(20t)$

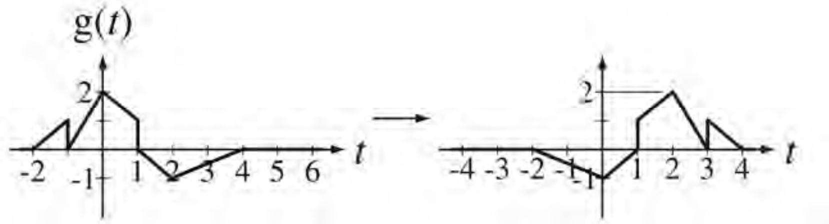
٤٢- افترض التعريف البياني لدالة كالموضح في شكل (م، ٤٢)، ارسم الصور المزاحة و/أو المحجمة التالية:



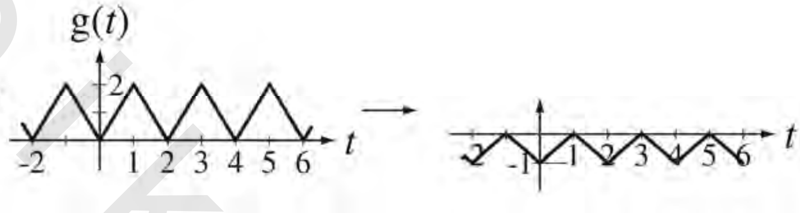
شكل رقم (م،٤٢)

٤٣- لكل زوج من الدوال الموضحة في شكل (م،٤٣) وضح ما هي الإزاحة و/أو التحجيم الذي حدث، واكتب التعبير الصحيح للدالة المزاحة و/أو المحجمة.

(أ)



(ب)



في (ب) بفرض g(t) دورية بدورة أساسية تساوي 2، أوجد تغيرين إزاحيين و/أو تحجيمين يعطيان النتيجة نفسها.

٤٤- اكتب دالة مستمرة في الزمن t التي عندما يحدث فيها التغيران المتتابعان t→-t و t→t-1 تبقى على الدالة بدون تغيير.

٤٥- ارسم المقدار والزاوية للدوال التالية مع التردد f :

أ- $G(f) = \frac{jf}{1=jf/10}$

ب- $G(f) = \left[rect\left(\frac{f-1000}{100}\right) + rect\left(\frac{f+1000}{100}\right)\right] e^{-j\pi f/500}$

ج- $G(f) = \frac{1}{250-f^2+j3f}$

٤٦- ارسم المقدار والزوايا مع التردد f لكل من الدوال التالية في المدى $-4<f<4$:

أ- $X(f) = 5rect(2f)e^{+j2\pi f}$

ب- $X(f)=j5\delta(f+2)-j5\delta(f-2)$

ج- $X(f)=(1/2)\delta_{1/4}(f)e^{-j\pi f}$

التفاضل العام

٤٧- ارسم التفاضل العام للدالة $g(t)=3\sin(\pi t/2)rect(t)$.

التفاضلات والتكاملات

٤٨- ما هي القيمة العددية لكل من التكاملات التالية؟

أ- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cos(48\pi t)\, dt$

ب- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-5) \cos(\pi t)\, dt$

ج- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-8) rect(\frac{t}{16}) dt$

٤٩- ما هي القيمة العددية لكل من التكاملات التالية؟

أ- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(t) \cos(48\pi t)\, dt$

ب- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(t) \sin(2\pi t) dt$

ج- $4\int_{0}^{20} \delta_4(t-2) rect(t) dt$

٥٠- ارسم التفاضلات الزمنية للدوال التالية؟

أ- $g(t)=\sin(2\pi t)\mathrm{sgn}(t)$

ب- $g(t)=|\cos(2\pi t)|$

الإشارات الزوجية والفردية

٥١- إرسم الجزء الزوجي والجزء الفردي للإشارات التالية:

أ- $x(t)=rect(t-1)$

ب- $x(t)=2\sin(4\pi t-\pi/4)rect(t)$

٥٢- احسب الجزء الزوجي والجزء الفردي لكل من الدوال التالية:

أ- $g(t)=10\sin(20\pi t)$

ب- $g(t)=20t^3$

ج- $g(t)=8+7t^2$

د- $g(t)=1+t$

ه- $g(t)=6t$

و- $g(t)=4t\cos(10\pi t)$

ز- $g(t)=\cos(\pi t)/\pi t$

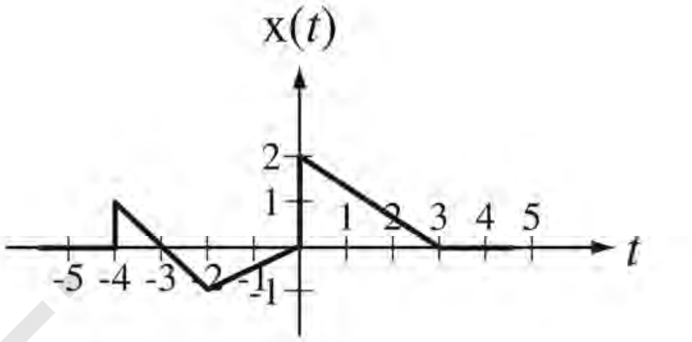
ح- $g(t)=12+\sin(4\pi t)/4\pi t$

ط- $g(t)=(8+7t)\cos(32\pi t)$

ي- $g(t)=(8+7t^2)\sin(32\pi t)$

٥٣- هل هناك دالة تكون زوجية وفردية في الوقت نفسه ؟ اشرح

٥٤- أوجد وارسم الجزء الزوجي والفردي للدالة x(t) في شكل (م ، ٥٤).



شكل رقم (م،٥٤)

الإشارات الدورية

٥٥- لكل واحدة من الإشارات التالية ، قرر إذا كانت دورية أم لا ، وإذا كانت دورية فما هي الدورة؟

أ- $g(t)=28\sin(400\pi t)$

ب- $g(t)=14+40\cos(60\pi t)$

ج- $g(t)=5t-2\cos(5000\pi t)$

د- $g(t)=28\sin(400\pi t)+12\cos(500\pi t)$

ه- $g(t)=10\sin(5\pi t)-4\cos(7t)$

و- $g(t)=4\sin(3t)+3\cos(\sqrt{3}t)$

٥٦- هل تعتبر الكمية الثابتة دالة دورية ؟ اشرح لماذا تكون دورية أو غير دورية ، وإذا كانت دورية فما هي الدورة الأساسية ؟

طاقة الإشارة وقدرتها

٥٧- احسب طاقة الإشارة لكل من الإشارات التالية :

أ- $x(t)=2\mathrm{rect}(-t)$

ب- $x(t)=\mathrm{rect}(8t)$

ج- $x(t)=3\mathrm{rect}(t/4)$

د- $x(t)=2\sin(200\pi t)$

ه- $x(t)=\delta(t)$

(تلميح : احسب طاقة الإشارة أولاً لإشارة تقترب من النبضة في نهاية معينة ، ثم احسب النهاية).

و- x(t)=d(rect(t))/dt

ز- $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} rect(\lambda) d\lambda$

ح- $x(t)=e^{j100\pi t}$

٥٩- افترض إشارة x دورية بدورة أساسية $T_0=6$ ، وهذه الدالة موصوفة على الفترة الزمنية $0<t<6$ بالمعادلة التالية :

Rect((t-2)/3)-4rect((t-4)/2)

ماهي القدرة المتوسطة لهذه الإشارة ؟