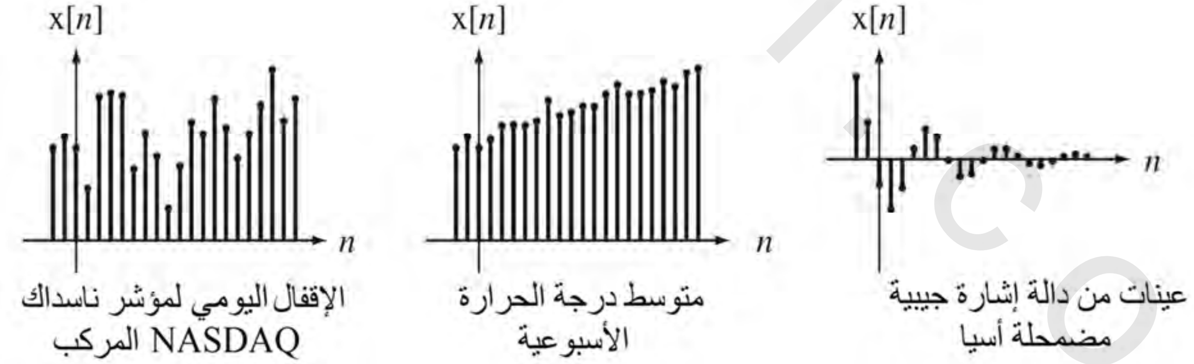
وصف الإشارات المقطعة زمنياً

(٣,١) المقدمة والأهداف

في القرن العشرين تطورت ماكينات الحاسب من مرحلة طفولتها إلى الوضع الذي هي عليه هذه الأيام كجزء موجود في كل مكان ولا غنى عنه في المجتمع والاقتصاد. إن تأثير الحسابات الرقمية على الإشارات والأنظمة قد انتشرت بنفس الطريقة. العمليات اليومية التي كانت من قبل تنفذ عن طريق الأنظمة المستمرة زمنياً قد تم استبدالها بالأنظمة المقطعة زمنياً. هناك أنظمة تكون ضمنياً مقطعة زمنياً ولكن معظم تطبيقات معالجة الإشارات المقطعة زمنياً تكون على إشارات يتم توليدها عن طريق عيننة (أخذ عينات) الإشارات المستمرة زمنياً. شكل (٣.١) يبين بعض الأمثلة على الإشارات المقطعة زمنياً.



شكل رقم (٣,١) أمثلة على الإشارات المقطعة زمنياً

معظم الدوال والطرق المستخدمة لوصف الإشارات المستمرة زمنياً لها النظير المشابه جدا في وصف الإشارات المقطعة زمنياً. ولكن بعض العمليات على الإشارات المقطعة زمنياً تكون مختلفة أساسا، مما يسبب في

ظهور ظواهر لم تكن موجودة في تحليل الإشارات المستمرة زمنياً. الفارق الأساسي بين الإشارات المستمرة زمنياً والمقطعة زمنياً هي أن قيم الإشارة تكون قابلة للعد مع مرور الزمن في الإشارات المقطعة زمنياً، بينما الإشارات المستمرة زمنياً فلا يمكن عدها.

أهداف الفصل

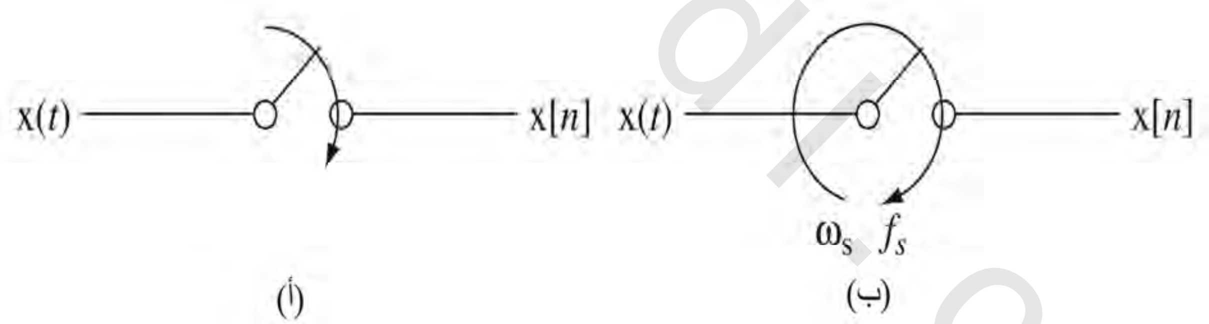
١- التعريف الحسابي لبعض الدوال التي يمكن استخدامها لوصف إشارات الزمن المقطع.

٢- تطوير طرق للإزاحة، والتحجيم وتجميع هذه الدوال للتعبير عن الإشارات العملية وتقدير لماذا تكون هذه العمليات مختلفة في الأزمنة المقطعة عنها في الأزمنة المستمرة.

٣- التعرف على نماذج وتماثلات معينة لتبسيط تحليل إشارات الزمن المقطع.

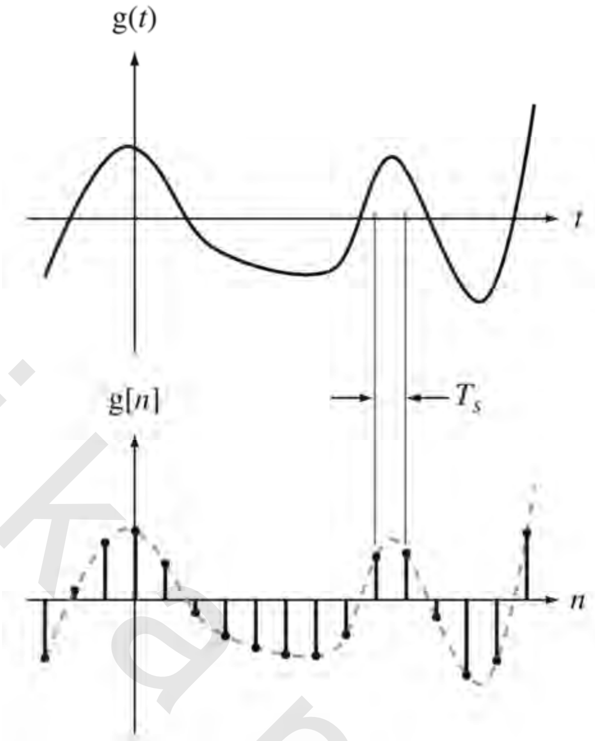
(٣,٢) أخذ العينة (العيننة) والأزمنة المقطعة

تزداد أهمية دوال الزمن المقطع التي تصف إشارات هذا الزمن في تحليل الإشارات والأنظمة. من أشهر أمثلة إشارات الزمن المقطع هي هذه الإشارات التي يتم الحصول عليها عن طريق أخذ عينات من إشارات الزمن المستمر، الذي سنسميه العيننة. يقصد بالعيننة الحصول على قيم الإشارة المستمرة عند نقاط محددة، أو مقطعة في الزمن. أحد الطرق لرؤية العيننة يمكن أن تكون من خلال مثال إشارة جهد ومفتاح يستخدم كأداة عيننة مثالية كما في شكل (٣,٢أ).



شكل رقم (٣,٢)

يغلق المفتاح لفترة زمنية متناهية الصغر عند نقاط مقطعة في الزمن. هذه القيم من الإشارة المستمرة x(t) عند هذه الأزمنة المحددة هي التي يتم اعتبارها في الإشارة المقطعة زمنياً x[n]. إذا كان هناك زمن ثابت Ts بين العينات، فإن عملية العيننة تسمى العيننة المنتظمة، وهي التي تكون فيها أزمنة أخذ العينات مضاعفات صحيحة من فترة أخذ العينات، أو فترة العيننة Ts. زمن العينات nTs يمكن استبداله بالرقم الصحيح n الذي يشير إلى أو يحدد العينة كما في شكل (٣,٣).



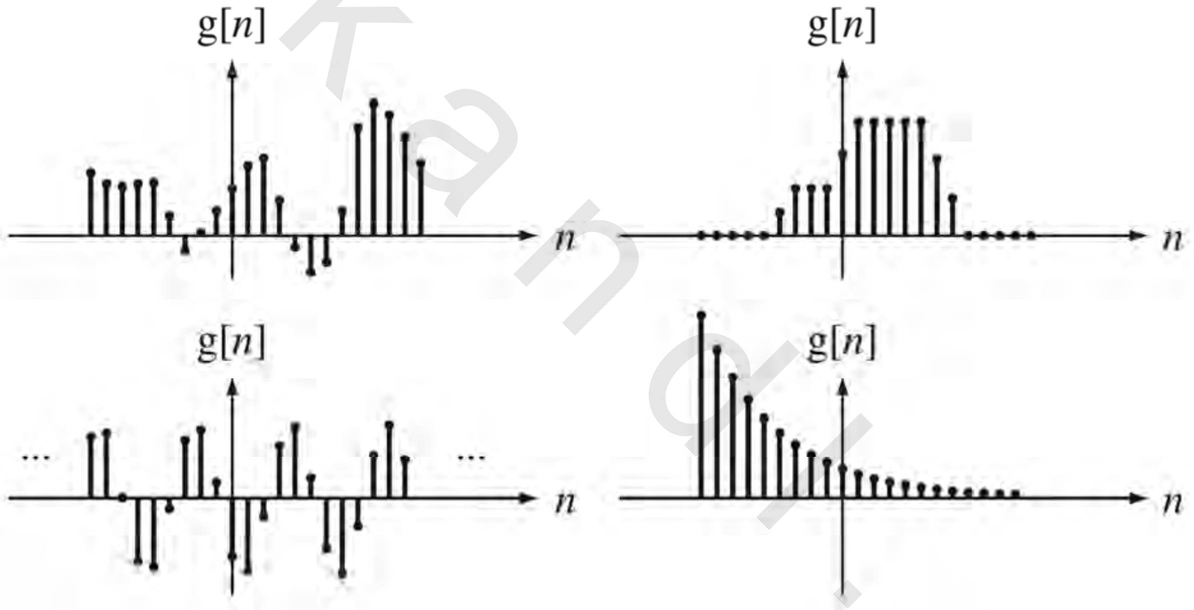
شكل رقم (٣,٣) الحصول على إشارة متقطعة زمنياً عن طريق أخذ عينات من إشارة مستمرة زمنياً

هذا النوع من العمليات يمكن النظر إليه عن طريق تصور أن المفتاح يدور ببساطة بسرعة زاوية ثابتة مقدارها f_s من الدورات في الثانية كما في شكل (٣,٢ب) حيث سيكون الزمن بين العينات هو $Ts=1/f_s=2\pi/w_s$. سنستخدم ترميزاً مبسطاً للدالة في الزمن المقطع وهو g[n] والتي يتم تكوينها عن طريق أخذ عينات عند نقاط معينة من الدالة المستمرة g(nTs) حيث n رقم صحيح. القوس المربع [.] الذي يحتوي المعاملات يبين الدالة المقطعة زمنياً، على العكس من القوس العادي (.) الذي يبين الدالة المستمرة زمنياً. المتغير المستقل n يسمى الزمن المقطع ؛ لأنه يشير إلى نقطة محددة في الزمن، على الرغم من أنه ليس له أبعاد، فليس له وحدات الثانية مثل المتغير t والمتغير Ts. حيث إن الدوال المقطعة زمنياً تكون محددة فقط عند قيم صحيحة n، فإن قيم التعبيرات مثل g[2.7] أو g[3/4] تكون غير محددة.

الدوال المعرفة للمعاملات المستمرة يمكن أيضاً تعريفها في معاملات مقطعة زمنياً مثل الدالة $\sin(2\pi f_0 nTs)$. يمكننا تكوين دالة مقطعة زمنياً من دالة مستمرة زمنياً عن طريق أخذ العينات، مثل، $g[n]= \sin(2\pi f_0 nTs)$. على ذلك، فإنه على الرغم من دالة الجيب تكون معرفة عند أي قيمة حقيقية للمعامل، فإن الدالة g[n] تكون معرفة

فقط عند القيم الصحيحة n. معنى ذلك أن قيمة الدالة g[7.8] تكون غير محددة على الرغم من أن $\sin(2\pi f_0(7.8)Ts)$ تكون محددة.

من أهم الأمثلة على أنظمة الزمن المقطع في التدريبات الهندسية، ماكينات الأحوال التتابعية، والمثال الأكثر شيوعاً على ذلك هو الحاسب. تعمل الحاسبات عن طريق نبضات التزامن clock، التي هي مذبذب ثابت التردد. المذبذب يولد نبضات عند فترات زمنية منتظمة، وعند نهاية كل نبضة تزامن، فإن الحاسب يقوم بتنفيذ أمر معين ويتغير من حالة منطقية معينة للحالة التالية. لقد أصبح الحاسب أداة في غاية الأهمية في كل أطوار الاقتصاد الحديث، ولذلك فإن فهم كيف تتم معالجة الإشارات المقطعة زمنياً عن طريق الماكينات التتابعية سيكون غاية في الأهمية وبالذات بالنسبة للمهندسين. شكل (٣،٤) يوضح بعض الدوال المقطعة زمنياً التي يمكنها أن تصف الإشارات المقطعة زمنياً.



شكل رقم (٣.٤) أمثلة على الدوال المقطعة زمنياً

نوع المخطط المستخدم في شكل (٣،٤) يسمى رسم القضبان، أو مخطط القضبان stem plot و الذي تحدد فيه النقطة قيمة الدالة والقضيب، أو الخط يصل في العادة بين النقطة والقيمة المحددة على محور الزمن المقطع n، وهذه طريقة تستخدم بكثرة في رسم دوال الزمن المقطع. يوجد في ماتلاب الأمر stem الذي يعطي هذه المخططات.

إن استخدام ماتلاب في رسم المخططات يعتبر مثالاً على العينة. يستطيع ماتلاب التعامل فقط مع المتجهات المحددة الطول، لذلك فإنه لرسم دالة مستمرة زمنياً يجب أن نحدد كم عدد النقاط التي يجب وضعها في

متجه الزمن بحيث عندما يقوم ماتلاب برسم خطوط مستقيمة بين قيم الدالة عند هذه الأزمنة، فإن الرسم، أو المخطط يبدو كما لو كان دالة مستمرة زمنياً. ستتم دراسة العينة بعمق وتفاصيل أكثر في الفصل ١٠.

(٣,٣) دوال الجيب والأسس

الدوال الجيبية والأسية تكون مهمة في تحليل الإشارات والأنظمة المقطعة زمنياً كما هي مهمة في تحليل الإشارات والأنظمة المستمرة زمنياً. معظم الأنظمة المقطعة زمنياً يمكن وصفها، على الأقل تقريبياً، عن طريق المعادلات الفرقية. الدالة المميزة للمعادلات الفرقية الخطية العادية، ذات المعاملات الثابتة تكون أسية مركبة، والأس الحقيقي يكون حالة خاصة من الأس المركب، وأي جيب يكون عبارة عن تجميع خطي من الأسس المركبة.

الدوال الأسية والجيبية المتقطعة زمنياً يمكن تحديدها بطريقة مماثلة لنظيراتها المستمرة زمنياً كما يلي :

$g[n]=Ae^{\beta n}$ أو $g[n]=Az^n$ حيث $z=e^\beta$،

و

$g[n]=A\cos(2\pi F_0 n+\theta)$ أو $g[n]=A\cos(\Omega_0 n+\theta)$

حيث كل من z و β تكون ثوابت مركبة، و A ثابت حقيقي، و θ إزاحة زاوية حقيقية بالراديان، و F_0 رقم حقيقي، $\Omega_0=2\pi F_0$، و n هي الزمن المتقطع.

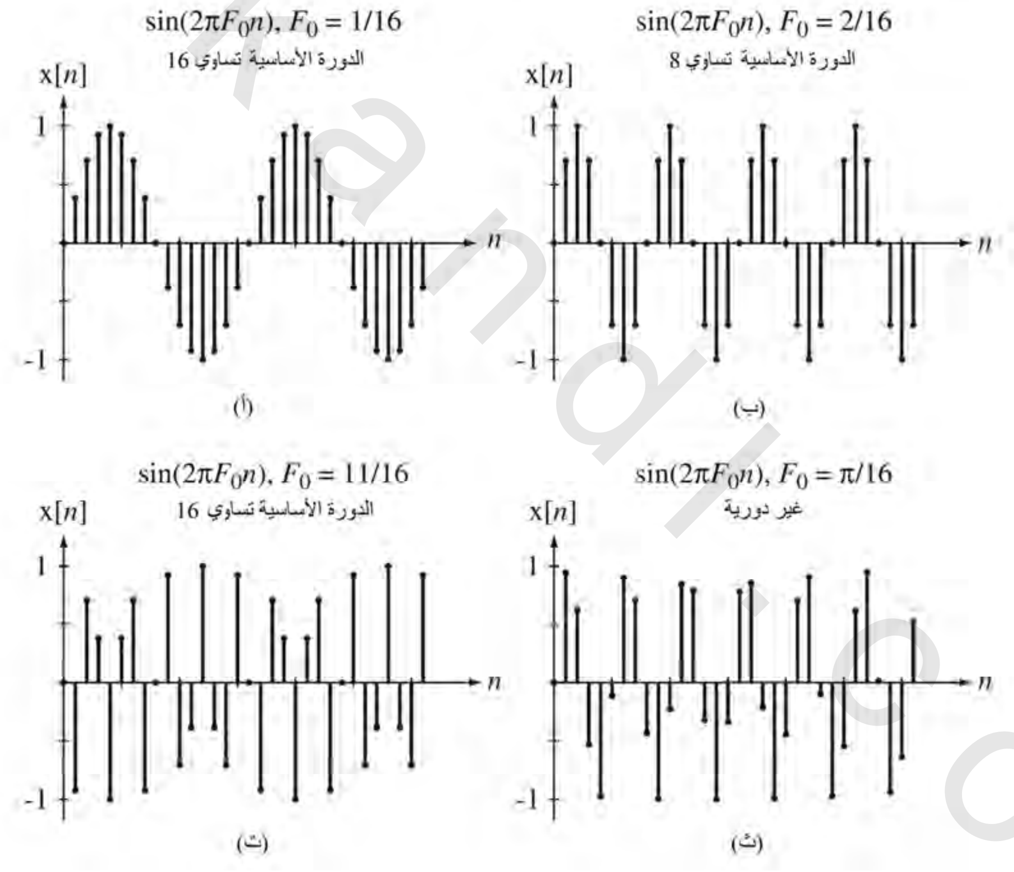
الدوال الجيبية أو الجيوب

هناك بعض الفروق المهمة بين الدوال الجيبية المستمرة زمنياً والمتقطعة زمنياً. واحدٌ من هذه الفروق هو أننا إذا ولدّنا دالة جيبية متقطعة زمنياً عن طريق أخذ عينات من دالة جيبية مستمرة زمنياً، فإن دورة الدالة الجيبية المتقطعة زمنياً من الممكن أن تكون غير تامة الوضوح، وفي الحقيقة، فإن الدالة الجيبية المتقطعة زمنياً من الممكن ألا تكون دورية أصلاً. افترض الدالة الجيبية المتقطعة زمنياً $g[n]=A\cos(2\pi F_0 n+\theta)$ المرتبطة بالدالة الجيبية المستمرة زمنياً $g(t)= A\cos(2\pi f_0 n+\theta)$ من خلال أن $g[n]=g[nTs]$، فإن $F_0=f_0Ts=f_0/f_s$ حيث $f_s=1/Ts$ هي معدل أخذ العينات. المطلوب لكي تكون الدالة الجيبية المتقطعة زمنياً دورية أن يكون، لبعض الزمن المتقطع n، والرقم الصحيح m، يكون $2\pi F_0 n=2\pi m$. من ذلك نحصل على $F_0=m/n$ مما يوضح أن F_0 يجب أن تكون رقماً نسبياً (نسبة بين رقمين صحيحين). حيث إن عملية العينة تؤدي إلى العلاقة $F_0=f_0/f_s$ فإن ذلك يعني أيضاً أنه لكي تكون الدالة الجيبية المتقطعة زمنياً دورية، فإن نسبة التردد الأساسي للدالة الجيبية المستمرة إلى معدل أخذ العينات يجب أن تكون نسبة بين رقمين صحيحين. ما هي الدورة الأساسية للدالة الجيبية التالية :

$$g[n] = 4cos\left(\frac{72\pi n}{19}\right) = 4\cos\left(2\pi\left(\frac{36}{19}\right)n\right) \ ?$$

ستكون F_0 تساوي 36/19 وسيكون أقل زمن متقطع n الذي يعطي $F_0n=m$ هو n=19 حيث m رقم صحيح. وعلى ذلك فإن الدورة الأساسية ستكون 19. إذا كانت F_0 رقم نسبي ويمكن التعبير عنها كنسبة بين رقمين صحيحين $F_0=q/N_0$، وإذا تم اختصار هذا الكسر، أو النسبة إلى أبسط صورة له عن طريق القسمة على المعاملات المشتركة في البسط والمقام، فإن الدورة الأساسية ستكون N_0 وليست $(1/F_0)=N_0/q$ إلا إذا كانت q=1. قارن هذه النتيجة مع الدورة الأساسية للدالة الجيبية المستمرة زمنياً $g(t)=4\cos(72\pi t/19)$، والتي دورتها الأساسية T_0 تساوي 19/36، وليست 19. شكل (٣,٥) يوضح بعض الدوال الجيبية المتقطعة زمنياً.

عندما تكون F_0 ليست مقلوب رقم صحيح، فإن الدالة الجيبية المتقطعة زمنياً قد لا يمكن التعرف عليها مباشرة كدالة جيبية من رسمها، وهذه هي الحالة الموجودة في شكلي (٣,٥ت و ث). الدالة الجيبية في شكل (٣,٥ث) غير دورية.



شكل رقم (٣,٥) أربع دوال جيبية متقطعة زمنياً

هناك مصدر للالتباس بالنسبة للطلاب عندما يواجهون دالة جيبية متقطعة زمنياً على الصورة $A\cos(2\pi F_0 n)$ أو $A\cos(\Omega_0 t)$ هي السؤال التالي: "ما هي F_0 و Ω_0؟". في الدوال الجيبية المستمرة زمنياً $A\cos(2\pi f_0 t)$ و $A\cos(w_0 t)$،

فإن f_0 تكون التردد الدوري بالهرتز، أو دورة /الثانية و ω_0 هي التردد الزاوي بالراديان/الثانية. معامل جيب التمام cosine يجب ألا تكون له أبعاد وحاصل الضرب $2\pi f_0 t$ و $\omega_0 t$ ليست لها أبعاد لأن كل من الدورة والراديان عبارة عن نسب من الأطوال والثواني ($second^{-1}$) في f_0 أو إلغاء ω_0. الطريقة بنفسها فإن المعاملات $2\pi F_0 n$ و $\Omega_0 n$ يجب ألا يكون لها أبعاد أيضاً. يجب أن نتذكر أن n ليس لها وحدات الثانية. على الرغم من تسميتها بالزمن المتقطع، فإنها في الحقيقة مؤشر للزمن، ولا تمثل زمناً. إذا فكرنا في n على أنها مؤشر للعينات، فإن $n=3$ مثلاً تعني العينة الثالثة المأخوذة بعد الزمن المتقطع $n=0$. وعلى ذلك فإننا يمكننا أن نفكر في n على أن لها وحدات العينات. لذلك فإن F_0 تكون وحداتها هي دورة/عينة حتى تكون الكمية $2\pi F_0 n$ ليس لها أبعاد، وأيضاً Ω_0 ستكون وحداتها راديان/عينة لكي تكون الكمية $\Omega_0 n$ ليست لها أبعاد. إذا أخذنا عينات من دالة الجيب المستمرة زمنياً $A\cos(2\pi f_0 t)$ التي لها دورة أساسية f_0 دورة /الثانية، فإن الدالة الجيبية المتقطعة زمنياً ستكون :

$$A\cos(2\pi f_0 nT_s)=A\cos(2\pi n f_0/f_s)=A\cos(2\pi F_0 n)$$

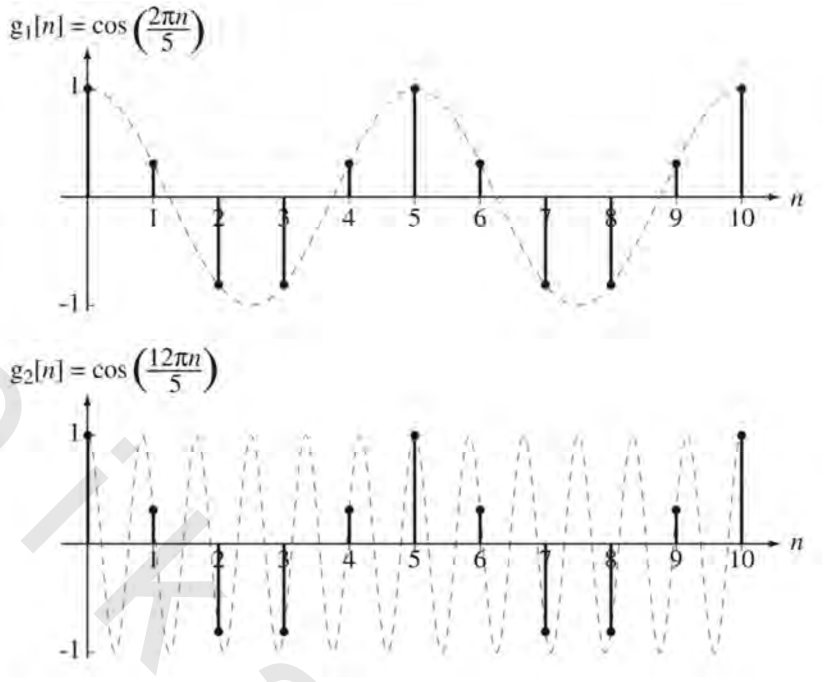
وستكون $F_0=f_0/f_s$ وستكون الوحدات متناسبة.

$$F_0\ in\ cycles/sample = \frac{f_0\ in\ cycles/second}{f_s\ in\ samples/second}$$

وعلى ذلك فإن F_0 عبارة عن تردد دوري مطبعة على معدل العينة. الطريقة بنفسها $\Omega_0=\omega_0/f_s$ تصبح راديان زاوي مطبع على التردد الزاوي بوحدات الراديان/العينة أو radian/sample

$$\Omega_0\ in\ radian/sample = \frac{w_0\ in\ radians/second}{f_s\ in\ samples/second}$$

جانب آخر واحد في الدوال الجيبية المقطعة زمنياً و الذي سيكون مهماً جداً في الفصل ١٠ عند اعتبار عملية العينة هو أن أي دالتين جيبيتين مقطعتين زمنياً $g_1[n]=A\cos(2\pi F_1 n+\theta)$ و $g_2[n]=A\cos(2\pi F_2 n+\theta)$ من الممكن أن يكونا متطابقتين حتى ولو كانت F_1 و F_2 مختلفتين. فمثلاً، نجد الدالتين الجيبيتين $g_1[n]=A\cos(2\pi n/5)$، $g_2[n]=A\cos(12\pi n/5)$ يمكن وصفهما بتعبيرات مختلفة كما رأينا، ولكن عند رسمهما مع الزمن المقطع n سنرى أنهما متماثلتان كما في شكل (٣،٦).



شكل رقم (٣,٦) دالتان جيبيتان لهما Fs مختلفة ولكن لهما نفس السلوك الوك الوظيفي

الخطوط المتقطعة، أو المشرطة في شكل (٣,٦) تمثل الدوال المستمرة زمنياً $g_1[n]=A\cos(2\pi n/5)$ و $g_2[n]=A\cos(12\pi n/5)$ ، حيث n و t مرتبطان بالعلاقة t=nTs. من الواضح أن الدالتين المستمرتين مختلفتان، ولكن الدالتين المتقطعتين منطبقتان. السبب في أن الدالتين المتقطعتين منطبقتان يمكن رؤيته عن طريق إعادة كتابة $g_2[n]$ على الصورة التالية :

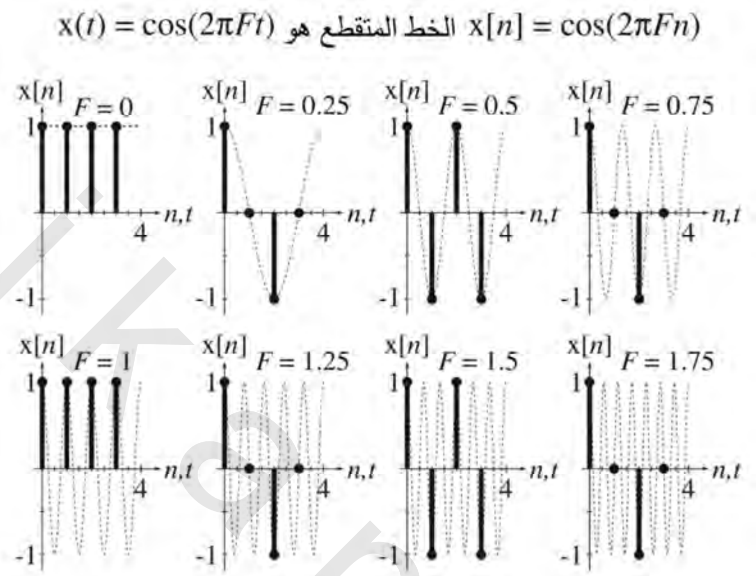
$$g_2[n] = cos\left(\frac{2\pi}{5}n + \frac{10\pi}{5}n\right) = cos\left(\frac{2\pi}{5}n + 2\pi n\right)$$

وعلى ذلك يمكن استخدام حقيقة أن إضافة أي مضاعف صحيح للـ 2π لزاوية الدالة الجيبية، فإن قيمة الدالة لا تتغير. وعلى ذلك يمكن كتابة ما يلي :

$$g_2[n] = cos\left(\frac{2\pi}{5}n + 2\pi n\right) = cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right) = g_1[n]$$

حيث إن الزمن المتغير n رقم صحيح. وحيث إن الترددين في الدالتين المقطعتين زمنياً في هذا المثال هما $F_1=1/5$ و $F_2=6/5$ ، وهذا يعني أنهما متكافئان كترددات في دالة جيبية متقطعة زمنياً. إن ذلك يمكن رؤيته عن طريق إدراك أنه عند التردد 1/5 cycles/sample فإن التغير الزاوي لكل عينة يساوي $2\pi/5$ ، وعند التردد 6/5 cycles/samples فإن التغير الزاوي لكل عينة يساوي $12\pi/5$. كما نرى فإن هاتين الزاويتين تعطيان القيم نفسها تماماً كمعاملات لدالة جيبية. وعلى ذلك ففي الدالة الجيبية المقطعة زمنياً على الصورة $\cos(2\pi F_0 n+\theta)$ ، فإنه بتغيير F_0 عن طريق إضافة رقم صحيح، فإن الدالة الجيبية لا تتغير. الطريقة بنفسها ، فإنه في دالة جيبية مقطعة زمنياً على الصورة $\cos(\Omega_0 n+\theta)$ ، فإنه

بتغيير Ω_0 عن طريق إضافة مضاعفات صحيحة لـ 2π، فإن الدالة الجيبية لا تتغير. من الممكن أن نتصور تجربة يمكن فيها توليد دالة جيبية على الصورة $\sin(2\pi Fn)$ وتكون فيها F متغيرة. مع تغير F بخطوات مقدارها 0.25 من 0 حتى 1.75، فإننا سنحصل على تتابع من الدوال المقطعة زمنياً كالموضحة في شكل (٣،٧). أي دالتين مقطعتين زمنياً تختلف تردداتهما برقم صحيح تكونان متطابقيان.

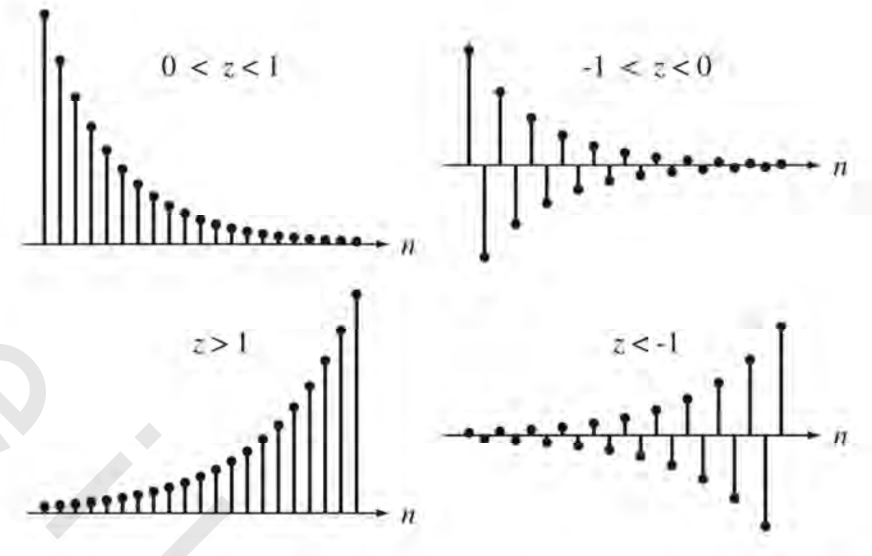


شكل رقم (٣،٧) يوضح أن أي دالة جيبية مقطعة زمنياً بتردد F تتكرر كل مرة تتغير F بمقدار واحد

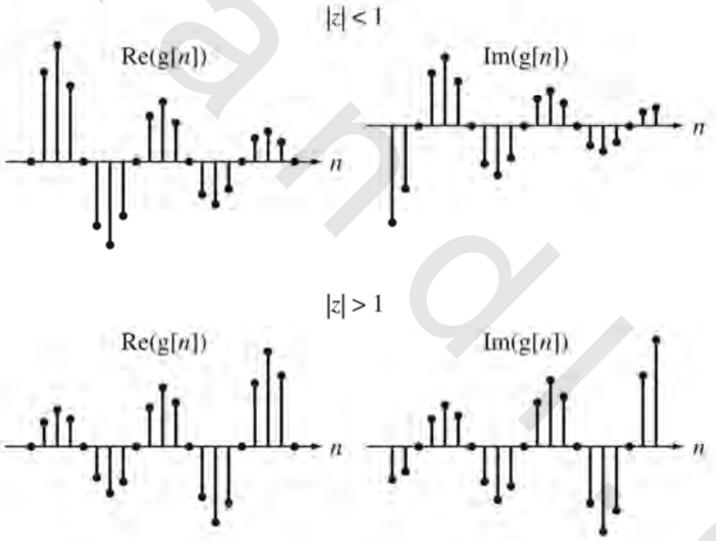
الدوال الأسية

الطريقة الأكثر شيوعا في كتابة الدالة الأسية المتقطعة زمنياً تكون على الصورة $g[n]=Az^n$. إن هذه لا تبدو مثل الدالة الأسية المستمرة زمنياً، التي تكون على الصورة $g(t)=Ae^{\beta t}$، حيث إنه لا توجد "e"، ولكنها ما زالت دالة أسية حيث إن $g[n]=Az^n$ كان من الممكن كتابتها على الصورة $g[n]=Ae^{\beta n}$ حيث $z=e^{\beta}$. الصورة Az^n تكون أقل بساطة ومفضلة عموما.

الدوال الأسية المقطعة زمنياً يمكن أن يكون لها العديد من السلوك الوظيفي اعتماداً على قيمة z في $g[n]=Az^n$. شكل (٣،٨) وشكل (٣،٩) يلخصان الشكل الوظيفي للدالة الأسية لقيم مختلفة للمتغير z.



شكل (٣,٨) سلوك الدالة g[n]=Azn عند قيم مختلفة للمتغير z الحقيقي



شكل رقم (٣,٩) سلوك الدالة g[n]=Azn عند قيم مختلفة للمتغير z المركب

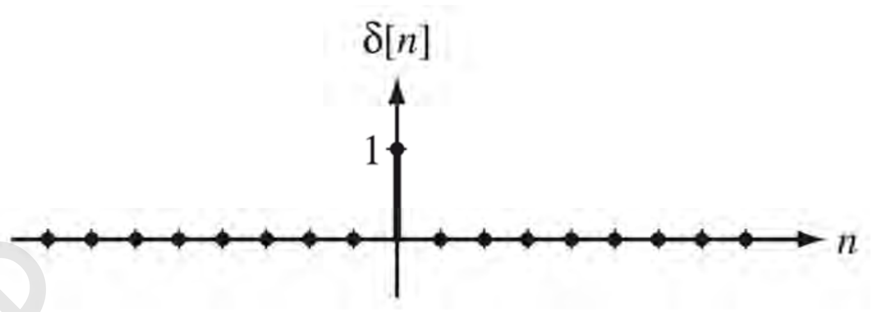
(٣,٤) الدوال المتفردة

هناك مجموعة من الدوال المقطعة زمنياً المماثلة للدوال المتفردة المستمرة زمنياً ولها استخدامات مشابهة.

دالة وحدة النبضة

دالة وحدة النبضة (تسمى أحياناً بدالة وحدة العينة) الموضحة في شكل (٣,١٠) يتم تعريفها كما يلي :

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$ المعادلة رقم (٣,١)



شكل رقم (٣,١٠) دالة وحدة النبضة

دالة وحدة النبضة المقطعة زمنياً تعاني من عدم وجود الخصائص المميزة الموجودة في وحدة النبضة المستمرة زمنياً. دالة وحدة النبضة المقطعة زمنياً ليس لها خاصية مقابلة لخاصية التحجيم في وحدة النبضة المستمرة زمنياً. لذلك فإن $\delta[n]=\delta[an]$ لأي قيمة صحيحة، لا تساوي صفراً، ومحددة للمتغير a. ولكن دالة وحدة النبضة المقطعة زمنياً بالتأكيد لها خاصية العينة. هذه الخاصية هي :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A\delta[n-n_0]x[n] = Ax[n_0]$$ المعادلة رقم (٣,٢)

حيث أن النبضة لا تساوي صفراً فقط حيثما تكون معاملاتها لا تساوي الصفر، فإن المجموع على كل قيم n سيكون مجموع على عناصر كلها أصفراً فيما عدا عند $n=n_0$. عندما تكون $n=n_0$ فإن $x[n]=x[n_0]$، وسيتم ضرب النتيجة ببساطة في الكمية القياسية A. هناك اسم بديل شائع لهذه الدالة وهو دالة كرونيكر Kronecker delta function.

لا توجد دالة ماتلاب للنبضة المستمرة الزمن، ولكننا يمكننا عمل واحدة للنبضات المقطعة زمنياً كما يلي :

```
دالة للحصول على دالة النبضة المقطعة زمنياً والمعرفة على أنها تساوي واحداً %
عندما تكون المعاملات تساوي صفراً، وتساوي الصفر فيما عدا ذلك. %
إنها تعطي "NAN" لأي معاملات لا تكون رقماً صحيحاً %
%
% function y = impD(n)
%
function y = impD(n)
y = double(n == 0); % ستكون النبضة تساوي واحداً عندما تكون المعاملات
% تساوي صفراً وستكون صفراً فيما عدا ذلك
I = find(round(n) ~= n); % n يشير إلى القيم غير الصحيحة للمتغير
```

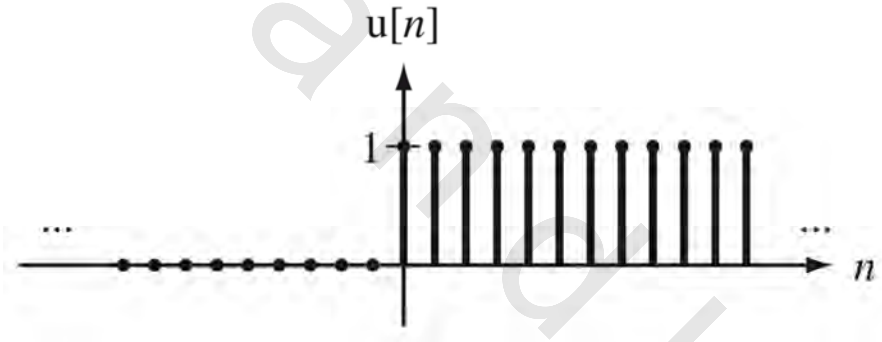
```
y(I) = NaN;                % وضع هذه القيم الراجعة تساوي "NAN"
```

هذه الدالة في ماتلاب تعطي السلوك الوظيفي للصدمة δ[n] بما في ذلك أنها سترجع القيمة غير المحددة "NAN" في حالة أن تكون المعاملات لا تساوي صفراً. "D" في نهاية اسم الدالة تبين أنها دالة مقطعة Discrete زمنياً. لا يمكننا استخدام القوس المربع المتعارف عليه في ماتلاب للدلالة على الدالة المقطعة زمنياً لأن هذه الأقواس يكون لها دلالة أخرى في ماتلاب.

دالة وحدة التتابع

الدالة المتقطعة زمنياً المقابلة لدالة الخطوة المستمرة زمنياً هي دالة وحدة التتابع الموضحة في شكل (٣.١١).

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$ المعادلة رقم (٣.٣)



شكل رقم (٣,١١) دالة وحدة التتابع

بالنسبة لهذه الدالة فليس هناك أي عدم توافق، أو التباس حول قيمتها عند n=0. إنها تساوي واحداً، والكل يتوافق على ذلك.

```
% دالة وحدة التتابع التي تساوي صفراً لقيم المعاملات الصحيحة الأقل من الصفر
% وتساوي واحداً لقيم المعاملات الصحيحة الأكبر من أو تساوي صفراً
% إنها تعطي القيمة "NAN" للمعاملات غير الصحيحة
%
% function y = usD(n)
%
function y = usD(n)
y = double(n >= 0);        % وضع الخرج يساوي واحداً للمعاملات غير السالبة
```

```
I = find(round(n) ~= n);    % الإشارة للقيم غير الصحيحة
y(I) = NaN ;                % وضع الخرج يساوي "NAN" في هذه الحالة
```

دالة الإشارة signum

الدالة المتقطعة زمنياً والمقابلة لدالة الإشارة المستمرة زمنياً يتم تعريفها كما يلي وكما هو موضح في شكل (٣,١٢).

$$sgn[n] = \begin{cases} 1, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ -1, & n < 0 \end{cases}$$ المعادلة رقم (٣,٤)

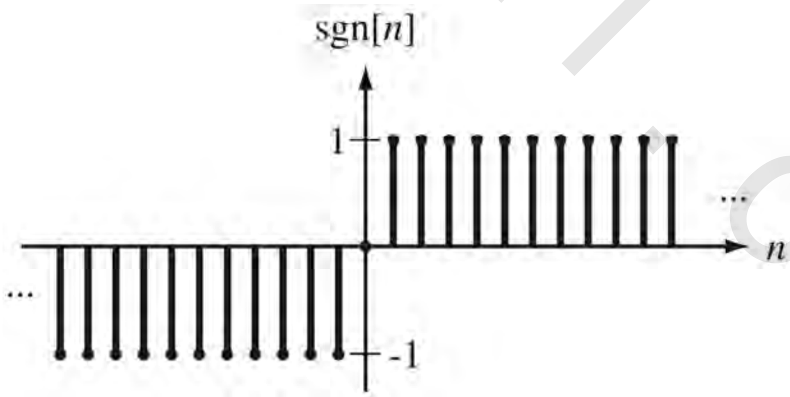
% دالة الإشارة تعرف على أنها تساوي 1. عندما تكون قيم معاملاتها الصحيحة أقل من الصفر

% وتساوي1 عندما تكون معاملاتها الصحيحة أكبر من الصفر

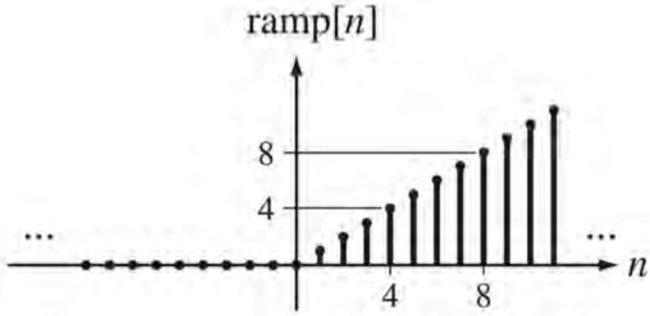
% وتساوي صفراً عندما تكون قيم معاملاتها تساوي صفر

% وتعطي"NaN" عندما تكون معاملاتها ليست أرقاماً صحيحة

```
%
% function y = signD(n)
Function  y = signD(n)
y = sign(n);            % استخدام دالة الإشارة الضمنية في ماتلاب
I = find(round(n) ~= n);        % n إشارة للقيم غير الصحيحة
y(I)=NaN;        % وضع الخرج يساوي "NaN" في هذه الحالة
```



شكل رقم (٣,١٢) دالة الإشارة



شكل رقم (٣,١٣) دالة الانحدار

دالة الانحدار

الدالة المتقطعة زمنياً والمقابلة لدالة الانحدار المستمرة زمنياً تعرّف كما يلي، وكما هو موضح في شكل (٣,١٣).

$$ramp[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad = nu[n]$$ المعادلة رقم (٣,٥)

%دالة الانحدار المتقطعة زمنياً تعرّف بأنها تساوي صفراً عندما تكون قيم معاملاتها الصحيحة أقل من، أو تساوي صفر، وتساوي "n" عندما تكون قيم المعاملات أكبر من أو تساوي الصفر %

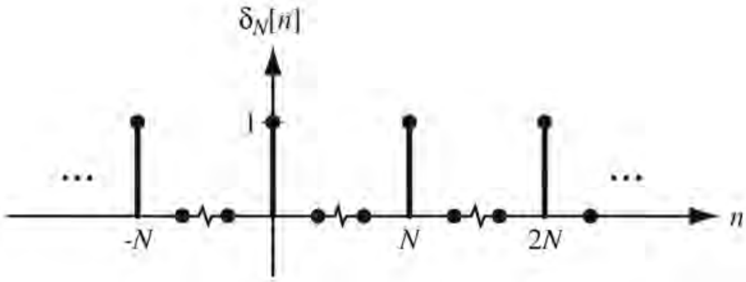
وتعطي "NaN" عندما تكون معاملاتها ليست أرقاماً صحيحة %

```
%
% function y = rampD(n)
function y = rampD(n)
y = ramp(n); %  استخدام دالة الانحدار الضمنية في ماتلاب
I = find(round(n) ~= n);   % n  إشارة للقيم غير الصحيحة
y(I)=NaN;                  % وضع الخرج يساوي "NaN" في هذه الحالة
```

دالة النبضة الدورية أو قطار النبضات

دالة النبضة الدورية أو قطار النبضات المتقطعة زمنياً تعرف كما يلي وكما هو موضح في شكل (٣,١٤).

$$\delta_N[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - mN]$$ المعادلة رقم (٣,٦)



شكل رقم (٣,١٤) دالة النبضة الدورية

عندما تكون معاملاتها الصحيحة % 1 دالة النبضة الدورية المتقطعة زمنياً تساوي مضاعفات الرقم الصحيح% N
""، وتساوي صفراً فيما عدا ذلك
إنها تعطي "NaN" لقيم المعاملات الصحيحة السالبة %

```
%
% function y = impND(N,n)
function y = impND(N,n)
if N == round(N) & N > 0,
y = double(n/N == round(n/N)); % وضع قيم الدالة تساوي واحداً عند
% كل قيم "n" التي تكون مضاعفات صحيحة لـ N
I = find(round(n) ~= n);          % n إشارة للقيم غير الصحيحة
y(I)=NaN;        % وضع الخرج يساوي "NaN" في هذه الحالة
else
y=NaN*n;     % تعود بمتجه من القيم غير المحددة "NaN"
disp('In impND, the period parameter N is not a positive integer');
end
```

دوال الإشارات المتقطعة زمنياً الجديدة تم تلخيصها وعرضها في الجدول (٣،١)

جدول رقم ٣،١– ملخص لدوال الإشارات المقطعة زمنياً

الجيب	**$Sin(2\pi F_0 n)$**	عينات من دالة مستمرة زمنياً
جيب التمام	$cos(2\pi F_0 n)$	عينات من دالة مستمرة زمنياً
الأس	Z^n	عينات من دالة مستمرة زمنياً
التتابع	U[n]	ضمنيا تكون متقطعة زمنياً
الإشارة	sgn[n]	ضمنيا تكون متقطعة زمنياً
الانحدار	Ramp[n]	ضمنيا تكون متقطعة زمنياً
النبضة	$\delta[n]$	ضمنيا تكون متقطعة زمنياً
النبضة الدورية	$\delta_N[n]$	ضمنيا تكون متقطعة زمنياً

(٣،٥) الإزاحة والتحجيم

الأساسيات العامة التي تحكم التحجيم والإزاحة في الدوال المستمرة زمنياً يمكن تطبيقها أيضاً في حالة الدوال المتقطعة زمنياً، ولكن مع بعض الفروق الفروق المهمة الناتجة من الفروق الأساسية بين الأزمنة المستمرة والأزمنة المتقطعة. تماماً مثلما يحدث في الدوال المستمرة زمنياً، فإن الدوال المتقطع زمنياً تقبل أرقاماً وتعطي أرقاماً

أخرى. إن الأساس العام بأن التعبير expression في الدالة g[expression] تتم معاملته تماماً بالطريقة نفسها التي تعامل بها n في التعريف g[n].

تحجيم المقدار

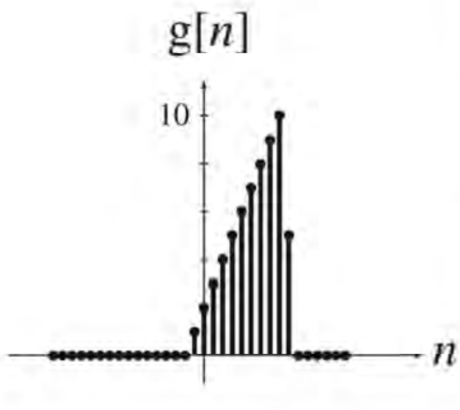
إن تحجيم المقدار بالنسبة للدوال المتقطعة زمنياً لايزال هو نفسه تماماً مثلما في الدوال المستمرة زمنياً.

الإزاحة الزمنية

لنفترض الدالة g[n] المعرفة كما في الرسم والجدول الموضحين في شكل (٣,١٥)، ثم دع $n \rightarrow n+3$. إن الإزاحة الزمنية هي نفسها تماماً في الدوال المتقطعة والدوال المستمرة زمنياً، فيما عدا أن الإزاحة الزمنية يجب أن تكون صحيحة، وإلا فإن إزاحة الدالة سوف يعطي قيماً غير معرفة كما في شكل (٣,١٦).

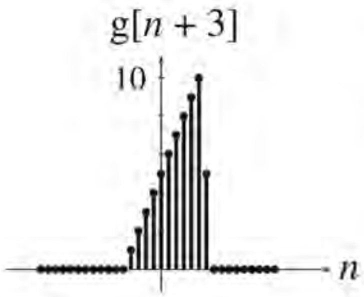
التحجيم الزمني

تحجيم المقدار والإزاحة الزمنية في كل من الدوال المتقطعة والمستمرة زمنياً متشابهان بدرجة كبيرة جداً. إن ذلك ليس حقيقياً عند فحص أو التعامل مع التحجيم الزمني في الدوال المتقطعة. هناك حالتان يجب فحصهما وهما: حالة الانضغاط الزمني، وحالة الامتداد أو الانفراج الزمني.



n	g[n]
−1	1
0	2
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
7	9
8	10
9	5
10	0

شكل رقم (٣,١٥) تعريف تخطيطي لدالة g[n]، حيث g[n]=0 لكل قيم n التي تحقق |n|≥15



n	$n+3$	$g[n+3]$
−4	−1	1
−3	0	2
−2	1	3
−1	2	4
0	3	5
1	4	6
2	5	7
3	6	8
4	7	9
5	8	10
6	9	5
7	10	0

شكل رقم (٣,١٦) رسم الدالة g[n+3] الذي يوضح الإزاحة الزمنية

الانضغاط الزمني

يتم الحصول على الانضغاط الزمني عن طريق تحجيم زمني على الصورة $n \rightarrow Kn$ حيث $|K|>1$، و K تكون رقما صحيحا. الانضغاط الزمني في الدوال المتقطعة زمنياً يكون مشابهاً للانضغاط الزمني في حالة الدوال المستمرة زمنياً حيث تبدو الدالة كما لو كانت تحدث في زمن أسرع. ولكن في حالة الدوال المتقطعة زمنياً يكون هناك تأثير آخر يدعى التقسيم، أو الانتهاء. افترض التحجيم الزمني $n \rightarrow 2n$ الموضح في شكل (٣,١٧).

لكل قيمة n في g[2n]، فإن القيمة 2n يجب أن تكون رقماً صحيحاً زوجياً. لذلك فإنه لهذا التحجيم بالمعامل 2، فإن قيم الدالة g[n] المشار إليها بالأرقام n الفردية لن تظهر ولن تكون لها قيم مناظرة في الدالة g[2n]. إننا نقول إن الدالة قد قسمت بمعامل تقسيم 2؛ لأن المخطط في g[2n] سيستخدم نقطة من g[n] ويترك نقطة. بالنسبة لثوابت التقسيم الأعلى؛ فإن معامل التقسيم أو الإقصاء سيكون بالتأكيد أعلى. هذا التأثير التقسيمي، أو الإقصائي لا يحدث في حالة تحجيم الدوال المستمرة زمنياً لأنه عند استخدام التحجيم $t \rightarrow Kt$، فإن كل قيم t الحقيقية تنتقل لما يناظرها في قيم Kt الحقيقية بدون فقد أو غياب أي قيمة. الفرق الأساسي بين الدوال المستمرة والدوال المتقطعة زمنياً هو أن مجال عمل الدوال المستمرة زمنياً هو الأرقام الصحيحة، أي عدد لا نهائي لا يمكن عده من الأزمنة، بينما يكون مجال العمل في الدوال المتقطعة زمنياً هو كل الأرقام الصحيحة، وهو عدد لا نهائي من الأزمنة التي يمكن عدها، أو إحصاؤها.

الامتداد أو الانفراج الزمني

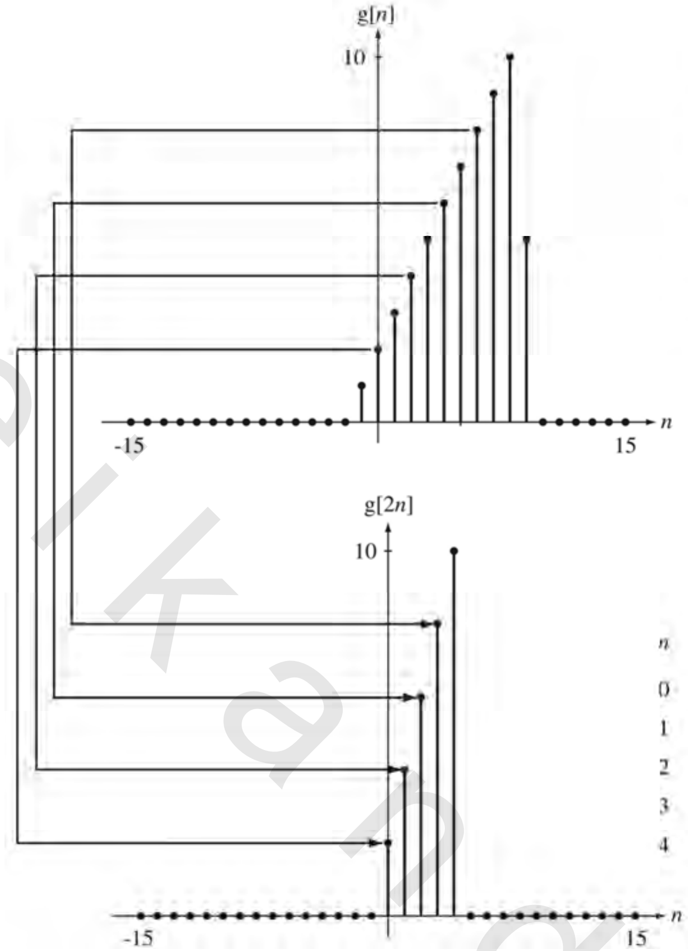
الحالة الأخرى للتحجيم الزمني، هي الامتداد الزمني، وهي أغرب حتى من الانضغاط الزمني. إذا أردنا أن نرسم مثلاً قيمة الدالة g[n/2]، عند كل قيمة صحيحة للمتغير n فإننا يجب نحدد قيمة للدالة عند g[n/2] عن طريق

إيجاد هذه القيمة في التعريف الأساسي للدالة. ولكن عندما تكون n تساوي واحداً ، فإن n/2 ستكون نصفاً ونحن نعرف أن الدالة g[1/2] تكون غير معرفة. إن قيمة الدالة المحجمة زمنياً g[n/K] تكون غير معرفة إلا إذا كانت n/K تساوي رقماً صحيحاً. إننا يمكن أن نترك هذه القيم غير معرفة أو يمكننا استيفاء أو استقراء هذه القيم باستخدام قيم الدالة g[n/k] عند قيم n الأعلى أو الأقل التي تكون عندها القيمة n/K رقماً صحيحاً. (الاستيفاء ، أو الاستقراء هو عملية لحساب قيم دالة بين قمتين معلومتين تبعا لمعادلة معينة للاستقراء). حيث إن عملية الاستقراء تطرح سؤالا عن أي معادلة سيتم استخدامها في هذه العملية ، فإننا ببساطة سنترك قيمة الدالة g[nK] غير معرفة عندما تكون القيمة n/K غير صحيحة.

على الرغم من أن الامتداد الزمني ، كما وصفناه مسبقاً ، يبدو غير مفيد ، إلا أن هناك نوعاً من الامتداد الزمني الذي يكون مفيداً في أغلب الأحوال. افترض أن لدينا الدالة الأصلية x[n] وعلينا تكوين دالة جديدة كالتالي :

$$y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{K}\right], & \frac{n}{K} \quad \text{رقم صحيح} \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

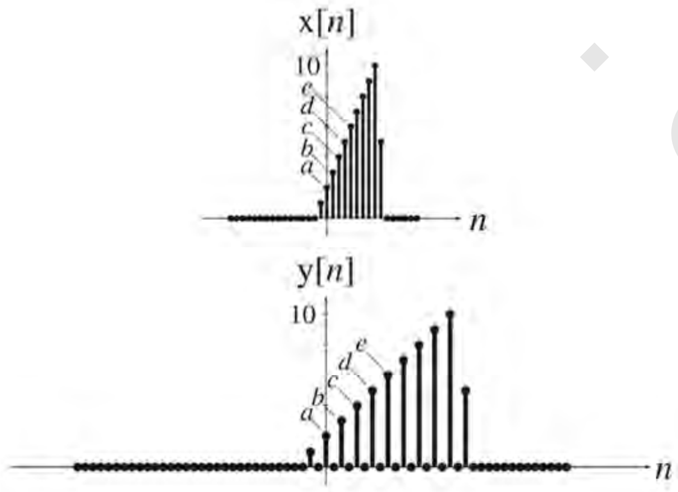
كما هو موضح في شكل (٣,١٨) حيث K=2.



n	g[n]
-1	1
0	2
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
7	9
8	10
9	5
10	0

n	2n	g[2n]
0	0	2
1	2	4
2	4	6
3	6	8
4	8	10

شكل رقم (٣,١٧) الضغط الزمني لدالة متقطعة زمنياً



شكل رقم (٣,١٨) صورة بديلة للامتداد الزمني

كل القيم في الدوال الممتدة زمنياً تكون معرفة، أو محددة، وكل قيم x التي تحدث عند الزمن المتقطع n تحدث في y عند الزمن المتقطع Kn. لقد تم عمل كل ذلك حقيقة لاستبدال كل القيم غير المعرفة في الامتداد الزمني المسبق بأصفار. إذا أردنا ضغط y بالمعامل K، فإننا سنحصل على كل قيم x مرة أخرى في أماكنها الأصلية، وكل القيم التي تم استقصاؤها عن طريق تقسيم y ستكون أصفاراً.

مثال ٣,١

رسم الإزاحة والتحجيم في الدوال المتقطعة زمنياً

باستخدام ماتلاب ارسم الدالة $g[n]=10(0.8)^n\sin(3\pi n/16)u[n]$. بعد ذلك ارسم الدوال g[2n] و g[n/3].

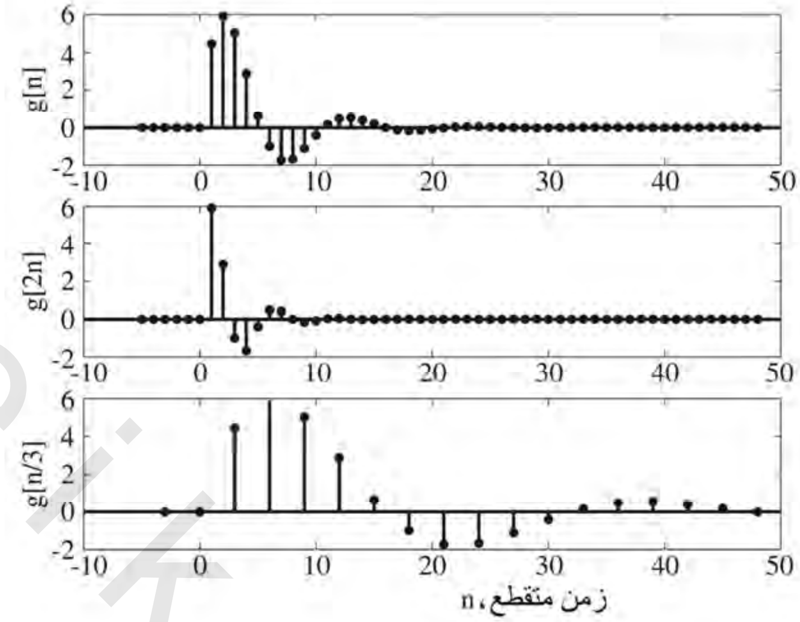
الدوال المتقطعة زمنياً تكون أسهل في برمجتها باستخدام ماتلاب عن الدوال المستمرة زمنياً لأن ماتلاب يكون ضمنيا موجها في اتجاه حساب قيم الدوال عند قيم متقطعة للمتغير المستقل. بالنسبة للدوال المتقطعة زمنياً لا تكون هناك حاجة لتقرير كيف تكون النقاط متقاربة من بعضها لجعل المخطط يبدو مستمراً، لأن الدالة ليست مستمرة. طريقة جيدة للتعامل مع رسم الدوال ورسم الدوال المحجمة زمنياً هي تعريف، أو تحديد الدالة الأصلية كملف m. ولكننا نحتاج للتأكيد على أن تعريف الدالة يشتمل على سلوكها المتقطع زمنياً، وللقيم غير الصحيحة للزمن المتقطع تكون الدالة غير محددة. يتعامل ماتلاب مع النتائج غير المحددة عن طريق إعطائها القيمة الخاصة NaN. المشكلة الأخرى في البرمجة هي كيفية التعامل مع وصف لدالتين مختلفتين في نطاقين مختلفين لـ n. يمكننا أن ننفذ ذلك باستخدام العمليات المنطقية والنسبية كما هو في البرنامج التالي g.m :

```
function y = g(n),
% حساب الدالة
y = 10*(0.8).^n.*sin(3*pi*n/16).*usD(n);
I = find(round(n) ~= n);   % حساب كل القيم غير الصحيحة
y(I) = NaN;        %"NaN " وضع كل القيم غير الصحيحة تساوي
```

مازلنا يجب أن نقرر على أي مدى من الأزمنة المتقطعة سنرسم الدالة. حيث إن الدالة تكون صفراً للأزمنة السالبة، فإننا يجب أن نمثل هذا المدى الزمني بنقط قليلة على الأقل لنبين أنها ستبدأ عند الزمن صفر. بالنسبة للأزمنة الموجبة فإنها ستأخذ شكل دالة الجيب المتناقصة أسياً. إذا رسمنا القليل من الثوابت الزمنية للتناقص الأسي، فإن الدالة ستكون عملياً صفراً بعد هذا الزمن. وعلى ذلك فإن المدى الزمني يجب أن يكون كالتالي مثلاً $5<n<16$. لكي نرسم تمثيلا معقولا للدالة الأصلية. ولكن الدالة الممتدة زمنياً g[n/3] ستكون أوسع على المدى الزمني المتقطع، مما سيتطلب زمناً متقطعاً أكثر لكي نرى سلوك الدالة. ولذلك، لكي نرى كل الدوال على التدريج نفسه للضغط، دعنا نضع مدى الزمن المتقطع يساوي $5<n<48$.

شكل (٣,١٩) يبين خرج هذا البرنامج.

```
% رسم دالة متقطعة زمنياً وتحويلات منضغطة وممتدة لها
% حساب قيم الدالة الأصلية والنسخ المحجمة في هذا الجزء
n = .5:48 ;            % وضع الأزمنة المتقطعة لحساب الدالة
g0 = g(n) ;            % حساب قيم الدالة الأصلية
g1 = g(2*n) ;          % حساب قيم الدالة المضغوطة
g2 = g(n/3) ;          % حساب قيم الدالة الممتدة
% عرض الدالة الأصلية والدوال المحجمة زمنياً في هذا الجزء
%
% رسم الدالة الأصلية
%
subplot(3,1,1) ;                  % رسم الثلاثة مخططات فوق بعضها عمودياً
p = stem(n,g0,'k','fi lled');  % رسم الدالة الأصلية مستخدما الرسم المسماري
set(p,'LineWidth',2','MarkerSize',4);   % وضع حجم الخطوط والنقط
ylabel('g[n]');                         % وضع أسماء محاور الدالة الأصلية
%
% رسم الدالة المنضغطة زمنياً
%
subplot(3,1,2);                   % رسم الثلاثة مخططات الثانية فوق بعضها عمودياً
p = stem(n,g1,'k','fi lled');  % رسم الدالة المنضغطة بمخطط المسامير
set(p,'LineWidth',2','MarkerSize',4);   % وضع حجم الخطوط والنقط
ylabel('g[2n]');                        % تسمية محاور الدالة المضغوطة
%
% رسم الدالة الممتدة زمنياً
%
subplot(3,1,3);                       % رسم المجموعة الثالثة من المخططات فوق بعضها عمودياً
p = stem(n,g2,'k','fi lled') ;        % رسم الدالة الممتدة بمخطط المسامير فوق بعضها عمودياً
set(p,'LineWidth',2','MarkerSize',4);  % وضع حجم الخطوط والنقاط
xlabel('Discrete time, n');          % تسمية محاور الدالة الممتدة
ylabel('g[n/3]');                     % تسمية المحور الرأسي
```



شكل رقم (٣,١٩) رسم الدوال g[n] و g[2n] و g[n/3]

(٣,٦) الفرق والتراكم

كما أن التفاضل والتكامل مهمان للدوال المستمرة زمنياً، فإن العمليات المكافئة لهما، وهي الفرق والتراكم كذلك مهمان بالنسبة للدوال المتقطعة زمنياً. التفاضل الأول لأي دالة مستمرة زمنياً g(t) يتم في العادة تعريفه كما يلي :

$$\frac{d}{dt}(g(t)) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}$$

ويمكن تعريفها أيضاً كما يلي :

$$\frac{d}{dt}(g(t)) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t)-g(t+\Delta t)}{\Delta t}$$

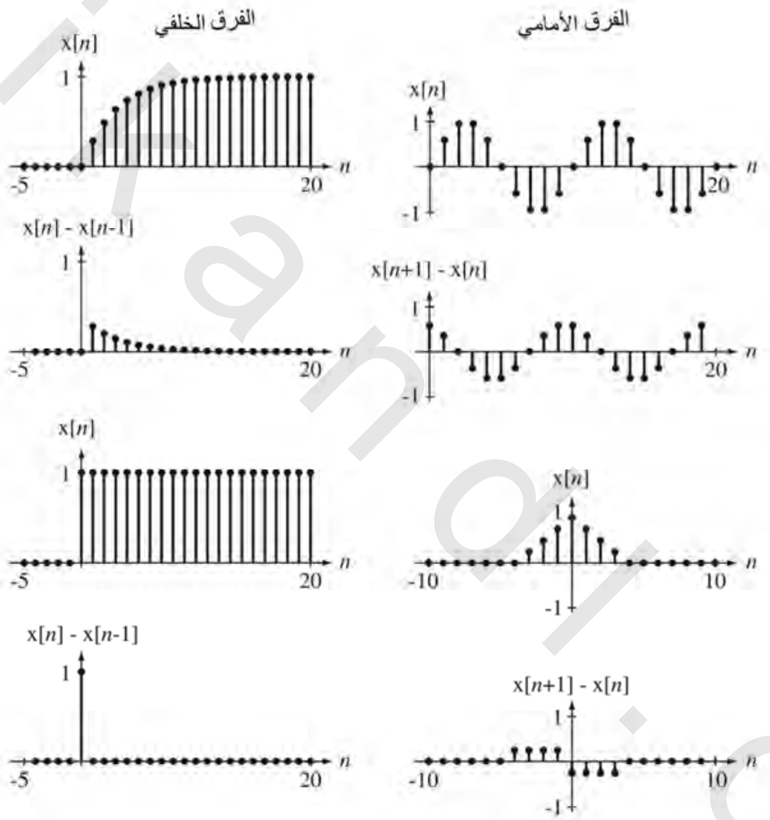
أو

$$\frac{d}{dt}(g(t)) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)-g(t-\Delta \text{ف})}{\Delta t}$$

في النهاية، فإن كل هذه التعريفات تعطي التفاضل نفسه (إذا كانت موجودة). ولكن إذا ظلت Δt محددة، فإن هذه التعبيرات ليست متماثلة تماماً. العملية المكافئة للتفاضل والتي تجري على الإشارات المتقطعة زمنياً هي عملية الفرق. الفرق الأمامي الأول لأي دالة متقطعة زمنياً g[n] هو g[n+1].g[n]. (انظر ملحق الويب D للمزيد من الفرق والمعادلات الفرقية). الفرق العكسي الأول لأي دالة متقطعة زمنياً هو g[n].g[n.1]، والتي تمثل الفرق الأمامي الأول g[n.1]. شكل (٣.٢٠) يوضح بعض الدوال المتقطعة زمنياً وفروقها الأولى الأمامية والعكسية.

إن عملية الفرق المطبقة على عينات من دالة مستمرة زمنياً تعطي نتيجة تشبه إلى حد كبير (ولكن لا تشبه تماماً) العينات المأخوذة من تفاضل هذه الدالة المستمرة زمنياً (مع معامل تحجيم معين).

مقابل التكامل في الأزمنة المتقطعة هو التراكم (أو المجموع). إن تراكم الدالة g[n] يعرّف كما يلي : $\sum_{m=-\infty}^{n} g[m]$. إن مشكلة الإلتباس التي تحدث في تكامل الدالة المستمرة زمنياً توجد في الدالة المتقطعة زمنياً أيضاً، وهي أن تراكم أي دالة لا يكن وحيداً أو فريداً. العديد من الدوال يمكن أن يكون لها الفرق الأمامي نفسه أو العكسي من الدرجة الأولى، ولكن كما هو الحال في التكامل، فإن هذه الدوال تختلف عن بعضها البعض بثابت مضاف.



شكل رقم (٣,٢٠) بعض الدول وفروقها الأمامية أو الخلفية

افترض الدالة h[n]=g[n].g[n.1]، التي تمثل الفرق العكسي للدالة g[n]. بأخذ التراكم للطرفين نحصل على :

$$\sum_{m=-\infty}^{n} h[m] = \sum_{m=-\infty}^{n} \quad (g[m] - g[m-1]$$

أو

$$\sum_{m=-\infty}^{n} h[m] = \cdots + (g[-1] - g[-2]) + (g[0] - g[-1]) + \cdots + (g[n] - g[n-1])$$

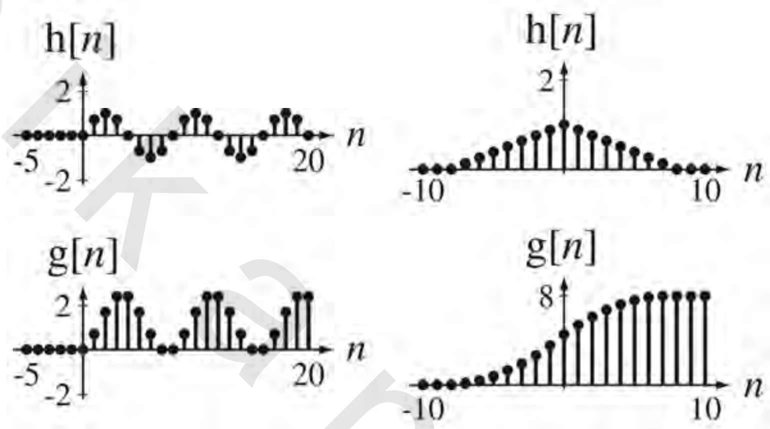
بتجميع قيم g[n] التي تحدث عند الوقت نفسه ، فإن :

$\sum_{m=-\infty}^{n} h[m] = \cdots + (g[-1] - g[-1]) + (g[0] - g[0]) + \cdots + (g[n-1] - g[n-1]) + g[n]$

وبالتالي فإن :

$$\sum_{-\infty}^{n} h[m] = g[n]$$

وهذه النتيجة تبين أن التراكم والفرق العكسي الأول هما عبارة عن عمليتين كل منهما عكس الآخر. وبالتالي فإن الفرق العكسي لتراكم أي دالة g[n] سيكون هو الدالة نفسها g[n] . شكل (٣,٢١) يبين دالتين h[n] وتراكمهما g[n]. في كل رسمه في شكل (٣,٢١) تم عمل التراكم اعتماداً على افتراض أن قيم الدالة h[n] قبل المدى الزمني للرسم كانت أصفاراً.



شكل رقم (٣,٢١) دالتان h[n] وتراكمهما g[n]

بطريقة مماثلة لعلاقة التكامل والتفاضل بين دالة الخطوة المستمرة زمنياً والنبضة المستمرة زمنياً، فإن تتابع الوحدة يساوي تراكم وحدة النبضة $u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$، ووحدة النبضة تكون هي الفرق العكسي الأول للتتابع δ[n]=u[n]-u[n-1]. أيضاً، تكون دالة الانحدار تساوي تراكم دالة التتابع المؤخرة بوحدة زمنية واحدة كما يلى :

$$ramp[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} u[m-1]$$

كما أن دالة التتابع تساوي الفرق الأمامي الأول لدالة الانحدار u[n]=ramp[n+1]-ramp[n] والفرق العكسي الأول للدالة ramp[n+1].

يمكن للماتلاب أن يحسب الفروق للدوال المتقطعة زمنياً باستخدام الدالة الضمنية في ماتلاب diff. الدالة diff تأخذ متجه طوله N كمعامل وتعطي متجه من الفروق الأمامية طوله N-1. يمكن أيضاً للماتلاب أن يحسب تراكم أي دالة باستخدام الدالة الضمنية cumsum (المجموع التراكمي). الدالة cumsum تأخذ متجها كدخل وتعطي متجها آخر كخرج طوله يساوي طول متجه الدخل ويساوي تراكم العناصر في متجه الدخل كما في المثال التالي :

```
»a = 1:10
a =
   1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
»diff(a)
ans =
```

```
    1 1 1 1 1 1 1 1 1
»cumsum(a)
ans =
    1 3 6 10 15 21 28 36 45 55
»b = randn(1,5)
b =
    1.1909 1.1892 -0.0376 0.3273 0.1746
»diff(b)
ans =
   -0.0018 -1.2268 0.3649 -0.1527
»cumsum(b)
ans =
   1.1909 2.3801 2.3424 2.6697 2.8444
```

من الواضح من هذه الأمثلة أن الدالة cumsum تفترض أن التراكم يكون صفراً قبل العنصر الأول في المتجه.

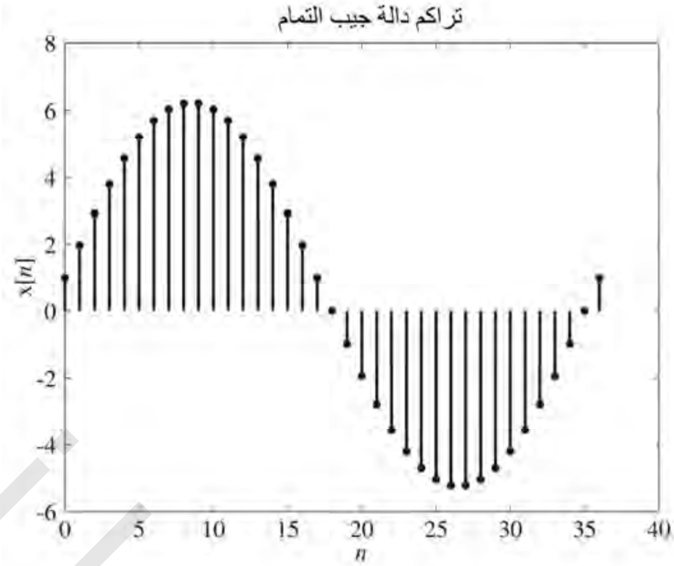
مثال ٣,٢

رسم تراكم دالة باستخدام ماتلاب

باستخدام ماتلاب، ارسم تراكم الدالة $x[n]=\cos(2\pi n/36)$ من n=0 حتى n=36 مع افتراض أن التراكم قبل الزمن n=0 يساوي صفراً.

```
% برنامج يوضح تراكم دالة على زمن محدد باستخدام الدالة الضمنية cumsum
n = 0:36 ;        % متجه الزمن المقطع
x = cos(2*pi*n/36);   % x[n] قيمة الدالة
% رسم تراكم الدالة x[n]
p = stem(n,cumsum(x),'k','fi lled');
set(p,'LineWidth',2,'MarkerSize',4);
xlabel('\itn','FontName','Times','FontSize',24);
ylabel('x[{\itn}]','FontName','Times','FontSize',24);
```

شكل (٣,٢٢) يبين خرج هذا البرنامج.

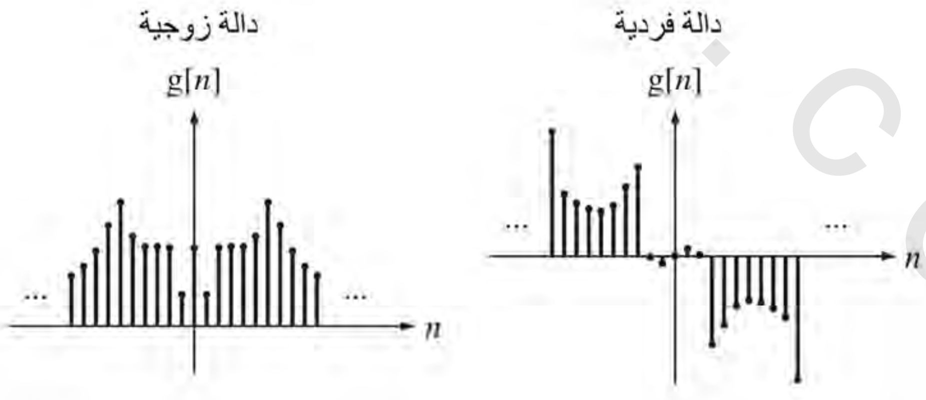


شكل رقم (٣,٢٢) تراكم دالة جيب التمام

لاحظ أن تركم دالة جيب التمام يشبه إلى حد كبير (ولكن لا يشبه تماماً) دالة الجيب. إن ذلك يحدث نتيجة أن عملية التراكم تكافيء عملية التكامل للدوال المستمرة زمنياً، ونعرف أن تكامل دالة جيب التمام يساوي دالة الجيب.

(٣,٧) الإشارات الزوجية والفردية

مثلما يحدث في الدوال المستمرة زمنياً، فإن الدوال المتقطعة زمنياً يمكن تصنيفها إلى دوال زوجية وأخرى فردية. العلاقات المحددة لهذه الخواص مكافئة تماماً لنظيراتها في الدوال المستمرة زمنياً. إذا كانت الدالة g[n]=g[-n]، فإنها تكون دالة زوجية، وإذا كانت الدالة g[n]=-g[-n]، فإن هذه الدالة تكون فردية. شكل (٢,٢٣) يوضح بعض الأمثلة على الدوال الزوجية والفردية.



شكل رقم (٣,٢٣) أمثلة على الدوال الزوجية والفردية

الجزء الزوجي والجزء الفردي في أي دالة g[n] يمكن حسابهما بالطريقة نفسها كما كان في حالة الدوال المستمرة زمنياً :

$$g_e[n] = \frac{g[n]+g[-n]}{2}, \quad and \quad g_o[n] = \frac{g[n]-g[-n]}{2}$$ المعادلة رقم (٣،٧)

الدالة الزوجية يكون لها جزء فردي يساوي صفراً، والدالة الفردية يكون لها جزء زوجي يساوي صفراً.

مثال ٣،٣

الأجزاء الزوجية والفردية لأي دالة

احسب الجزء الزوجي والجزء الفردي للدالة $g[n]=\sin(2\pi n/7)(1+n^2)$.

$$g_e[n] = \frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right)(1+n^2)+\sin\left(-\frac{2\pi n}{7}\right)(1+(-n)^2)}{2}$$

$$g_e[n] = \frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right)(1+n^2)-\sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right)(1+n^2)}{2} = 0$$

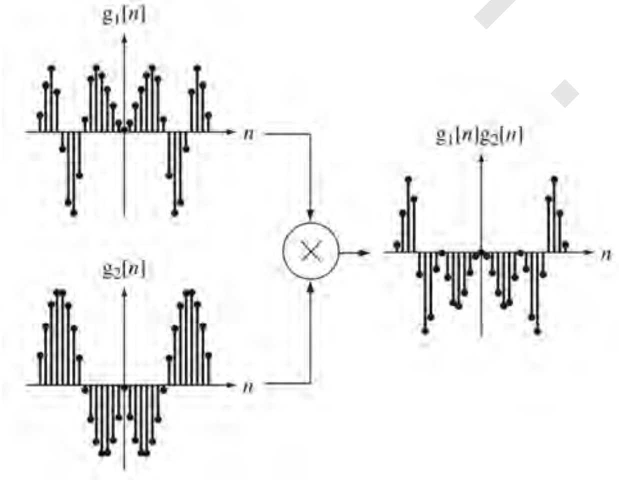
$$g_o[n] = \frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{7}\right)(1+n^2)-\sin\left(-\frac{2\pi n}{7}\right)(1+(-n)^2)}{2} = \sin(\frac{2\pi n}{7})(1+n^2)$$

وعلى فهذه الدالة g[n] دالة فردية.

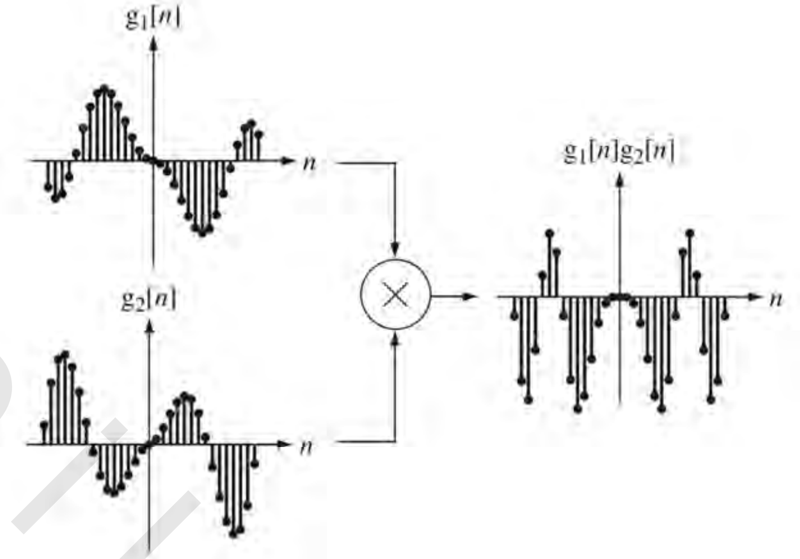
الجمع بين الإشارات الزوجية والفردية

كل خواص تجميع الدوال التي يتم تطبيقها على الدوال المستمرة زمنياً تطبق أيضاً على الدوال المتقطعة زمنياً. إذا كان هناك دالتان زوجيتان، فإن مجموعهما، والفرق بينهما، وحاصل ضربهما، ناتج قسمتهما يكون زوجياً أيضاً. وإذا كان لدينا دالتان فرديتان، فإن مجموعهما، والفرق بينهما يكون فردياً، ولكن حاصل ضربهما وناتج قسمتهما يكون زوجيا. إذا كانت إحدى الدالتين فردية والأخرى زوجية، فإن حاصل ضربهما وناتج قسمتهما يكون فردياً.

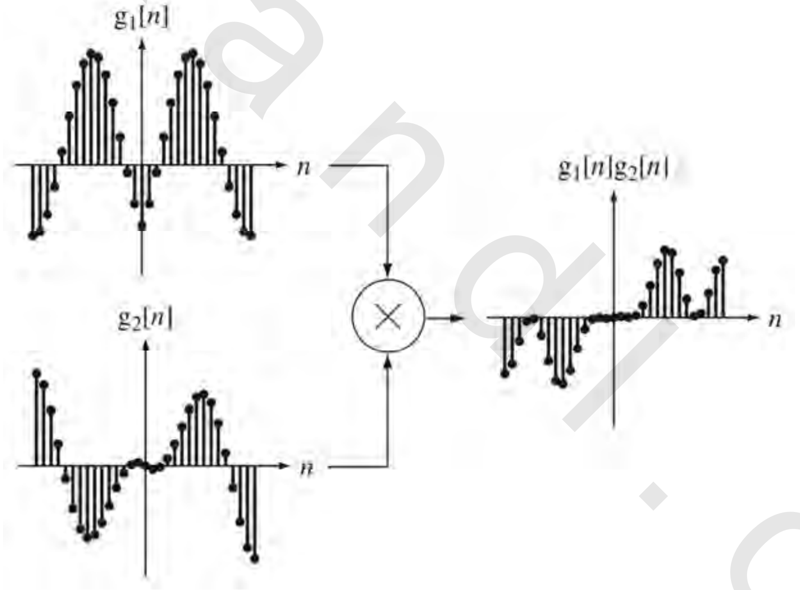
شكل (٣،٢٤) حتى شكل (٣،٢٦) توضح بعض الأمثلة على ضرب الدوال الزوجية والفردية.



شكل رقم (٣،٢٤) حاصل ضرب دالتين زوجيتين



شكل رقم (٣,٢٥) حاصل ضرب دالتين فرديتين



شكل رقم (٣,٢٦) حاصل ضرب دالة زوجية وأخرى فردية

الجمع المتماثل المحدد للإشارات الزوجية والفردية

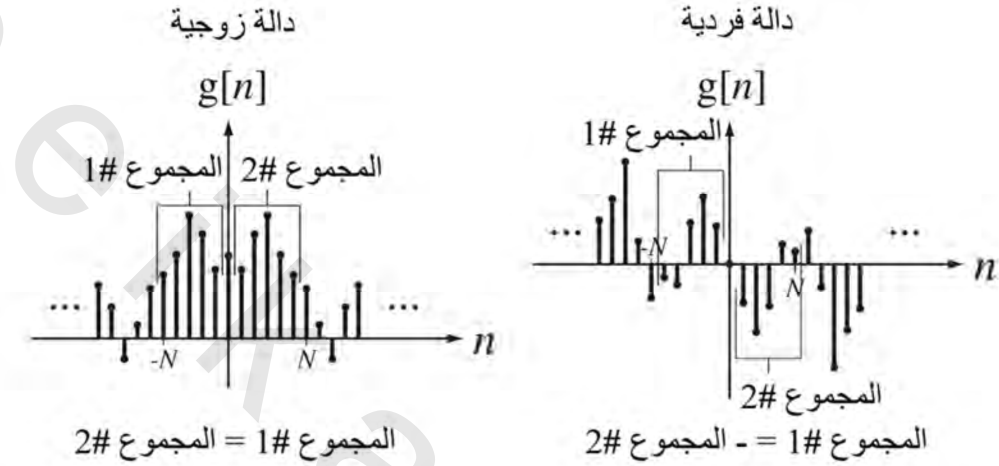
التكامل المحدود للدوال المستمرة زمنياً على حدود متماثلة يكافئ التجميع للدوال المتقطعة زمنياً على الحدود المتماثلة. هذه الخواص محققة لمجموع الدوال المقطعة زمنياً التي تكون مشابهة (ولكنها ليست مماثلة تماماً) لمثيلتها بالنسبة للتكامل في حالة الدوال المستمرة زمنياً. إذا كانت الدالة g[n] دالة زوجية و N عبارة عن رقم صحيح موجب، فإن :

$$\sum_{n=-N}^{N} g[n] = g[0] + 2\sum_{n=1}^{N} g[n]$$

وإذا كانت $g[n]$ دالة فردية فإن :

$$\sum_{n=-N}^{N} g[n] = 0$$

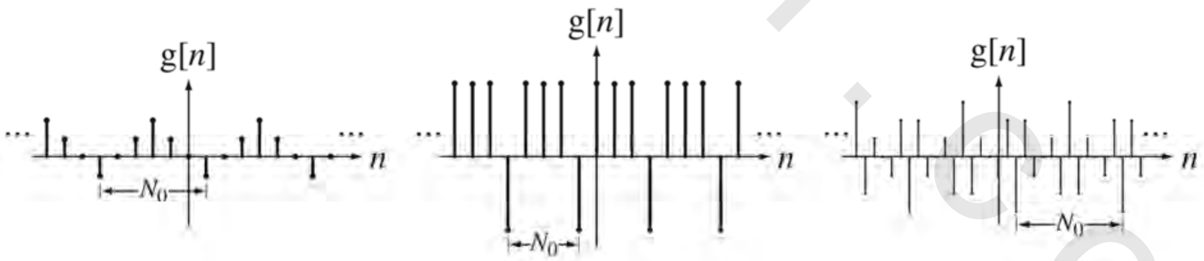
انظر شكل (٣،٢٧).



شكل رقم (٣،٢٧) مجموع دوال زوجية وفردية متقطعة زمنياً

(٣،٨)الإشارات الدورية

الدالة الدورية هي الدالة التي لا تتغير مع الإزاحة الزمنية $n\rightarrow mN$، حيث N هي دورة الدالة و m عبارة عن ثابت صحيح. الدورة الأساسية N_0 هي أقل زمن منقطع تبدأ عنده الدالة في إعادة نفسها. شكل (٣،٢٨) يوضح بعض الأمثلة على الدوال الدورية.



شكل رقم (٣،٢٨) أمثلة على دوال دورية بدورة أساسية N0

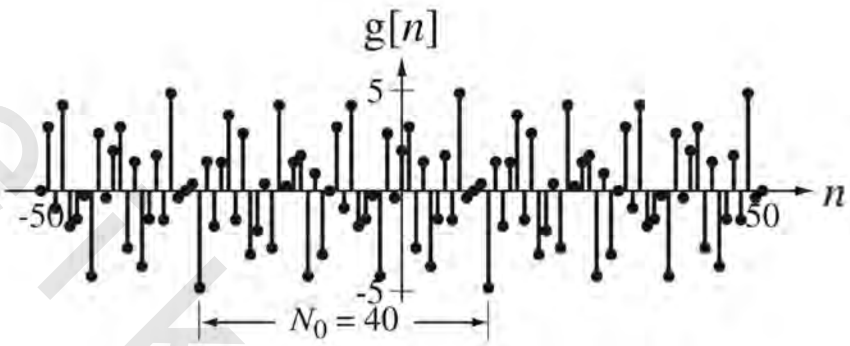
التردد الأساسي للدالة هو $F_0=1/N_0$ دورة/العينة، أو $\Omega_0=2\pi/N_0$ راديان/العينة. لاحظ أن وحدات التردد في الأزمنة المتقطعة ليست الهرتز Hz أو الراديان/الثانية ؛ لأن وحدات الزمن المتقطع ليست الثانية.

مثال ٣,٤

الدورة الأساسية لدالة

ارسم الدالة g[n]=2cos (9πn/4)-3sin(6πn/5) على المدى 50<n<50-. وضح من الرسم الدورة الأساسية.

شكل (٣,٢٩) يوضح الدالة g[n].



شكل (٣,٢٩) الدالة g[n]=2cos (9πn/4).3sin(6πn/5)

كاختبار على هذا الحل التخطيطي، فإن هذه الدالة يمكن كتابتها على الصورة : -g[n]=2cos (2π(9/8)n) 3sin(2π(3/5)n). الدورتان الأساسيتان لدالتي الجيب هما 8 و 5 وبالتالي فإن LCM لهما يساوي 40 وهي التي ستمثل الدورة الأساسية للدالة g[n].

(٣,٩)طاقة وقدرة الإشارة

طاقة الإشارة

تعرف طاقة الإشارة بأنها :

$$E_x = \sum_{n\pm\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \qquad \text{المعادلة رقم (٣,٨)}$$

ووحداتها هي ببساطة مربع وحدات افشارة نفسها.

مثال ٣,٥

طاقة الإشارة

احسب طاقة الإشارة $x[n]=(1/2)^n u[n]$.

من تعريف طاقة الإشارة يمكننا كتابة ما يلي :

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$
$$= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots$$

يمكن إعادة كتابة هذه التتابعة اللانهائية كما يلي :

$$E_x = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots$$

يمكن استخدام معادلة حساب مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية كما يلي :

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = -, \quad |r| < 1$$

لنحصل على ما يلي :

$$E_x = \frac{1}{1-1/4} = \frac{4}{3}$$

قدرة الإشارة

للعديد من الإشارات المستخدمة في تحليل الإشارات والأنظمة ، فإن المجموع :

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

لا يتقارب أو لايؤول إلى مجموع محدد ، نتيجة أن طاقة الإشارة تكون لانهائية ، وهذا يحدث في العادة نتيجة أن الإشارة ليست محددة الزمن. دالة وحدة التتابع تعتبر مثالا على إشارة لها طاقة غير نهائية. بالنسبة للإشارة من هذا النوع ، فإنه من المريح أن يتم التعامل مع متوسط قدرة الإشارة بدلاً من طاقة الإشارة. تعريف متوسط قدرة أي إشارة يكون كما يلي :

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N-1} |x[n]|^2 \qquad \text{المعادلة رقم (٣,٩)}$$

وهذه تعتبر متوسط قدرة الإشارة على كل الزمن. (لماذا تكون النهاية العليا في علامة المجموع N-1 بدلاً من N؟).

بالنسبة للإشارات الدورية ، فإن حساب متوسط قدرة الإشارة من الممكن أبسط. في هذه الحالة تكون قيمة المتوسط لأي دالة دورية تساوي المتوسط على أي دورة كاملة كما يلي :

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} |x[n]|^2 \qquad \text{المعادلة رقم (٣,١٠)}$$

حيث n_0 رقم صحيح ، والرمز $\sum_{n=<N>}$ يعني المجموع على مدى من قيم n المتتابعة التي يكون طولها N ، حيث N من الممكن أن تكون أي دورة لـ $|x[n]|^2$.

مثال ٣,٦

حساب طاقة وقدرة الإشارة باستخدام ماتلاب

باستخدام ماتلاب احسب الطاقة أو القدرة للإشارات التالية :

(أ) $x[n] = (0.9)^{|n|} \sin(\frac{2\pi n}{4})$

(ب) $x[n] = 4\delta_5[n] - 7\delta_7[n]$

وبعد ذلك ، قارن النتائج بالحسابات التحليلية.

```
% برنامج لحساب الطاقة أو القدرة لبعض الإشارات كأمثلة
% (أ)
n = -100:100 ; % وضع متجه من الأزمنة المتقطعة لحساب
    % قيمة الدالة
    % حساب قيمة الدالة ومربعاتها
x = (0.9)-^abs(n)-*sin(2*pi*n/4) ; xsq = x-^2 ;
Ex = sum(xsq) ; % استخدام دالة المجموع لحساب الطاقة
        % الكلية وعرض النتيجة
disp(['(b) Ex = ',num2str(Ex)]);
% (ب)
N0 = 35;   % الدورة الأساسية تساوي ٣٥
n = 0:N0-1; % وضع متجه من الأزمنة المتقطعة
% على مدار دورة واحدة يتم حساب قيمة الدالة عليها
% حساب قيمة الدالة ومربعاتها
x = 4*impND(5,n) - 7*impND(7,n) ; xsq = x-^2 ;
Px = sum(xsq)/N0; % استخدام دالة المجموع ى ماتلاب
        % لحساب متوسط القدرة وعرض النتيجة
disp(['(d) Px = ',num2str(Px)]);
```

خرج هذا البرنامج سيكون كالتالي :

(أ) E_x=4.7107

(ب) P_x=8.6

الحسابات التحليلية ستكون كالتالي :

(أ)
$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|(0.9)^{|n|}sin(\tfrac{2\pi n}{4})\right|^2$$

$$E_x = \sum_{n=0}^{\infty}\left|(0.9)^{|n|}sin(\tfrac{2\pi n}{4})\right|^2 + \sum_{n=-\infty}^{0}\left|(0.9)^{|n|}sin(\tfrac{2\pi n}{4})\right|^2 - \underbrace{|x[n]|^2}_{=0}$$

$$E_x = \sum_{n=0}^{\infty}(0.9)^{-2n}sin^2(\tfrac{2\pi n}{4}) + \sum_{n=-\infty}^{0}(0.9)^{-2n}sin^2(\tfrac{2\pi n}{4})$$

$$E_x = \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(0.9)^{-2n}(1-\cos(\pi n)) + \tfrac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{0}(0.9)^{-2n}(1-\cos(\pi n))$$

باستخدام التماثل الزوجي للدالة ، ووضع n→-n في المجموع الثاني من المعادلة السابقة :

$$E_x = \sum_{n=0}^{\infty}(0.9)^{-2n}(1-\cos(\pi n))$$

$$E_x = \sum_{n=0}^{\infty}\left((0.9)^{2n} - (0.9)^{2n}\frac{e^{j\pi n}+e^{-j\pi n}}{2}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(0.81)^n - \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(0.81e^{j\pi})^n + \sum_{n=0}^{\infty}(0.81e^{-j\pi})^n\right]$$

باستخدام معادلة مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية التالية :

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1$$

$$E_x = \frac{1}{1-0.81} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-0.81e^{j\pi}} + \frac{1}{1-0.81e^{-j\pi}}\right]$$

$$E_x = \frac{1}{1-0.81} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+0.81} + \frac{1}{1+0.81}\right] = \frac{1}{1-0.81} - \frac{1}{1+0.81} = 4.7107$$

(ب)

$$P_x = \frac{1}{N_0}\sum_{n=<N_0>}|x[n]|^2 = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}|x[n]|^2$$
$$= \frac{1}{35}\sum_{n=0}^{34}|4\delta_5[n] - 7\delta_7[n]|^2$$

النبضات في دالتي تتابع النبضات تتطابق فقط عند المضاعفات الصحيحة لـ 0.35 ولذلك فإنها في هذا المجموع تتطابق فقط عند n=0. ولذلك فإن شدة النبضة عند n=0 ستكون 3. كل النبضات الأخرى تحدث منفردة ومجموع المربعات سيكون هو نفسه مربع المجموع ، لذلك يمكننا كتابة :

$$P_x = \frac{1}{35}\begin{pmatrix}(-3)^2 + 4^2 + (-7)^2 + 4^2 + (-7)^2 + 4^2 \\ +4^2 + (-7)^2 + 4^2 + (-7)^2 + 4^2\end{pmatrix}$$

وهذا عند قيم n التالية من اليسار لليمين : n=0, n=5, n=7, n=10, n=14, n=15, n=20, n=21, n=25, n=28, n=30

$$P_x = \frac{9+6x4^2+4x(-7)^2}{35} = \frac{9+96+196}{35} = 8.6$$

(٣,١٠) ملخص لبعض النقاط المهمة

١- يمكن تكوين الإشارات المتقطعة زمنياً من الإشارات المستمرة زمنياً عن طريق أخذ العينات.

٢- الإشارة المتقطعة زمنياً لا تكون معرّفة عن قيم الزمن غير الصحيحة.

٣- الإشارات المتقطعة زمنياً والمشكّلة عن طريق أخذ عينات من إشارات دورية مستمرة زمنياً من الممكن ألا تكون دورية.

٤- من الممكن لوصفين مختلفين تحليليا أن ينتجا دوال متطابقة متقطعة زمنياً.

٥- أي صورة مزاحة زمنياً لدالة متقطعة زمنياً تكون معرفة فقط عند القيم الصحيحة لأزمنة الإزاحة.

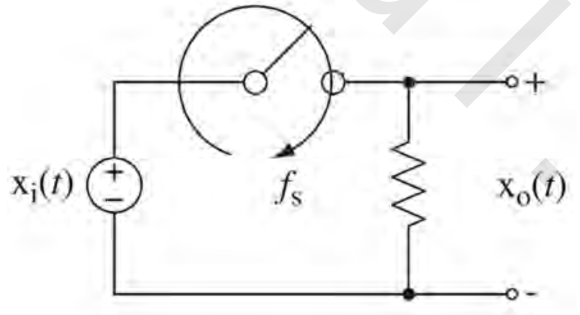
٦- التحجيم الزمني لأي دالة متقطعة زمنياً يمكن أن ينتج عنها تقسيم أو قيم غير محددة، وهذه ظاهرة لا تحدث عند إجراء التحجيم للدوال المستمرة زمنياً.

تمارين مع إجاباتها

(في كل تمرين، يتم وضع الإجابات بطريقة عشوائية).

دوال الإشارة

١- شكل (ت.١) يبين دائرة كهربية تم توصيل الجهد $x(t)=A\sin(2\pi f_0 t)$ دورياً على المقاومة عن طريق المفتاح. يدور المفتاح بتردد مقداره f_s يساوي 500 دورة في الدقيقة rpm. افترض أن المفتاح يكون مغلقاً عند الزمن $t=0$، وفي كل مرة يتم غلق المفتاح، فإنه يظل مغلقاً لمدة 10 ميللي ثانية.



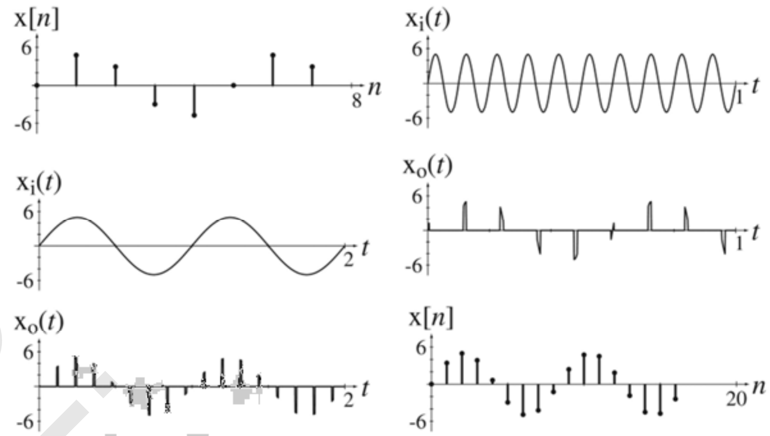
شكل رقم (ت.١)

(أ) إذا كانت $A=5$ و $f_0=1$، ارسم استجابة الجهد $x_0(t)$ عندما $0<t<2$.

(ب) إذا كانت $A=5$ و $f_0=10$، ارسم استجابة الجهد $x_0(t)$ عندما $0<t<1$.

(ج) إن ذلك يعتبر محاكاة لدائرة أخذ عينات مثالية. إذا كانت عملية أخذ العينات مثالية، ما هي الإشارات $x[n]$ التي يمكن إنتاجها في الجزءين (أ) و (ب)؟ ارسم هذه الإشارات مع الزمن المتقطع n.

الإجابة :



شكل رقم (إجابة ت.١)

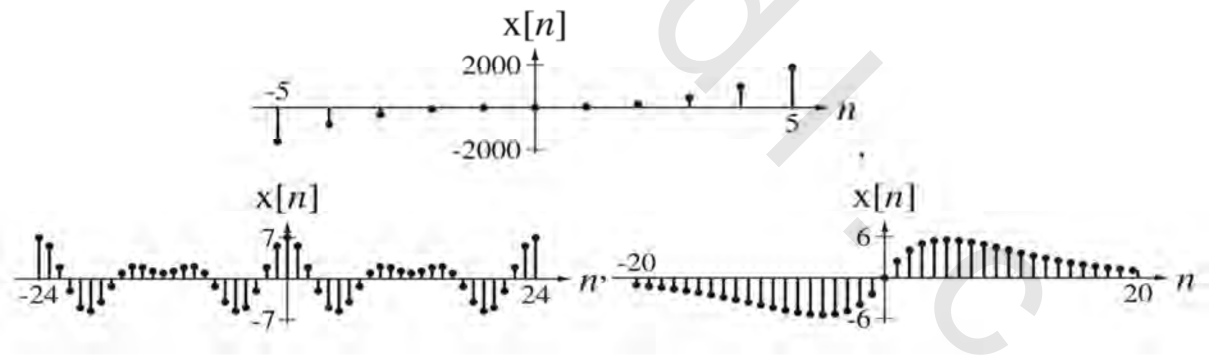
٢- ارسم الدوال التالية :

(أ) $x[n]=4\cos(2\pi n/12)-3\sin(2\pi(n-2)/8)$ ، عندما $-24\le n<24$

(ب) $x[n]=3ne^{-|n/5|}$ ، عندما $-20\le n<20$

(ت) $x[n]=21(n/2)^2+14n^3$ ، عندما $-5\le n<5$

الإجابة :



شكل رقم (إجابة ت.٢)

٣- افترض أن $x_1[n]=5\cos(2\pi n/8)$ و $x_2[n]=-8e^{-(\frac{n}{6})^2}$ ، ارسم المجاميع التالية من الإشارتين في المدى $-20\le n<20$. إذا كانت الإشارة لها بعض القيم المحددة وغير المحدد فاهمل القيم غير المحددة.

(أ) $x[n]=x_1[n]x_2[n]$

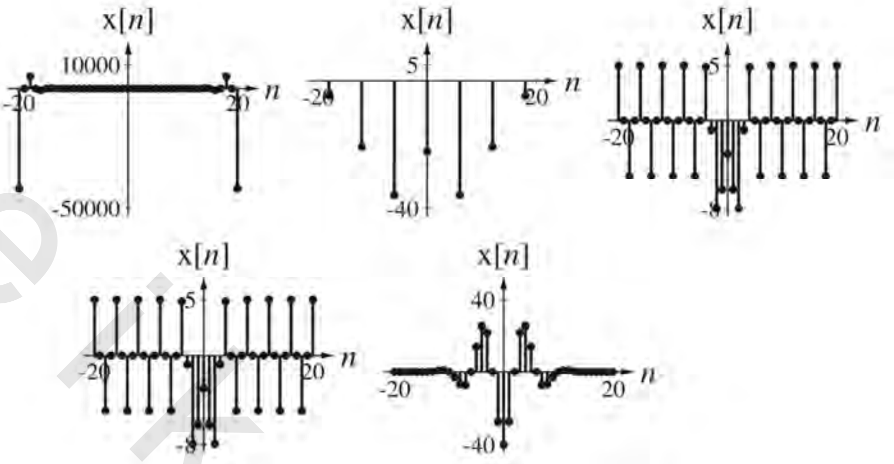
(ب) $x[n]=4x_1[n]+2x_2[n]$

(ج) $x[n]= x_1[2n]x_2[3n]$

(د) $x[n]= x_1[2n]/x_2[.n]$

(ه) $x[n]= 2x_1[n/2]+4x_2[n/3]$

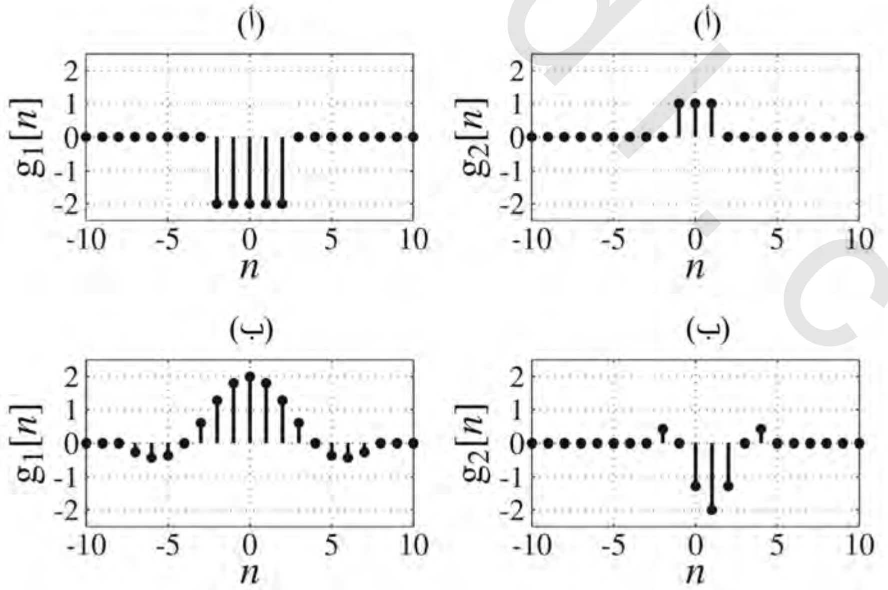
الإجابة :



شكل رقم (إجابة ت.٣)

التحجيم والإزاحة

٤- لكل زوج من الدوال الموضحة في شكل (ت.٤) حدد الثوابت الموجودة في الدالة التالية : $g_2[n]=Ag_1[a(n-n_0)]$.



شكل رقم (ت.٤)

الإجابة :

$A=-1/2$ ، $n_0=0$ ، و $a=2$ أو $a=-2$ أو $a=-2$ ، و $A=-1$ ، $n_0=1$ ، و $a=2$ أو -2

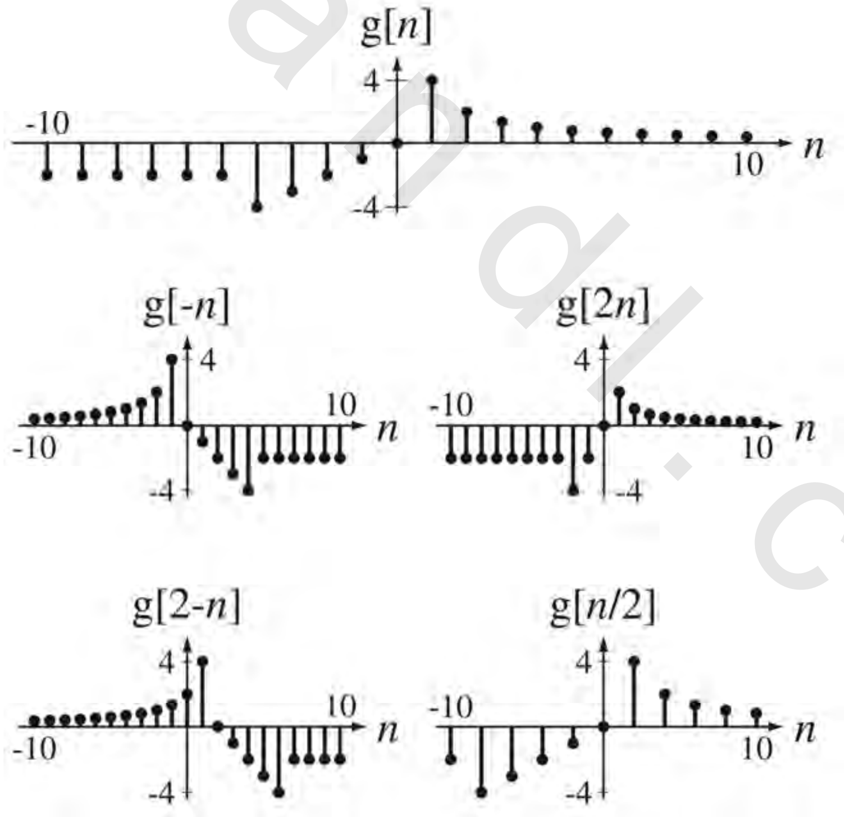
.

٥- افترض الدالة g[n] المعرفة كما يلي :

$$g[n] = \begin{cases} -2, & n < -4 \\ n, & -4 \le n < 1 \\ \frac{4}{n}, & 1 \le n \end{cases}$$

ارسم g[-n] و g[2-n] و g[2n] و g[n/2].

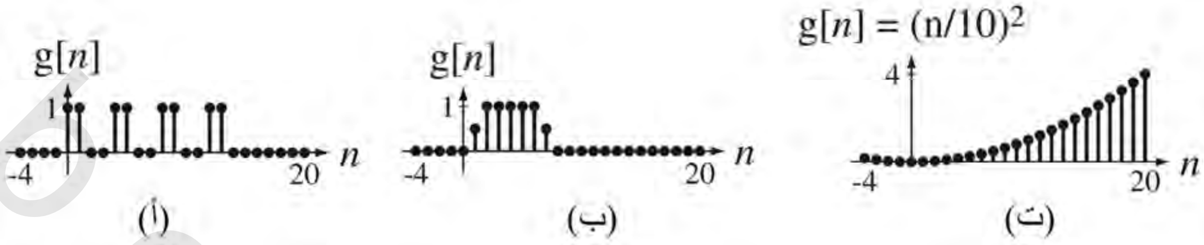
الإجابة :



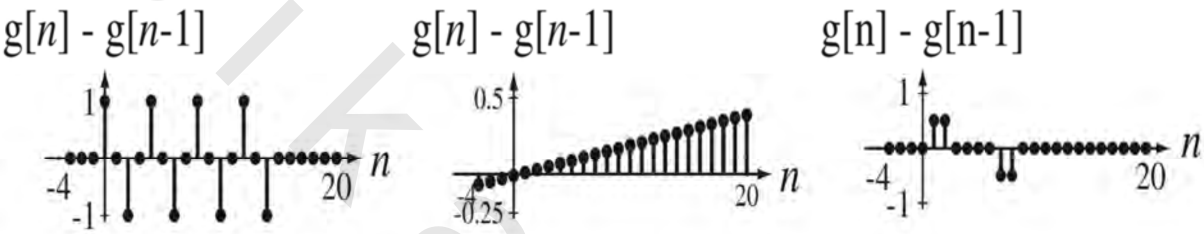
شكل رقم (إجابة ت.٥)

الفرق والتراكم

٦- ارسم الفروق العكسية للدوال الموضحة في شكل (ت.٦)



شكل رقم (ت.٦)

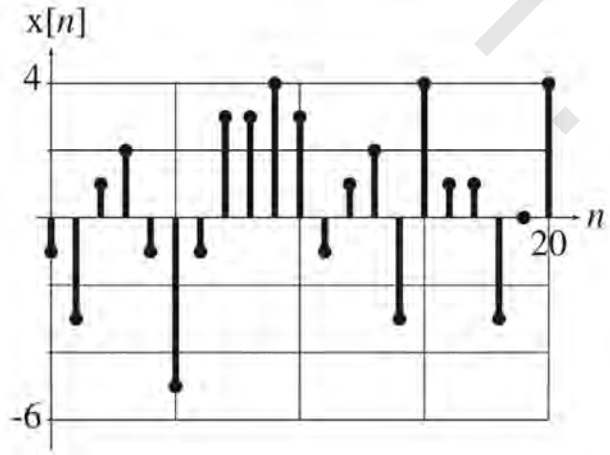


شكل رقم (إجابة ت.٦)

٧- الإشارة x[n] معرفة في شكل (ت.٧). افترض أن y[n] تمثل الفرق العكسي الأول للإشارة x[n]، وافترض أن z[n] تمثل تراكم x[n]. (افترض أن x[n] تساوي صفرا لكل قيم n الأقل من الصفر).

(أ) ما هي قيمة y[4] ؟

(ب) ما هي قيمة z[6] ؟



شكل رقم (ت.٧)

الإجابة : 8- و 3-

٨- افترض أن $g[n]=u[n+3]-u[n-5]$:

(أ) ما هو مجموع كل قيم $g[n]$؟

(ب) إذا كانت $h[n]=g[3n]$ ، فما هو مجموع كل قيم $h[n]$؟

الإجابة : 8 و 3

٩- ارسم التراكم $g[n]$ لكل من الدوال $h[n]$ التالية التي تساوي صفراً لكل $n<-16$:

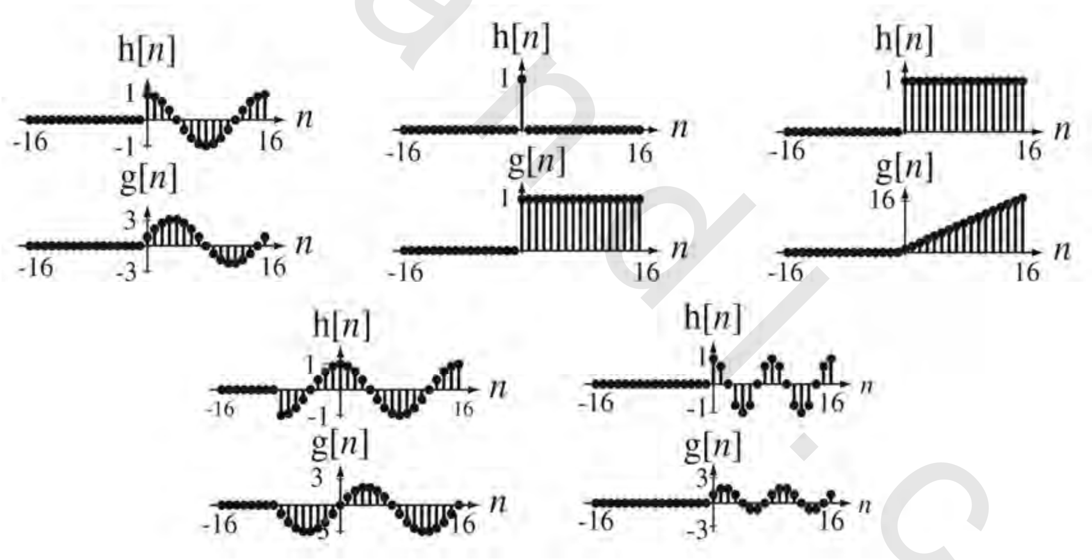
(أ) $h[n]=\delta[n]$

(ب) $H[n]=u[n]$

(ج) $h[n]=\cos(2\pi n/16)u[n]$

(د) $h[n]=\cos(2\pi n/8)u[n]$

(ه) $h[n]=\cos(2\pi n/16)u[n+8]$



شكل رقم (إجابة ت.٩)

الإشارات الزوجية والفردية

١٠- احسب وارسم الأجزاء الزوجية والفردية للدوال التالية :

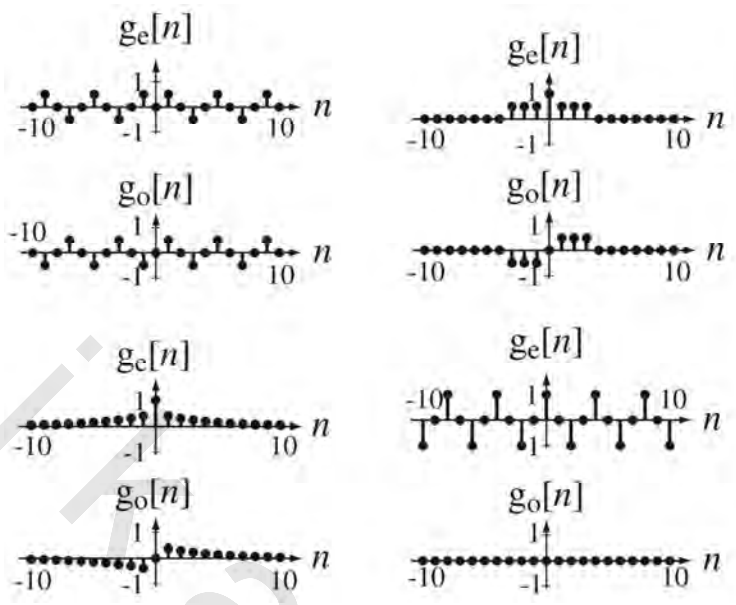
(أ) $g[n]=u[n]-u[n-4]$

(ب) $g[n]=e^{-n/4}u[n]$

(ج) $g[n]=\cos(2\pi n/4)$

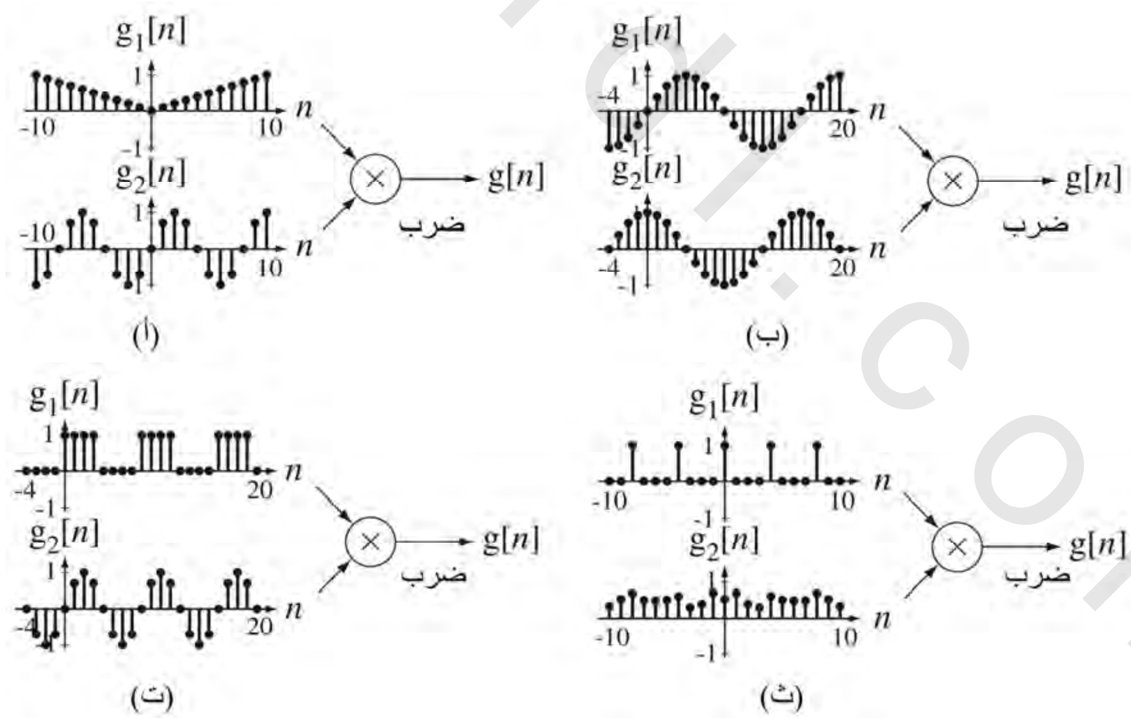
(د) $g[n]\ ]=\sin(2\pi n/4)$

الإجابة :

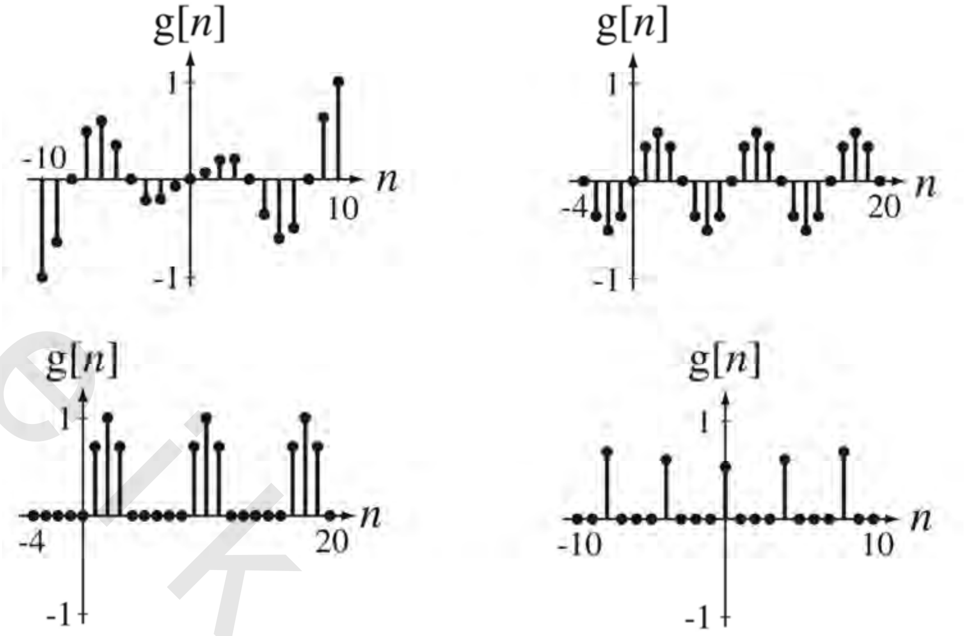


شكل رقم (إجابة ت.١٠)

١١- ارسم الدالة g[n] للإشارات الموضحة في شكل (ت.١١) :



شكل رقم (ت.١١)



شكل رقم (إجابة ت.١١)

الإشارات الدورية

١٢- احسب الدورة الأساسية لكل من هذه الدوال :

(أ) $g[n]=\cos(2\pi n/10)$

(ب) $g[n]=\cos(\pi n/10)$

(ج) $g[n]=\cos(2\pi n/5)+\cos(2\pi n/7)$

(د) $g[n]=e^{j2\pi n/20}+e^{-j2\pi n/20}$

(ه) $g[n]=e-^{j2\pi n/4}+e^{-j2\pi n/4}$

(و) $g[n]=\sin(13\pi n/8)-\cos(9\pi n/6)$

(ز) $g[n]=e^{-j6\pi n/21}+\cos(22\pi n/36)-\sin(11\pi n/33)$

الإجابة : 10 و 20 و 12 و 20 و 252 و 16 و 35

١٣- ارسم الدوال التالية وحدد من الأشكال الدورة الأساسية لكل دالة (إذا كانت دورية) :

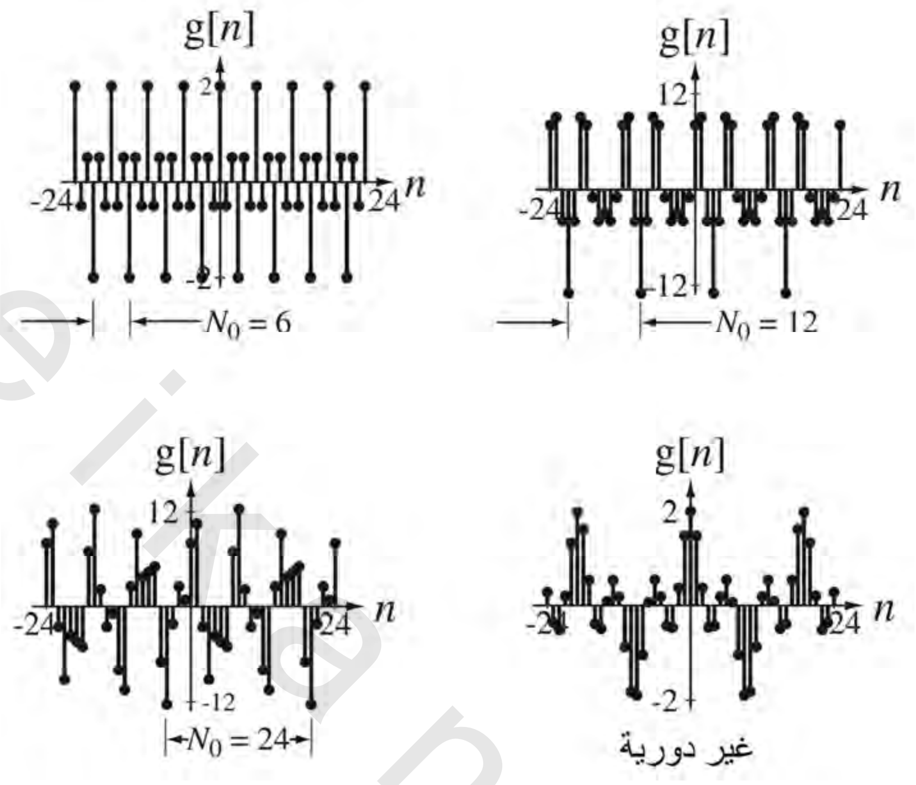
(أ) $g[n]=5\sin(2n/4)+8\cos(2\pi n/6)$

(ب) $g[n]=5\sin(7n/4)+8\cos(14n/8)$

(ج) $g[n]=\mathrm{Re}(e^{j\pi n}+e^{-jn/}3)$

(د) $g[n]=\mathrm{Re}(e^{jn}+e^{-jn/3})$

الإجابة :



شكل رقم (إجابة ت.١٣)

١٤- إذا كانت $g[n]=15\cos(-2\pi n/12)$ و $h[n]=15\cos(2\pi Kn)$ ما هما أصغر قيمتين موجبتين للثابت K التي تكون عندهما $g[n]=h[n]$ لكل قيم n ؟

الإجابة : 1/12 و 11/12

طاقة وقدرة الإشارة

١٥- احسب طاقة الإشارة لكل من الإشارات التالية :

(أ) $x[n]=A\delta[n]$

(ب) $x[n]=\delta_{No}[n]$

(ج) $x[n]=\text{ramp}[n]$

(د) $x[n]=\text{ramp}[n]-2\text{ramp}[n-4]+\text{ramp}[n-8]$

الإجابة : A^2 و ∞ و 44 و ∞

١٦- تتكون إشارة من التتابع الترددي الدوري التالي ... ,2- ,4 ,2- ,2 ,24- ,4 ... ، ما هو متوسط قدرة هذه الإشارة ؟

الإجابة : 10

١٧- الإشارة x[n] دورية ودورتها No=6. بعض القيم المختارة لـ x[n] هي : x[0]=3 و x[-1]=1 و x[-4]=-2 و x[-8]=-2 و x[3]=5 و x[7]=-1 و x[10]=-2 و x[-3]=5 ، ما هو متوسط قدرة هذه الإشارة ؟

الإجابة : 7.333

١٨- احسب متوسط قدرة الإشارة لإشارة دورية معرفة على دورة واحدة بالعلاقة :

$x[n]=2n$ ، عندما $-2\le n<2$.

الإجابة : 6

١٩- احسب متوسط قدرة الإشارة لـ $x[n]=-5+3\sin(2\pi n/4)$.

الإجابة : 29.5

٢٠- احسب متوسط قدرة الإشارة للإشارات التالية :

(أ) $x[n]=A$

(ب) $X[n]=u[n]$

(ت) $x[n]=\delta_{No}[n]$

(ث) $x[n]=ramp[n]$

تمارين بدون إجابات

دوال الإشارات

٢١- ارسم الدوال الأسية والجيبية التالية :

(أ) $g[n]=-4\cos(2\pi n/10)$

(ب) $g[n]=-4\cos(2.2\pi n/10)$

(ج) $g[n]=-4\cos(1.8\pi n/10)$

(د) $g[n]=2\cos(2\pi n/6) - 3\sin(2\pi n/6)$

(ه) $g[n]=(3/4)^n$

(و) $g[n]=2(0.9)^n \sin(2\pi n/6)$

٢٢- للدوال المعرفة على اليسار، احسب قيمة الدالة التي على اليمين :

(أ) g[3] $g[n]=\frac{3n+6}{10}e^{-2n}$

(ب) g[5] $g[n] = Re\left(\left(\frac{1+j}{\sqrt{2}}\right)^n\right)$

(ج) g[4] $g[n]=(j2\pi n)^2+j10\pi n-4$

الإزاحة والتحجيم

٢٣- ارسم الدوال التالية :

(أ) $g[n]=2u[n+2]$

(ب) $g[n]=u[5n]$

(ت) $g[n]=-2ramp[-n]$

(ث) $g[n]=10ramp[n/2]$

(ج) $g[n]=7\delta[n-1]$

(ح) $g[n]=7\delta[2(n-1)]$

(خ) $g[n]=-4\delta[2n/3]$

(د) $g[n]=-4\delta[2n/3.1]$

(ذ) $g[n]=8\delta_4[n]$

(ر) $g[n]=8\delta_4[2n]$

٢٤- ارسم الدوال التالية :

(أ) $g[n]=u[n]+u[-n]$

(ب) $g[n]=u[n]-u[-n]$

(ت) $g[n]=\cos(2\pi n/12)\delta_3[n]$

(ث) $g[n]=\cos(2\pi n/12)\delta_3[n/2]$

(ج) $g[n] = \cos\left(\frac{2\pi(n+1)}{12}\right)u[n+1] - \cos\left(\frac{2\pi n}{12}\right)u[n]$

(ح) $g[n] = \sum_{m=0}^{n} \cos\left(\frac{2\pi m}{12}\right)u[m]$

(خ) $g[n] = \sum_{m=0}^{n}(\delta_4[m] - \delta_4[m-2])$

(د) $g[n] = \sum_{m=-\infty}^{n}(\delta_4[m] + \delta_3[m])(u[m+4] - u[m-5])$

(ذ) $g[n]=\delta_2[n+1]-\delta_2[n]$

(ر) $g[n] = \sum_{m=-\infty}^{n+1}\delta[m] - \sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$

٢٥- ارسم المقدار والزاوية لكل من الدوال التالية مع K :

(أ) $g[k]=20\sin(2\pi K/8)e^{-j\pi K/4}$

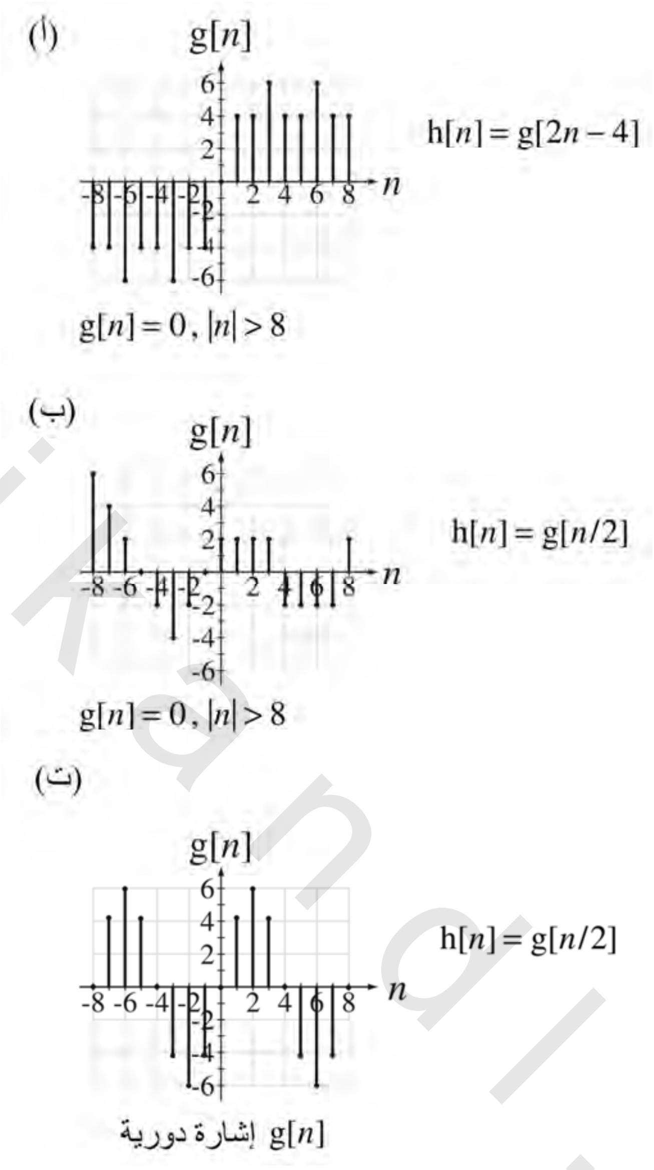
(ب) $g[k]=(\delta[K+8]-2\delta[K+4]+\delta[K]-2\delta[K-4]+\delta[K-8])e^{j\pi k/8}$

٢٦- باستخدام ماتلاب، لكل دالة من الدوال التالية ارسم الدالة الأصلية والدالة المزاحة و/أو المحجمة :

(أ) $g[n] = \begin{cases} 5, & n \le 0 \\ 5-3n, & 0 < n \le 4 \\ -23+n^2, & 4 < n \le 8 \\ 41, & n > 8 \end{cases}$ ، ارسم g[3n] مع n

(ب) $g[n]=10\cos(2\pi n/20)\cos(2\pi n/4)$ ، ارسم 4g[2(n+1)] مع n

٢٧- افترض الدالة المحددة في شكل (ت.٢٧)، ارسم الدالة h[n] الموضحة :



شكل رقم (**ت.٢٧**)

٢٨- ارسم الدوال التالية :

(أ) $g[n]=5\delta[n-2]+3\delta[n+1]$

(ب) $g[n]=5\delta[2n]+3\delta[4(n-2)]$

(ج) $g[n]=5(u[n-1]-u[4-n])$

(د) $g[n]=8\cos(2\pi n/7)$

(ه) $g[n]=-10e^{n/4}u[n]$

(و) $g[n]=-10(1.284)^{n}u[n]$

(ز) $g[n]=|(j/4)^{n}u[n]|$

(ح) g[n]=ramp[n+2]-2ramp[n]+ramp[n-2]

(ط) g[n]=5cos(2πn/8)u[n/2]

٢٩- ارسم مقدار وزاوية كل من الدوال التالية مع k في المدى 10<k<10-

(أ) $X[k] = \frac{1}{1+jk/2}$

(ب) $X[k] = \frac{jk}{1+jk/2}$

(ج) $X[k] = \delta_2[k]e^{-j2\pi k/4}$

الفرق والتكامل

٣٠- ارسم تراكم الدوال التالية :

(أ) g[n]=cos(2πn)u[n]

(ب) g[n]=cos(4πn)u[n]

٣١- في المعادلة $\sum_{m=-\infty}^{n} u[m] = g[(n-n_0)/N_w]$

(أ) ما هو اسم الدالة g؟

(ب) أوجد قيمة كل من n_0 و N_w.

٣٢- ما هي القيمة العددية لكل من التراكمات التالية :

(أ) $\sum_{n=0}^{10} ramp[n]$

(ب) $\sum_{n=0}^{6} 1/2^n$

(ج) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]/2^n$

(د) $\sum_{n=-10}^{10} \delta_3[n]$

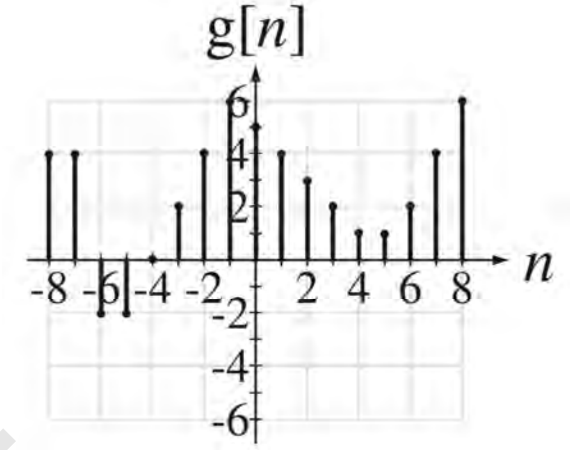
(ه) $\sum_{n=-10}^{10} \delta_3[2n]$

الإشارات الزوجية والفردية

٣٣- احسب وارسم مقدار وزاوية الجزء الزوجي والجزء الفردي للدالة "المتقطعة الـ k" التالية :

$G[k] = \frac{10}{1-j4k}$

٣٤- احسب وارسم الجزء الزوجي والجزء الفردي للدالة الموضحة في شكل (ت.٣٤).



شكل (ت.٣٤)

٣٥- ارسم الجزء الزوجي والجزء الفردي للإشارات التالية :

(أ) $x[n]=\delta_3[n-1]$

(ب) $x[n]=15\cos(2\pi n/9+\pi/4)$

الإشارات الدورية

٣٦- باستخدام ماتلاب، ارسم كل من الدوال التالية. إذا كانت أي واحدة من هذه الدوال دورية، احسب الدورة تحليلياً وتحقق من هذه الدورة من الرسم :

(أ) $g[n]=\sin(3\pi n/2)$

(ب) $g[n]=\sin(2\pi n/3)+\cos(10\pi n/3)$

(ج) $g[n]=5\cos(2\pi n/8)+3\sin(2\pi n/5)$

(د) $g[n]=10\cos(n/4)$

(ه) $g[n]=-3\cos(2\pi n/7)\sin(2\pi n/6)$

(العلاقات المثلثية ستكون مفيدة هنا)

طاقة وقدرة الإشارة

٣٧- احسب طاقة الإشارة لكل من الإشارات التالية :

(أ) $x[n]=2\delta[n]+5\delta[n-3]$

(ب) $x[n]=u[n]/n$

(ج) $x[n]=(-1/3)^n u[n]$

(د) $x[n]=\cos(\pi n/3)(u[n]-u[n-6])$

٣٨- احسب متوسط قدرة كل من الإشارات التالية :

(أ) $x[n]=(-1)^n$

(ب) $x[n]=A\cos(2\pi F_0 n+\theta)$

(ج) $x[n]=\begin{cases} A, & n=\cdots,0,1,2,3,8,9,10,11,16,17,18,19,\ldots \\ 0, & n=\cdots,4,5,6,7,12,13,14,15,20,21,22,23,\ldots \end{cases}$

(د) $x[n]=e^{-j\pi n/2}$

٣٩- إذا كانت $x[n]=\begin{cases} 6n, & -2\le n<2 \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$ و $y[n]=x[2n]$ ، احسب طاقة الإشارة $y[n]$.