الفصل الرابع

# وصف الأنظمة

### (٤,١) المقدمة والأهداف

لقد تم تحديد كلمتي الإشارة والنظام بصورة عامة في الفصل ١. تحليل الأنظمة عبارة عن طريقة منضبطة تم تطويرها عن طريق المهندسين. يستخدم المهندسون النظريات والأدوات الرياضية لتطبيقها من أجل معرفة عالم الطبيعة لتصميم أشياء تقوم بأعمال معينة تكون مفيدة للبشرية. هذه الأشياء التي يقوم المهندسون بتصميمها هي الأنظمة، ولكن كما أشرنا في الفصل ١، فإن تعريف النظام يكون أوسع من ذلك. إن مصطلح أو لفظ "نظام" يكون أوسع من أن يوجد له تحديد أو تعريف معين. إن النظام من الممكن أن يكون تقريباً أي شيء.

واحدة من طرق تعريف النظام هي أنه: أي شيء يؤدي أو ينفذ دالة معينة. طريقة أخرى لتعريف النظام هي أنه: أي شيء يستجيب عندما تتم إثارته. يمكن للنظام أن يكون نظاماً كهربياً، أو نظاماً ميكانيكياً، أو نظاماً حيوياً، أو نظام حاسوب، أو نظاماً اقتصادياً، أو نظاماً سياسياُ، وهكذا. الأنظمة المصممة بواسطة المهندسين تكون أنظمة صناعية، والأنظمة المشكلة حيوياً على مدار فترة زمنية خلال التطور والارتقاء الحضاري تكون أنظمة طبيعية. بعض الأنظمة يمكن تحليلها بالكامل باستخدام الرياضيات، وبعض الأنظمة تكون على درجة من التعقيد يصعب معها التحليل الرياضي جداً. بعض الأنظمة لم يتم الفهم الدقيق لها نتيجة الصعوبة في قياس خواصها. هندسياً، فإن مصطلح النظام يقصد به النظام الاصطناعي الذي تتم إثارته ببعض الإشارات وهو يستجيب بإشارات أخرى.

لقد تم تطوير العديد من الأنظمة في الأزمنة السابقة عن طريق الحرفيين الذين صمموا ونفذوا أنظمتهم اعتماداً على خبراتهم وملاحظاتهم، مع الاستخدام الظاهري للرياضيات المبسطة. أحد الفروق المهمة بين المهندسين والحرفيين تكمن في استخدام المهندسين للرياضيات المكثفة والعالية، وبالذات حساب التفاضل والتكامل لوصف وتحليل الأنظمة.

**أهداف الفصل**

١- تقديم مسميات أو مصطلحات تصف الخواص المهمة لأي نظام.
٢- توضيح عملية النمذجة للأنظمة باستخدام المعادلات التفاضلية والفرقية والمخططات الصندوقية.
٣- تطوير طرق لتصنيف الأجهزة تبعا لخواصها .

## (٤,٢) أنظمة الزمن المستمر

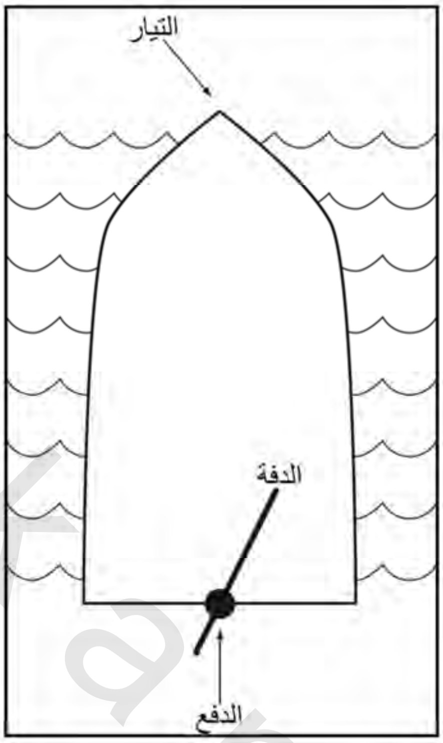
**نمذجة الأنظمة**

واحدة من أهم العمليات في تحليل الإشارات والأنظمة هي نمذجة هذه الأنظمة: بمعنى وصف هذه الأنظمة رياضياً أو منطقياً أو تخطيطياً. النموذج الجيد هو النموذج الذي يشتمل على كل التأثيرات المهمة في النظام بدون أن يبلغ درجة من التعقيد يصعب معها استخدامه.

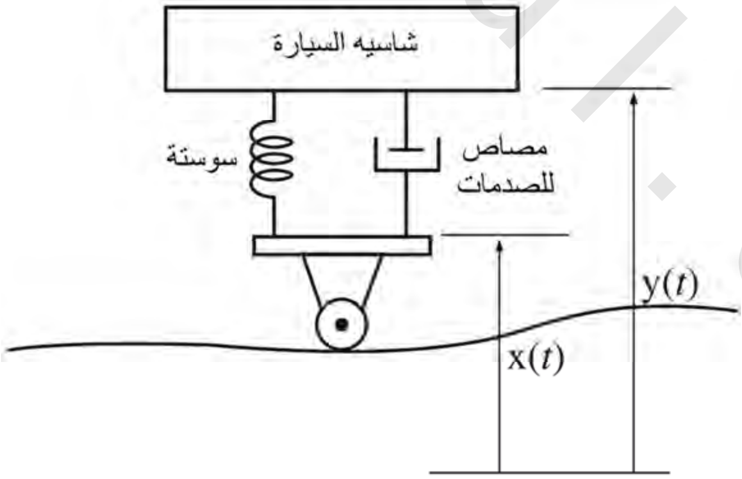
أحد المصطلحات الشائعة في تحليل الأنظمة هي أنه إذا تمت إثارة النظام عن طريق إشارات دخل يتم تطبيقها على واحد أو أكثر من مداخل النظام، فإنه يظهر واحد أو أكثر من الاستجابات أو إشارات الخرج على واحد أو أكثر من مخارج النظام. إثارة النظام تعني تطبيق طاقة معينة تتسبب في أن يستجيب النظام. من الأمثلة على ذلك القارب الذي يتم دفعة عن طريق موتور وتوجيهه عن طريق الدفة. عملية الدفع التي تتم عن طريق المروحة، ووضع الدفة، وتيار الماء، كلها إثارات للنظام، واتجاه القارب وسرعته هي استجابات لهذا النظام كما في شكل (٤,١).

لاحظ العبارة السابقة التي تقول إن اتجاه وسرعة القارب هي استجابات للنظام، ولكنها لم تقل إنها الاستجابات للنظام، مما قد يعني أنه لا توجد أي استجابات أخرى. عملياً كل نظام يكون له العديد من الاستجابات، بعضها يكون مهماً والآخر لا يكون مهماً. في حالة القارب، تكون سرعة واتجاه القارب من الاستجابات المهمة، ولكن اهتزاز هيكل القارب، والأصوات الصادرة عن تناثر الماء على الجانبين، والأثر المتولد خلف القارب، واهتزازات القارب، والعديد من الظواهر الطبيعية تكون غير مهمة، ومن الممكن إهمالها في التحليل العملى لهذا النظام.

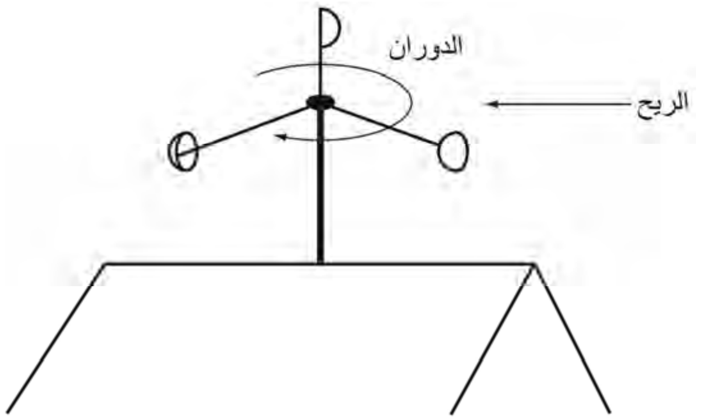
نظام التعليق في السيارة تتم إثارته عن طريق سطح الطريق مع مرور السيارة عليه، وموضع شاسيه (الهيكل المعدني) السيارة بالنسبة للطريق يكون من الاستجابات المهمة، كما في شكل (٤,٢). عندما نقوم بضبط حرارة الحجرة، فإن وضع الثرموستات ودرجة حرارة الحجرة يمثلان إشارتي دخل لنظام تسخين وتبريد الحجرة، وأما استجابة النظام، فهي وجود الهواء الساخن، أو البارد الذي يغير درجة حرارة الحجرة لكي تقترب من الدرجة الموضوعة على الثرموستات (منظم الحرارة).




**شكل رقم (٤,١) مخطط مبسط للقارب**




**شكل رقم (٤,٢) نموذج مبسط لنظام التعليق في السيارة**




**شكل رقم (٤،٣) مقياس الريح بالكأس**

هناك فصيل كامل من الأنظمة، وهو أجهزة القياس، تكون كلها أنظمة وحيدة الدخل ووحيدة الخرج. تتم إثارة هذه الأنظمة عن طريق الظاهرة الطبيعية التي يراد قياسها، وتكون الاستجابة هي مؤشر الجهاز يبين قيمة هذه الظاهرة الطبيعية. من أمثلة الجيدة على ذلك مقياس شدة الريح باستخدام الكؤوس. إن الرياح تثير الجهاز والاستجابة تكون هي سرعة الدوران وهي تعتبر استجابة مهمة كما في شكل (٤،٣).

شيء لا يتم في العادة التفكير فيه كنظام وهو الجسر على أي طريق سريع. ليست هناك إشارة دخل واضحة تنتج استجابة مطلوبة. الجسر المثالي قد لا يستجيب على الإطلاق عند إثارته. تتم إثارة الجسر عن طريق حركة المرور التي تمر عليه، والرياح التي قد تهب عليه، وتيارات الماء التي تدفع قواعده الهيكلية، والجسر يتحرك. من الأمثلة المأساوية التي تبين استجابة الجسر عند إثارته كانت فشل كوبري تاكوما ناروز في ولاية واشنطون. في أحد الأيام شديدة العواصف كانت استجابة الجسر لهذه العواصف هي التأرجح بعشوائية حتى سقط قطعا نتيجة القوى المؤثرة عليه. وهذا يعتبر مثالا مأساويا على الأهمية القصوى للتحليل الجيد. إن الشروط التي يستجيب عندها الجسر بهذه القوة يجب الكشف عنها في عملية التصميم بحيث يمكن تغيير التصميم لتجنب هذه المأساة.

إن خلية حيوية واحدة في الحيوان تعتبر نظاماً غاية في التعقيد، وبالذات مع اعتبار حجمها. يتكون الجسم البشري من عدد هائل من هذه الخلايا، ولذلك فإنه يعتبر تقريباً من الأنظمة التي لا يتصور مدى تعقيدها. ولكنه يمكن نمذجته كنظام أكثر تبسيطا في بعض الأحوال لحساب أحد تأثيراته المنفردة. في الديناميكية الصيدلية يتم في العادة نمذجة الجسم البشري كحجيرة واحدة، أو حجم يحتوي سائل. عملية تعاطي الدواء هو الإثارة وتركيز الدواء في الجسم هو الاستجابة المهمة. معدلات إدخال الدواء وإخراجه تحدد تغير تركيز الدواء مع الزمن.

**المعادلات التفاضلية**

سنعطي فيما يلي بعض الأمثلة على التفكير المستخدم في نمذجة الأنظمة باستخدام المعادلات التفاضلية. هذه الأمثلة قد تم تقديمها مسبقاً في الفصل ١.

**مثال ٤,١**

**نمذجة نظام ميكانيكي**

رجل طوله 1.8 متر واحد و٨ سنتيمترات ووزنه 80 كيلوجراماً قفز وهو مربوطٌ بحبل مطاطي من فوق جسر على أحد الأنهار. الجسر على بعد 200 متر من سطح الماء، وطول الحبل المطاطي غير المشدود يساوي 30 متراً. ثابت السوستة للحبل المطاط هو Ks=11N/m، مما يعني أن الحبل عند شده، فإنه يقاوم هذا الشد بقوة مقدارها 11 نيوتيناً لكل متر استطالة. مطلوب عمل نموذج ديناميكي رياضي للموضع الديناميكي للرجل كدالة في الزمن وارسم موضع الرجل مع الزمن في أول 15 ثانية.

عندما يقفز الرجل من على الجسر فإنه يدخل في سقوط حر حتى يصل الحبل إلى أقصى طول غير مشدود له، وهذا يحدث عندما تكون قدما الرجل عند 30 متر تحت الجسر. الموضع الابتدائي للرجل وسرعته الابتدائية يكونان أصفاراً (سيكون الجسر هو الموضع الابتدائي أو المرجع). موضع الرجل سيساوي تكامل سرعته وسرعته هي تكامل عجلة سقوطه. لذلك ففي أثناء زمن هذا السقوط الابتدائي الحر ستكون سرعته 9.8t m/s، حيث t هي الزمن بالثانية، وموضعه سيكون $4.9t^2$ m تحت الجسر. بالتعويض بالمسافة 30 متراً التي تساوي طول الحبل غير المشدود نحصل على الزمن 2.47s. عند هذا الزمن ستكون سرعته تساوي 24.25 متر على الثانية في اتجاه الأسفل. عند هذه النقطة يتغير التحليل: لأن الحبل المطاط يبدأ تأثيره، وتكون هناك قوتان مؤثرتان على الرجل:

١- الانجذاب لأسفل تحت تأثير الجاذبية الأرضية mg، حيث m هي وزن الرجل، و g هي عجلة الجاذبية الأرضية.

٢- الانجذاب لأعلى تحت تأثير الحبل المطاطي Ks(y(t)-30)، حيث y(t) هي الموضع الرأسي للرجل تحت الجسر كدالة في الزمن.

وعلى ذلك، فباستخدام قاعدة أن القوة تساوي الكتلة في العجلة وحقيقة أن العجلة هي التفاضل الثاني للموضع، فإنه يمكننا كتابة ما يلي:

$$mg - K_s(y(t)-30) = my''(t)$$

أو

$$my''(t)+K_s y(t)=mg+30K_s$$

وهذه تمثل معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثانية، ذات معاملات ثابتة وغير متجانسة. حل هذه المعادلة هو مجموع الحل المتجانس والحل الخاص.

الحل المتجانس هو مجموع خطي من الدوال المميزة للمعادلة. الدوال المميزة هي صور دالية يمكنها أن تحقق هذه الصورة من المعادلة. توجد هناك دالة مميزة لكل قيمة مميزة. القيم المميزة هي المعاملات في الدوال المميزة التي

تجعلها تحقق هذه المعادلة بالذات. القيم المميزة هي حلول المعادلة المميزة، وهي $m\lambda^2+K_s=0$. حلول هذه المعادلة تكون على الصورة $\lambda = \pm\sqrt{K_s/m}$. (انظر الملحق ث للمزيد عن حلول المعادلات التفاضلية). حيث إن القيم المميزة تكون قيماً مركبة، فإنه يكون من المريح أكثر أن نعبر عن هذه الحلول كمجموع من دوال الجيب وجيب التمام الحقيقية بدلاً من اثنين من الدوال الأسية المركبة. وعلى ذلك فإن الحل المتجانس يمكن التعبير عنه في الصورة:

$$y_h(t) = K_{h1}\sin\left(\sqrt{K_s/m}t\right) + K_{h2}\cos\left(\sqrt{K_s/m}t\right)$$

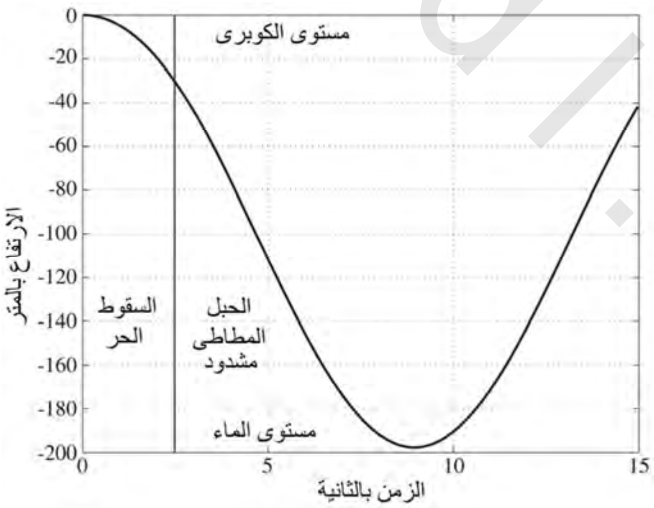
الحل الخاص يكون في صورة مجموع خطي للدالة المؤثرة وكل تفاضلاتها الفريدة. في هذه الحالة تكون الدالة المؤثرة ثابتاً وكل تفاضلاتها تساوي صفراً، ولذلك فإن الحل الخاص يكون على الصورة $y_p(t)=K_p$ وهي عبارة عن ثابت. بالتعويض في الحل الخاص نحصل على: $y_p(t)=mg/K_s+30$. الحل الكلي يساوي مجموع الحل المتجانس والخاص، كما يلي:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = K_{h1}\sin\left(\sqrt{\frac{K_s}{m}}\,t\right) + K_{h2}\cos\left(\sqrt{\frac{K_s}{m}}\,t\right) + \mathrm{mg/Ks} + 30$$

الشروط الحدودية، هي: $y(2.47)=30$ و $y'(2.47)=24.25$. بالتعويض بقيم عددية للمعاملات، وتطبيق الشروط الحدودية نحصل على:

$$y(t)=.16.85\sin(0.3708t).95.25\cos(0.3708t)+101.3, \quad t>2.47$$

التغيرات الابتدائية في موضع الرجل الرأسي مع الزمن تكون قطع مكافئ. بعد ذلك وعند 2.47s يصبح الحل جيبياً بحيث يصبح الحلان وتفاضلاتهما مستمرين عند الزمن 2.47s كما هو موضح في شكل (٤،٤).




**شكل رقم (٤،٤) الموضع الراسي للرجل مع الزمن (مستوى الجسر هو المستوى صفر).**

في المثال ٤.١ تصف المعادلة التالية النظام:

$$My''(t)+K_s y(t)=mg+30K_s$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة غير متجانسة. الجانب الأيمن من المعادلة يسمى الدالة المؤثرة. إذا كانت الدالة المؤثرة صفراً، يكون لدينا معادلة تفاضلية متجانسة ويكون حل هذه المعادلة هو الحل المتجانس. في تحليل الإشارات والأنظمة يطلق على هذا الحل استجابة الدخل الصفري. هذا الحل يكون مختلفاً عن الصفر إذا كانت الشروط الابتدائية للنظام مختلفة عن الصفر، بمعنى أن النظام به طاقة مخزنة. إذا كان النظام ليس به طاقة مخزنة والدالة المؤثرة لا تساوي الصفر، فإن هذا الحل يسمى استجابة الحالة صفر.

هناك العديد من العمليات الطبيعية التي تم إهمالها في النموذج الحسابي المستخدم في المثال ٤.١ ومنها كمثال:

١- مقاومة الهواء
٢- الطاقة المفقودة في الحبل المطاط
٣- المركبة الأفقية لسرعة الرجل
٤- دوران الرجل أثناء السقوط
٥- تغير عجلة الجاذبية كدالة في الموضع
٦- تغير مستوى الماء في النهر

إهمال هذه العوامل جعل النموذج الحسابي أكثر بساطة عنمَّا كان يمكن عليه لو لم يتم إهمال هذه العوامل. نمذجة الأنظمة تكون في الغالب مفاضلة بين الدقة وبساطة النموذج.

**مثال ٤,٢**

**نمذجة نظام موائع ميكانيكي**

خزان مياه اسطواني مساحة مقطعة $A_1$ ومستوى الماء فيه هو $h_1(t)$ وتتم تغذيته من مدخل تدفق حجمي للماء $f_1(t)$ وله فوهة خروج عند الارتفاع $h_2$ مساحة وقطعها الفعالة $A_2$ يخرج من خلالها تدفق حجمي $f_2(t)$ كما في شكل (٤,٥). أكتب المعادلة التفاضلية لمستوى الماء في الخزان كدالة في الزمن وارسم مستوى الماء مع الزمن للخزان الذي يكون في البداية فارغاً، مع الافتراضات المختلفة للتدفق الداخل.

مع افتراضات معينة للتبسيط، فإن سرعة الماء الخارج من الفوهة يعطي بمعادلة تورشيللي Torcelli كما يلي:

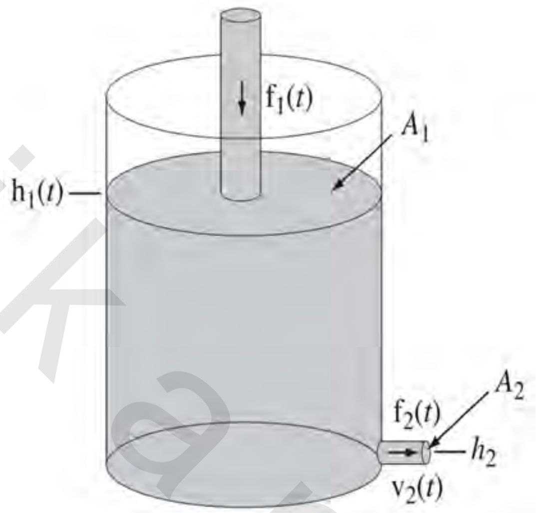
$$v_2(t) = \sqrt{2g[h_1(t) - h_2}$$

حيث g هي عجلة الجاذبية الأرضية التي تساوي $9.8m/s^2$. حجم الماء في الخزان يساوي $A_1h_1(t)$ ومعدل تغيره يساوي التدفق الداخل مطروحاً منه التدفق الخارج:

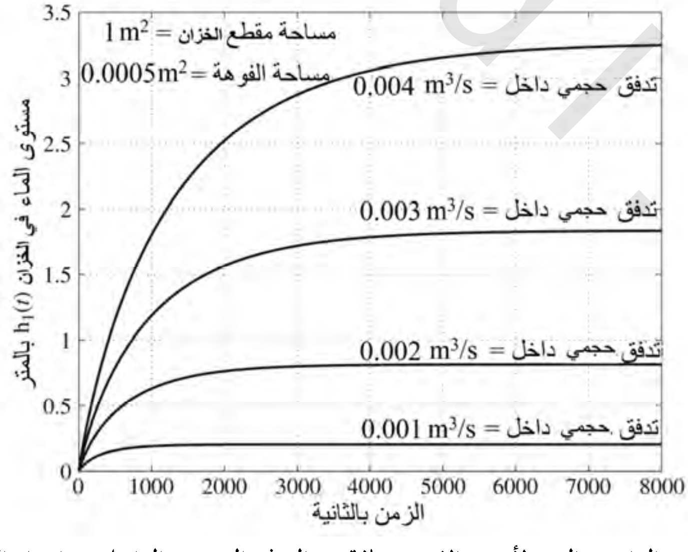
$$\frac{d}{dt}(A_1 h_1(t)) = f_1(t) - f_2(t)$$

والمعدل الحجمي للتدفق الخارج يساوي حاصل ضرب المساحة الفعالة $A_2$ للفوهة وسرعة التدفق الخارج، $f_2(t)=A_2v_2(t)$. بربط هذه المعادلات يمكننا كتابة معادلة تفاضلية واحدة لمستوى الماء في الخزان كما يلي :

$$A_1\frac{d}{dt}(h_1(t)) + A_2\sqrt{2g[h_1(t)-h_2]} = f_1(t)$$ المعادلة رقم (٤,١)




**شكل رقم (٤,٥) خزان بفوهة يتم ملأه من أعلى.**

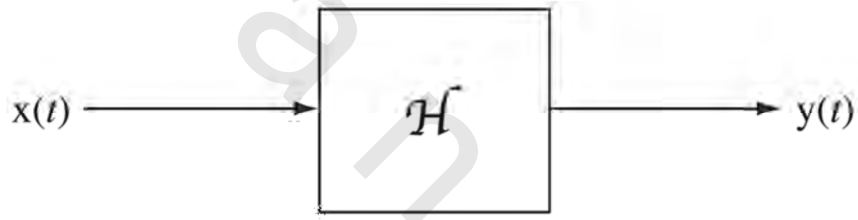



**شكل رقم (٤,٦) مستوى الماء مع الزمن لأربع حالات مختلفة من التدفق الحجمي الداخل مع اعتبار الخزان فارغاً في البداية**

شكل (٤,٦) يبين تغير مستوى الماء في الخزان مع الزمن لأربع حالات من تدفق الدخل الثابت مع اعتباره كان فارغا في البداية. مع تدفق الماء الداخل، يزداد مستوى الماء، وزيادة مستوى الماء يزيد من تدفق الماء الخارج. يظل مستوى الماء في الارتفاع إلى أن يصبح التدفق الخارج يساوي التدفق الداخل، وبعد هذا الزمن يثبت مستوى الماء. كما ذكرنا في الفصل١، عندما يزداد التدفق الداخل بمقدار الضعف، فإن المستوى النهائي للماء يزداد بمقدار أربع مرات، وهذا نتيجة حقيقة أن المعادلة التفاضلية (٤,١) كانت غير خطية. طريقة لإيجاد حل هذه المعادلة سيتم تقديمها بعد ذلك في هذا الفصل.

**المخطط الصندوقي**

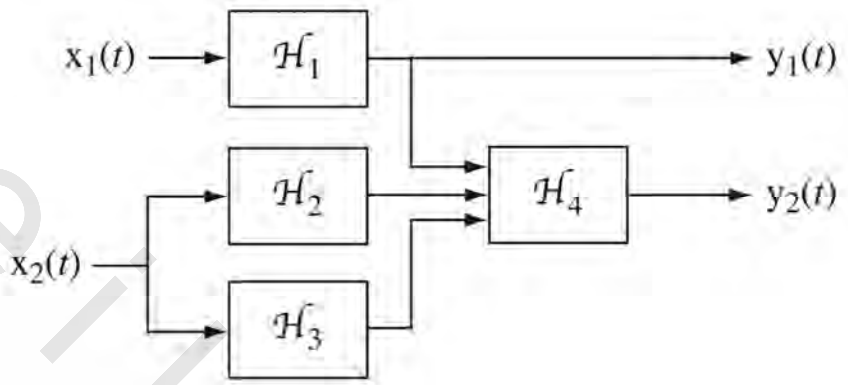
في تحليل الأنظمة يكون من المفيد جداً التعبير عن هذه الأنظمة بالمخططات الصندوقية. أي نظام بدخل واحد وخرج واحد يمكن التعبير عنه بالمخطط الموضح في شكل (٤,٧). الإشارة عند الدخل x(t) يتم العمل عليها بالمعامل H لكي تنتج الإشارة y(t) عند الخرج. المعامل H يمكن أن يقوم بأي عملية تقريباً يمكنك أن تتخيلها.




**شكل رقم (٤,٧) نظام بدخل واحد وخرج واحد.**

في العادة يتم وصف وتحليل النظام كتجميع من عدد من المكونات. أي واحد من هذه المكونات يكون نظاماً أبسط، وأصغر، وفي العادة يكون نظاماً قياسياً بمعنى معين، ويكون معلوم الخواص. ما هو المكون بالتقابل مع النظام يعتمد على الحالة أو الموقف. بالنسبة لمصمم أي دائرة كهربية، تكون المكونات هي المقاومات أو المكثفات أو الملفات أو مكبرات العمليات، وهكذا، وتكون الأنظمة هي مثلاً مكبرات القدرة، أو المحول الرقمي التماثلي، أو دائرة التعديل، أو المرشح، وهكذا. بالنسبة لمصمم أي نظام اتصالات، تكون المكونات هي المكبرات أو دوائر التعديل، أو المرشحات، أو الهوائيات، والأنظمة تكون في هذه الحالة وصلات ميكروية، أو خطوط سنترال من الألياف الضوئية، أو مكاتب سنترال تليفونات. بالنسبة لمصمم السيارة، تكون المكونات هي، العجلات، أو الموتور، أو المصدات، أو الأضواء، أو المقاعد، ويكون النظام هو السيارة نفسها. في الأنظمة المعقدة الكبيرة مثل الخطوط الجوية التجارية، وشبكات التليفونات، والناقلات العملاقة، ومحطات الطاقة يكون هناك العديد من المستويات في ترتيب المكونات والأنظمة.

بمعرفة كيفية التوصيف الرياضي لكل المكونات في أي نظام وكيف تتفاعل هذه المكونات مع بعضها، فإنه بإمكان المهندس أن يتوقع باستخدام الرياضيات، كيف سيعمل النظام بالكامل بدون بنائه في الحقيقة واختباره. شكل (٤,٨) يبين مخططاً صندوقياً لنظام مكون من مكونات.

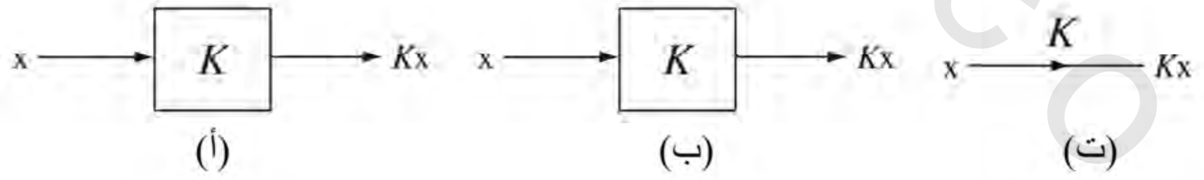



**شكل رقم (٤,٨) نظام له دخلان وخرجان ويتكون من أربع مكونات موصلة مع بعضها بعضا.**

في المخططات الصندوقية يمكن لكل إشارة دخل أن تذهب لأي عدد من البلوكات، ويمكن لكل إشارة خرج من أي بلوك أن تذهب لأي عدد آخر من البلوكات. هذه الإشارات لا تتأثر نتيجة توصيلها إلى أي عدد من البلوكات. لا يوجد هناك تأثير حملي كما هو الحال في تحليل الدوائر الكهربية. بالمقارنة بالدوائر الكهربية، فإنه يمكن التفكير في هذه البلوكات على أن لها معاوقة دخل لانهائية ومعاوقة خرج تساوي صفراً.

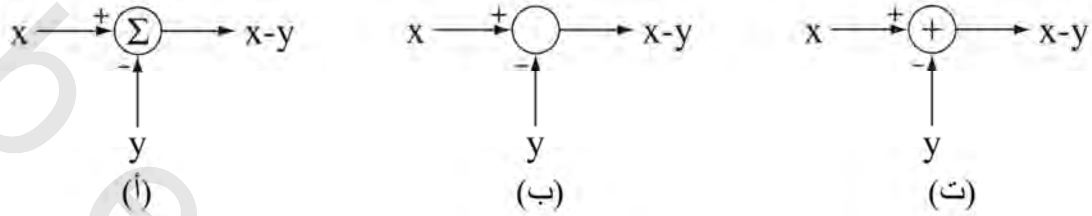
عند رسم المخطط الصندوقي لأي نظام، فإن بعض العمليات تظهر باستمرار بحيث تم تخصيص رمز تخطيطي للبلوكات الخاصة بها. هذه العمليات هي المكبرات، ووصلات التجميع، والتكامل.

المكبر يضرب إشارة دخله في ثابت (معامل التكبير) ليعطي الاستجابة الخاصة به. يتم استخدام رموز مختلفة لعملية التكبير في التطبيقات المختلفة لتحليل الأنظمة عن طريق المؤلفين المختلفين. شكل (٤,٩) يبين الأشكال الأكثر شيوعاً. سنستخدم الرمز الموجود في شكل (٤,٩ ت) للتعبير عن المكبر في هذا الكتاب.




**شكل رقم (٤,٩) التعبيرات التخطيطية المختلفة للمكبر في أي مخطط صندوقي للنظام.**

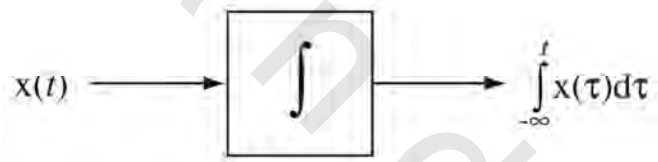
نقطة التجميع تقبل العديد من إشارات الدخل وتعطي مجموع هذه الإشارات. بعض الإشارات من الممكن عكس إشارتها قبل أن يتم جمعها، وعلى ذلك فهذا المكون من الممكن أن يعطي الفرق بين إشارتين. شكل (٤،١٠) يبين بعض الرموز المستخدمة لتمثيل نقطة التجميع.




**شكل رقم (٤،١٠) ثلاثة تمثيلات مختلفة لنقاط التجميع في المخطط الصندوقي للأنظمة.**

سنستخدم الرمز الموجود في شكل (٤،١٠ ت) للتعبير عن نقطة التجميع. إذا لم توجد إشارة الجمع، أو الطرح بجانب الدخل، فإنه سيفترض وجود إشارة الجمع.

المكامل، هو مكون عند إثارته بأي إشارة، فإنه يعطي تكامل هذه الإشارة في الخرج كما هو في شكل (٤،١١).




**شكل رقم (٤،١١) رمز المكامل المستخدم في الرسم الصندوقي.**

هناك رموز أيضاً للأنواع الأخرى من المكونات التي تقوم بعمليات خاصة في معالجة الإشارة. كل نظام هندسي تكون له مجموعة الرموز المفضلة له في العمليات التي تكون شائعة في هذا النظام. مخطط النظام الهيدروليكي قد يحتوي رموزاً خاصة للصمام، والبخاخ، والمضخة، والفوهة أو مقدمة الخرطوم. مخطط النظام الضوئي قد يحتوي رموزاً لمصدر الليزر، ومقسم الشعاع، والمستقطب، والعدسة أو المرآة.

في الإشارات والأنظمة هناك مراجع شائعة لنوعين من الأنظمة العامة وهما، نظام الحلقة المفتوحة، ونظام الحلقة المغلقة. نظام الحلقة المفتوحة نظام يستجيب مباشرة لأي إشارة دخل. نظام الحلقة المغلقة نظام يستجيب لإشارة الدخل ولكنه أيضاً يستشعر إشارة الخرج ويغذيها عكسياً لتجمع مع أو تطرح من إشارة الدخل من أجل التحقيق الأفضل لمتطلبات النظام. أي جهاز قياس يكون مكوناً من نظام حلقة مفتوحة. خرج الجهاز يبين ما هي الإثارة بدون أن يحدث أي تغيير فيها. سائق السيارة يعطي الإشارة لتتحرك بسرعة معينة وفي اتجاه معين عن طريق الضغط على دواسة البنزين أو الفرامل وعن طريق لف عجلة القيادة. مع حركة السيارة على الطريق، فإن السائق

يستشعر باستمرار سرعة السيارة وموضع السيارة بالنسبة للطريق والسيارات الأخرى. اعتماداً على ما يستشعره السائق، فإنه يعدل إشارات الدخل (حركة عجلة القيادة، دواسة البنزين، والفرامل) للحفاظ على الاتجاه المطلوب للسيارة، والحفاظ أيضاً على السرعة الآمنة للسيارة والموضع الأمين أيضاً لها.

**مثال ٤,٣**

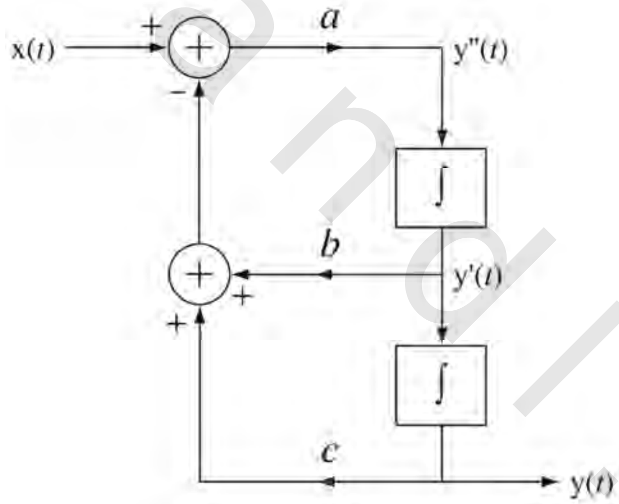
**نمذجة نظام تغذية عكسية مستمر زمنياً**

بالنسبة للنظام الموجود في شكل (٤,١٢):

(أ) أوجد استجابة الدخل الصفري، بمعنى الاستجابة عندما $x(t)=0$، إذا كانت القيمة الابتدائية لـ $y(t)$ هي $y(0)=1$، معدل تغير $y(t)$ الابتدائي هو $y'(t)|_{t=0}=0$، و $a=1$ و $b=0$ و $c=4$.

(ب) افتراض أن $b=5$ وأوجد استجابة الدخل الصفري للشروط الابتدائية نفسها الموضحة في الجزء (أ).

(ج) افترض أن النظام يكون في البداية مستقراً وافترض أن إشارة الدخل تساوي وحدة الخطوة. احسب استجابة الحالة صفر عندما $a=1$ و $b=-1, 1, 5$.




**شكل رقم (٤,١٢) نظام تغذية عكسية مستمر زمنياً.**

(أ) من المخطط الصندوقي يمكننا كتابة المعادلة التفاضلية لهذا النظام عن طريق إدراك أن إشارة الخرج من نقطة التجميع هي $y''(t)$ وأنها يجب أن تساوي مجموع إشارات الدخل.

$$y''(t)=x(t).[by'(t)+cy(t)]$$

عندما $b=0$ و $c=4$، فإن الاستجابة ستكون موصوفة بالمعادلة $y''(t)+4y(t)=x(t)$. الدالة المميزة ستكون هي الأس المركب $e^{st}$ والقيم المميزة هي حلول المعادلة المميزة $s^2+4=0$ والتي ستكون $s_{1,2}=\pm j2$. الحل المتجانس سيكون $y(t)=K_{h1}e^{j2t}+K_{h2}e^{-j2t}$. حيث إنه لا توجد إثارة للنظام، فإن هذا الحل سيكون هو أيضاً الحل الكلي.

بتطبيق الشروط الابتدائية فإن $y(0)=K_{h1}+K_{h2}=1$ و $y'(t)|_{t=0}=j2K_{h1}-j2K_{h2}=0$ ، وبحل هاتين المعادلتين نحصل على $K_{h1}=K_{h2}=0.5$. وعلى ذلك فالحل الكلي سيكون $y(t)=0.5(e^{j2t}+e^{-j2t})=\cos(2t), \quad t\geq 0$. أي أنه عندما $b=0$ ، فإن استجابة الدخل الصفري ستكون جيبية.

(ب) الآن عندما $b=5$ ، فإن المعادلة التفاضلية ستكون: $y''(t)+5y'(t)+4y(t)=x(t)$ ، وستكون القيم المميزة $s_{1,2}=-1, -4$ وسيكون حل المعادلة هو: $y(t)=K_{h1}e^{-t}+K_{h2}e^{-4t}$. بتطبيق الشروط الابتدائية ، $y(0)=K_{h1}+K_{h2}=1$ و $y'(t)|_{t=0}=-K_{h1}-4K_{h2}=0$ ، بذلك يمكن إيجاد قيمة الثوابت كالتالي: $K_{h1}=4/3$ و $K_{h2}=-1/3$ وبالتالي نحصل على: $y(t)=(4/3)e^{-t}-(1/3)e^{-4t}, \quad t\geq 0$. هذه الاستجابة للدخل الصفري تقترب من الصفر عندما $t>0$.

(ج) في هذه الحالة تكون $x(t)$ لا تساوي الصفر وسيحتوي الحل الكلي للمعادلة التفاضلية على الحل الخاص أيضاً. بعد $t=0$ تكون إشارة الدخل ثابتة ، وبالتالي سيكون الحل الخاص ثابتاً هو الآخر ويساوي $K_p$. ستكون المعادلة التفاضلية كالتالي: $y''(t)+by'(t)+4y(t)= x(t)$. بالحل لإيجاد قيمة $K_p$ سنجد أن $K_p=0.25$ وسيكون الحل الكلي كالتالي: $y''(t)=K_{h1}e^{s_1t}+K_{h2}e^{s_2t}+0.25$ حيث $s_{1,2}=\left(-b\pm\sqrt{b^2-16}\right)/2$. ستكون الاستجابة وتفاضلها أصفاراً عندما $t=0$.

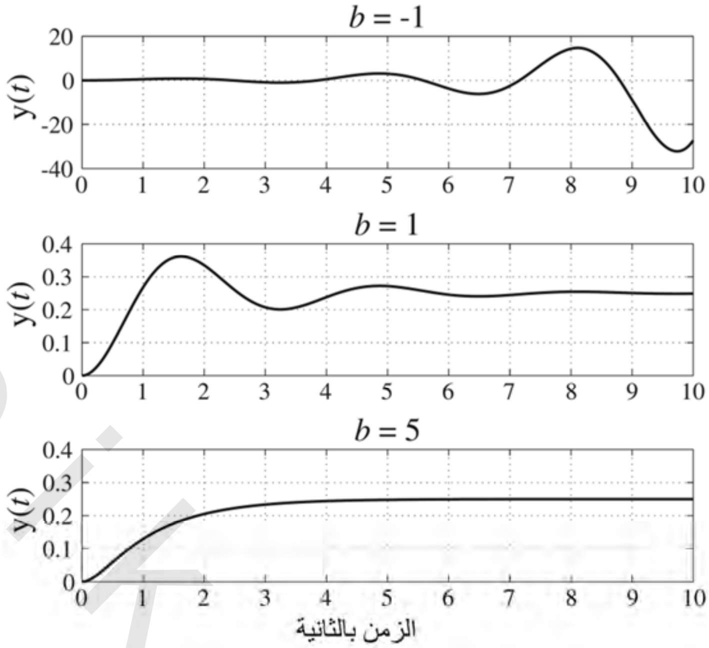
بتطبيق الشروط الابتدائية والحل للثابتين المتبقيين ، سنحصل على ما يلي:

| b | $s_1$ | $s_2$ | $K_{h1}$ | $K_{h2}$ |
|---|---|---|---|---|
| -1 | 0.5+j1.9365 | 0.5-j1.9365 | -0.125-j0.0323 | 0.125+j0.0323 |
| -1 | -0.5+j1.9365 | -0.5-j1.9365 | -0.125-j0.0323 | -0.125+j0.0323 |
| 5 | -4 | -1 | 0.0833 | -0.3333 |

وستكون الحلول كالتالي:

| b | y(t) |
|---|---|
| -1 | $0.25-e^{0.5t}[0.25\cos(1.9365t)-0.0646\sin(1.9365t)]$ |
| 1 | $0.25-e^{0.5t}[0.25\cos(1.9365t)+0.0646\sin(1.9365t)]$ |
| 5 | $0.08333e^{-4t}-0.3333e^{-t}+0.25$ |

هذه الاستجابات للحالة صفر موضحة في شكل (٤,١٣).



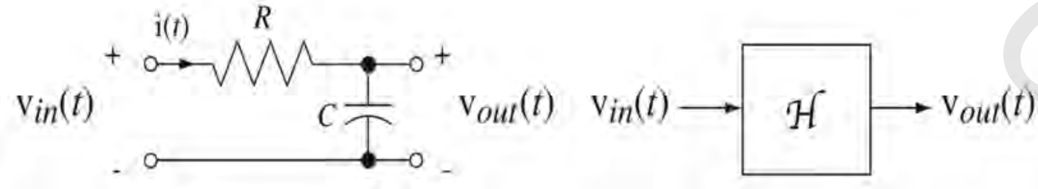

**شكل رقم (٤,١٣) استجابات النظام عندما b=-1, 1, 5.**

من الواضح أنه عندما b=-1 فإن استجابة الحالة صفر تزداد بدون توقف وهذا النظام ذو التغذية العكسية لن يكون مستقراً. من الواضح أيضاً أن ديناميكية النظام تتأثر بقوة بهذه التغذية العكسية.

**خصائص النظام**

**مثال تقديمي**

لكي نبني فهماً جيداً للأنظمة الكبيرة والعامة، دعنا نبدأ ببعض الأمثلة البسيطة التي ستوضح بعض الخواص المهمة للأنظمة. إن الدوائر الكهربية تكون معروفة جيداً بالنسبة لمهندسي الكهرباء. الدوائر الكهربية هي أنظمة. من الدوائر الشائعة دائرة المرشح المنفذ للترددات المنخفضة من النوع RC، وهو نظام أحادي الدخل، أحادي الخرج موضح في شكل (٤,١٤).



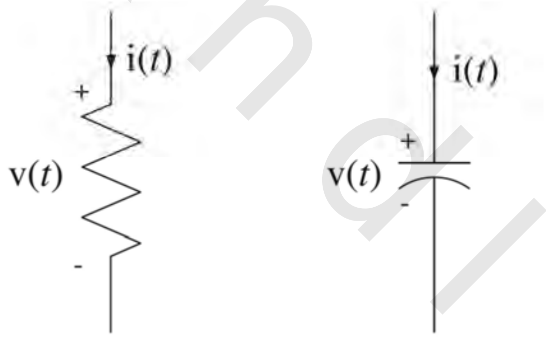

**شكل رقم (٤,١٤) مرشح منفذ للترددات المنخفضة من النوع RC وهو نظام أحادي الدخل أحادي الخرج.**

هذه الدائرة تسمى مرشح منفذ للترددات المنخفضة ؛ لأنه إذا كانت الإثارة دالة جيبية ذات مقدار ثابت، فإن الاستجابة ستكون أكبر عند الترددات المنخفضة منها عند الترددات المرتفعة. وبالتالي فإن النظام يميل لتمرير الترددات المنخفضة وفي الوقت نفسه يوقف أو يحجز الترددات المرتفعة. من الأسماء الشائعة للمرشحات الأخرى: مرشح منفذ للترددات العالية، ومرشح منفذ لنطاق من الترددات، ومرشح مانع أو موقف لنطاق من الترددات. المرشحات المنفذة لنطاق من الترددات تمرر مدى متوسط من الترددات، بينما تمنع الترددات المنخفضة والعالية. سيتم الكشف عن المرشحات بتفاصيل أكثر في الفصل ١١ والفصل ١٥.

الجهد عند دخل المرشح المنفذ للترددات المنخفضة من النوع RC هو $v_{in}(t)$ يثير النظام وبالتالي يكون الجهد عند الخرج هو $v_{out}(t)$ وهو استجابة النظام. إشارة جهد الدخل يتم تطبيقها على طرفي الدخل ناحية اليسار، وبالتالي تظهر إشارة الخرج على طرفي الخرج ناحية اليمين. يتكون هذا النظام من مكونين معروفين لمهندسي الكهرباء، وهما المقاومة والمكثف. العلاقات الرياضية للجهد والتيار للمقاومة والمكثف معروفة جيداً وموضحة في شكل (٤,١٥).

باستخدام قانون كيرتشوف للجهد، يمكننا كتابة المعادلة التفاضلية التالية:

$$\underbrace{RCV'_{out}(t)}_{=i(t)} + V_{out}(t)=V_{in}(t)$$




$$v(t) = R\,i(t) \qquad v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau$$

**شكل رقم (٤,١٥) العلاقات الرياضية للجهد والتيار للمقاومة والمكثف.**

حل هذه المعادلة التفاضلية يساوي مجموع الحل المتجانس والحل الخاص. (انظر الملحق ث للمزيد عن حل المعادلات التفاضلية. الحل المتجانس سيكون $v_{out,h}(t)=K_h e^{-t/RC}$ حيث $K_h$ ما زال حتى الآن غير معلوم. يعتمد الحل الخاص على شكل الدخل $v_{in}(t)$. لنفترض أن إشارة جهد الدخل $v_{in}(t)$ ستكون جهد ثابت A فولت. وبالتالي، حيث أن إشارة جهد الدخل ثابتة، فإن الحل الخاص سيكون ثابتاً أيضاً ويساوي $v_{out,p}(t)=K_p$. بالتعويض بذلك في المعادلة التفاضلية والحل سنحصل على $K_p=A$ وسيكون الحل الكلي هو $v_{out}(t)=v_{out,h}(t)+v_{out,p}(t) =K_h e^{-t/RC}+A$. الثابت $K_h$

يمكن إيجاده بمعرفة الخرج عند زمن محدد. سنفترض أننا نعرف أن الجهد على المكثف عندما t=0، وهو $v_{out}(0)$ بالتالي يمكننا كتابة :

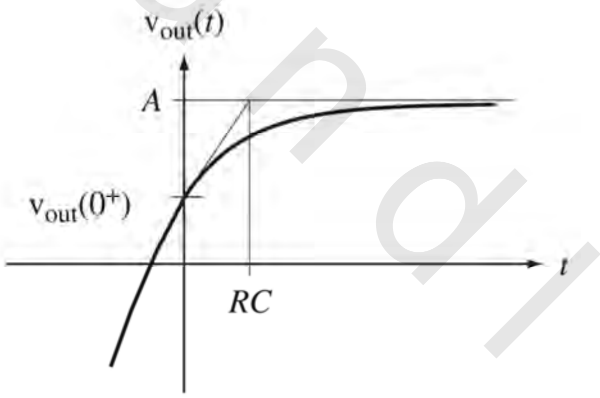
$$v_{out}(0)=K_h+A \quad \text{ومنها} \quad K_h=v_{out}(0)-A$$

ويمكن كتابة إشارة جهد الخرج كالتالي :

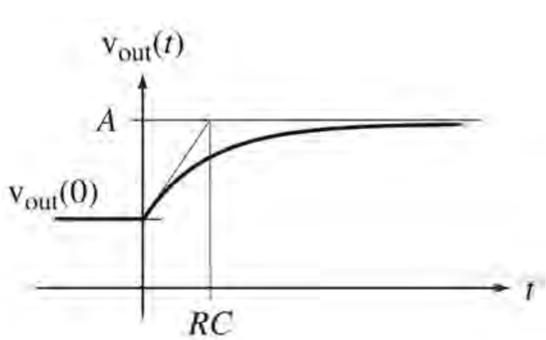
$$v_{out}(t)=v_{out}(0)e^{-t/RC} + A(1-e^{-t/RC})$$ المعادلة رقم (٤،٢)

وهذا الحل موضح في شكل (٤،١٦).

هذا الحل مكتوب وموضح كما لو كان مطبقاً عند كل قيم الزمن t. وهذا مستحيل عملياً، حيث أنه إذا كان مطبقاً عند كل الأزمنة، فإن هذا الحل قد يكون غير محدد مع اقتراب الزمن من الما لانهاية السالبة، والإشارات غير المحددة لا تحدث في الأنظمة الحقيقية الطبيعية. إنه من المؤكد عملياً أن قيمة ابتدائية لجهد الدائرة يتم وضعها على المكثف بأي وسيلة وتظل هناك حتى الزمن t=0. بعد ذلك وعندما t=0 يتم تطبيق الإشارة التي مقدارها A فولت ونهتم بتحليل الدائرة بما يحدث فقط بعد الزمن t=0. هذا الحل يطبق فقط لهذا المدى الزمني ويظل محدوداً به. بمعنى $v_{out}(t)=v_{out}(0)e^{-t/RC}+A(1-e^{-t/RC}),\ t>0$ كما هو موضح في شكل (٤،١٧).




**شكل رقم (٤،١٦) استجابة مرشح منفذ للترددات المنخفضة من النوع RC لإثارة ثابتة.**




**شكل رقم (٤،١٧) استجابة دائرة RC لجهد ابتدائي وإثارة ثابتة تم تطبيقها عند الزمن t=0**

هناك أربع محددات للاستجابة الجهدية لهذه الدائرة بالنسبة للأزمنة $t\geq0$ وهي، المقاومة R، والمكثف C، وقيمة جهد الخرج الابتدائية على المكثف $v_{out}(0)$، والجهد المطبق على الدخل $v_{in}(t)$. قيم المقاومة والمكثف يحددان العلاقات البينية بين الجهد والتيار في الدائرة. من المعادلة (٤,٢) يمكننا أن نرى أنه إذا كان جهد الدخل A يساوي صفراً، فإن الاستجابة ستكون:

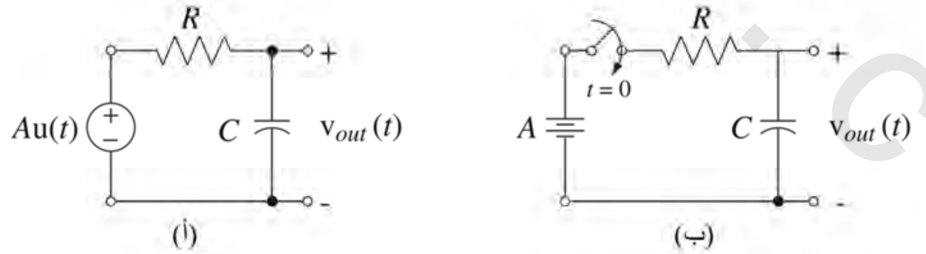
$$v_{out}(t)=v_{out}(0)e^{-t/RC}, \quad t>0$$ لمعادلة رقم (٤,٣)

وإذا كان الجهد الابتدائي على المكثف $v_{out}(0)$ يساوي صفراً، فإن الاستجابة ستكون:

$$v_{out}(t)=A(1-e^{-t/RC}), \quad t>0$$ عادلة رقم (٤,٤)

وعلى ذلك فالاستجابة في المعادلة (٤,٣) هي استجابة الدخل الصفري، والاستجابة في المعادلة (٤,٤) هي استجابة الحالة صفر. الحالة صفر تعني عدم وجود طاقة مخزنة في النظام وفي حال المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة، فإن الحالة صفر تعني أن جهد المكثف الابتدائي يساوي صفراً. بالنسبة لهذا النظام، فإن الاستجابة الكلية تساوي مجموع استجابة الدخل الصفري واستجابة الحالة صفر.

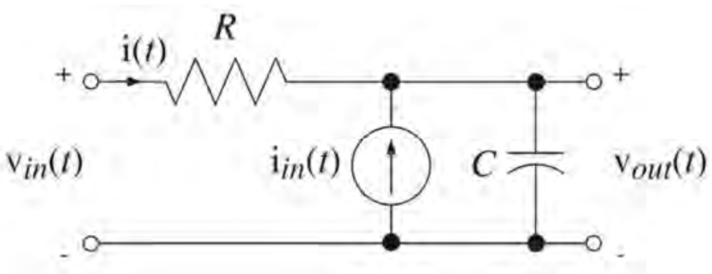
إذا كانت الإثارة تساوي صفراً لكل الأزمنة السالبة، فإنه يمكننا التعبير عنها بخطوة جهدية $v_{in}(t)=Au(t)$. إذا افترضنا أن الدائرة تم توصيلها بهذه الإثارة على طرفي الدخل لزمن لا نهائي، وأن الجهد الابتدائي على المكثف عندما $t=0$ سيكون صفراً كما في شكل (٤,١٨ أ). فإن النظام سيكون في البداية في حالته الصفرية وستكون استجابته هي استجابة الحالة صفر. أحياناً يكون التعبير عن الإثارة $v_{in}(t)=Au(t)$ يقصد به التعبير عن الموقف الموضح في شكل (٤,١٨ ب). في هذه الحالة، فإننا لسنا فقط نطبق جهداً على النظام، ولكننا في الحقيقة نغير من حالة النظام عن طريق قفل المفتاح. إذا كان الجهد الابتدائي على المكثف يساوي صفراً في كل من الدائرتين الموضحتين في شكل (٤,١٨)، فإن الاستجابتين للأزمنة $t\geq0$ ستكونان نفسيهما.




**شكل رقم (٤,١٨) طريقتان لتطبيق جهد ثابت مقداره A فولت على مرشح RC منفذ للترددات المنخفضة عند الزمن t=0.**

من الممكن أن نقوم بتضمين تأثيرات الطاقة الابتدائية المخزنة في النظام عن طريق حقن إشارة في النظام عندما يكون في حالته الصفرية عند الزمن $t=0$ بإثارة ثانية ولتكن صدمة مثلا. مثلا في دائرة المرشح RC من الممكن أن

نضع الجهد الابتدائي على المكثف عن طريق صدمة تيار من مصدر تيار يكون على التوازى مع المكثف كما في شكل (٤.١٩).




**شكل رقم (٤,١٩) مرشح RC منفذ للترددات المنخفضة مع صدمة تيار لحقن شحنة في المكثف لتحقيق جهد ابتدائي عليه.**

عند حدوث صدمة التيار فإن كل شحنتها تتدفق في المكثف أثناء فترة تطبيقها (مع العلم أن الصدمة لها فترة زمنية تساوي صفر). إذا كانت شدة الصدمة هي Q ، فإن التغير في جهد المكثف نتيجة حقن هذه الشحنة فيه عن طريق صدمة التيار سيكون :

$$\Delta v_{out} = \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i_{in}(t)\,dt = \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} Q\delta(t)\,dt = \frac{Q}{C}$$

وعلى ذلك فإنه باختيار $Q=Cv_{out}(0)$ ستحقق جهد المكثف الابتدائي $v_{out}(0)$. وبالتالي فإن تحليل الدائرة سيستمر كما لو كنا نوجد استجابة الحالة صفر للدخل $v_{in}(t)$ و $i_{in}(t)$ بدلاً من استجابة الحالة صفر للدخل $v_{in}(t)$ واستجابة الدخل الصفري $v_{out}(0)$. الاستجابة الكلية للأزمنة $t>0$ ستكون هي نفسها في الحالتين.

معظم الأنظمة العملية المستمرة زمنياً يمكن نمذجتها (على الأقل تقريبياً) عن طريق المعادلات التفاضلية بالطريقة نفسها لنمذجة المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة. إن ذلك يكون حقيقياً في الأنظمة الكهربية، والميكانيكية، والكيميائية، والبصرية، والعديد من أنواع الأنظمة الأخرى. ولذلك فإن دراسة الإشارات والأنظمة تكون في غاية الأهمية في مصفوفة عريضة جداً من التخصصات.

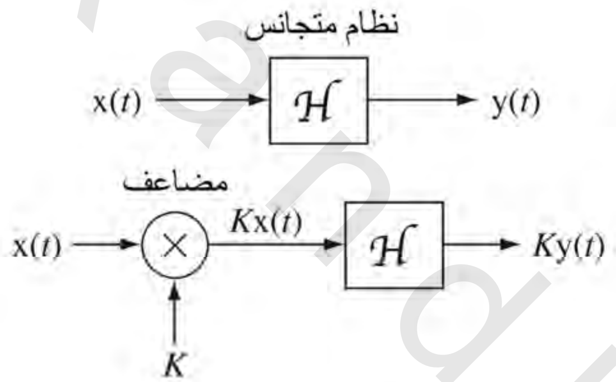
**التجانس**

إذا أردنا مضاعفة جهد إشارة الدخل للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة ليصبح $v_{in}(t)=2Au(t)$ ، فإن المعامل 2A سيتم حمله خلال التحليل وستصبح استجابة الحالة صفراً مضاعفة هي الأخرى كما يلي: $v_{out}(t)=2A(1-e^{-t/RC})u(t)$. وإذا أردنا أيضاً أن نضاعف جهد المكثف الابتدائي، فإن استجابة الدخل الصفري ستتضاعف. في الحقيقة فإنه إذا ضربنا إشارة جهد الدخل في أي ثابت، فإن استجابة الحالة صفر سيتم ضربها في الثابت نفسه أيضاً. إن جودة النظام التي تجعل العبارات السابقة حقيقية تسمى التجانس.

| |
|---|
| في أي نظام متجانس ، بضرب إشارة الدخل في أي ثابت (بما في ذلك الثوابت المركبة) سيضرب استجابة الحالة صفر في الثابت نفسه. |

شكل (٤.٢٠) يوضح عن طريق المخطط الصندوقي ، ماذا يعني التجانس.

أحد الأمثلة المبسطة جداً على نظام ليس متجانساً هو النظام الموصوف بالعلاقة $y(t)-1=x(t)$. إذا كانت x تساوي واحداً فإن $y=2$، وإذا كانت $x=2$ فإن $y=3$. لقد تمت مضاعفة إشارة الدخل، ولكن إشارة الخرج لم تتضاعف. الذي يجعل هذا النظام غير متجانس هو وجود الثابت 1. على يسار المعادلة. إن هذا النظام له استجابة دخل صفري لا تساوي الصفر. لاحظ أنه إذا أردنا إضافة 1+ لكل من جانبي المعادلة وأعدنا تحديد إشارة الدخل لتصبح $x_{new}(t)=x(t)+1$ بدلاً من $x(t)$ فقط ، فإن $y(t)$ ستصبح $y(t)=x_{new}(t)$ ، وبالتالي فإن مضاعفة $x_{new}(t)$ ستضاعف $y(t)$ ، وبالتالي فإن النظام يصبح متجانساً في ظل هذا التحديد الجديد للدخل.




**شكل رقم (٤,٢٠) رسم صندوقي يوضح مفهوم التجانس لنظام يكون في البداية في حالته الصفرية (K أي ثابت مركب)**

**مثال ٤,٤**

**تحديد إذا كان أي نظام متجانس أم لا**

اختبر تجانس النظام الذي علاقة خرجه ودخله كما يلي :

$$y(t)=\exp(x(t))$$

لنفترض أن $x_1(t)=g(t)$ ، بالتالي فإن $y_1(t)=\exp(g(t))$. افتراض $x_2(t)=Kg(t)$ ، بالتالي فإن $y_2(t)=\exp(Kg(t))=[\exp(g(t))]^k \neq Ky_1(t)$ ، وبالتالي فإن هذا النظام ليس متجانسا.

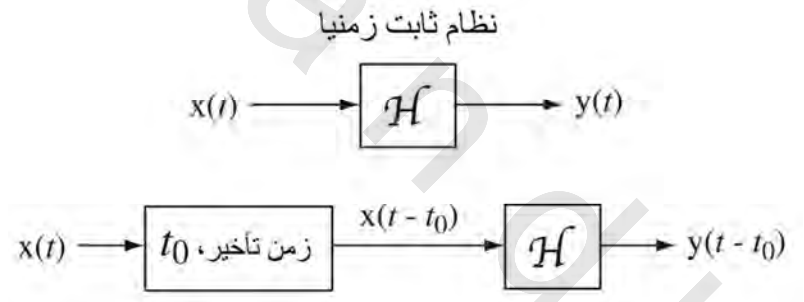
التحليل في المثال ٤.٤ قد يبدو إثباتاً بطريقة رسمية بدون ضرورة لمثل هذه الدالة البسيطة. ولكنه من السهل حدوث التباس في تقييم بعض الأنظمة ، حتى في الأنظمة التي تبدو بسيطة ، إذا لم يتم استخدام مثل هذا النوع من الإثبات المهيكل.

**الثبات الزمني**

افتراض أن النظام الموجود في شكل (٤,١٤) كان في البداية في الحالة صفر، وتم تأخير الإثارة بزمن مقداره $t_0$ بحيث تغيرت إشارة الدخل إلى $x(t)=Au(t-t_0)$. ماذا سيحدث للاستجابة؟ بالمرور على الحل مرة ثانية سنجد أن استجابة الحالة صفر ستصبح $v_{out}(t) = A\left(1 - e^{-(t-t_0)/RC}\right)u(t - t_0)$ وهي استجابة الحالة صفر الأصلية نفسها مع استبدال $t$ بـ $t-t_0$. وبالتالي فإن تأخير الإشارة قد أخر استجابة الحالة صفر بنفس الكمية بدون التغيير في شكل الدالة. إن الخاصية التي تجعل ذلك يحدث تسمى خاصية الثبات الزمني.

إذا كان أي نظام موجود مبدئياً في حالته الصفرية وكانت أي إشارة اختيارية $x(t)$ تعطي الاستجابة $y(t)$ وكانت إشارة الدخل $x(t-t_0)$ تعطي الاستجابة $y(t-t_0)$ لأي زمن تأخير اختياري $t_0$، فإن هذا النظام يسمى نظاماً ثابتاً زمنياً.

شكل (٤,٢١) يوضح مفهوم الثبات الزمني.




**شكل رقم (٤,٢١) رسم صندوقي يوضح مفهوم الثبات الزمني لنظام موجود مبدئياً في الحالة صفر.**

**مثال ٤,٥**

**تحديد إذا كان أي نظام ثابتاً زمنياً أم لا**

اختبر الثبات الزمني للنظام الذي علاقة دخله مع خرجه تعطي بالعلاقة التالية: $y(t)=\exp(x(t))$.

افتراض $x_1(t)=g(t)$، وبالتالي $y_1(t)=\exp(g(t))$. افتراض أيضاً $x_2(t)=g(t-t_0)$ وبالتالي $y_2(t)=\exp(g(t-t_0))=y_1(t-t_0)$، وعلى ذلك فإن هذا النظام ثابت زمنياً.

**مثال ٤,٦**

**تحديد إذا كان أي نظام ثابتاً زمنياً أم لا**

اختبر الثبات الزمني للنظام الذي علاقة دخله مع خرجه تعطي بالعلاقة التالية: $y(t)=x(t/2)$.

افتراض $x_1(t)=g(t)$، وبالتالي $y_1(t)=g(t/2)$. افترض أيضاً $x_2(t)=g(t-t_0)$ وبالتالي يمكننا كتابة $y_2(t)=g((t/2)-t_0)\neq y_1(t-t_0)=g((t-t_0)/2)$، وعلى ذلك فإن هذا النظام ليس ثابتاً، أي متغيراً زمنياً.

**الجمع**

افترض أن إشارة جهد الدخل للمرشح RC تساوي مجموع جهدين كالتالي: $v_{in}(t)=v_{in1}(t)+v_{in2}(t)$. للحظة افترض أن $v_{in2}(t)=0$ وافترض أن استجابة الحالة صفر عندما يكون الدخل $v_{in1}(t)$ هو وحده المؤثر ستكون $v_{out1}(t)$. المعادلة التفاضلية في هذه الحالة ستكون:

$$RCv'_{out1}(t)+v_{out1}(t)=v_{in1}(t)$$ المعادلة رقم (٤,٥)

بما أننا نحسب استجابة الحالة صفر، فإن $v_{out1}(0)$. المعادلة (٤,٥) والشرط الابتدائي $v_{out1}(0)=0$ يعطيان الحل الفريد $v_{out1}(t)$. بالطريقة نفسها إذا افترضنا أن $v_{in2}(t)$ يؤثر وحده، فإن استجابة الحالة صفر في هذه الحالة يجب أن تكون على الصورة:

$$RCv'_{out2}(t)+v_{out2}(t)=v_{in2}(t)$$ المعادلة رقم (٤,٦)

وسيكون هناك بالطريقة نفسها حل فريد وهو $v_{out2}(t)$. بإضافة المعادلتين (٤,٥) و (٤,٦) يمكن كتابة:

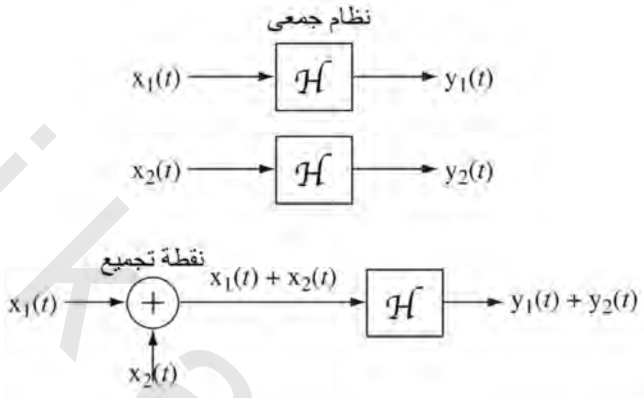
$$RC[v'_{out1}(t)+v'_{out2}(t)]+v_{out1}(t)+v_{out2}(t)=v_{in1}(t)+v_{in2}(t)$$ المعادلة رقم (٤,٧)

المجموع $v_{in1}(t)+v_{in2}(t)$ يشغل المكان نفسه في المعادلة (٤,٧) مثلما يفعل $v_{in1}(t)$ في المعادلة (٤,٥) و $v_{out1}(t)+v_{out2}(t)$ و $v'_{out1}(t)+v'_{out2}(t)$ يشغلان المكان نفسه في المعادلة (٤,٧) مثل $v_{out1}(t)$ و $v'_{out1}(t)$ في المعادلة (٤,٥). أيضاً فإن استجابة الحالة صفر ستكون $v_{in1}(0)+v_{in2}(0)=0$. لذلك فإنه إذا كان $v_{in1}(t)$ يعطي $v_{out1}(t)$، فإن $v_{in1}(t)+v_{in2}(t)$ يجب أن يعطيان الاستجابة $v_{out1}(t)+v_{out2}(t)$ لأن كلاً من الاستجابتين تم تحديدهما بطريقة فريدة على غرار المعادلة التفاضلية والشروط الابتدائية. تعتمد هذه النتائج على حقيقة أن تفاضل مجموع الدالتين يساوي مجموع التفاضل لهاتين الدالتين. إذا كانت الإثارة تساوي مجموع إثارتين، فإن الحل لهذه المعادلة التفاضلية، وليس بالضرورة المعادلات التفاضلية الأخرى، سيكون مجموع الاستجابتين لهاتين الإثارتين عندما تكون كل منهما تؤثر وحدها. النظام الذي يكون فيه الإثارات المضافة تعطي استجابات الحالة صفر مضافة أيضاً تسمى أنظمة جمعية أو تجميعية كما في شكل (٤,٢٢).

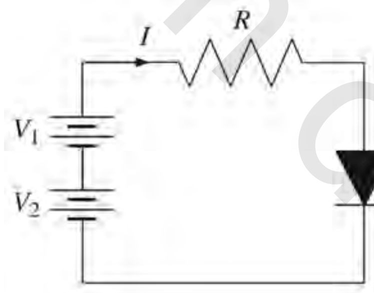
> إذا كان أي نظام عند إثارته بأي إثارة اختيارية $x_1$ يعطي استجابة حالة صفر $y_1$، وعند إثارته بأي إثارة اختيارية ثانية $x_2$ يعطي استجابة حالة صفر $y_2$، و $x_1+x_2$ تعطيان استجابة حالة صفر $y_1+y_2$، فإن هذا النظام يسمى نظاماً جمعياً أو نظام تجميعياً.

مثال شائع جداً على الأنظمة غير الجمعية هو دائرة الدايود (الصمام الثنائي) البسيطة في شكل (٤,٢٣). افترض إشارة جهد الدخل للدائرة هي V هي مصدري الجهد $V_1$ و $V_2$ الموصلان على التوالى ليعطيان الإشارة الكلية

لجهد الدخل تساوي مجموع الإشارتين. افترض أن الاستجابة الكلية هي التيار I ، وافترض استجابات التيار المنفصلة لكل جهد على حدة هي $I_1$ و $I_2$. لكي نجعل النتيجة معقولة سنفترض $V_1>0$ وسنفترض $V_2=-V_1$. الاستجابة لـ $V_1$ وحده هي التيار الموجب $I_1$. الاستجابة لـ $V_2$ وحده صغيرة جداً (مثالياً تساوي صفراً) وهي التيار السالب $I_2$. الاستجابة I للإشارة المجمعة $V_1+V_2$ تساوي صفر ، ولكن مجموع الاستجابتين عند جمعهما منفصلين $I_1+I_2$ تساوي تقريباً $I_1$ ولا تساوي صفراً. إذن فهذا النظام ليس تجميعياً.




**شكل رقم (٤,٢٢) مخطط صندوقي يوضح مفهوم التجميع لنظام يبدأ عند الحالة صف.**




**شكل رقم (٤,٢٣) دائرة دايود** (صمام ثنائي) **في حالة التيار المستمر**

**الخطية والتجميع**

أي نظام يكون متجانساً وتجميعياً يسمى نظاماً خطياً.

| |
|---|
| إذا أثرنا نظاماً خطياً بـ $x_1(t)$ فإنه ينتج استجابة الحالة صفر $y_1(t)$ ، وعند إثارته بـ $x_2(t)$ يعطي استجابة الحالة صفر $y_2(t)$ ، فإنه عند إثارته بـ $x(t)=\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$ سيعطي استجابة الحالة صفر التي تساوي : $y(t)= \alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$ |

هذه الخاصية للأنظمة الخطية تقودنا إلى مفهوم مهم يسمى التجميع superposition. المصطلح تجميع superposition يأتي من الفعل superpose ، والجزء pose من هذا المصطلح يعنى أن تضع شيئا في مكان معين ، والجزء super يعني على القمة. والكلمة على بعضها superpose تعني أن تضع شيئاً على قمة شيء آخر. إن هذا هو ما يحدث

عندما نجمع إشارة دخل مع إشارة أخرى، في نظام خطي. الاستجابة الكلية تكون واحدة من الاستجابتين على قمة (أو مجموعة مع) الاستجابة الأخرى.

حقيقة أن التجميع يتم تطبيقه على النظم الخطية فقط قد يبدو تافها وواضحا، ولكنه له آثار وصلت إلى أبعد الحدود في تحليل الأنظمة. إنها تعني أن استجابة الحالة صفر لأي إشارة دخل اختيارية يمكن إيجادها عن طريق تقسيم إشارة الدخل إلى قطع بسيطة يمكن تجميعها لتعطي إشارة الدخل الأصلية، ثم يتم حساب الاستجابة لكل قطعة مبسطة، وبعد ذلك يتم جمع كل هذه الاستجابات لتعطي الاستجابة الكلية للدخل الكلي. إنها تعني أيضاً أنه يمكننا أن نوجد استجابة الحالة صفر وبعد ذلك، في حسابات مستقلة، نوجد استجابة الدخل الصفري، وبعد ذلك يتم جمعهما لإيجاد الاستجابة الكلية. إنها تسمى طريقة "التقسيم والقهر" لحل مسائل الأنظمة الخطية ولا يمكن أن نبالغ في أهميتها. بدلاً من حل مسألة كبيرة معقدة، فإننا نحل عدداً من المسائل الصغيرة المبسطة. وبعد حل واحدة من المسائل الصغيرة البسيطة، فإن المسائل الأخرى تكون في العادة سهلة الحل؛ لأن العملية تكون متشابهة. الخطية والتجميع تكون هي الأساسات لطرق كبيرة وقوية لتحليل الأنظمة. تحليل النظم غير الخطية يكون أكثر تعقيداً وصعوبة عن تحليل الأنظمة الخطية؛ لأن طريقة القسمة والقهر لا تطبق في العادة على الأنظمة غير الخطية. في العادة تكون الطريقة الوحيدة والعملية لتحليل الأنظمة غير الخطية هي الطريقة الرقمية، بالمقابلة مع الطرق التحليلية.

نظرية التجميع والخطية تطبق أيضاً على الأنظمة الخطية متعددة الدخل متعددة الخرج. إذا كان هناك نظام خطي له دخلان وقمنا بتطبيق الإشارة $x_1(t)$ على الدخل الأول والإشارة $x_2(t)$ على الدخل الثانى وحصلنا على الاستجابة $y(t)$، فإنه يمكننا الحصول على نفس الاستجابة $y(t)$ إذا جمعنا الاستجابة من الدخل الأول وحده $y_1(t)$ والاستجابة من الدخل الثاني وحده $y_2(t)$.

**الأنظمة الخطية الثابتة زمنياً LTI**

إن أكثر الأنظمة شيوعا حتى الآن في التحليل من أجل تصميم الأنظمة العملية هي الأنظمة الخطية الثابتة زمنياً. إذا كان هناك نظام خطي وثابت زمنياً، فإنه يسمى نظام LTI. تحليل الأنظمة ال LTI يُمثِّل الأغلبية الساحقة للموضوعات في هذا الكتاب.

واحد من آثار الخطية التي ستكون مهمة فيما بعد يمكن إثباتها الآن. افترض نظام LTI تمت إثارته بإشارة $x_1(t)$ ليعطي استجابة الحالة صفر $y_1(t)$. أيضاً، افترض أن $x_2(t)$ يعطي استجابة الحالة صفر $y_2(t)$. باستدعاء خاصية الخطية، فإن $\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$ ستعطي استجابة الحالة صفر $\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$.الثوابت $\alpha$ و $\beta$ من الممكن أن تكون أرقاماً، بما في ذلك الأرقام المركبة. افترض $\alpha=1$ و $\beta=j$، فإن $x_1(t)+jx_2(t)$ ستعطي الاستجابة $y_1(t)+jy_2(t)$. إننا مبدئيا نعرف أن $x_1(t)$ تعطي $y_1(t)$ وأن $x_2(t)$ تعطي $y_2(t)$، وعلى ذلك يمكننا أن ننص على القاعدة العامة التالية:

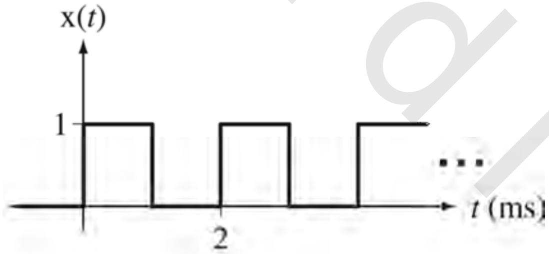
عندما تعطي إثارة مركبة استجابة معينة من نظام LTI ، فإن الجزء الحقيقي من الإثارة يعطي الجزء الحقيقي من الاستجابة والجزء التخيلي من الاستجابة يعطي الجزء التخيلي من الاستجابة.

إن ذلك يعنى أنه بدلاً من تطبيق الإثارة الحقيقية على النظام لإيجاد استجابته الحقيقية ، فإنه يمكننا تطبيق إثارة مركبة يكون جزأها الحقيقي هو الإثارة الطبيعية ، ثم نحسب الاستجابة المركبة ، وبعد ذلك نأخذ جزأها الحقيقي على أنه الاستجابة الطبيعية الحقيقية للإثارة الطبيعية الحقيقية. إن هذه تعتبر طريقة ملتوية لحل مشاكل الأنظمة ، ولكن نتيجة أن الدوال المميزة للأنظمة الحقيقية تكون أسساً مركبة وحيث إن الترميز المدمج الذي ينتج عند تطبيقها في تحليل الأنظمة ، فإنها تكون أحياناً طريقة أكثر كفاءة في التحليل عن الطرق المباشرة. هذه الفكرة الأساسية هي واحد من الأساسيات التي تعتمد عليها الطرق التحويلية وتطبيقاتها التي ستقدم في الفصل ٦ حتى الفصل ٩.

**مثال ٤,٧**

**استجابة مرشح RC منفذ للترددات المنخفضة لموجة مربعة باستخدام ماتلاب**

استخدم أساسيات التجميع لإيجاد استجابة مرشح RC منفذ للترددات المنخفضة لموجة مربعة تبدأ عند الزمن t=0. افترض الثابت الزمني RC=1 ms ، وافترض أن الزمن بين واحدة من الحواف الصاعدة للموجة المربعة والتالية لها يساوي 2ms ، وافترض أيضاً أن مقدار الموجة المربعة يساوي ١ فولت كما في شكل (٤,٢٤).




**شكل رقم (٤,٢٤) موجة مربعة تستخدم في إثارة المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة.**

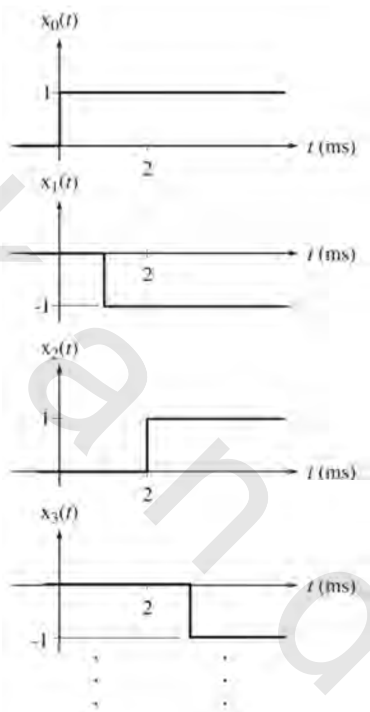
ليس هناك علاقة رياضية لاستجابة المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة للموجة المربعة ، ولكننا نعرف استجابته لوحدة الخطوة. يمكن تمثيل الموجة المربعة بمجموع بعض وحدات الخطوة السالبة والموجبة المزاحة زمنياً. ولذلك يمكن تمثيل x(t) تحليلياً بالعلاقة التالية :

$$x(t)= x_0(t)+x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)+\dots$$
$$x(t)=u(t)-u(t-0.001)+u(t-0.002)-u(t-0.003)+\dots$$

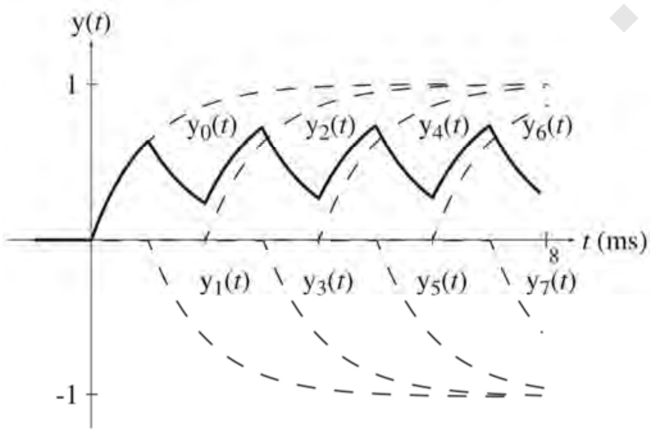
المرشح RC المنفذ للرددات المنخفضة هو نظام خطي ثابت زمنياً. ولذلك فإن استجابة هذا النظام ستساوي مجموع استجابات دوال الخطوة السابقة كل على حدة. الاستجابة لوحدة خطوة موجبة غير مزاحة تساوي $y_0(t)=(1-e^{-1000t})u(t)$. باستدعاء خاصية الثبات الزمني يمكننا كتابة ما يلي :

$$y_1(t)=-(1-e^{-1000(t-0.001)})u(t-0.001)$$
$$y_2(t)=(1-e^{-1000(t-0.002)})u(t-0.002)$$
$$y_3(t)=-(1-e^{-1000(t-0.003)})u(t-0.003)$$

وهكذا




**شكل رقم (٤,٢٥) وحدة الخطوة التي يمكن إضافتها لتشكل الموجة المربعة.**




**شكل رقم (٤,٢٦) استجابة المرشح للموجة المربعة**

باستدعاء خواص الخطية والتجميع يمكن كتابة ما يلي :

$$y(t)=y_0(t)+y_1(t)+y_2(t)+y_3(t)+\ldots$$

$$y(t)=(1-e^{-1000t})u(t)-(1-e^{-1000(t-0.001)})u(t-0.001)+(1-e^{-1000(t-0.002)})u(t-0.002)$$
$$(1-e^{-1000(t-0.003)})u(t-0.003)+\ldots$$

(انظر شكل (٤،٢٦))

نظرية التجميع تعتبر أساساً لطريقة قوية جداً لإيجاد استجابة النظام الخطي. الخواص البارزة للمعادلات التي تصف الأنظمة الخطية هي أن المتغير غير المستقل وتكاملاته وتفاضلاته تظهر في القوة أو الأس الأول فقط. لكي نوضح هذا القانون، افترض نظاماً تكون فيه الإثارة والاستجابة يتعلقان بالمعادلة التفاضلية $ay''(t)+by^2(t)=x(t)$ حيث $x(t)$ هي الإثارة و $y(t)$ هي الإثارة. إذا تغيرت $x(t)$ إلى $x_{new}(t)=x_1(t)+x_2(t)$، فإن المعادلة التفاضلية ستصبح $ay''_{new}(t)+by^2_{new}(t)=x_{new}(t)$. المعادلات التفاضلية لـ $x_1(t)$ و $x_2(t)$ كل منها تؤثر على حدة ستكون كما يلي :

$$ay''_1(t)+by_1^2(t)=x_1(t) \quad \text{و} \quad ay''_2(t)+by_2^2(t)=x_2(t)$$

مجموع هاتين المعادلتين يمكن كتابته كما يلي :

$$a\left[y''_1(t)+y''_2(t)\right]+b\left[y_1^2(t)+y_2^2(t)\right]=x_1(t)+x_2(t)=x_{new}(t)$$

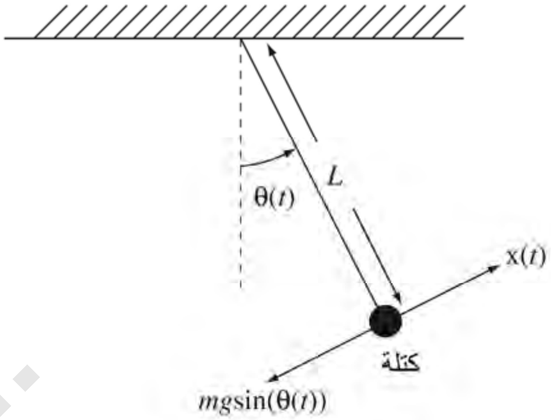
والتي لا تساوي على العموم للمعادلة التالية :

$$a[y_1(t)+y_2(t)]''+b[y_1(t)+y_2(t)]^2=x_1(t)+x_2(t)=x_{new}(t)$$

هذا الفرق سببه هو الحد $y^2(t)$ الذي لا يتطابق مع المعادلة التفاضلية التي تصف النظام. لذلك لا يمكن تطبيق نظرية التجميع في هذا النظام.

من الطرق الشائعة جداً في تحليل الإشارات والأنظمة استخدام طرق الأنظمة الخطية لتحليل الأنظمة غير الخطية. هذه العملية تسمى "جعل النظام خطيا". طبيعي، فإن هذا التحليل لن يكون دقيقاً؛ لأن النظام ليس خطياً في الحقيقة وعملية تحويله إلى نظام خطي لا تجعله خطياً بالضبط. بدلاً من ذلك، فإن عملية تحويل النظام غير الخطي إلى نظام خطي تستبدل المعادلات غير الخطية للنظام بمعادلات خطية تقريباً. يمكن تحليل العديد من الأنظمة غير الخطية بطريقة مفيدة باستخدام طرق الأنظمة الخطية إذا كانت إشارات الدخل والخرج صغيرة بما فيه الكفاية. كمثال على ذلك افترض البندول الموضح في شكل (٤،٢٧). افترض أن الكتلة مثبتة بحبل ليس له كتلة وصلب طوله L. إذا تم تطبيق قوة مقدارها $x(t)$ على الكتلة m، فإنها تستجيب عن طريق الحركة. الجمع الاتجاهي للقوى المؤثرة على الكتلة والمماسة لاتجاه الحركة تساوي حاصل ضرب الكتة والعجلة في الاتجاه نفسه. بمعنى، $x(t)-mg\sin(\theta(t))=mL\theta''(t)$ أو :

$$mL\theta''(t)+mg\sin(\theta(t))=x(t) \qquad \text{المعادلة رقم (٤،٨)}$$




**شكل رقم (٤,٢٧) البندول.**

حيث m هي الكتلة عند نهاية البندول، و x(t) هي القوة المطبقة على الكتلة والمماسة لاتجاه الحركة، و L هي طول البندول، و g هلي عجلة الجاذبية الأرضية، و θ(t) هي الموضع الزاوي للبندول. هذا النظام تمت إثارته بـ x(t) وكانت استجابته هي θ(t). المعادلة (٤,٨) هي معادلة غير خطية، ولكن إذا كانت θ(t) صغيرة بما فيه الكفاية، ففي هذه الحالة sin(θ(t)) يمكن تقريبها بقيمة θ(t).

$$mL\theta''(t)+mg\theta(t)\cong x(t)$$ المعادلة رقم (**٤,٩**)

حيث هذه تمثل معادلة خطية. وعلى ذلك فبالنسبة للاضطرابات الصغيرة حول موضع الاستقرار، فإن هذا النظام يمكن تحليله في العادة باستخدام المعادلة (٤.٩).

**الاستقرار**

في المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة، كانت إشارة الدخل هي خطوة جهد، وكانت محددة، مما يعنى أن قيمتها المطلقة كانت أقل من قيمة محددة B عند كل الأزمنة، أي أن $|x(t)|<B$ عند كل الأزمنة. استجابة المرشح RC لهذه الإشارة المحددة كانت أيضاً إشارة محددة.

| |
|---|
| أي نظام تكون استجابة الحالة صفر له محددة عند إثارته بأي إثارة محددة، يسمى نظاماً مستقرا محدد الدخل محدد الخرج bounded input bounded output, BIBO. |

أكثر أنواع الأنظمة شيوعاً التي تتم دراستها في الإشارات والأنظمة هي الأنظمة التي تكون علاقة خرجها بدخلها هي معادلة تفاضلية، خطية، ذات معاملات ثابتة. المعادلة المميزة للمعادلات التفاضلية من هذا النوع تكون

أسية مركبة. ولذلك فإن الحل المتجانس يكون في صورة مجموعة من الأسس المركبة الخطية. سلوك كل واحد من هذه الأسس المركبة يتم تحديده عن طريق القيم المميزة المصاحبة له. كل واحد من هذه الأسس المركبة يكون على الصورة $e^{st}=e^{\sigma t}e^{jwt}$ حيث $s=\sigma+jw$ هي القيمة المميزة، و $\sigma$ هي الجزء الحقيقي و $w$ هي الجزء التخيلي لها. الكمية $e^{jwt}$ مقدارها يكون واحداً عند جميع الأزمنة. والكمية $e^{\sigma t}$ يتناقص مقدارها مع زيادة الزمن في الاتجاه الموجب إذا كانت $\sigma$ سالبة ويزداد مقدارها إذا كانت $\sigma$ موجبة. إذا كانت $\sigma$ تساوي صفراً، فإن الكمية $e^{\sigma t}$ تساوي واحداً. إذا كان الأس يتزايد مع الزمن، فإن النظام يكون غير مستقر؛ لأنه لن يكون هناك حدا يمكن وضعه على استجابة النظام. إذا كانت $\sigma=0$، فإنه يمكن أن يكون هناك دخل محدود يجعل إشارة الخرج تزداد بدون حدود. إشارة الدخل التي يكون لها شكل الحل المتجانس للمعادلة التفاضلية نفسه (الذي يكون محدوداً إذا الجزء الحقيقي من القيمة المميزة يساوي صفراً) سيعطي استجابة غير محدودة (انظر مثال ٤.٨).

| |
|---|
| لأي نظام LTI مستمر زمنياً موصوف بمعادلة تفاضلية محددة، إذا كان الجزء الحقيقي لأي قيمة مميزة أكبر من أو يساوي صفر (غير سالب)، فإن هذا النظام سيكون غير مستقر. |

**مثال ٤.٨**

**إيجاد الإثارة المحددة التي تعطي استجابة غير محدودة**

افترض المكامل المحدد بالمعادلة $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$. احسب القيم المميزة لحل هذه المعادلة واحسب الإثارة المحددة التي ستنتج استجابة غير محددة.

بتطبيق معادلة ليبنيز Leibniz لتفاضل التكاملات التي من هذا النوع، فإنه بتفاضل الطرفين يمكن تكوين المعادلة التفاضلية $y'(t)=x(t)$. تعتبر هذه المعادلة معادلة تفاضلية بسيطة بقيمة مميزة واحدة والحل المتجانس يكون ثابتاً لأن القيمة المميزة تساوي صفر. لذلك فإن هذا النظام يكون غير مستقر. الإثارة المحددة التي يكون لها نفس شكل الحل المتجانس ستنتج استجابة غير محددة. في هذه الحالة، فإن الإثارة الثابتة ستنتج استجابة غير محددة. حيث أن الاستجابة هي تكامل الإثارة، فإنه يجب أن يكون واضحا أنه مع تقدم الزمن، فإن مقدار الاستجابة للإثارة الثابتة تتزايد خطياً بدون نهاية محددة.

**السببية**

نلاحظ في تحليل الأنظمة التي افترضناها حتى الآن، أن كل نظام يستجيب فقط أثناء أو بعد أن تتم إثارته، وهذا يجب أن يبدو منطقياً وطبيعياً. كيف يمكن لنظام أن يستجيب قبل إثارته ؟ إن ذلك يبدو منطقيا؛ لأننا نعيش في عالم طبيعي تكون فيه الأنظمة الطبيعية الحقيقية تستجيب عادة بينما أو بعد أن تتم إثارتها. ولكن، كما سنكتشف

فيما بعد عند افتراض المرشحات المثالية (في الفصل ١١)، فإن بعض طرق تصميم الأنظمة من الممكن أن تؤدي إلى نظام يستجيب قبل أن تتم إثارته، وهذا النظام لا يمكن بناؤه في الطبيعة.

إن حقيقة أن استجابة النظام الحقيقي تحدث بينما، أو بعد، أن تتم إثارته هي من فكرة التأثير والسبب التي هي من أساسيات المنطق السليم. أي تأثير لا بد له من سبب، وهذا التأثير يحدث أثناء أو بعد تطبيق السبب.

| |
|---|
| أي نظام تكون استجابته للحالة صفر تحدث فقط أثناء أو بعد إثارته يسمى نظاماً سببياً. |

كل الأنظمة الحقيقية الطبيعية تكون أنظمة سببية؛ لأنها لا تستطيع أن تنظر في المستقبل وتستجيب قبل أن تتم إثارتها.

إن المصطلح سببي causal يتم تطبيقه عامة على الإشارات. الإشارة السببية هي إشارة تكون صفراً قبل الزمن t=0. إن هذا المصطلح يأتي من حقيقة أنه إذا تم تطبيق إشارة تساوي صفراً قبل الزمن t=0 على نظام سببي، فإن الاستجابة تكون صفراً أيضاً قبل الزمن t=0. بهذا التعريف، فإن الاستجابة ستكون إشارة سببية لأنها تمثل استجابة نظام سببي لإثارة سببية. المصطلح "عكس سببي" يتم استخدامه أحيانا لوصف الإشارات التي تكون صفر بعد الزمن t=0.

توجد في العادة في تحليل الإشارات والأنظمة ما يسمى أو ما يطلق عليه الاستجابة المعززة. واحدة من الحالات الشائعة هي التي تكون فيها إشارة الدخل دورية. الإشارة الدورية ليست لها بداية محددة، لأنه إذا كانت الإشارة x(t) دورية، فإن ذلك يعنى أن x(t)=x(t+nT)، حيث T هي الدورة و n رقم صحيح. مهما كان الزمن السابق الذي ننظر من خلاله، فإن الإشارة تكرر نفسها دورياً. لذلك، فإن العلاقة بين إشارة الدخل الدورية والاستجابة المعززة لأي نظام LTI (التي تكون أيضاً دورية، بالدورة نفسها)، لا يمكن استخدامها لتحديد إذا كان النظام سببياً أم لا. لذلك، فإن النظام يجب أن تتم إثارته عن طريق إشارة اختبار يكون لها زمن محدد تكون صفراً قبله وهذا في تحليل الأنظمة بغرض السببية. إحدى الإشارات البسيطة لاختبار الأنظمة LTI بغرض السببية من الممكن تكون وحدة الصدمة δ(t). إنها تساوي صفراً قبل t=0 وتساوي صفراً بعد t=0. إذا كانت استجابة الحالة صفر للنظام لوحدة صدمة تحدث عند t=0 لا تساوي صفراً قبل t=0، فإن هذا النظام لا يكون سببياً. الفصل ٥ يقدم طرقاً لتحديد كيف يستجيب نظام LTI للصدمات.

**الذاكرة**

استجابات الأنظمة التي تعاملنا معها حتى الآن تعتمد فقط على الإثارات الحاضرة والماضية. في حالة المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة، تتحدد الشحنة على المكثف عن طريق التيار الذي مر خلال هذا المكثف في

الماضى. بهذه الآلية فإن المرشح يتذكر بعضاً من ماضيه. الاستجابة الحالية لهذا النظام ستعتمد على هذه الإثارة الماضية أو السابقة، وهذه الذاكرة، بجانب الإثارة الحالية، تحددان الاستجابة الحاضرة للنظام.

> إذا كانت استجابة حالة صفراً لأي نظام عند أي زمن اختياري تعتمد على الإثارة المطبقة عليه عند أي أزمنة ماضية، فإن هذا النظام يكون له ذاكرة، ويكون هذا النظام نظاماً ديناميكياً.

هناك أنظمة تعتمد استجابتها الحالية على القيمة الحالية فقط للإثارة. مقسم الجهد باستخدام المقاومات يعتبر مثالاً جيداً لهذه الأنظمة كما في شكل (٤,٢٨).

**شكل (٤,٢٨) مقسم جهد باستخدام المقاومات**

$$v_o(t) = \frac{R_2}{R_1+R_2} v_i(t)$$

> إذا كانت استجابة أي نظام عند أي زمن اختياري تعتمد فقط على الإثارة عند الزمن نفس ه، فإن هذا النظام ليس له ذاكرة، وهذا النظام يكون نظام ساكن أو إستاتيكياً.

إن مفاهيم السببية والذاكرة تتعلق ببعضها بعضا. جميع الأنظمة الساكنة تعتبر سببية. يمكن عمل اختبار للذاكرة بنوع الإشارة نفسها التي تستخدم في اختبار السببية، وهي وحدة الصدمة. إذا كانت استجابة أي نظام LTI لوحدة الصدمة $\delta(t)$ لا تساوي صفر عند أي زمن مختلف عن الزمن $t=0$، فإن هذا النظام تكون له ذاكرة.

**عدم الخطية الساكنة**

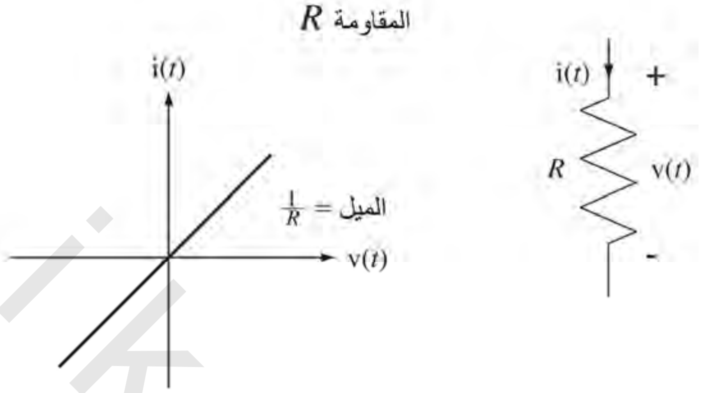
لقد رأينا مسبقاً مثالاً على نظام خطي، باستجابة لا تساوي صفراً، لدخل يساوي صفراً. هذا النظام غير خطي؛ لأنه ليس متجانساً. عدم الخطية هذه ليست نتيجة ضمنية أو جوهرية لعدم خطية المكونات نفسها، ولكنها بدلا من ذلك تكون نتيجة لحقيقة أن الاستجابة للدخل الصفري للنظام تكون غير مساوية للصفر.

المعنى الأكثر شيوعاً للمصطلح نظام غير خطي عملياً هو أنه، حتى عندما تكون استجابته للدخل الصفري تساوي صفراً، فإن إشارة الخرج تكون دالة غير خطية في إشارة الدخل. إن ذلك يكون غالباً نتيجة المكونات في النظام التي لها عدم خطية ساكنة. النظام غير الخطي إستاتيكياً هو النظام الذي لا تكون له ذاكرة والعلاقة بين خرجه ودخله تكون دالة غير خطية. من أمثلة المكونات غير الخطية إستاتيكياً الدايودات، والترانزستورات، وكاشفات قانون التربيع. هذه المكونات تكون غير خطية؛ لأنه إذا تغيرت إشارة الدخل بمعامل معين، فإن إشارة الخرج تتغير بمعامل مختلف.

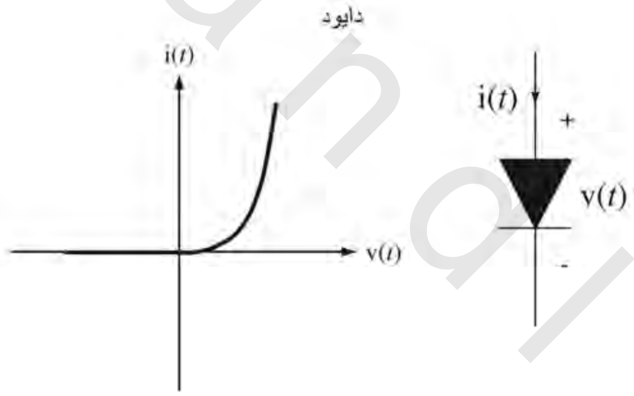
الفرق بين المكونات الخطية وغير الخطية من هذا النوع يمكن توضيحها عن طريق رسم العلاقة بين إشارتي الخرج والدخل. بالنسبة للمقاومة، التي هي نظام ساكن أو استاتيكي، فإن العلاقة تتحدد بقانون أوم:

$$v(t)=Ri(t)$$

حيث العلاقة بين الجهد والتيار تكون خطية كما في شكل (٤,٢٩).



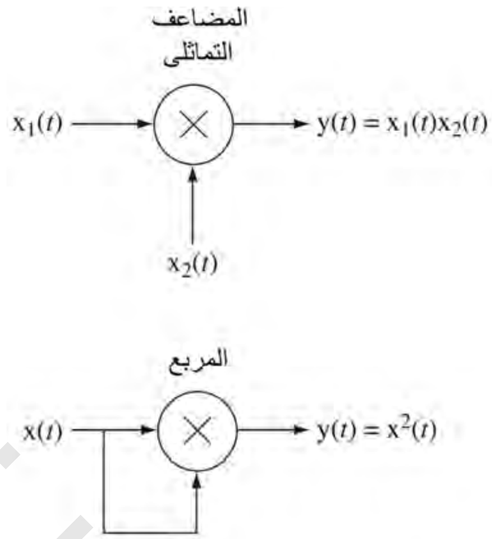

**شكل رقم (٤,٢٩) علاقة الجهد بالتيار للمقاومة.**




**شكل رقم (٤,٣٠) علاقة الجهد بالتيار لدايود (صمام ثنائي)عند درجة حرارة ثابتة.**

يعتبر الدايود (الصمام الثنائي) مثالاً جيداً للمكونات غير الخطية إستاتيكياً. علاقة الجهد بالتيار للدايود (الصمام الثنائي) تكون على الصورة $i(t)=I_s(e^{qv(t)/kt}-1)$، حيث $I_s$ هي تيار التشبع العكسي، و $q$ هي شحنة الإلكترون، و $k$ هو ثابت بولتزمان، و $T$ هي درجة المطلقة، كما هو موضح في شكل (٤,٣٠).

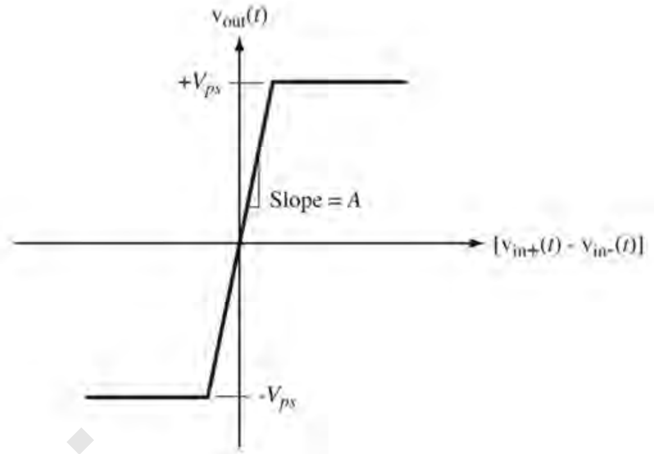
مثال آخر على المكونات غير الخطية إستاتيكياً هو المضاعف التماثلي الذي يستخدم في التربيع. المضاعف التماثلي له دخلين وخرج واحد، وإشارة الخرج تساوي حاصل ضرب الإشارتين المطبقين على الدخلين. هذا النظام ليس له ذاكرة، أي أنه إستاتيكي، لأن إشارة الخرج الحالي تعتمد فقط على إشارة الدخل الحالي كما في شكل (٤,٣١).




**شكل (٤,٣١) مضاعف ومربع تماثلي.**

إشارة الخرج $y(t)$ تساوي حاصل ضرب إشارتي الدخل $x_1(t)$ و $x_2(t)$. إذا كانت كل من $x_1(t)$ و $x_2(t)$ يمثلان الإشارة نفسها $x(t)$ ، فإن $y(t)=x^2(t)$. هذه العلاقة تمثل علاقة غير خطية إستاتيكياً لأنه إذا تم ضرب الدخل في معامل معين A ، فإن الاستجابة سيتم ضربها في المعامل $A^2$ ، مما يجعل النظام غير متجانس.

من الأمثلة الشائعة جداً على عدم الخطية الإستاتيكية هي ظاهرة التشبع في مكبر العمليات الحقيقي، بالمقابلة مع المكبر المثالي. مكبر العمليات له دخلان، الدخل العكس والدخل غير العاكس، والخرج. عند تطبيق إشارات الجهد على الدخلين، فإن جهد الخرج لمكبر العمليات يساوي مضاعفاً ثابتاً للفرق بين جهدي إشارتي الدخل، حتى نقطة معينة. بالنسبة للفروق البسيطة، فإن العلاقة $v_{out}(t)=A[v_{in+}(t)-v_{in-}(t)]$. ولكن إشارة جهد الخرج تكون مقيدة بطاقة مصدر الجهد ويمكنها فقط الاقتراب من هذه القيمة للجهد؛ ولا يمكن أن تزيد عليها. ولذلك، إذا كان الفرق بين إشارتي جهد الدخل كبيراً بدرجة كافية تجعل إشارة جهد الخرج المحسوبة من المعادلة: $v_{out}(t)=A[v_{in+}(t)-v_{in-}(t)]$ خارج الحدود $-V_{ps}$ حتى $+V_{ps}$ (حيث ps تعني مصدر القدرة power supply)، حيث سيتشبع مكبر العمليات، وسيكون خرج المكبر مساوياً لهذه القيمة ولن يتعداها. عندما يكون مكبر العمليات متشبعاً، تصبح العلاقة بين إشارتي الخرج والدخل غير خطية إستاتيكياً، وهذا موضح في شكل (٤,٣٢).




**شكل (٤,٣٢) علاقة الخرج مع الدخل لمكبر عمليات متشبع.**

حتى وإن كان أي نظام غير خطي إستاتيكياً، فإن الطرق الخطية لتحليل الأنظمة من الممكن أن تكون مازالت مفيدة في تحليل هذه الأنظمة. انظر إلى ملحق الويب (ت) لمثال على استخدام الأنظمة الخطية من أجل التحليل التقريبي للأنظمة غير الخطية.

**الانعكاسية invertibility**

يتم في العادة حساب استجابة الحالة صفراً عند تحليل الأنظمة بمعلومية إثارة معينة. ولكننا أحياناً نوجد الإثارة بمعلومية استجابة الحالة صفر، إذا كان النظام قابل للانعكاس.

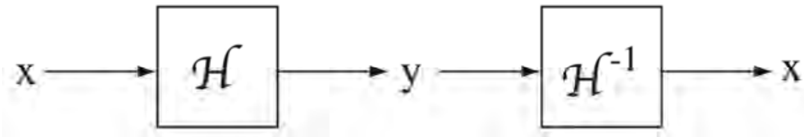
| |
|---|
| يطلق على أي نظام بأنه انعكاسي إذا كانت كل إثارة وحيدة تعطي استجابة حالة صفر وحيدة. |

إذا كان أي دخل محدد يعطي استجابة وحيدة للحالة صفر، فإنه من الممكن، من حيث المبدأ على الأقل، أنه بمعلومية استجابة الحالة صفر، أن يتم ربط هذه الاستجابة بالإثارة التي أنتجتها. وهناك العديد من الأنظمة العملية التي تعتبر انعكاسية.

هناك طريقة أخرى لوصف الأنظمة الانعكاسية وهي أن نقول أنه إذا كان أي نظام انعكاسيا فإنه يوجد نظام عكسي بحيث أنه عند تغذية هذا النظام العكسي باستجابة النظام الأول، فإنه يعطي إثارة هذا النظام نفسها كما في شكل (٤,٣٣).

مثال على الأنظمة الانعكاسية هو أي نظام يمكن وصفه بمعادلة تفاضلية، خطية، وثابتة زمنياً، وذات معاملات ثابتة على الصورة التالية:

$$A_k y^{(k)}(t)+a_{k-1}y^{(k-1)}(t)+ \ldots + a_1 y'(t)+a_0 y(t) = x(t)$$




**شكل رقم (٤،٣٣) نظام متبوع بنظام آخر عكسي له.**

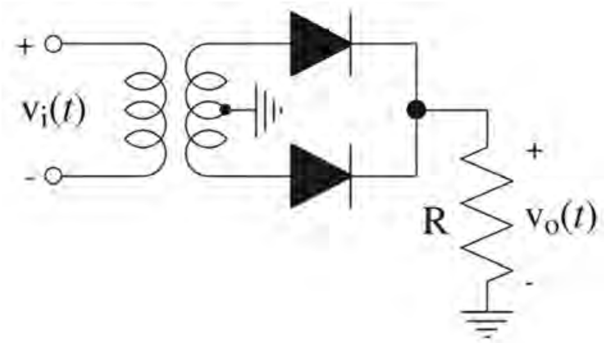
إذا كانت الاستجابة $y(t)$ معروفة، فإنه بالتالي تكون كل تفاضلاتها معلومة. المعادلة السابقة توضح تماماً كيفية حساب الإثارة كتجميع خطي للاستجابة $y(t)$ وتفاضلاتها.

مثال على نظام ليس انعكاسياً هو النظام الاستاتيكي الذي تكون علاقة خرجه بدخله كما يلي :

$$y(t)=\sin(x(t)) \qquad \text{المعادلة رقم (٤،١٠)}$$

يمكن في هذا النظام حساب استجابة الحالة صفر لأي دخل $x(t)$، ولذلك فإنه يمكن بمعرفة أي استجابة وحيدة تحديد استجابة الحالة صفر. ولكن إذا حاولنا إيجاد الإثارة، بمعلومية الاستجابة، عن طريق إعادة كتابة المعاددلة (٤،١٠) على الصورة $x(t)=\sin^{-1}(y(t))$، فإننا سنواجه مشكلة، وهي أن دالة الجيب العكسية متعددة القيم، ولذلك فإنه بمعلومية استجابة الحالة صفر لن يمكن التحديد الأوحد للإثارة. لذلك فإن النظام لا يتبع أساسيات الانعكاسية بسبب أن الإثارات المختلفة يمكنها أن تنتج الاستجابة نفسها. إذا كان عندما $t=t_0$ كانت الإثارة $x(t_0)=\pi/4$، فإن الخرج سيكون $y(t_0)=\sqrt{2}/2$. ولكن إذا كان عندما $t=t_0$ كانت الإثارة $x(t_0)=3\pi/4$، فإن الاستجابة $y(t_0)$ ستكون القيمة $y(t_0)=\sqrt{2}/2$ نفسها، ولذلك فإنه بملاحظة استجابة الحالة صفر فقط، فلن تكون لدينا أي فكرة عن أي الإثارات قد تسببت في هذه الاستجابة.

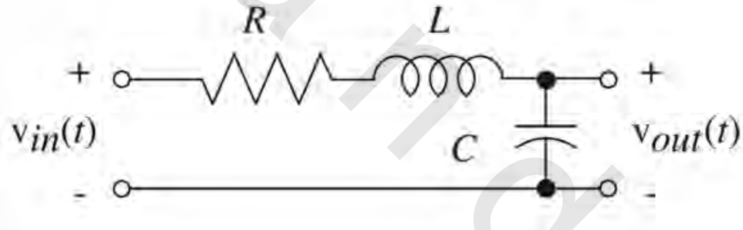
مثال آخر على الأنظمة غير الانعكاسية، هو النظام المعروف لمصممي الدوائر الإلكترونية، وهو موحد الموجة الكاملة كما في شكل (٤،٣٤). افترض أن المحول مثالياً، ونسبة اللف له هي 1:2، وأن الدايودات (الصمامات الثنائية) أيضاً مثالية بحيث لا يوجد فرق جهد خلال الدايود (الصمام الثنائي) عندما يكون منحازا في الاتجاه الأمامي والتيار المار خلالها في الانحياز العكسي يساوي صفراً. وعلى ذلك فإن علاقة إشارة جهد الخرج $v_o(t)$ وجهد الدخل $v_i(t)$ ستكون على الصورة $v_o(t)=|v_i(t)|$. افترض أنه عند زمن معين كانت إشارة جهد الخرج تساوي $+1V$ فإن جهد الدخل عند هذا الزمن ستكون $+1V$ أو $-1V$. لا توجد طريقة لمعرفة أي واحدة من إشاراتي جهد الدخل ستكون هي الإثارة عن طريق ملاحظة إشارة الخرج، ولذلك فلن يمكننا التأكد من التشكيل الصحيح للدخل المقابل لهذه الاستجابة، ولذلك فإن هذا النظام ليس انعكاسياً.




**شكل رقم (٤,٣٤) موحد الموجة الكاملة.**

**ديناميكية أنظمة الدرجة الثانية**

أنظمة الدرجة الأولى والثانية هي أكثر أنواع الأنظمة شيوعاً في تحليل وتصميم الأنظمة. أنظمة الدرجة الأولى يتم وصفها بمعادلات تفاضلية من الدرجة الأولى، وأنظمة الدرجة الثانية يتم وصفها بمعادلات تفاضلية من الدرجة الثانية. لقد رأينا أمثلة على أنظمة الدرجة الأولى. كمثال على أنظمة الدرجة الثانية سنعتبر دائرة RLC التي تتم إثارتها بوحدة خطوة كما في شكل (٤,٣٥).




**شكل رقم (٤,٣٥) دائرة RLC.**

مجموع الجهود حول الحلقة يمكن كتابته كما يلي:

$$LC\, v''_{out}(t)+RC\, v'_{out}(t)+v_{out}(t)= Au(t)$$ المعادلة رقم (٤,١١)

والحل لهذه المعادلة لإيجاد جهد الخرج سيكون على الصورة:

$$v_{out}(t) = K_1 e^{\left(-\frac{R}{2L}+\sqrt{(R/2L)^2-1/LC}\right)t} + K_2 e^{\left(-\frac{R}{2L}-\sqrt{(R/2L)^2-1/LC}\right)t} + A$$

وكل من $K_1$ و $K_2$ ثوابت اختيارية.

كما نرى فهذا الحل أكثر تعقيداً من حل معادلة المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة. هناك كميتان أسيتان، كل منهما به كمية أسية أكثر تعقيداً. يشتمل الأس على جذر تربيعي من الممكن أن يكون سالبا، ولذلك فإن الكمية الأسية من الممكن أن تكون كمية مركبة. لهذا السبب، فإن الدالة المميزة $e^{st}$ تسمى أساً مميزاً. إن حل المعادلة التفاضلية ذات المعاملات الثابتة يكون في الغالب مجموعاً خطياً من الأسس المركبة.

في دائرة ال RLC ، إذا كانت هذه الأسس حقيقية ، فإن الاستجابة تكون حقيقة مجموع اثنين من الأسس الحقيقية. الحالة الأكثر إثارة هي الأسس المركبة. هذه الأسس تكون مركبة إذا كان :

$$(R/2L)^2 - 1/LC < 0$$ المعادلة رقم (٤,١٢)

في هذه الحالة يمكن كتابة الحل بدلالة اثنين من المعاملات القياسية لأنظمة الدرجة الثانية وهما ، التردد الزاوي الطبيعي $\omega_n$ ومعامل الكبح $\alpha$ كما يلي :

$$v_{out}(t) = K_1 e^{\left(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_n^2}\right)t} + K_2 e^{\left(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_n^2}\right)t} + A$$ المعادلة رقم (٤,١٣)

حيث $\omega_n^2 = 1/LC$ و $\alpha = R/2L$

هناك معاملان آخران واسعا الاستخدام في أنظمة الدرجة الثانية ، وهما متعلقان بكل من $\omega_n$ و $\alpha$ ، إنهما التردد الزاوي الحرج $\omega_c$ ، ونسبة الكبح $\zeta$. إنهما يحددان بالعلاقتين $\zeta=\alpha/\omega_n$ و $\omega_c = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$. وعلى ذلك يمكننا كتابة ما يلي :

$$v_{out}(t) = K_1 e^{\left(-\alpha+\omega_n\sqrt{\zeta^1-1}\right)t} + K_2 e^{\left(-\alpha-\omega_n\sqrt{\zeta^1-1}\right)t} + A$$

عندما تتحقق شروط المعادلة (٤,١٢)، فإن هذا النظام يعرف بأنه نظام تحت الكبح ويمكن كتابة الاستجابة في هذه الحالة كما يلي :

$$v_{out}(t) = K_1 e^{(-\alpha+j\omega_c)t} + K_2 e^{(-\alpha-j\omega_c)t} + A$$

كما نرى فإن الأسس يكون كل منها المرافق المركب للآخر كما يجب أن يكون $v_{out}(t)$ لكي يكون دالة ذات قيم حقيقية.

بفرض أن الدائرة كانت في البداية في حالتها الصفرية وبتطبيق الشروط الأولية ، فإن إشارة جهد الخرج ستكون :

$$v_{out}(t) = A\left[\frac{1}{2}\left(-1+j\frac{\alpha}{\omega_c}\right)e^{(-\alpha+j\omega_c)t} + \frac{1}{2}\left(-1-j\frac{\alpha}{\omega_c}\right)e^{(-\alpha-j\omega_c)t} + 1\right]$$

هذه الاستجابة تعبر عن استجابة مركبة لنظام حقيقي مع إثارة حقيقية ، ولكن على الرغم من أن المعاملات والأسس تكون مركبة ، إلا أن الحل الكلي يكون حقيقياً ؛ لأنه باستخدام العلاقات المثلثية يمكن كتابة إشارة جهد الخرج كما يلي :

$$v_{out}(t) = A\{1 - e^{-\alpha t}[(\alpha/\omega_c)\sin(\omega_c t) + \cos(\omega_c t)]\}$$

هذا الحل هو في الحقيقة دالة جيب متناقصة ، أي دالة جيب مضروبة في أس متناقص. يمثل التردد الطبيعي $f_n=\omega_n/2\pi$ التردد الذي ستتذبذب عنده الاستجابة الجهدية إذا كان معامل الكبح سيساوي صفراً. المعدل الذي ستتناقص معه دالة الجيب يتم تحديدة بمعامل التناقص أو الكبح $\alpha$. أي نظام يتم وصفه عن طريق معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثانية يمكن تحليله بطريقة أو خطوات مماثلة.

**الإثارة الجيبية المركبة**

تعتبر أنظمة LTI المثارة بإشارة جيبية مركبة حالة خاصة مهمة لتحليل الأنظمة الخطية. افترض أن إشارة جهد الدخل لدائرة RLC هي $v_{in}(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$. من المهم أن نفهم أن $v_{in}(t)$ يتم وصفها تماما عند كل الأزمنة. إنها لا تكون دالة جيبية مركبة من الآن أو من هذه اللحظة فقط بل إنها دائما جيبية مركبة عند كل الأزمنة. حيث إن هذه الإشارة تبدأ عند زمن لا نهائي في الماضي، وعلى ذلك فأي تغيرات وقتية قد تكون حدثت من المفروض أنها تكون قد ماتت (إذا كان النظام مستقراً، كما هو الحال في دائرة RLC). ولذلك فإن الحل الذي سيكون متبقيا عند هذه اللحظة سيكون هو الاستجابة المعززة. الاستجابة المعززة هي الحل الخاص للمعادلة التفاضلية التي تصف النظام. حيث إن كل تفاضلات الجيب المركب تكون أيضاً جيباً مركباً، فإن الحل الخاص للدخل $v_{in}(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$ سيكون $v_{out,p}(t) = Be^{j2\pi f_0 t}$ حيث B لم يتم تحديدها حتى الآن. لذلك فإنه إذا تمت إثارة هذا النظام ال LTI عن طريق دالة جيبية مركبة، فإن الاستجابة ستكون أيضاً دالة جيبية مركبة لها التردد نفسه، ولكن بثابت ضرب مختلف (عموما). أي نظام LTI تتم إثارته بدالة جيبية مركبة، فإن الاستجابة ستكون أيضاً دالة مركبة لها نفس التردد، ولكن لها ثابت ضرب مختلف عموماً. أي نظام LTI تتم إثارته بدالة جيبية مركبة يستجيب بدالة جيبية لها الأس المركب نفسه بنفس شكل الدالة، فيما عدا الضرب في ثابت مركب.

الحل المعزز يمكن إيجاده عن طريق المعاملات غير المحددة. بتعويض شكل الحل في المعادلة التفاضلية (٤,١١) نحصل على:

$$(j2\pi f_0)^2 LCBe^{j2\pi f_0 t} + j2\pi f_0 RCBe^{j2\pi f_0 t} + Be^{j2\pi f_0 t} = Ae^{j2\pi f_0 t}$$

بحل هذه المعادلة نحصل على:

$$B = \frac{A}{(j2\pi f_0)^2 LC + j2\pi f_0 RC + 1}$$

باستخدام نظرية التجميع لأنظمة ال LTI، فإنه إذا كان الدخل أي دالة اختيارية هي مجموع خطي من الجيوب المركبة التي لها ترددات مختلفة، فإن إشارة الخرج ستكون أيضاً مجموعا مركبا من الجيوب المركبة التي لها الترددات نفسها. هذه الفكرة هي الأساس لطرق التحليل باستخدام تتابعات فورير وتحويل فورير التي ستقدم في الفصل ٦ والفصل ٧ التي تعبر عن الدوال الاختيارية بمجموع مركب من الجيوب المركبة.

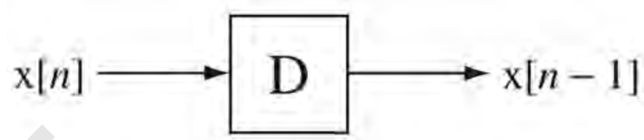
## (٤,٣) أنظمة الزمن المتقطع

**نمذجة الأنظمة**

**المخطط الصندوقي**

عند رسم المخطط الصندوقي لأنظمة الزمن المتقطع ستكون هناك بعض العمليات التي تظهر دائماً ولذلك تم تخصيص رموز المخطط الصندوقي الخاص بها تماماً مثلما هو الحال في أنظمة الزمن المستمر. المكونات الثلاثة

الأساسية في أي نظام في الزمن المتقطع هي المكبر، ونقطة التجميع ، والتأخير. المكبر ونقطة التجميع تؤديان الدور نفسه في الأنظمة المتقطعة زمنياً الذي تلعبه في الأنظمة المستمرة زمنياً. بلوك التأخير يتم إثارته بإشارة متقطعة زمنياً وهو يستجيب بالإشارة نفسها ، فيما عدا أنها تكون متأخرة بوحدة زمنية واحدة من وحدات الزمن المتقطع كما في شكل (٤,٣٦). إن هذا الرمز الأكثر شيوعاً ولكن أحياناً يتم استبدال ال D بـ S التي تعني shift أو إزاحة.




**شكل رقم (٤,٣٦) رمز البلوك المستخدم في رسم التأخير في الزمن المتقطع.**

**المعادلة الفرقية**

سنعرض فيما يلي بعض الأمثلة على الأفكار المشتملة على أنظمة الزمن المتقطع. ثلاثة من هذه الأنظمة تم تقديمها في الفصل ١.

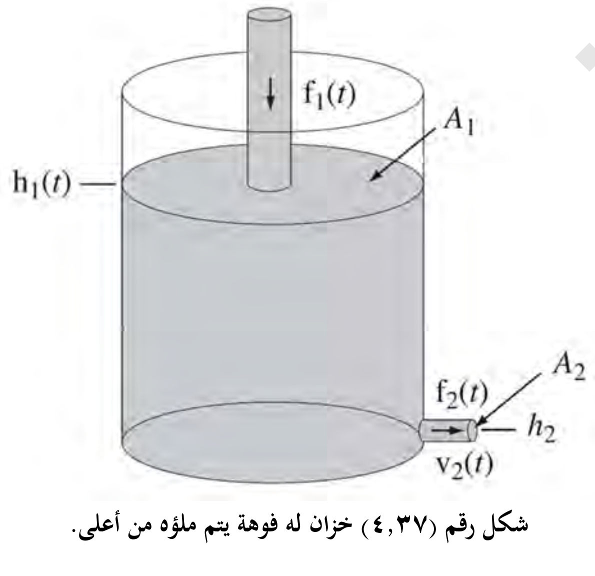
**مثال ٤,٩**

**النمذجة التقريبية لنظام زمن مستمر باستخدام نظام زمن متقطع**

واحد من استخدامات أنظمة الزمن المتقطع هو في نمذجة الأنظمة غير الخطية المستمرة زمنياً مثل: نظام ميكانيكا الموائع الموضح في شكل (٤,٣٧). إن حقيقة أن المعادلة التفاضلية التالية :

$$A_1 \frac{d}{dt}\left(h_1(t)\right) + A_2\sqrt{2g[h_1(t) - h_2]} = f_1(t)$$

(معادلة تورشيللي) تكون معادلة غير خطية يجعل من الصعب حلها عن المعادلات التفاضلية الخطية.




**شكل رقم (٤,٣٧) خزان له فوهة يتم ملؤه من أعلى.**

واحد من الطرق لإيجاد حل لهذه المعادلة يكون باستخدام الطرق العددية. يمكننا تقريب التفاضل بالتفاضل المحدود:

$$\frac{d}{dt}(h_1(t)) = \frac{h_1((n+1)T_s) - h_1(nT_s)}{T_s}$$

حيث Ts هي فترة زمنية محددة بين قيم $h_1$ عند نقط منتظمة الفواصل الزمنية، و n تشير إلى هذه النقط. وعلى ذلك يمكن تقريب معادلة تورشيللي عند هذه النقط الزمنية كما يلي:

$$A_1 \frac{h_1\big((n+1)Ts) - h_1(nTs)\big)}{Ts} + A_2\sqrt{2g[h_1(nTs) - h_2]} \cong f_1(nTs)$$

التي يمكن إعادة كتابتها كما يلي:

$$h_1((n+1)T_s) \cong \frac{1}{A_1}\{T_s f_1(nT_s) + A_1 h_1(nT_s) - A_2 T_s\sqrt{2g[h_1(nT_s) - h_2]}\}$$ المعادلة رقم (٤)

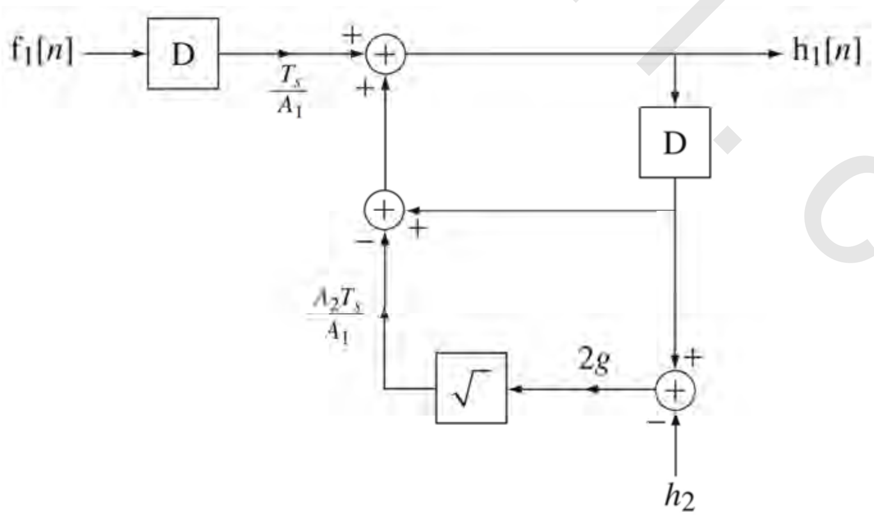
والتي تعبر عن قيم $h_1$ عند النقطة الزمنية التالية n+1 بدلالة القيم $f_1$ عند النقطة الزمنية الحالية n و $h_1$ عند النقطة الزمنية الحالية أيضاً. يمكن كتابة المعادلة (٤،١٤) في صورة مبسطة في الزمن المتقطع كما يلي:

$$h_1[n+1] \cong \frac{1}{A_1}\left\{T_s f_1[n] + A_1 h_1[n] - A_2 T_s\sqrt{2g(h_1[n] - h_2}\right\}$$

أو استبدال n بـ n.1 كما في المعادلة التالية:

$$h_1[n] \cong \frac{1}{A_1}\{T_s f_1[n-1] + A_1 h_1[n-1] - A_2 T_s\sqrt{2g(h_1[n-1] - h_2}\}$$ المعادلة رقم (٤،١٥)

في المعادلة (٤،١٥) بمعلومية قيمة $h_1$ عند أي n يمكننا أن نوجد (تقريباً) قيمتها عند أي n أخرى. هذا التقريب يكون أفضل عن طريق تصغير Ts. إن ذلك يعتبر مثالاً على حل مسألة مستمرة زمنياً باستخدام طريقة متقطعة زمنياً. حيث إن المعادلة (٤،١٥) تمثل معادلة فرقية فإنها تحدد أو تعرف نظاماً متقطعاً زمنياً كما في شكل (٤،٣٨).




**شكل رقم (٤،٣٨) نظام يوضح الحل التقريبي العددي للمعادلة التفاضلية لتدفق المائع.**

يوضح شكل (٤,٣٩) أمثلة عددية لحل معادلة تورشيللي باستخدام النظام المتقطع زمنياً في شكل (٤,٣٨) لثلاثة من معدلات أخذ العينات المختلفة وهي 100 ثانية، و 500 ثانية، و 1000 ثانية. النتيجة عندما Ts=100 دقيقة إلى حد كبير. النتيجة عند Ts=500 تسلك العام الصحيح وتقترب من القيمة النهائية الصحيحة، ولكنها تصل للقيمة النهائية مبكراً. النتيجة عند Ts=1000 لها شكل خاطىء تماماً، على الرغم من أنها تقترب من الحل النهائي الصحيح. إن اختيار قيم زمن أخذ العينات الكبيرة جداً التي تجعل الحل غير صحيح، في بعض الأحوال، من الممكن أن تجعل الخواريزم الرقمي غير مستقر.

البرنامج التالي بشفرات الماتلاب يحاكي النظام الموضح في شكل (٤,٣٨) المستخدم في حل المعادلة التفاضلية التي تصف نظام الخزان ذا الفوهة :

% g = 9.8 ; عجلة الجاذبية الأرضية.

% A1 = 1 ; مساحة السطح الحر للماء في الخزان.

% A2 = 0.0005 ; المساحة الفعالة للفوهة.

% h1 = 0 ; ارتفاع السطح الحر للماء في الخزان.

% h2 = 0 ; ارتفاع الفوهة.

% f1 = 0.004 ; التدفق الحجمي للماء.

% Ts = [100,500,1000] ; متجه النقط الزمنية.

% N = round(8000./Ts) ; متجه عدد الخطوات الزمنية.

% for m = 1:length(Ts), المرور خلال المقاطع الزمنية.

% h1 = 0 ; ابدأ من الصفر.

% h = h1 ; أول قيمة في متجه ارتفاع الماء.

%المرور على عدد المقاطع الزمنية وحساب ارتفاع الماء باستخدام تقريب نظام الزمن المتقطع.

%للنظام الحقيقي المستمر زمنياً.

for n = 1:N(m), .

%احسب السطح الحر للماء التالي.

h1 = (Ts(m)*f1 + A1*h1 . A2*Ts(m)*sqrt(2*g*h1.h2))/A1 ;

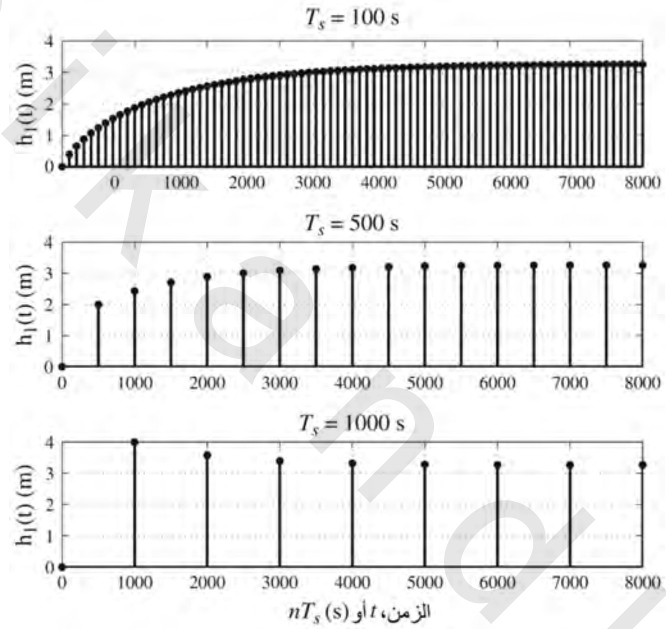
% h = [h ; h1] ; الحق مع متجه ارتفاع الماء.

end

%ارسم ارتفاع سطح الماء الحر مع الزمن.

%التعليق على الرسم

```
subplot(length(Ts),1,m) ;
p = stem(Ts(m)*[0:N(m)]',h,'k','fi lled') ;
set(p,'LineWidth',2,'MarkerSize',4) ; grid on ;
if m == length(Ts),
p = xlabel('Time, t or {\itnT_s} (s)',...
'FontName','Times','FontSize',18) ;
end
p = ylabel('h_1(t) (m)','FontName','Times','FontSize',18) ;
p = title(['{\itT_s} = ',num2str(Ts(m)),...
' s'],'FontName','Times','FontSize',18) ;
end
```

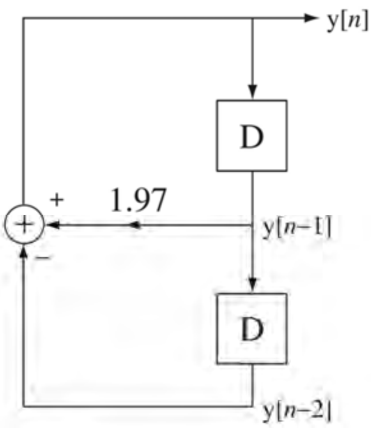



**شكل (٤,٣٩). حل عددي لمعادلة تورشيللي باستخدام النظام المتقطع زمنياً في شكل (٤,٣٨) لمعدل تدفق حجمي داخل مقداره $0.004m^3/s$.**

**مثال ٤,١٠**

**نمذجة نظام تغذية عكسية بدون إثارة**

أوجد إشارة الخرج المتولدة من النظام الموضح في شكل (٤,٤٠) في الأزمنة $n\geq0$. افترض الشروط الابتدائية $y[0]=1$ و $y[.1]=0$.




**شكل (٤,٤٠) نظام متقطع زمنياً.**

النظام الموجود في شكل (٤,٤٠) يمكن وصفه بالمعادلة الفرقية التالية :

y[n]=1.97y[n.1].y[n.2] المعادلة رقم (٤,١٦)

هذه المعادلة، مع الشروط الابتدائية y[0]=1 و y[-1]=0، يحددان تماماً الاستجابة y[n]، والتي هي استجابة الدخل الصفري. استجابة الدخل الصفري يمكن حسابها عن طريق تكرار المعادلة (٤,١٦).إن ذلك سيعطي حلا صحيحا، ولكنه سيكون في صورة تتابع لا نهائي من قيم الاستجابة. يمكن حساب استجابة الدخل الصفري في صورة مغلقة عن طريق حل المعادلة الفرقية (انظر ملحق الويب ث). حيث أنه لا توجد إشارة تثير النظام، فإن المعادلة ستكون متجانسة. الصورة الدالية للحل المتجانس هي الأس المركب على الصورة $Kz^n$. بالتعويض بذلك في المعادلة الفرقية نحصل على $Kz^n=1097Kz^{n-1}.Kz^{n.2}$. بالقسمة على $Kz^{n-2}$ نحصل على المعادلة المميزة وبالحل نحصل على قيم z التالية :

$$z=\frac{1.97\pm\sqrt{1.97^2-4}}{2}=0.985\pm j0.12726=e^{\pm j0.1734}$$

حقيقة أن هناك قيمتين مميزتين تعني أن الحل المتجانس سيكون على الصورة :

$$y[n]=K_{h1}z_1^n+K_{h2}z_2^n$$ المعادلة رقم (٤,١٧)

لدينا الشروط الابتدائية y[0]=1 و y[-1]=0 ونحن نعرف من المعادلة (٤,١٧) أن $y[0]=K_{h1}+K_{h2}$ و $y[-1]=K_{h1}z_1^{-1}+K_{h2}z_2^{-1}$، ولذلك يمكننا كتابة :

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ e^{-j0.1734} & e^{+j0.1734}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_{h1}\\ K_{h2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

ومنها يمكن حساب الثابتين $K_{h1}=0.5-j2.853$ و $K_{h2}=0.5+j2.853$. وعلى ذلك فالحل الكامل سيكون على الصورة :

$$y[n]=(0.5-j2.853)(0.985+j0.1726)^n+(0.5+j2.853)(0.985-j0.1726)^n$$

هذه الصورة تمثل الحل الصحيح ولكنه ليس على الصورة المريحة، لذلك يمكننا كتابتها على الصورة :

$$y[n]=(0.5-j2.853)e^{j0.1734n}+(0.5+j2.853)e^{-j0.1734n}$$

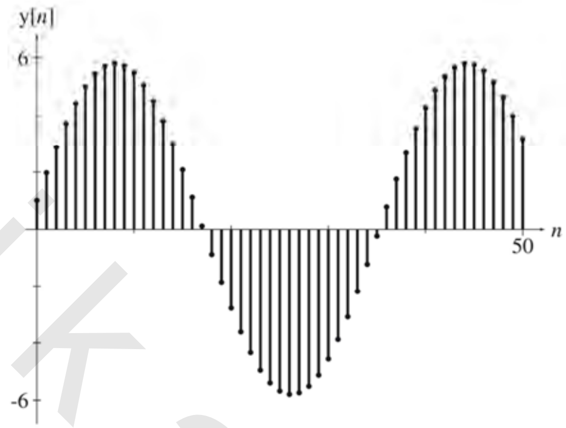
أو يمكن كتابتها على الصورة :

$$y[n]=0.5(e^{j0.1734n} + e^{-j0.1734n}) - j2.853(e^{j0.1734n} + e^{-j0.1734n})$$

أو

$$y[n]=\cos(0.1734n) + 5.706\sin(0.1734n)$$

أول ٥٠ قيمة من الإشارة الناتجة من هذا النظام موضحة في شكل (٤,٤١).




**شكل رقم (٤,٤١) الإشارة الناتجة من النظام المتقطع زمنياً في شكل (٤,٤٠).**

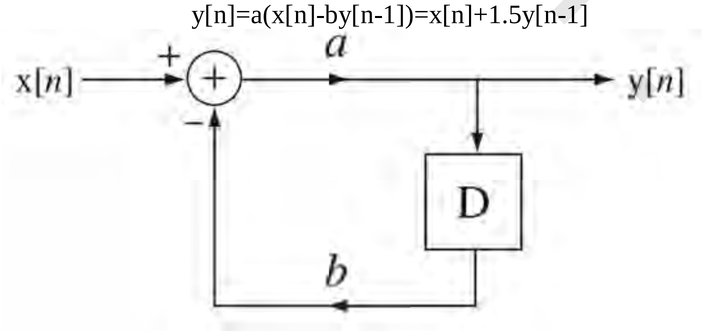
**مثال ٤,١١**

**نمذجة نظام تغذية عكسية مع الإثارة**

احسب استجابة النظام الموضح في شكل (٤,٤٢) إذا كانت $a=1$ و $b=-1.5$ و $x[n]=\delta[n]$ والنظام يكون في البداية مستقراً.

المعادلة الفرقية لهذا النظام يمكن كتابتها على الصورة :

$$y[n]=a(x[n]-by[n-1])=x[n]+1.5y[n-1]$$




**شكل رقم (٤,٤٢) نظام تغذية عكسية بسيط متقطع زمنياً بإثارة لا تساوي صفراً.**

حل هذه المعادلة للأزمنة $n\geq0$ يكون حلاً متجانساً على الصورة $K_h z^n$. بالتعويض والحل نحصل على $z=1.5$. ولذلك فإن $y[n]=K_h(1.5)^n$ ، $n\geq0$. يمكن حساب الثابت بمعرفة القيمة الابتدائية للاستجابة التي هي من مخطط النظام يجب أن تكون واحداً. ولذلك :

$K_h=1$ ومنها $y[0]=1=K_h(1.5)^0$

وعلى ذلك فإن $y[n]=(1.5)^n$ ، لكل $n\geq0$.

من الواضح أن هذا الحل يتزايد باستمرار بدون حدود، وعلى ذلك فالنظام يكون غير مستقر. إذا اخترنا b بمقدار أقل من الواحد، فإن النظام سيكون مستقراً لأن الحل سيكون على الصورة $y[n]=b^n$ لكل قيم $n\geq0$.

**مثال ٤،١٢**

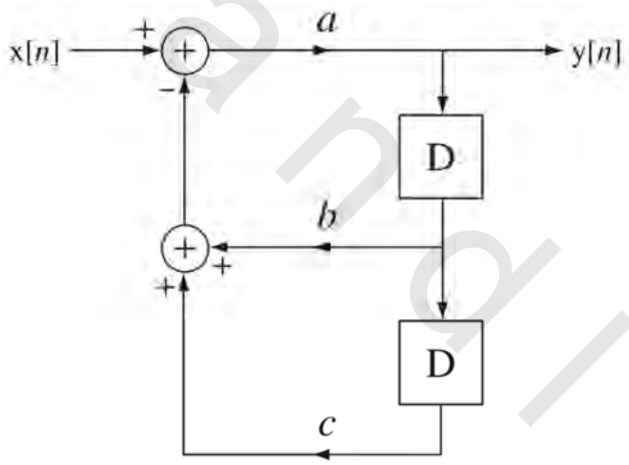
**نمذجة نظام تغذية عكسية أكثر تعقيداً مع الإثارة**

احسب استجابة الحالة صفر للنظام الموضح في شكل (٤،٤٣) للأزمنة $n\geq0$ للدخل $x[n]=1$ الذي تم تطبيقه عند الزمن $n=0$، بفرض أن كل الإشارات في النظام تساوي صفراً للأزمنة ما قبل $n=0$ مع فرض أن $a=1$، و $b=-1.5$ والثلاث قيم المختلفة لـ c هي 0.8 و 0.6 و 0.5.

المعادلة الفرقية لهذا النظام يمكن كتابتها على الصورة:

$$y[n]=\alpha(x[n]-by[n-1]-cy[n-2])=x[n]+1.5y[n-1]-cy[n-2] \quad (٤،١٨)$$

المعادلة رقم (٤،١٨)



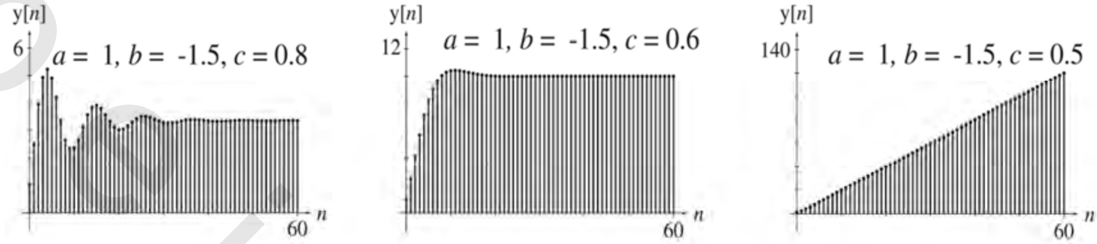

**شكل رقم (٤،٤٣) نظام بتغذية عكسية أكثر تعقيداً.**

استجابة النظام هي الحل الكلي للمعادلة الفرقية مع الشروط الابتدائية. يمكننا إيجاد حل في صورة مغلقة عن طريق حساب الحل الكلي للمعادلة الفرقية. الحل المتجانس يمكن كتابته على الصورة التالية: $y_h[n]=K_{h1}z_1^n+K_{h2}z_2^n$ حيث $z_{1,2}=0.75\pm\sqrt{0.5625-c}$. الحل الخاص يكون على صورة مجموع خطي من إشارة الدخل وكل الفروق الأحادية. إشارة الدخل ثابتة، وبالتالي كل فروقها تكون أصفاراً، ولذلك فإن الحل الخاص يكون ببساطة ثابت $K_p$. بالتعويض في المعادلة الفرقية نحصل على:

$K_p-1.5K_p+cK_p=1$ وبالتالي فإن $K_p=1/(c-0.5)$

باستخدام المعادلة (٤.١٨) يمكننا إيجاد أول قيمتين ابتدائيتين لـ y[n] المطلوبة للحل للثابتين المجهولين $K_{h1}$ و $K_{h2}$. هذه القيم هي y[0]=1 و y[1]=2.5.

في الفصل١ تم بيان ثلاث استجابات لـ a=1 و b=-1.5 و c=0.8, 0.6, 0.5. هذه الاستجابات تمت إعادة رسمها في شكل (٤.٤٤).




**شكل رقم (٤.٤٤) استجابة الحالة صفر لثلاث أشكال مختلفة للتغذية العكسية.**

توضح نتائج المثال ٤.١٢ أهمية التغذيةالعكسية في تحديد استجابة أي نظام. في الحالتين الأولى والثانية تكون إشارة الخرج محددة، ولكن في الحالة الثالثة تكون إشارة الخرج غير محددة، على الرغم من أن إشارة الدخل تكون محددة. مثلما هو الحال تماما في الأنظمة المستمرة زمنياً، حيث يمكن في أي لحظة لأي نظام متقطع زمنياً أن يعرض استجابة الحالة صفر غيرالمحددة لإثارة محددة من أي نوع، فإن هذا النظام يتم تصنيفه على أنه نظام غير مستقر BIBO. وعلى ذلك فإن استقرار أنظمة التغذية العكسية تعتمد على طبيعة هذه التغذية العكسية.

**خواص النظام**

خواص الأنظمة المتقطعة زمنياً تكون في الغالب متماثلة، بدقة، مع خواص الأنظمة المستمرة زمنياً. في هذا الجزء سنستعرض أمثلة على بعض خواص أنظمة الزمن المتقطع.

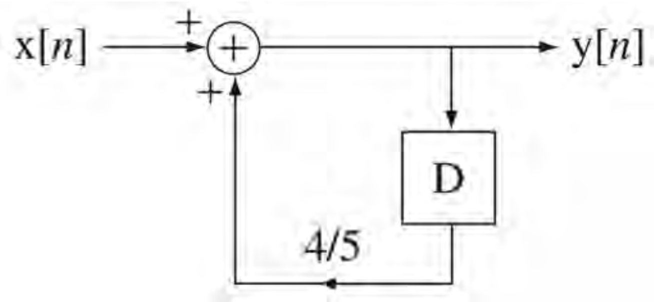
افترض النظام الموضح في شكل(٤.٤٥). الدخل والخرج لهذا النظام يرتبطان بالمعادلة الفرقية التالية: $y[n]=x[n]+(4/5)y[n-1]$. الحل المتجانس لهذه المعادلة على الصورة $y[n]=K_h(4/5)^n$. افترض x[n] هي تتابع الوحدة، وبالتالي فإن الحل الخاص سيكون $y_p[n]=5$ والحل الكلي سيكون $y[n]=K_h(4/5)^n+5$. (انظر الملحق ث للمزيد عن طرق حل المعادلات الفرقية). إذا كان النظام في حالته الصفرية قبل الزمن n=0 فإن الحل الكلي سيكون:

$$y[n] = \begin{cases} 5-4(4/5)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

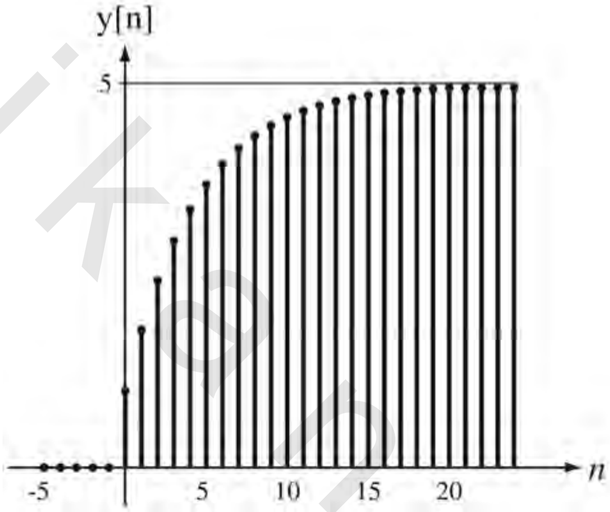
أو

$$y[n]=[5-4(4/5)^n]u[n]$$

انظر شكل (٤.٤٦).




شكل رقم (٤,٤٥) النظام.



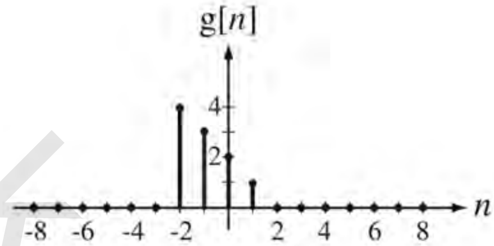

شكل (٤,٤٦) استجابة الحالة صفر لإثارة تتابع الوحدة.

التشابه بين شكل استجابة المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة لإثارة وحدة الخطوة وغلاف الاستجابة لهذا النظام لتتابع وحدة ليس محض صدفة. إن هذا النظام هو مرشح رقمي منفذ للترددات المنخفضة (هناك المزيد عن المرشحات الرقمية في الفصلين ١١ و ١٥).

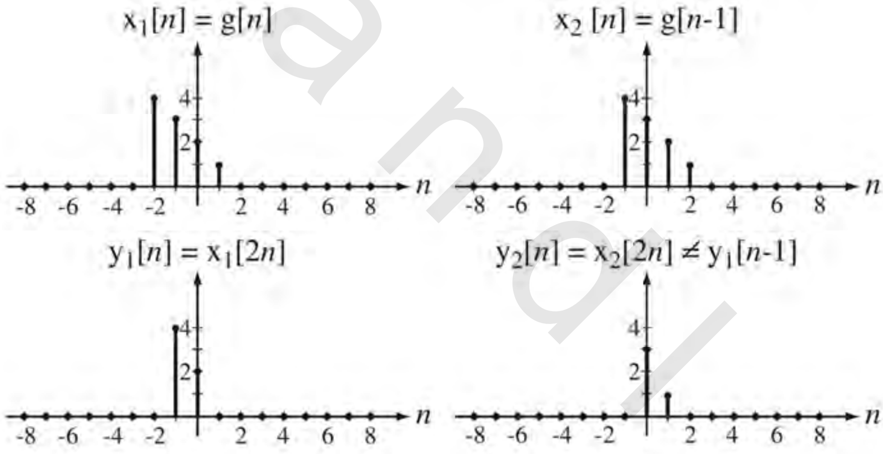
إذا تم ضرب الإثارة لهذا النظام في أي ثابت، فإن الاستجابة يتم ضربها بالثابت نفسه، وعلى ذلك فهذا النظام يعتبر متجانساً. إذا أخرنا الإثارة لهذا النظام بأي زمن وليكن $n_0$، فإن الاستجابة تتأخر بالكمية نفسها، لذلك فإن هذا النظام يكون ثابتاً زمنياً أيضاً. إذا جمعنا إشارتين لتكوين إثارة لهذا النظام، فإن استجابة هذا النظام ستكون مجموع الاستجابتين اللتين تنتجان لو أنه تم تطبيق كل إثارة وحدها، ولذلك فإن هذا النظام يكون نظام LTI متقطع زمنياً. أيضاً فإن هذا النظام يعطي استجابة محدودة لأي إثارة محدودة، لذلك فهذا النظام يكون مستقراً أيضاً.

مثال بسيط على الأنظمة التي لا تكون ثابتة زمنياً من الممكن أن يكون نظاماً وصفه كالتالي : $y[n]=x[2n]$. إفترض $x_1[n]=g[n]$ ، وافترض أيضاً $x_2[n]=g[n.1]$ ، حيث $g[n]$ هي الإشارة الموضحة في شكل (٤،٤٧)، وافترض أن الاستجابة لـ $x_1[n]$ هي $y_1[n]$ ، وافترض أن الاستجابة لـ $x_2[n]$ هي $y_2[n]$. هذه الإشارات موضحة في شكل (٤،٤٨).

ما دامت $x_2[n]$ هي نفسها $x_1[n]$ فيما عدا التأخير بمقدار وحدة زمنية متقطعة، لكي يكون هذا النظام ثابتاً زمنياً، فإن $y_2[n]$ يجب أن تكون مثل $y_1[n]$ فيما عدا التأخير بمقدار وحدة زمنية واحدة، ولكنها ليست كذلك. لذلك فإن هذا النظام يكون نظاماً متغيراً زمنياً.




**شكل رقم (٤،٤٧) إشارة إثارة**




**شكل رقم (٤،٤٨) استجابة النظام الموصوف بالمعادلة $y[n]=x[2n]$ لإثارتين مختلفتين.**

مثال جيد على الأنظمة المستقرة BIBO ، هو النظام المالي لحساب الفائدة المركبة. إذا تم إيداع كمية أساسية من النقود P في وعاء استثماري بدخل ثابت بمعدل فائدة r ، والكمية $A[n]$ ، التي تمثل قيمة الاستثمار بعد عدد من السنوات n ، هي $A[n]=P(1+r)^n$. الكمية $A[n]$ تنمو بدون حدود مع مرور الزمن المتقطع n ، فهل يعني ذلك أن النظام البنكي غير مستقر ؟ إن هذه الكمية تنمو بدون حدود، وعند زمن لا نهائي ستصبح هذه الكمية لا نهائية. ولكن حيث إنه لا يوجد شخص الآن (ولن يوجد في المستقبل) سيعيش طويلاً ليرى ذلك يحدث، فإن حقيقة أن هذا النظام غير مستقر تبعاً لهذا التعريف ليس له أهمية. عندما نفترض السحوبات التي لا مفر منها من الحساب، فإننا نرى أن هذا الوضع من عدم الاستقرار النظري ليس له أهمية.

النوع الأكثر شيوعاً من الأنظمة المتقطعة زمنياً التي تتم دراستها في الإشارات والأنظمة هي الأنظمة التي علاقة دخلها بخرجها تتحدد عن طريق معادلة فرقية خطية، وذات معاملات ثابتة. الدالة المميزة لهذه المعادلة هي الأس المركب والحل المتجانس لها يكون في صورة مجموع خطي من الأسس المركبة. كل واحد من هذه الأسس المركبة يكون على الصورة $z^n = |z|^n e^{j(\measuredangle z)n}$ حيث z هي القيمة المميزة. إذا كان مقدار z أقل من الواحد، فإن صورة الحل $z^n$ يتناقص مقدارها مع مرور الزمن المتقطع، وإذا كان مقدار z أكبر من الواحد، فإن الحل يتزايد مع مرور الزمن. إذا كان مقدار z يساوي الواحد تماما، فإنه من الممكن أن توجد إثارة محددة ينتج عنها استجابة غير محددة. كما كان الحال في الأنظمة المستمرة زمنياً، فإن أي إثارة يكون لها الشكل الدالي نفسه مثل الحل المتجانس للمعادلة التفاضلية سينتج عنها استجابة غير محددة.

| |
|---|
| إذا كان مقدار أي واحدة من القيم المميزة أكبر من أو يساوي واحداً لأي نظام متقطع زمنياً، فإن هذا النظام يكون غير مستقر BIBO. |

**مثال ٤,١٣**

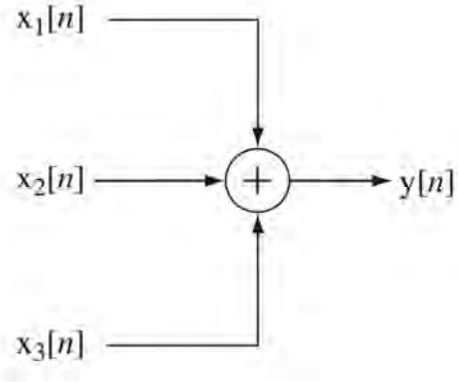
**إيجاد إثارة محدودة تنتج عنها استجابة غير محدودة**

افترض المركم المحدد بالمعادلة التالية: $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$. أوجد القيم المميزة لحل هذه المعادلة وأوجد إثارة محددة يمكنها أن تعطي استجابة غير محددة.

يمكننا أن نأخذ الفرق الأول العكسي لكل من الطرفين في المعادلة الفرقية السابقة كما يلي:

y[n]-y[n-1]=x[n]. إن ذلك يمثل معادلة فرقية بسيطة لها قيمة مميزة واحدة، وحلها المتجانس يكون ثابتاً لأن القيمة المميزة تساوي واحد. لذلك فإن هذا النظام يجب أن يكون غير مستقر BIBO. الإثارة المحددة التي تعطي استجابة غير محددة يكون لها الشكل الدالي نفسه مثل الحل المتجانس. في هذه الحالة فإن الإثارة الثابتة تنتج استجابة غير محددة. حيث أن الاستجابة تمثل تراكم الإثارة، فإنه يجب أن يكون من الواضح أنه مع مرور الزمن المتقطع، فإن مقدار الاستجابة للإثارة الثابتة يتزايد خطياً بدون أي حد أعلى.

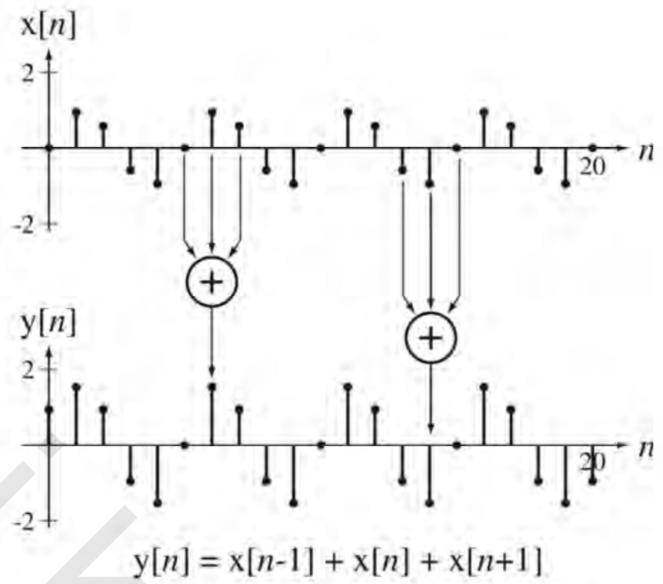
إن مفهوم الذاكرة، والسببية، وعدم الخطية الساكنة، والانعكاسية تكون هي نفسها بالنسبة لأنظمة الزمن المتقطع مثل أنظمة الزمن المستمر. شكل (٤,٤٩) يعتبر مثالاً على الأنظمة الساكنة أو الاستاتيكية.




**شكل رقم (٤,٤٩) نظام ساكن أو استاتيكى.**

واحد من الأمثلة على الأنظمة غير الخطية الاستاتيكية من الممكن أن يكون بوابة الأور OR في أي نظام منطقي. افترض أن المستويات المنطقية هي 0V للمستوى المنطقي 0، و 5V للمستوى المنطقي 1. إذا طبقنا 5V على أي واحد من الدخلين، مع وجود 0V على الطرف الآخر، فإن الاستجابة ستكون 5V. إذا طبقنا بعد ذلك 5V على كل من الدخلين في الوقت نفسه ، فإن الاستجابة ستظل 5V. إذا كان هذا النظام خطيا، فإن الاستجابة لـ 5V على الدخلين في نفس الوقت يجب أن تكون 10V، وهذا يمثل أيضاً نظاماً ليس انعكاسيا. إذا كانت إشارة الخرج تساوي 5V، فإننا لا نعرف أي واحد من الاحتمالات التجميعية الثلاثة لإشارات الدخل تسبب هذه الاستجابة، ولذلك فإن معرفة إشارة الخرج لن تكون كافية لتحديد إشارات الدخل.

على الرغم من أن كل الأنظمة الطبيعية الحقيقية يجب أن تكون سببية بالمعنى الصارم من حيث إنها لا يمكن أن تعطي استجابة قبل أن تتم إثارتها، إلا أنه توجد بعض أنظمة معالجة الإشارة التي يمكن وصفها أحيانا، بأنها ليست سببية، بالمعنى السطحي أو الظاهري. هذه الأنظمة هي أنظمة معالجة الإشارة التي يتم فيها تسجيل الإشارة ثم معالجتها بعد ذلك في غير الزمن الحقيقي أو عند زمن آخر للحصول على الاستجابة المطلوبة. حيث إن التاريخ الكلي لإشارات الدخل كان قد تم تسجيله، فإن الاستجابة المحسوبة عند أزمنة محددة من مسار البيانات تعتمد على قيم لإشارات دخل سابقة التسجيل كما في شكل(٤,٥٠). ولأن كل عمليات معالجة البيانات تحدث بعد تسجيل إشارات الدخل، فإن هذا النوع من الأنظمة يكون وما زال سببي بالمعنى الصارم للسببية.




**شكل رقم (٤,٥٠) ما يطلق عليه مرشح غير سببي يحسب الاستجابة من إثارات سابقة التسجيل.**

## ٤,٤ ملخص لبعض النقاط المهمة

١- النظام الذي يكون متجانساً وتجميعياً في نفس الوقت يكون خطياً.

٢- النظام الذي يكون خطياً وثابتاً زمنياً يسمى نظام LTI.

٣- الاستجابة الكلية لنظام LTI هي مجموع استجابته للدخل الصفري واستجابته للحالة صفر.

٤- يمكن أحياناً تحليل الأنظمة غير الخطية باستخدام طرق التحليل الخطية من خلال تقريب يسمى التحويل إلى الخطية.

٥- يقال عن أي نظام أنه مستقر BIBO إذا كانت إشارات الدخل المحددة له تعطي دائما إشارة خرج محددة.

٦- يكون نظام LTI المستمر زمنياً مستقراً إذا كانت كل قيمه المميزة لها أجزاء حقيقية سالبة.

٧- كل الأنظمة الطبيعية الحقيقية تكون سببية، على الرغم من أن بعضها من الممكن وصفها ظاهرياً على أنها غير سببية.

٨- في العادة تتم نمذجة الأنظمة المستمرة زمنياً عن طريق المعادلات التفاضلية، والأنظمة المقطعة زمنياً يتم نمذجتها عادة بالمعادلات الفرقية.

٩- طرق حل المعادلات الفرقية تكون مشابهة جداً لطرق حل المعادلات التفاضلية.

١٠- واحد من الاستخدامات الشائعة للمعادلات الفرقية هو لتقريب المعادلات التفاضلية.

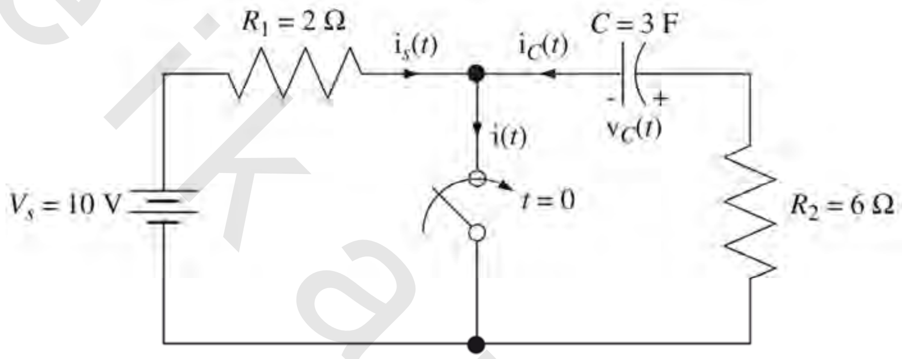
١١- يكون نظام LTI المتقطع زمنياً مستقراً إذا كانت كل قيمه المميزة لها مقدار أقل من الواحد.

**تمارين مع إجاباتها**

(في كل تمرين ، يكون ترتيب الإجابات ترتيبا عشوائيا)

**نمذجة الأنظمة**

١- اكتب المعادلة التفاضلية للجهد $Vc(t)$ في الدائرة الموضحة في شكل (ت.١) للأزمنة $t>0$. بعد ذلك أوجد معادلة التيار $i(t)$ للأزمنة $t>0$.




**شكل رقم (ت.١).**

الإجابة : $i(t)=5+(5/3)e^{-t/18}$

٢- خزان الماء الموجود في شكل (ت.٢) يتم ملؤه عن طريق تدفق داخل $x(t)$ ويتم تفريغه عن طريق التدفق الخارج $y(t)$. يتم التحكم في التدفق الخارج عن طريق صمام يعطي مقاومة $R$ لتدفق الماء الخارج من الخزان. عمق الماء في الخزان هو $d(t)$، ومساحة سطح الماء هي $A$ ، ولا يعتمد على عمق الماء (الخزان اسطواني).

العلاقة بين التدفق وعمق الماء هي :

$$y(t)=d(t)/R$$

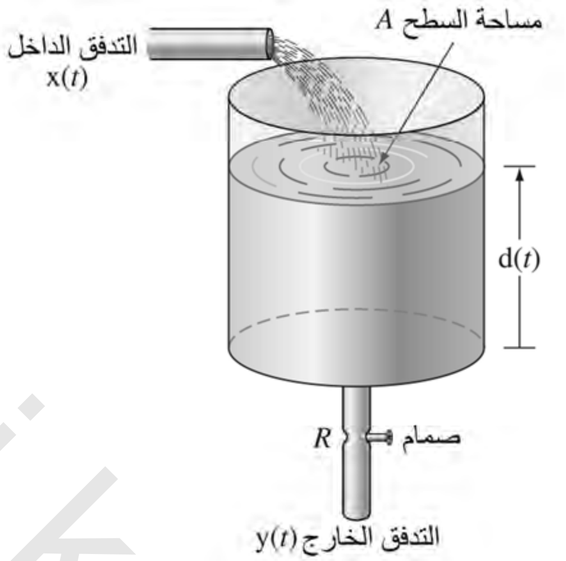
ارتفاع الخزان هو 1.5 متر وقطره متر واحد ومقاومة الصمام هي $10 s/m^2$.

(أ) اكتب المعادلة التفاضلية لعمق الماء في الخزان بدلالة أبعاده ومقاومة الصمام؟

(ب) إذا كان التدفق الداخل يساوي $0.05 m^3/s$ ، فعند أي عمق للماء ستكون معدلات التدفق متساوية ، مما يجعل عمق الماء ثابت ؟

(ج) اوجد علاقة لعمق الماء في الخزان مع الزمن بعد وضع $1 m^3$ من الماء في الخزان الفارغ؟

(د) إذا كان الخزان فارغاً في البداية عند الزمن $t=0$ والتدفق الداخل ثابتاً ويساوي $0.2 m^3/s$ بعد الزمن $t=0$، فمتى سيبدأ الخزان في الفيضان؟




**شكل رقم (ت.٢) خزان الماء مع تدفق داخل وتدفق خارج.**

الإجابة: $d(t)=(4/\pi)e^{-4t/10\pi}$ ، و $Ad'(t)+d(t)/R=x(t)$ ، و 10.886s ، و 0.5m.

٣- فإنه يتم وصف البندول تقريباً للزاوية الصغيرة θ كما تم الاستنتاج في النص بالمعادلة التفاضلية التالية :

$$mL\theta''(t) + mg\theta(t) \cong x(t)$$

حيث m هي كتلة البندول، و L هي طول الخيط الذي ليس له كتلة الذي يدعم الكتلة و θ هي الحيود الزاوي للبندول من الوضع الرأسي. إذا كانت الكتلة تساوي 2kg وطول الحبل يساوي 0.5m، فعند أي تردد دوري سيتردد البندول ؟

الإجابة : 0.704 هرتز

٤- لقد تم تسخين قالب من الألومنيوم حتى درجة الحرارة $100^oC$. وبعد ذلك تم إسقاطه في تيار متدفق من الماء، الذي تم تثبيت حرارته عند $10^oC$. بعد 10 ثوانٍ كانت درجة حرارة البلوك تساوي $60^oC$ (الألومنيوم موصل جيد للحرارة بحيث إن حرارته ستكون منتظمة في كل الحجم أثناء عملية التبريد). معدل التبريد يتناسب مع الفرق في درجة الحرارة بين البلوك والماء :

(أ) اكتب معادلة تفاضلية لهذا النظام مع اعتبار أن درجة حرارة الماء ستمثل الإثارة ودرجة حرارة البلوك تمثل الاستجابة؟

(ب) احسب الثابت الزمني للنظام؟

(ت) إذا تم تبريد البلوك نفسه حتى $0^oC$ وتم إسقاطه في تيار متدفق من الماء درجة حرارته هي $80^oC$، عند الزمن $t=0$، عند أي زمن ستصل حرارة البلوك إلى $75^oC$ ؟

الإجابة: 17s ، 47,153 ، $\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dt}T_a(t) + T_a = T_W$.

٥- يمكن استخدام طريقة برنوللي لإيجاد الجذر المهيمن عددياً لمعادلة كثيرة حدود (إذا كان موجودا). إنها تعتبر مثالاً على الأنظمة المتقطعة زمنياً. إذا كانت المعادلة على الصورة:

$$A_N q^n + a_{N-1} q^{n.1} + \ldots + a_1 q + a_0 = 0$$

تتكون الطريقة من حل المعادلة الفرقية التالية:

$$a_N q[n] + a_{N-1} q[n-1] + \ldots + a_1 q[n-N+1] + a_0 q[n-N] = 0$$

مع القيم الابتدائية $q[-1]=q[-2]=\ldots=q[-N+1]=0$ و $q[0]=1$، فإن الجذر السائد سيقترب نهائيا للقيمة $q[n+1]/q[n]$. ارسم نظاماً متقطعاً زمنياً لإيجاد الجذر السائد لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة. احسب الجذر السائد للمعادلة $2q^4 + 3q^3 - 8q^2 + q - 3 = 0$.

الإجابة: 2.964-

**خواص النظام**

٦- وضح أن أي نظام له الإثارة $x(t)$ واستجابته هي $y(t)$ ويوصف بالمعادلة التالية:

$$y(t)=u(x(t))$$

يكون غير خطي، وثابتاً زمنياً، ومستقراً، وغير منعكس؟

٧- وضح أن أي نظام له الإثارة $x(t)$ والاستجابة $y(t)$ وموصوف بالمعادلة:

$$y(t)=x(t-5)-x(3-t)$$

يكون خطياً، وغير سببى، وغير منعكس؟

٨- وضح أن أي نظام له الإثارة $x(t)$ والاستجابة $y(t)$ وموصوف بالمعادلة:

$$y(t)=x(t/2)$$

يكون خطياً، وغير سببى، ومتغير زمنياً؟

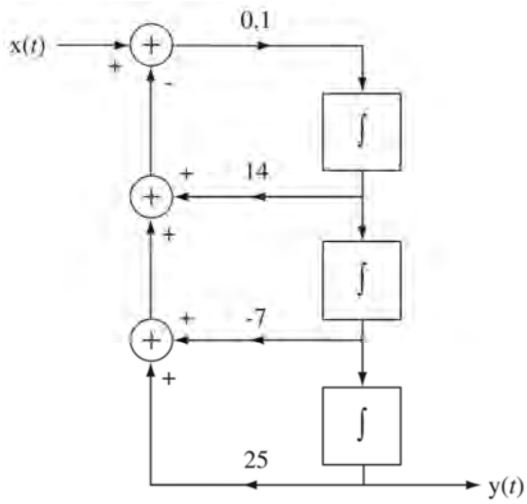
٩- وضح أن أي نظام له الإثارة $x(t)$ والاستجابة $y(t)$ وموصوف بالمعادلة:

$$y(t)=\cos(2\pi t)x(t)$$

يكون متغيراً زمنياً، ومستقر BIBO، وساكن، وغير منعكس؟

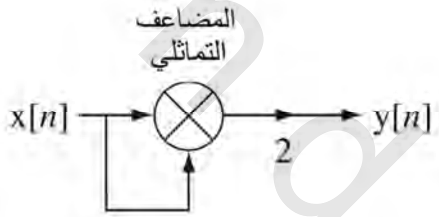
١٠- بين أن النظام الذي تكون استجابته هي مقدار إثارته يكون غير خطي، مستقر BIBO، وسببى، وغير انعكاسي؟

١١- وضح أن النظام الموجود في شكل (ت.١١) خطي، وثابت زمنياً، وغير مستقر BIBO، وديناميكي؟




**شكل رقم (ت.١١) نظام مستمر زمنياً.**

١٢- وضح أن النظام المبين في شكل (ت.١٢) غير خطي، ومستقر BIBO، وساكن، وغير انعكاسي. (إشارة خرج المضاعف التماثلي تساوي حاصل ضرب إشارتي الدخل)؟



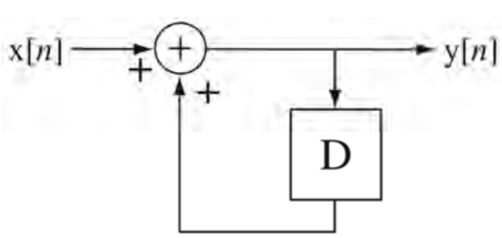

**شكل رقم (ت.١٢) نظام المضاعف التماثلي.**

١٣- وضح أن أي نظام له الإثارة x[n] والاستجابة y[n] وموصوف بالمعادلة :

$$y[n]=nx[n]$$

يكون خطياً، وثابتاً زمنياً، وإستاتيكياً.

١٤- وضح أن النظام المبين في شكل (ت.١٤) يكون خطي، وثابتاً زمنياً، وغير مستقر BIBO، وديناميكياً.



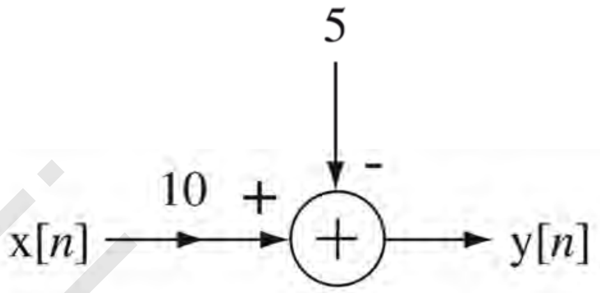

**شكل رقم (ت.١٤).**

١٥- وضح أن أي نظام له الإثارة x[n] والاستجابة y[n] وموصوف بالمعادلة :

y[n]=rect(x[n])

يكون غير خطي ، وثابتاً زمنياً ، وغيرانعكاسى.

١٦- وضح أن النظام المبين في شكل (ت.١٦) يكون غير خطي ، وثابتاً زمنياً ، وساكن ، وغير انعكاسى.




**شكل رقم (ت.١٦).**

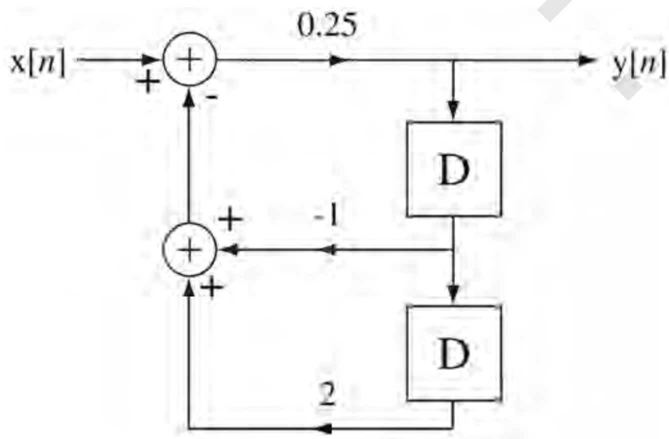
**النظام**

١٧- وضح أن النظام الموصوف بالمعادلة التالية :

$$y(t)=\begin{cases}10, & x(t)>2\\ 5x(t), & -2<x(t)\le 2\\ -10, & x(t)\le -2\end{cases}$$

يكون غير خطي ، وساكن ، ومستقر ، وغير انعكاسي ، وثابت زمنياً.

١٨- وضح أن النظام المبين في شكل (ت.١٨) يكون ثابت زمنياً ، ومستقر BIBO ، وسببي.




**شكل رقم (ت.١٨).**

**النظام**

**تمارين بدون إجابات**

**نمذجة النظام**

١٩- ترتبط الذرات في الجزيء الكيميائي ميكانيكياً عن طريق قوى الارتباط البينية. يتكون جزيء الملح من ذرة صوديوم مرتبطة مع ذرة كلور واحدة. الوزن الذري للصوديوم يساوي 22.99، والوزن الذري للكلور يساوي 35.45، والكتلة الذرية الواحدة تساوي $1.6604x10^{-27}kg$. نفذ نموذجاً لهذا الجزيء ككتلتين مرتبطتين بسوستة ثابتها يساوي $Ks=1.2x10^{59}N/m$. في نظام من هذا النوع، فإن الذرتين يمكن أن تتسارع كل منهما بالنسبة للأخرى ولكن (في غياب القوى الخارجية) مركز الكتلة لهذا النظام لا يتسارع. من المفضل أن نجعل مركز الكتلة هو نقطة الأصل لنظام المحاور المستخدم الذي يصف موضع الذرات. افترض أن الطول غير المشدود للستة هو $\ell_0$، وموضع ذرة الصوديوم هو $y_s(t)$، وموضع ذرة الكلور هو $y_c(t)$. أكتب معادلتي الحركة المرتبطتين لهذا النظام الميكانيكي، وجمعهما في معادلة تفاضلية واحدة بدلالة كمية الشد في السوستة $y(t)=y_s(t)+y_c(t)+\ell_0$، ووضح أن التردد الرنيني الزاوي سيكون K $\sqrt{K_s\frac{m_s+m_c}{m_s m_c}}$ حيث $m_s$ هي كتلة ذرة الصوديوم، $m_c$ هي كتلة ذرة الكلور. احسب التردد الرنيني لجزيء هذا الملح. (هذا النموذج غير حقيقي؛ لأن جزيئات الملح نادرا ما تتشكل بصورة منفصلة. الأملاح تحدث في صورة بللورات والجزيئات الأخرى في البللورة تحدث قوى على الجزيء، مما يجعل التحليل الحقيقي أكثر تعقيداً).

٢٠- الحركيات الدوائية هي دراسة كيفية التمثيل الغذائي، وامتصاصه، وتوزيعه، وإخراج الأدوية عن طريق الجسم البشري. بعض العمليات الدوائية يمكن نمذجتها تقريباً عن طريق نموذج حجيرة واحدة للجسم حيث V هو حجم هذه الحجيرة، و $C(t)$ هو تركيز الدواء في هذه الحجيرة، و $K_e$ هو ثابت معدل إخراج الدواء من الحجيرة، و $K_0$ هو معدل حقن أو دخول الدواء إلى الحجيرة.

(ا) أكتب المعادلة التفاضلية التي يكون فيها معدل الحقن هو إشارة الدخل وتركيز الدواء يمثل إشارة الخرج.

(ب) افترض قيم المعاملات التالية: $K_e=0.4hr^{-1}$ و $V=20l$ و $K_0=200$ mg/hr (حيث l هي رمز اللتر). إذا كان التركيز المبدئي للدواء هو $C(0)=10$ mg/l، ارسم تركيز الدواء كدالة في الزمن بالساعات في أول 10 ساعات من حقن الدواء. احسب الحل كمجموع لاستجابة الدخل الصفري واستجابة الحالة صفر.

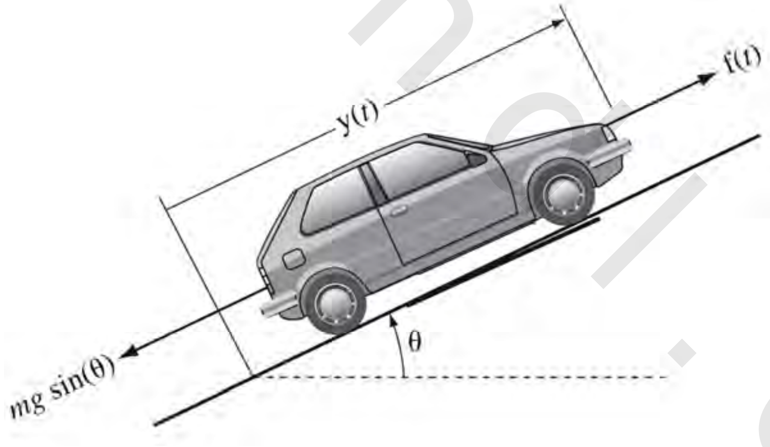
٢١- وعاء جيد التقليب تتم تغذيته لمدة طويلة بتيارين من السوائل، ماء نقي بمعدل 0.2 متر مكعب على الثانية، وصبغة زرقاء مركزة بمعدل 0.1 متر مكعب على الثانية. يحتوي الوعاء على 10 أمتار مكعبة من هذا الخليط، ويتم سحب الخليط من الوعاء بمعدل 0.3 متر مكعب على الثانية للحفاظ على ثبات الحجم. لقد

تغيرت الصبغة الزرقاء فجأة إلى صبغة حمراء بمعدل التدفق نفسه عن طريق مفتاح معين. عند أي زمن بعد تغيير هذا المفتاح سيصبح الخليط المسحوب من الوعاء يحتوى صبغة حمراء وزرقاء بنسبة 99:1 ؟

٢٢- سيارة تسير على تل أو منحدر يمكن نمذجتها كما في شكل (ت.٢٢). الإثارة هي القوة f(t) التي عندما تكون قيمتها موجبة فإن ذلك يعني عجلة أو تسارع للسيارة في الاتجاه الأمامي عن طريق الموتور، وعندما تكون قيمة هذه القوة سالبة فإن ذلك يمثل إبطاء لسرعة السيارة عن طريق الفرامل (الكابح). في أثناء حركة السيارة يحدث لها سحب نتيجة ظواهر الاحتكاك المختلفة التي يمكن نمذجتها تقريباً بالمعامل $K_f$ الذي يتم ضربه في سرعة السيارة ليعطي قوة تحاول إبطاء السيارة عند حركتها في كلا الاتجاهين. كتلة السيارة هي m والجاذبية تؤثر عليها باستمرار تحاول أن تسحبها لأسفل المطلع في غياب باقي القوى. افترض كتلة السيارة ١٠٠٠ كيلوجرام، وافترض معامل الاحتكاك $K_f$ يساوي 5N.s/m ، وافترض الزاوية θ تساوي π/2 :

(أ) أكتب المعادلة التفاضلية لهذا النظام مع افتراض القوة f(t) هي الإثارة، وموضع السيارة y(t) هو الاستجابة؟

(ب) إذا كانت مقدمة السيارة في البداية عند الموضع y(0)=0 مع سرعة ابتدائية $[y'(t)]_{t=0}=10m/s$ وليست هناك أي قوة تسارع أو فرملة، ارسم سرعة السيارة y'(t) كدالة في الزمن الموجب؟




**شكل رقم (ت.٢٢) سيارة على مستوى مائل.**

٢٣- في بداية العام 2000 كانت مقاطعة فريدونيا تعدادها p يساوي 100 مليون نسمة. معدل المواليد كان 4% سنويا ومعدل الوفاة كان 2% سنويا، محسوباً يومياً. بمعنى، أن المواليد والوفاة التي تحدث يومياً عند عند نسبة ثابتة من التعداد الحالي للسكان، وفي اليوم التالي فإن عدد المواليد والوفاة يتغير نتيجة أن تعداد السكان تغير في اليوم السابق. فمثلاً، في كل يوم يكون عدد الوفيات هو الكسر 0.02/365 من التعداد الكلي للسكان في اليوم السابق (مع إهمال تأثير السنة الكبيسة). وفي كل يوم يدخل مقاطعة فريدونيا 275 مهاجراً.

(أ) اكتب معادلة فرقية لتعداد السكان عند بداية اليوم رقم n بعد واحد يناير عام 2000 مع اعتبار معدل الهجرة هو إشارة الدخل للنظام؟

(ب) عن طريق حساب استجابة الدخل الصفري واستجابة الحالة صفر للنظام، حدد عدد السكان لهذه المقاطعة عند العام 2050؟

٢٤- شكل (ت.٢٤) يبين برنامج ماتلاب يحاكى نظام معين؟

(أ) بدون تنفيذ البرنامج، احسب قيمة x عندما n=10 عن طريق حل المعادلة الفرقية للنظام في الصورة المغلقة؟

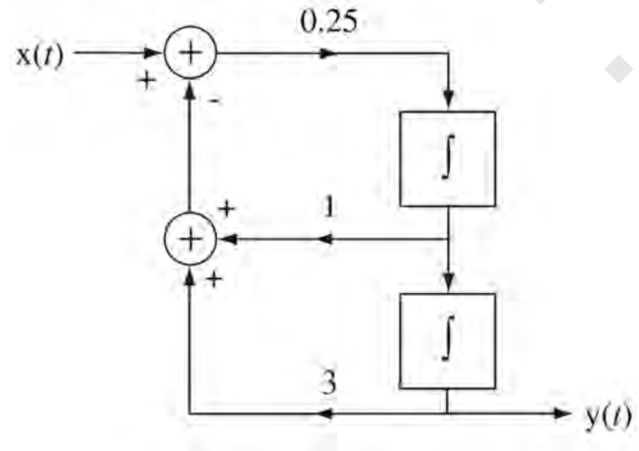
(ب) نفذ البرنامج واختبر الإجابة في الجزء (أ)؟

```
x = 1 ; y = 3 ; z = 0 ; n = 0 ;
  while n <= 10,
     z = y ;
     y = x ;
     x = 2*n + 0.9*y - 0.6*z ;
     n = n + 1 ;
  end
```

**شكل رقم (ت–٢٤).**

**خواص النظام**

٢٥- نظام يمكن وصفه بالرسم الصندوقي الموضح في شكل (ت.٢٥). صنف هذا النظام تبعا للخواص التالية: التجانس، والتجميع، والخطية، والثبات الزمني، والاستقرار، والسببية، والذاكرة، والانعكاسية؟




**شكل (ت.٢٥).**

**النظام**

٢٦- نظام له إشارة خرج تساوي مكعب إشارة الدخل. صنف هذا النظام تبعاً للخواص التالية: الخطية، والثبات الزمني، والاستقرار، والسببية، والذاكرة، والانعكاسية؟

٢٧- نظام يتم وصفه بالمعادلة التفاضلية التالية: ty’(t)-8y(t)=x(t). صنف هذا النظام تبعاً للخواص التالية: الخطية، والثبات الزمني، والاستقرار؟

٢٨- نظام يتم وصفه بالمعادلة التالية: $y(t) = \int_{-\infty}^{t/3} x(\lambda)d\lambda$. صنف هذا النظام تبعاً للخواص التالية: الثبات الزمني، والاستقرار، والانعكاسية.

٢٩- نظام يتم وصفه بالمعادلة التالية: $y(t) = \int_{-\infty}^{t+3} x(\lambda)d\lambda$. صنف هذا النظام تبعاً للخواص التالية: الخطية، والسببية، والانعكاسية؟

٣٠- وضح أن النظام الموصوف بالمعادلة y(t)=Re(x(t)) يكون تجميعياً ولكنه ليس متجانس. (تذكر أنه إذا تم ضرب الإثارة بأي ثابت مركب وكان النظام متجانساً، فإن الاستجابة يجب أن تضرب في الثابت نفسه المركب).

٣١- نظام يتم وصفه بالمعادلة التالية: $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n+1} x[m]$. صنف هذا النظام تبعاً للخواص التالية: الثبات الزمني، والاستقرار BIBO، والانعكاسية؟

٣٢- نظام يتم وصفه بالمعادلة التالية: ny[n]-8y[n-1]=x[n]. صنف هذا النظام تبعا للخواص التالية: الثبات الزمني، والاستقرار BIBO، والانعكاسية؟

٣٣- نظام يتم وصفه بالمعادلة التالية: $y[n] = \sqrt{x[n]}$ . صنف هذا النظام تبعا للخواص التالية: الثبات الزمني، والاستقرار BIBO، والذاكرة، والانعكاسية؟