

طرق فورير المستمرة زمنياً

(٦.١) المقدمة والأهداف

لقد تعلمنا في الفصل ٥ كيف نحسب استجابة نظام LTI عن طريق التعبير عن إثارة هذا النظام كمجموع خطي من الصدمات والتعبير عن استجابة النظام كمجموع خطي لاستجابات هذه الصدمات. لقد أطلقنا على هذه الطريقة الالتفاف. هذا النوع من التحليل يستفيد من مميزات الخطية ونظرية التجميع ويقوم بتجزئ المشكلة الكبيرة المعقدة إلى عدد من المشاكل المبسطة التحليل.

في هذا الفصل سنقوم أيضاً بالتعبير عن أي إشارة كمجموع خطي من الإشارات البسيطة ولكن هنا ستكون هذه الإشارات هي الإشارات الجيبية. ستكون استجابة النظام مجموعاً خطياً من الاستجابات لهذه الإشارات الجيبية. كما أوضحنا في الفصل ٥، فإن استجابة أي نظام LTI لدالة جيب تكون دالة جيب أخرى لها التردد نفسه ولكن بمقدار وزاوية مختلفين عموماً. التعبير عن الإشارات بهذه الطريقة يؤدي إلى مفهوم النطاق الترددي، بمعنى التفكير في الإشارات كدوال في التردد بدلاً من الزمن.

تحليل الإشارات كمجموع خطي من الدوال الجيبية ليس غريباً كما قد يبدو. إن الأذن البشرية تفعل شيئاً مثل ذلك. عندما نسمع أي صوت، ما هي الاستجابة الحقيقية للمخ؟ كما هو موضح في الفصل ١، فإن الأذن تستشعر التغيرات الزمنية لضغط الهواء. افترض أن هذه التغيرات كانت نغمة ذات تردد واحد، مثل أي شخص يطلق صافرة. عندما نستمع لهذه الصافرة فإننا لا نهتم بترددات (سرعة) ضغط الهواء مع الزمن. بدلاً من ذلك فإننا نكون حريصين على ثلاث خواص للصوت، وهي، الاهتزازات، أو التردد، وشدة الصوت، أو مقداره، وفترة بقاء هذا الصوت. إن نظام الأذن مع المخ يحدد معاملات فعلية للإشارة في صورة ثلاث معاملات بسيطة، وهي، التردد، والشدة، وفترة البقاء، ولا يحاول تتبع التغيرات السريعة (وسريعة التكرار) لضغط الهواء بالتفصيل. في أثناء ذلك فإن نظام الأذن مع المخ يقوم بترشيح المعلومات الموجودة في الإشارة ويحولها إلى معناها، أو جوهرها. إن

التحليل الرياضي للإشارات كمجموع خطي من الدوال الجيبية يفعل شيئاً مثل ذلك ولكن بطريقة حسابية أكثر دقة. إن النظر للإشارات بهذه الطريقة يؤدي أيضاً إلى فكر جديد عن طبيعة الأنظمة، ولبعض الأنواع من الأنظمة المعينة، يبسط بدرجة كبيرة عملية تصميم وتحليل هذه الأنظمة.

أهداف الفصل

- ١- تحديد تتابع فورير على أنه طريقة للتعبير عن الإشارات الدورية كمجموع خطي من الإشارات الجيبية.
- ٢- استنتاج، باستخدام مفهوم التعامد، طرق لتحويل الإشارات بين النطاق الزمني والنطاق الترددي.
- ٣- تحديد أنواع الإشارات التي يمكن التعبير عنها بتتابع فورير.
- ٤- إعداد وتعلم استخدام خواص تتابع فورير.
- ٥- تعميم تتابع فورير ليصبح تحويل فورير للتعبير عن الإشارات غير الدورية
- ٦- تعميم تحويل فورير ليتمكن تطبيقه على بعض الإشارات الشائعة المفيدة
- ٧- إعداد وتعلم استخدام خواص تحويل فورير
- ٨- لرى، من خلال أمثلة، بعض استخدامات تتابع فورير وتحويل فورير

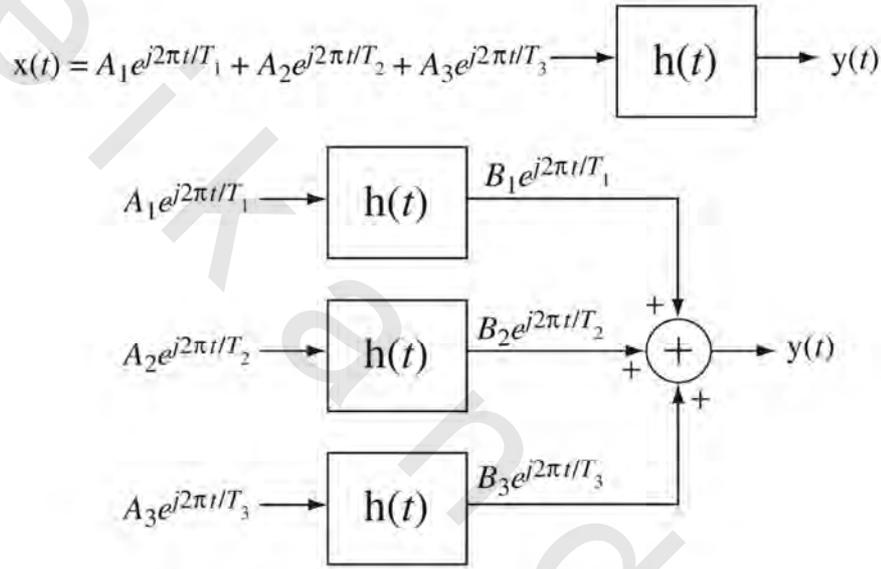
(٦.٢) تتابع فورير للزمن المستمر

مفاهيم أساسية

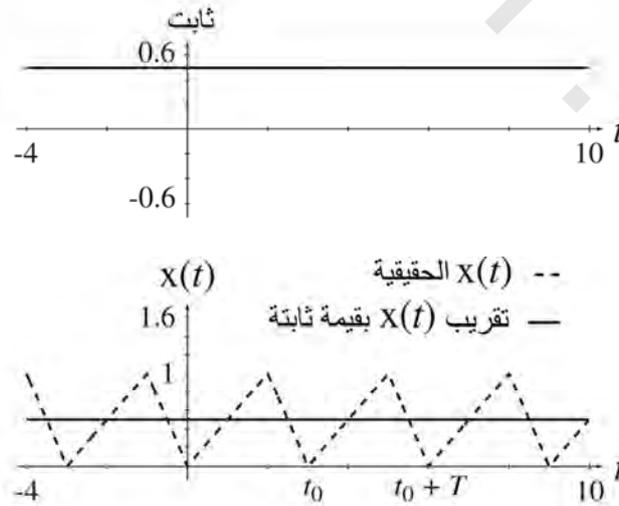
أحد المواقف الشائعة في تحليل الإشارات والأنظمة إثارة الأنظمة LTI بإشارات دورية. نتيجة مهمة جداً من الفصل ٥ هي أنه إذا تمت إثارة نظام LTI عن طريق إشارة جيبية، فإن الاستجابة تكون جيبية أيضاً، بالتردد نفسه ولكن بمقدار وزاوية مختلفتين. يحدث ذلك بسبب أن الدالة المميزة للمعادلات المختلفة التي تصف الأنظمة LTI تكون أسساً مركبة، والجيب يكون مجموعاً خطياً من الأسس المركبة.

هناك نتيجة مهمة أيضاً من الفصل ٤ هي أنه إذا تمت إثارة نظام LTI بمجموعة من الإشارات، فإن الاستجابة الكلية تكون مجموع الاستجابات لكل واحدة من الإشارات على حدة. إذا كانت هناك طريقة للتعبير عن الإشارات الاختيارية كمجموع خطي من الجيوب، فإننا يمكننا استخدام نظرية التجميع لإيجاد استجابة أي نظام LTI لأي إشارة اختيارية عن طريق جمع الاستجابات لهذه الجيوب المختلفة. إن التعبير عن الإشارة الجيبية كمجموع خطي من الجيوب تسمى تتابع فورير. هذه الجيوب من الممكن أن تكون جيوباً حقيقية على الصورة $\text{Acos}(2\pi t/T_0 + \theta)$ أو من الممكن أن تكون جيوباً مركبة على الصورة $\text{Ae}^{j2\pi t/T_0}$.

في البداية عند تقديم فكرة التعبير عن الإشارات الحقيقية كمجموع خطي من الجيوب المركبة، فإن الطلاب في العادة يقعون في حيرة ويسألون لماذا نقدم بعداً آخر (قد يبدو غير ضروري) وهو الأرقام والدوال التخيلية. لقد حدد أويلر Euler العلاقة $e^{ix} = \cos(x) + j\sin(x)$ التي تبين العلاقة القريبة جداً بين الجيوب الحقيقية والتخيلية. سيتضح فيما بعد، ونتيجة المنهج المدمج الناتج، ونتيجة التبسيطات الحسابية المعينة التي تحدث عند استخدام الجيوب المركبة، فإنها في الحقيقة تكون أكثر سهولة وقوة في التحليل عن الجيوب الحقيقية. ولذلك فإننا نشجع القارئ أن يؤجل هذه الحيرة لفترة بسيطة حتى نعود لها مرة أخرى.



شكل رقم (٦.١). التكافؤ بين استجابة نظام LTI لإشارة إثارة ومجموع استجابات النظام لمجموعة من الجيوب المركبة التي يكون مجموعها مكافئاً للإثارة.

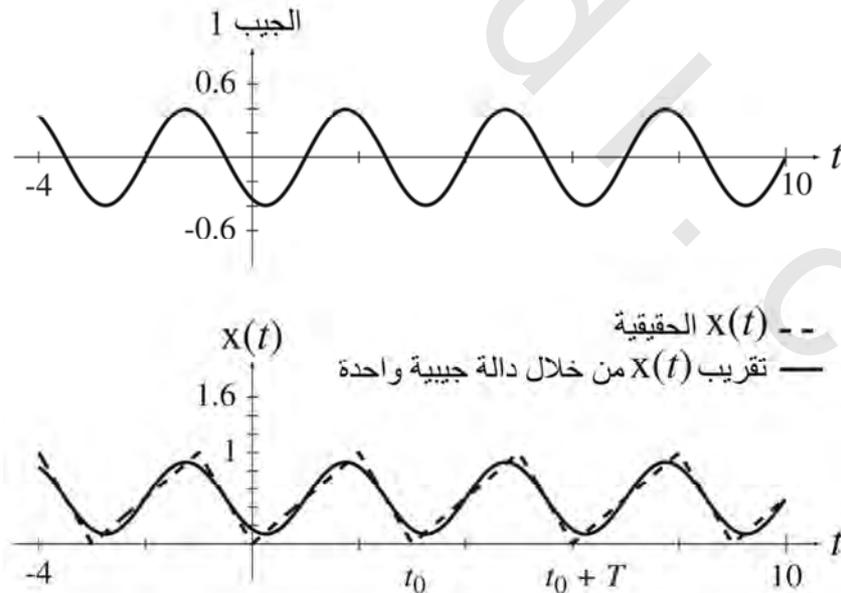


شكل رقم (٦.٢) تقريب إشارة بقيمة ثابتة.

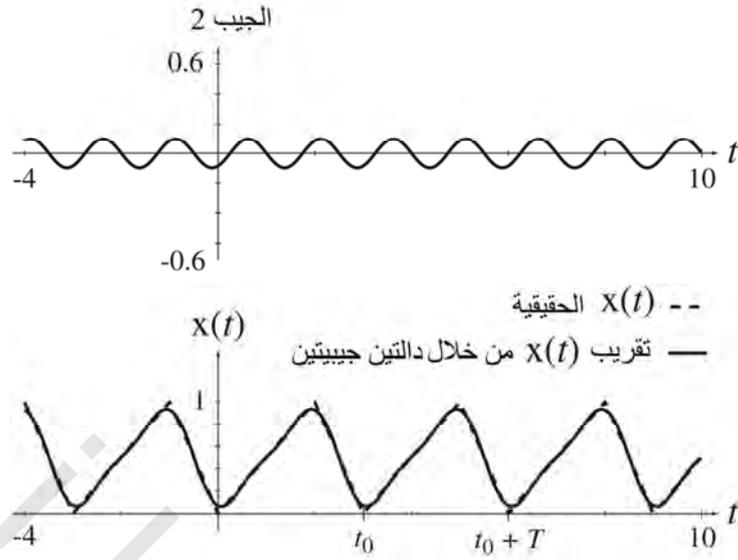
إذا كنا قادرين على التعبير عن إشارة إثارة كمجموع خطي من الجيوب، فإنه يمكننا أن نستفيد من خاصية الخطية ونظرية التجميع ونطبق كل جيب على حدة على النظام، وبعد ذلك نقوم بتجميع كل هذه الاستجابات للحصول على استجابة النظام الكلية كما في شكل (٦.١).

افترض إشارة اختيارية $x(t)$ المطلوب التعبير عنها كمجموع خطي من الجيوب على فترة زمنية من زمن ابتدائي t_0 حتى زمن نهائي t_0+T كما في الشكل (٦.٢) الخط المقطع. في هذا التوضيح سنستخدم جيوباً ذات قيم حقيقية لنجعل الرسم بسيطاً بقدر الإمكان.

في شكل (٦.٢) تم تقريب الإشارة بقيمة ثابتة تساوي 0.5، التي تمثل متوسط قيمة الإشارة في الفترة $t_0 < t < t_0+T$. القيمة الثابتة تعتبر حالة خاصة من الدالة الجيبية، إنها جيب التمام عندما يكون التردد يساوي صفراً. إن ذلك يعتبر أفضل تقريب للإشارة $x(t)$ بقيمة ثابتة. كلمة أفضل هنا تعني أن لها أقل متوسط لمربع الخطأ بين $x(t)$ والقيمة المقربة. بالطبع فإن هذه القيمة الثابتة، على الرغم من أنها أفضل تقريب الآن، ليست تقريباً جيداً جداً لهذه الإشارة. يمكننا أن نجعل التقريب أفضل من ذلك عن طريق إضافة دالة جيبية دورتها الأساسية تساوي دورة الإشارة $x(t)$ إلى القيمة الثابتة كما في شكل (٦.٣). هذا التقريب الأخير يعتبر تحسناً كبيراً عن التقريب السابق ويعتبر التقريب الأفضل الذي يمكن الحصول عليه باستخدام قيمة ثابتة ودالة جيبية واحدة لها التردد الأساسي نفسه للإشارة $x(t)$. يمكننا تحسين التقريب أفضل من ذلك عن طريق إضافة دالة جيبية أخرى لها تردد ضعف التردد الأساسي كما في شكل (٦.٤).

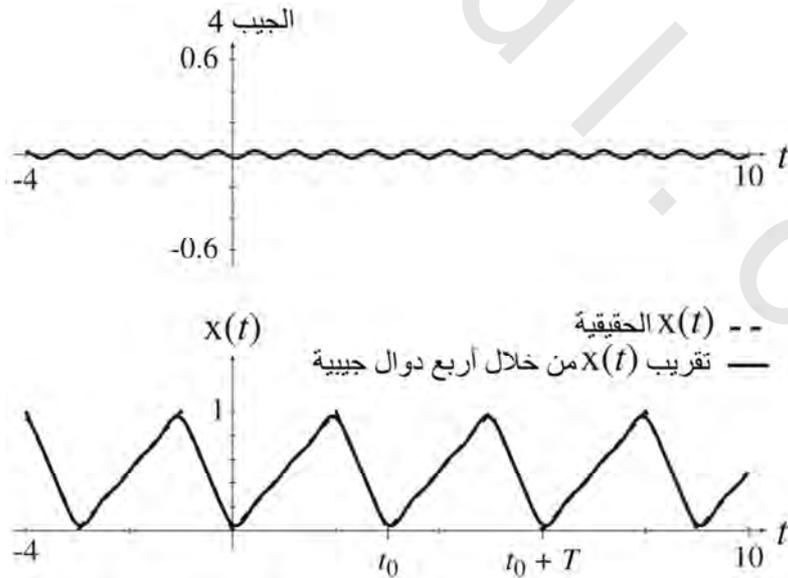


شكل رقم (٦.٣) إشارة مقربة بقيمة ثابتة ودالة جيبية واحدة.



شكل رقم (٦.٤) إشارة مقربة بقيمة ثابتة ودالتين جيبيتين.

إذا تم الاستمرار في إضافة الدوال الجيبية المختارة جيداً والتي ترددها يكون مضاعفات عليا صحيحة من التردد الأساسي للإشارة $x(t)$ ، فإن التقريب يصبح أفضل وأفضل، وفي النهاية عندما يقترب عدد الدوال الجيبية من المالا لانهائية، فإن التقريب يصبح حقيقياً أي مطابقاً للإشارة الحقيقية $x(t)$ كما في شكل (٦.٥) وشكل (٦.٦).



شكل رقم (٦.٦) إشارة مقربة بقيمة ثابتة وأربع دوال جيبية.

الجيب المضاف ذو التردد المساوي لثلاثة أضعاف التردد الأساسي يكون له مقدار يساوي صفراً، مما يبين مثل هذا الجيب لا يحسن من نتيجة التقريب. بعد إضافة الجيب الرابع، فإن التقريب يصبح جيداً إلى حد ما، يصعب معه التفريق بالنظر بينه وبين الدالة الحقيقية، كما في شكل (٦.٦).

في هذا المثال كان التقريب يقترب من الإشارة الحقيقية في الزمن $t_0 < t < t_0 + T$ ، وأيضاً في كل الأزمنة؛ لأن الدورة الأساسية للتقريب هي نفسها الدورة الأساسية للإشارة $x(t)$. من أكثر تطبيقات تتابع فورير شيوعاً هي تمثيل أي إشارة في الفترة $t_0 < t < t_0 + T$ ولكن ليس بالضرورة خارج هذه الفترة. ولكن في تحليل الإشارات والأنظمة يكون هذا التمثيل في العادة لإشارات دورية وتكون الدورة الأساسية للتمثيل في العادة أيضاً دورة مثل الإشارة بحيث يكون التعبير محققاً عند كل الأزمنة، وليس فقط في الفترة $t_0 < t < t_0 + T$. في هذا المثال كانت الإشارة الأصلية وتمثيلها لهما الدورة الأساسية نفسه ولكن في العموم من الممكن أن تكون دورة التمثيل أي دورة أخرى، سواء كانت أساسية أم لا، فإن التمثيل للإشارة يظل محققاً عند أي زمن.

كل واحدة من الدوال الجيبية المستخدمة في التقريب في المثال السابق كانت على الصورة $A \cos(2\pi kt/T + \theta)$. باستخدام قاعدة حساب المثلثات التالية:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

يمكننا التعبير عن الدالة الجيبية السابقة كما يلي:

$$A \cos(2\pi kt/T + \theta) = A \cos(\theta) \cos(2\pi kt/T) - A \sin(\theta) \sin(2\pi kt/T)$$

إن هذا يثبت أيضاً أن أي دالة جيب تمام مزاحة يمكن التعبير عنها أيضاً كمجموع من جيوب التمام غير المزاحة والجيوب المزاحة بالدورة نفسها إذا أحسن اختيار هذه المقادير. هذا التجميع الخطي لكل الجيوب التي يتم التعبير عنها كمجموع من جيوب التمام والجيوب يسمى تتابع فورير المستمر زمنياً، continuous time Fourier series, CTFS والتي يمكن كتابتها كما يلي:

$$x(t) = a_x[0] + \sum_{k=1}^{\infty} a_x[k] \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_x[k] \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

حيث $a_x[0]$ هي القيمة المتوسطة للإشارة في التمثيل الزمني، و k هي رقم التوافق harmonic و $a_x[k]$ و $b_x[k]$ هي دوال في المتغير k تسمى الدوال التوافقية. لقد استخدمنا هنا الرمز $[\cdot]$ ليحتوي المعامل k لأن رقم التوافق يكون دائماً رقماً صحيحاً. الدوال التوافقية تضع مقادير الجيوب و جيوب التمام و k تحدد التردد. لذلك فإن الجيوب و جيوب التمام ذات الترددات العليا تكون تردداتها مضاعفات صحيحة من التردد الأساسي وهذا المضاعف يكون هو k . فمثلاً الدالة $\cos(2\pi kt/T)$ تكون هي التوافق رقم k لجيب التمام. دورة هذا التوافق هي T/K وترددها الدوري هو k/T .

التعبير عن أي إشارة بهذه الطريقة كمجموع خطي من الجيوب وجيوب التمام ذات القيمة الحقيقية تسمى الصورة المثلثية لتتابع فوريير المستمر زمنياً CTFS.

لأغراض خاصة، فإنه من المهم أن نمهد هنا لما سيأتي فيما بعد لنرى التكافؤ مع الصورة المركبة لتتابع فوريير المتقطع زمنياً CTFS. كل جيب وجيب ذو قيمة حقيقية يمكن استبدالهما بالمجموع الخطي للأسس المركبة على الصورة :

$$\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) = \frac{e^{j\frac{2\pi kt}{T}} - e^{-j\frac{2\pi kt}{T}}}{j2} \quad \text{و} \quad \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) = \frac{e^{j\frac{2\pi kt}{T}} + e^{-j\frac{2\pi kt}{T}}}{2}$$

إذا أضفنا جيب التمام والجيب مع المقادير $a_x[k]$ و $b_x[k]$ ، على التوالي لأي توافق رقم k نحصل على :

$$a_x[k] \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_x[k] \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) = a_x[k] \frac{e^{j\frac{2\pi kt}{T}} + e^{-j\frac{2\pi kt}{T}}}{2} + b_x[k] \frac{e^{j\frac{2\pi kt}{T}} - e^{-j\frac{2\pi kt}{T}}}{j2}$$

بدمج الأسس المتماثلة في الطرف الأيمن نحصل على :

$$a_x[k] \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_x[k] \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) = \frac{1}{2} \{ (a_x[k] - jb_x[k]) e^{j\frac{2\pi kt}{T}} + (a_x[k] + jb_x[k]) e^{-j\frac{2\pi kt}{T}} \}$$

$$a_x[k] \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_x[k] \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) = \frac{1}{2} \left\{ (a_x[k] - jb_x[k]) e^{j2\pi kt/T} + (a_x[k] + jb_x[k]) e^{-j2\pi kt/T} \right\}$$

والآن إذا حددنا الثوابت التالية :

$$c_x[-k] = c_x^*[k] \quad \text{و} \quad k > 0 \quad \text{حيث} \quad c_x[k] = (a_x[k] - jb_x[k])/2, \quad c_x[0] = a_x[0]$$

فإنه يمكننا كتابة :

$$a_x[k] \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_x[k] \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) = c_x[k] e^{j\frac{2\pi kt}{T}} + c_x[-k] e^{-j\frac{2\pi kt}{T}}, \quad k > 0$$

ولدينا المقدار $c_x[k]$ للجيب المركب $e^{j2\pi kt/T}$ عند المضاعفات الصحيحة الموجبة والسالبة للتردد الدوري $1/T$. مجموع كل هذه الجيوب المركبة والثابت $c_x[0]$ يكافئ الدالة الأساسية، تماماً مثل مجموع جيوب وجيوب التمام والكمية الثابتة في الشرح السابق.

لتضمن الكمية الثابتة $c_x[0]$ في الشكل العام للجيوب المركبة سنفتضه أنه يمثل التوافق رقم صفر $k=0$ من التردد الأساسي. بفرض $k=0$ فإن الجيب المركب $e^{j2\pi kt/T}$ سيساوي 1 وإذا قمنا بضربه في الاختيار الصحيح لمعامل $c_x[0]$ فإنه يمكننا تكملة كل تمثيل CTFS. وسنرى في المواضيع التالية أن الصورة العامة نفسها لإيجاد $c_x[k]$ لأي قيمة لـ k لا تساوي الصفر يمكن استخدامها أيضاً، بدون أي تعديل لإيجاد $c_x[0]$ ، وأن $c_x[0]$ هي ببساطة القيمة نفسها المتوسطة في الزمن التمثيلي $t_0 < t < t_0 + T$ للدالة المطلوب تمثيلها. $c_x[k]$ هي دالة التوافق المركبة للإشارة $x(t)$. تتابع فوريير

المستمر زمنياً CTFS والمركب يكون أكثر كفاءة من الصورة المثلثية؛ لأنه توجد دالة توافق واحدة بدلاً من اثنين. لذلك يمكن كتابة تتابع فورير المستمر زمنياً CTFS بصورة أكثر ترابطاً كما يلي:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{j2\pi kt/T} \quad \text{المعادلة رقم (٦.١)}$$

لقد تأكدنا حتى الآن أن هذه الدوال التوافقية $c_x[k]$ موجودة ولكننا لم نوضح كيفية حسابها، أو إيجادها. إن ذلك سيكون موضوع الجزء التالي.

التعامدية والدوال التوافقية

في تتابع فورير، تحدد الكمية $c_x[k]$ مقدار وزاوية الجيوب المركبة التي تكون متعمدة فيما بينها. التعامد بين دالتين يعني أن الضرب القياسي للدالتين في الزمن على فترة زمنية معينة يساوي صفراً. الضرب القياسي هو تكامل حاصل ضرب إحدى الدالتين والمرافق المركب للدالة الأخرى على فترة زمنية معينة، في هذه الحالة الفترة الزمنية هي T . لكي تكون الدالتان x_1 و x_2 متعامدتين على الفترة $t_0 < t < t_0 + T$ ، فإن:

$$(x_1(t), x_2(t)) = \int_{t_0}^{t_0+T} x_1(t) x_2^*(t) dt = 0$$

الضرب القياسي

يمكننا أن نبين أن الضرب القياسي للجيب المركب $e^{j2\pi kt/T}$ والجيب المركب $e^{j2\pi qt/T}$ على الفترة الزمنية $t_0 < t < t_0 + T$ يكون صفراً إذا كانت كل من k و q أرقاماً صحيحة و $k \neq q$. يمكننا أن نكتب الضرب القياسي لهاتين الدالتين على الصورة:

$$(e^{j2\pi kt/T}, e^{j2\pi qt/T}) = \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j2\pi kt/T} e^{-j2\pi qt/T} dt = \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j2\pi(k-q)t/T} dt$$

باستخدام قاعدة أويلر:

$$(e^{j2\pi kt/T}, e^{j2\pi qt/T}) = \int_{t_0}^{t_0+T} \left[\cos\left(2\pi \frac{k-q}{T} t\right) + j \sin\left(2\pi \frac{k-q}{T} t\right) \right] dt$$

حيث إن كل من k و q أرقام صحيحة، فإنه إذا كانت $k \neq q$ ، فإن كلا من الدتتي الجيب وجيب التمام يتم تكاملهما على الدورة الكاملة (أو عدد صحيح من الدورة الأساسية). التكامل المحدود لأي جيب (بتردد لا يساوي الصفر) على أي دورة كاملة يساوي صفراً. إذا كانت $k = q$ فإن ما تحت التكامل يصبح $\cos(0) + \sin(0) = 1$ وسيكون الضرب القياسي في هذه الحالة يساوي T . أما إذا كانت $k \neq q$ فإن قيمة الضرب القياسي في المعادلة (٦.٢) يساوي صفراً. وعلى ذلك فإن أي جيبين مركبين بعدد صحيح من الدورات الأساسية في الفترة $t_0 < t < t_0 + T$ سيكونان متعامدين، إلا إذا كانا لهما العدد نفسه من الدورات الأساسية. على ذلك يمكننا أن نخلص بأن الدوال التي على الصورة

$e^{j2\pi kt/T}$ ، و $-\infty < k < \infty$ تكون عدداً لا نهائي من الدوال، كل منها متعامد مع الآخر على الفترة الزمنية $t_0 < t < t_0 + T$ حيث t_0 اختيارية.

يمكننا الآن أن نستفيد من هذا التعامد بضرب كل من طرفي معادلة تتابع فوريير في $e^{j2\pi qt/T}$ حيث q رقم صحيح فنحصل على المعادلة التالية :

$$x(t)e^{-j2\pi qt/T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k]e^{-j2\pi kt/T}e^{-j2\pi qt/T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k]e^{-\frac{j2\pi(k-q)t}{T}}$$

الآن، إذا كاملنا الطرفين على الفترة الزمنية $t_0 < t < t_0 + T$ نحصل على :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-j2\pi qt/T} dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k]e^{-\frac{j2\pi(k-q)t}{T}} \right] dt$$

حيث إن k و t متغيران مستقلان، فإن تكامل المجموع على الجانب الأيمن يكافئ مجموع التكاملات. وعلى ذلك يمكن كتابة المعادلة السابقة كالتالي :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-j2\pi qt/T} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-\frac{j2\pi(k-q)t}{T}} dt$$

وباستخدام حقيقة أن التكامل يساوي صفرًا إلا إذا كان $k=q$ ، فإن المجموع :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-\frac{j2\pi(k-q)t}{T}} dt$$

يتحول إلى $c_x[q]T$ ويمكننا كتابة :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-j2\pi qt/T} dt = c_x[q]T$$

بالحل لإيجاد $c_x[q]$ ،

$$c_x[q] = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-j2\pi qt/T} dt$$

إذا كان هذا التعبير صحيحاً لـ $c_x[q]$ ، فإن $c_x[k]$ في تتابع فوريير الأصلي في المعادلة (٦.١) يمكن كتابته كما

يلي :

المعادلة رقم (٦.٣)

$$c_x[k] = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-j2\pi kt/T} dt$$

من هذه الإثباتات نستنتج أنه، إذا كان التكامل في (٦.٣) يتقارب، فإن الإشارة الدورية $x(t)$ يمكن التعبير عنها كما

يلي :

المعادلة رقم (٦.٤)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{j2\pi kt/T}$$

حيث :

المعادلة رقم (٦.٥)

$$c_x[k] = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j2\pi kt/T} dt$$

والرمز \int_T يعني التكامل نفسه مثل $\int_{t_0}^{t_0+T}$ مع اختيار t_0 بطريقة اختيارية. وعلى ذلك فإن $x(t)$ و $c_x[k]$ يكونان زوج تابع فوريير المستمر زمنياً، والذي يمكن توضيحه بالرمز :

$$x(t) \xleftrightarrow[T]{\mathcal{F}} c_x[k]$$

حيث الاتجاه من اليسار لليمين يمثل حساب تابع فوريير، ومن اليمين لليمن يعني أن $c_x[k]$ يتم حسابها مع اعتبار T هي الدورة الأساسية لتمثيل $x(t)$ كتتابع فوريير في الزمن المستمر CTFS.

هذه الاستنتاجات تمت اعتماداً على استخدام الدورة T للإشارة على أنها فترة التعامد وأيضاً على أنها الدورة الأساسية لتمثيل تابع فوريير المستمر زمنياً. من الممكن أن تكون T أي دورة للإشارة، بما في ذلك دورتها الأساسية T_0 وهي الدورة التي يشيع استخدامها عملياً. في هذه الحالة تصبح علاقة تابع فوريير المستمر زمنياً CTFS كما يلي :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{j2\pi kt/T_0}$$

وأيضاً :

$$c_x[k] = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi kt/T_0} dt = f_0 \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

حيث $f_0 = 1/T_0$ هي التردد الدوري الأساسي للإشارة $x(t)$.

إذا كان تكامل الإشارة $x(t)$ على الفترة الزمنية $t_0 < t < t_0 + T$ ، لا يتقارب أو بمعنى آخر يتباعد، فإن تابع فوريير المستمر زمنياً CTFS لا يمكن الحصول عليه. هناك شرطان آخران لإمكانية تطبيق الـ CTFS، والتي مع شرط تقارب التكامل تسمى شروط درشليت Dirichlet. شروط درشليت يمكن كتابتها كما يلي :

١- الإشارة يجب أن تكون قابلة للتكامل التام على الفترة الزمنية $t_0 < t < t_0 + T$ ، بمعنى،

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt < \infty$$

٢- يجب أن يكون للإشارة عدد محدود من القيم العظمى والصغرى في الفترة الزمنية $t_0 < t < t_0 + T$.

٣- يجب أن يكون للإشارة عدد محدود من نقاط عدم الاتصال، وكلها لها حجم محدود، في الفترة الزمنية

$$t_0 < t < t_0 + T$$

هناك إشارات افتراضية تكون شروط درشليت لها غير محققة، ولكنها ليس لها أي استخدام هندسي

معروف.

تتابع فوريير المثلثي المدمج

افترض تتابع فوريير المثلثي التالي :

$$x(t) = a_x[0] + \sum_{k=1}^{\infty} a_x[k] \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_x[k] \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$$

باستخدام العلاقة :

$$A \cos(x) + B \sin(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos\left(x - \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)\right)$$

يمكننا أن نكتب ما يلي :

$$x(t) = a_x[0] + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_x^2[k] + b_x^2[k]} \cos\left(\frac{2\pi kt}{T} + \tan^{-1}\left(-\frac{b_x[k]}{a_x[k]}\right)\right)$$

أو :

$$x(t) = d_x[0] + \sum_{k=1}^{\infty} d_x[k] \cos\left(\frac{2\pi kt}{T} + \theta_x[k]\right)$$

حيث :

$$d_x[0] = a_x[0] \quad \text{و} \quad d_x[k] = \sqrt{a_x^2[k] + b_x^2[k]} \quad \text{و} \quad k > 0$$

وأيضاً :

$$\theta_x[k] = \tan^{-1}\left(-\frac{b_x[k]}{a_x[k]}\right) \quad \text{و} \quad k > 0$$

هذه العلاقة هي ما يسمى بتتابع فوريير المثلثي المدمج. إنها كما نرى معبراً عنها بدوال ومعاملات ذوات قيم حقيقية وهي مدمجة إلى حد ما عن الصورة المثلثية ولكنها ما زالت ليست مدمجة مثل الصورة المركبة التي على الصورة $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x e^{j2\pi kt/T}$ هي في الحقيقة التي استخدمت عن طريق بابتست جوزيف فوريير .Baptiste Joseph Fourier

مثال ٦.١

الدوال التوافقية لتتابع فوريير المستمر زمنياً CTFS للموجة المستطيلة

أوجد الدوال التوافقية المركبة CTFS للدالة $x(t) = \text{rect}(t/\omega) * \delta_{T_0}(t)$ حيث $\omega < T_0$ مستخدماً دورتها الأساسية

في التعبير الزمني.

الدورة الأساسية هي T_0 ولذلك فإن الدوال التوافقية لتتابع فوريير المستمر ستكون :

$$c_x[k] = \left(\frac{1}{T_0}\right) \int_{T_0} A \text{rect}\left(\frac{t}{\omega}\right) * \delta_{T_0}(t) e^{-j2\pi kt/T_0} dt$$

فترة التكامل من الممكن أن تكون في أي مكان طالما أن طولها هو T_0 . لتسهيل سنختار فترة التكامل لتكون

وعلى ذلك فإن : $-T_0/2 \leq t < T_0/2$

$$c_x[k] = \left(\frac{A}{T_0}\right) \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \text{rect}\left(\frac{t}{\omega}\right) * \delta T_0(t) e^{-j2\pi kt/T_0} dt$$

باستخدام $\omega < T_0$ وحقيقة أن هذه الفترة تحتوي دالة مستطيلة واحدة :

$$c_x[k] = \left(\frac{A}{T_0}\right) \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \text{rect}\left(\frac{t}{\omega}\right) e^{-j2\pi kt/T_0} dt = \left(\frac{A}{T_0}\right) \int_{-\omega/2}^{\omega/2} e^{-j2\pi kt/T_0} dt$$

$$c_x[k] = \left(\frac{A}{T_0}\right) \left[\frac{e^{-j2\pi kt/T_0}}{-j2\pi k/T_0} \right]_{-\omega/2}^{\omega/2} = A \left[\frac{e^{-j\pi k\omega/T_0} - e^{j\pi k\omega/T_0}}{-j2\pi k} \right] = A \frac{\sin\left(\frac{\pi k\omega}{T_0}\right)}{\pi k}$$

وفي النهاية يمكن كتابة :

$$x(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{\omega}\right) * \delta T_0(t) \xleftrightarrow[T]{\mathcal{F}} c_x[k] = A \frac{\sin\left(\frac{\pi k\omega}{T_0}\right)}{\pi k}$$

(على الرغم من أننا قصرنا ω في هذا المثال على أن تكون أقل من T_0 لتبسيط التحليل، إلا أن النتيجة

ستكون صحيحة أيضاً لقيم ω أكبر من T_0)

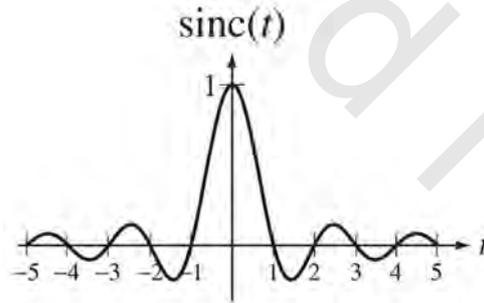
في المثال ٦.١ فقد أصبحت الدالة التوافقية هي $c_x[k] = A \frac{\sin\left(\frac{\pi k\omega}{T_0}\right)}{\pi k}$. هذه الصورة الرياضية المكونة من جيب

كمية معينة مقسومة على الكمية نفسه تحدث عادة وتكراراً في تحليلات فورير. لذلك سنحدد الآن دالة وحدة السنك

unit sinc function كما هي موضحة في شكل (٦.٧) كما يلي :

المعادلة رقم (٦.٦)

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$



شكل رقم (٦.٧) دالة وحدة السنك.

نستطيع الآن التعبير عن الدالة التوافقية في مثال ٦.١ كما يلي :

$$c_x[k] = \left(\frac{A\omega}{T_0}\right) \text{sinc}\left(\frac{k\omega}{T_0}\right)$$

والتعبير عن زوج الـ CTFS كما يلي :

$$x(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{\omega}\right) * \delta T_0(t) \xleftrightarrow[T]{\mathcal{F}} c_x[k] = \left(\frac{A\omega}{T_0}\right) \text{sinc}\left(\frac{\omega k}{T_0}\right)$$

دالة وحدة السنك تسمى بدالة الوحدة ؛ لأن كل من ارتفاعها ومساحتها تساوي واحد.

واحد من الأسئلة الشائعة عند التعامل الأول مع الدالة سنك هو كيف نحدد القيمة $\text{sinc}(0)$. عندما يكون المتغير المستقل t في الدالة $\sin(\pi t)/\pi t$ يساوي صفرًا، فإن كل من البسط $\sin(\pi t)$ والمقام πt يؤوول إلى الصفر بحيث تنتهي بصورة غير محددة للدالة. الحل لذلك هو استخدام قانون لوبيتال L'Hopital، وعلى ذلك :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \text{sinc}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi \cos(\pi t)}{\pi} = 1$$

وعلى ذلك فإن $\text{sinc}(t)$ تكون مستمرة عند $t=0$ وأيضاً $\text{sinc}(0)=1$.

التقارب

الإشارات المستمرة

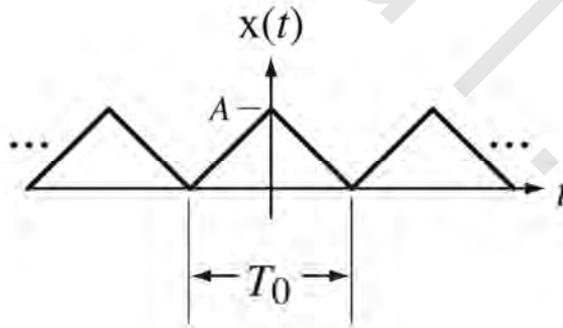
سنوضح في هذا الجزء كيف أن مجموع تتابع فوريير المستمر زمنياً يقترب تماماً من الإشارة التي يمثلها مع اقتراب عدد الحدود المستخدمة في التقريب من الما لانهاية. سنوضح ذلك عن طريق فحص المجموع الجزئي التالي لكل القيم العليا من N :

$$X_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_x[k] e^{j2\pi kt/T}$$

كمثال أولي سنفترض هنا التعبير عن إشارة دورية مستمرة زمنياً كالموضحة في شكل (٦.٨) كتتابع فوريير مستمر CTFS. كل من الإشارة، و CTFS يمكن كتابتهما كما يلي (باستخدام الدورة الأساسية للإشارة كدورة أساسية للتعبير عن CTFS) :

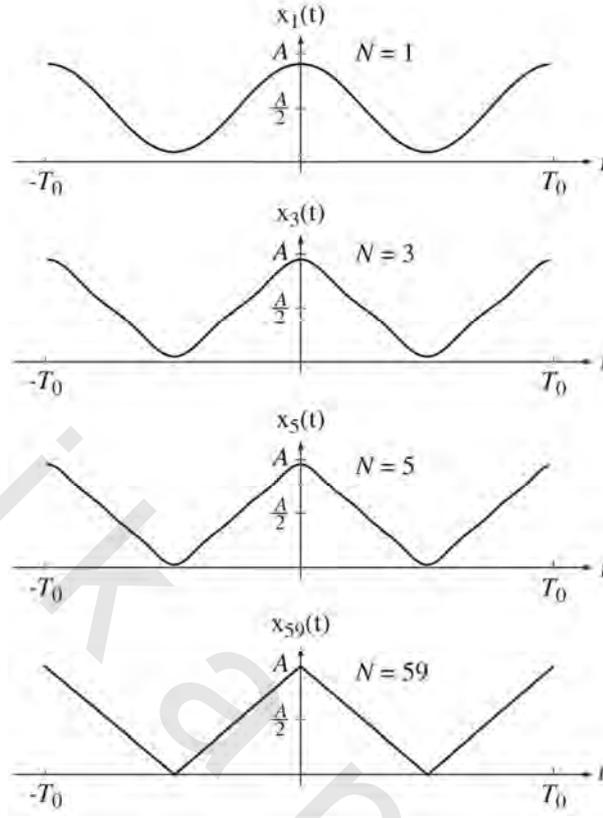
$$x(t) = A \text{tri}(2t/T_0) * \delta_{T_0}(t)$$

$$\text{Atri}(2t/T_0) * \delta_{T_0}(t) \xleftrightarrow[\mathcal{F}]{T_0} (A/2) \text{sinc}^2(k/2)$$



شكل رقم (٦.٨) دالة مستمرة مطلوب تمثيلها بتتابع فوريير المستمر ومنيا CTFS.

وتقريبات المجموع الجزئي $x_N(t)$ لقيم $N=1, 3, 5, \dots, 59$ موضحة في شكل (٦.٩).



شكل (٦.٩) تقريبات متتالية قريبة من الموجة المثلة.

عندما $N=59$ (وربما عند قيم أقل لـ N)، فإنه من غير الممكن أن نفرق بين مجموع تقريبات CTFS والإشارة الأصلية من ملاحظة رسمهما على التدرج نفسه.

الإشارات غير المتصلة

افترض الإشارة الدورية التالية التي بها عدم اتصال كما في شكل (٦.١٠) :

$$x(t) = \text{Arect}\left(2\frac{t - T_0/4}{T_0}\right) * \delta_{T_0}(t)$$

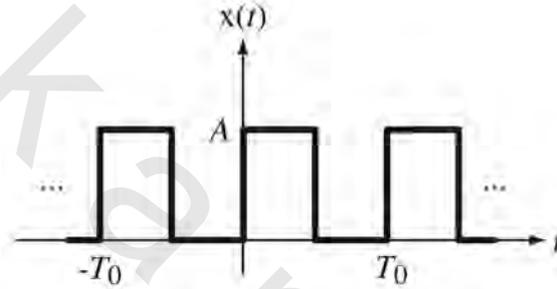
زوج تتابع فوريير المتصل لهذه الدالة يمكن كتابتها كما يلي :

$$\text{Arect}\left(2\frac{t - T_0/4}{T_0}\right) * \delta_{T_0}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \left(\frac{A}{2}\right)(-j)^2 \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$$

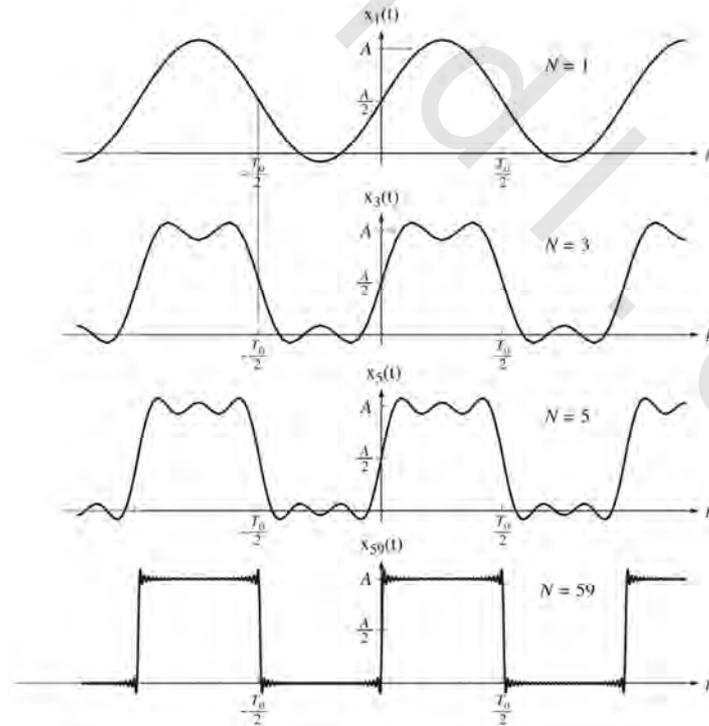
والتقريبات المختلفة $x_N(t)$ لقيم $N=1, 3, 5, 59$ موضحة في شكل (٦.١١).

على الرغم من أن الاستنتاج الرياضي يوضح أن الإشارة الأصلية وتمثيلها بتتابع CTFS يكونان متساويين في كل مكان، فإنه من الطبيعي أن نتعجب عما إذا كان ذلك سيكون حقيقياً بالنظر إلى شكل (٦.١١). هناك من الواضح وجود تحطُّ وتذبذبات بالقرب من عدم الاتصال، والتي تكون غير موجودة في الأصل، أو تصبح أصغر

مع الزيادة في N . في الحقيقة فإن القيمة العظمى للتخطي بالقرب من أي عدم اتصال لا تنقص مع زيادة N ، حتى لو اقتربت N من الما لانهاية. هذا التخطي يسمى بقانون جيبس نسبة إلى جوزيه جيبس Josiah Gibbs الذي كان أول من وصف هذه الظاهرة رياضياً. لاحظ أيضاً أن هذه التموجات يقتصر وجودها على أي مكان قريباً من أي عدم اتصال مع زيادة N . في النهاية ومع اقتراب N من الما لانهاية فإن ارتفاع هذا التخطي يكون ثابتاً ولكن عرضه يقترب من الصفر. الخطأ في تقريب المجموع الجزئي يكون هو الفرق بين هذا المجموع والإشارة الأصلية. في النهاية ومع اقتراب N من الما لانهاية فإن طاقة إشارة هذا الخطأ تقترب من الصفر؛ لأن الفرق في النقاط التي عرضها صفر عند نقاط عدم الاتصال لن يحتوي على أي طاقة. أيضاً عند أي قيمة معينة للزمن t (فيما عدا عند نقطة عدم الاتصال تماماً)، فإن قيمة تمثيل تتابع فوريير المستمر CTFS تقترب من الإشارة الأصلية مع اقتراب N من الما لانهاية.

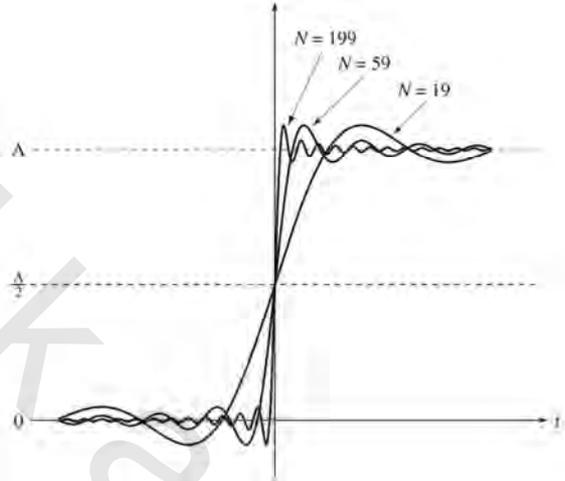


شكل رقم (٦.١٠) إشارة غير متصلة لتمثيلها بتتابع فوريير المستمر CTFS.



شكل رقم (٦.١١) تقريبات متتالية قريبة من الموجة المربعة.

عند نقاط الانفصال فإن القيمة الدالية لتتابع فورير المستمر CTFS تكون دائماً متوسط حدي الدالة الأصلية عندما تتقارب من أعلى ومن أسفل لأي قيمة لـ N . شكل (٦.١٢) هي منظر مكبر لتمثيل CTFS عند نقطة انفصال لثلاث قيم مختلفة لـ N . حيث إن طاقة إشارة الفرق بين الإشارتين تكون صفراً في أي فترة زمنية محددة، فإن تأثيرهما على أي نظام طبيعي حقيقي يكون هو نفسه ويمكن اعتبارهما متساويين للأغراض العملية.



شكل رقم (٦.١٢) توضيح لظاهرة جيبس مع زيادة N .

أقل خطأ للمجموع الجزئي لتتابع فورير

إن تتابع فورير المستمر زمنياً CTFS يتكون من مجموع لا نهائي من الجيوب. عموماً، للتساوي المطلق بين أي إشارة أصلية اختيارية وتمثيلها كتتابع فورير مستمر CTFS، فإنه لا بد من استخدام عدد لا نهائي من التتابعات. (الإشارات التي يمكن تحقيق التساوي لها بعدد محدود من التتابعات تسمى الإشارات المحدودة المجال). إذا تم فرض تقريب المجموع الجزئي التالي :

$$\text{المعادلة رقم (٦.٧)} \quad X_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_x[k] e^{j2\pi kt/T}$$

لأي إشارة $x(t)$ باستخدام أول N فقط من التوافقات لتتابع فورير المستمر، فإن الفرق بين $x(t)$ و $x_N(t)$ يكون هو خطأ التقريب $e_N(t) = x_N(t) - x(t)$. نحن نعلم من المعادلة (٦.٧) أنه عندما تؤول N إلى الما لانهاية فإن التساوي يتحقق عند كل نقطة من نقاط اتصال $x(t)$. ولكن عندما تكون N محدودة فهل الدالة التوافقية $c_x[k]$ لقيم $-N < k < N$ ستعطي أفضل تقريب ممكن للإشارة $x(t)$ ؟ بمعنى آخر، هل نستطيع اختيار دالة توافقية مختلفة $c_{x,N}[k]$ التي إذا تم استخدامها بدلاً من $c_x[k]$ في المعادلة (٦.٧) فمن الممكن أن تعطي تقريباً أفضل للإشارة $x(t)$ ؟

المهمة الأولى في الإجابة على هذا السؤال هي أن نحدد ما هو المقصود بعبارة "أفضل تقريب ممكن". في العادة يفترض أن المقصود من ذلك هو أن طاقة إشارة الخطأ $e_N(t)$ على مدار دورة واحدة T يكون أقل ما يمكن. دعنا الآن نوجد الدالة التوافقية الجديدة $c_{x,N}[k]$ التي ستعطي أقل طاقة إشارة للخطأ :

$$e_N(t) = \underbrace{\sum_{k=-N}^N c_{x,N}[k] e^{j2\pi kt/T}}_{x_N(t)} - \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{j2\pi kt/T}}_{x(t)}$$

افترض :

$$c_y[k] = \begin{cases} c_{x,N}[k] - c_x[k], & |k| \leq N \\ -c_x[k], & |k| > N \end{cases}$$

فإن :

$$c_N(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_y[k] e^{j2\pi kt/T}$$

طاقة إشارة الخطأ على دورة واحدة ستكون :

$$E_e = \frac{1}{T} \int_T |e_N(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_T \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_y[k] e^{j2\pi kt/T} \right|^2 dt$$

$$E_e = \frac{1}{T} \int_T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_y[k] e^{j2\pi kt/T} \right) \left(\sum_{q=-\infty}^{\infty} c_y^*[q] e^{-j2\pi qt/T} \right) dt$$

$$E_e = \frac{1}{T} \int_T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_y[k] c_y^*[k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty, q \neq k}^{\infty} c_y[k] c_y^*[q] e^{j2\pi(k-q)t/T} \right) dt$$

تكامل المجموع المزدوج يكون صفراً لكل $k \neq q$ لأن التكامل على دورة كاملة للأس $e^{j2\pi(k-q)t/T}$ يكون صفراً.

وعلى ذلك يمكن كتابة :

$$E_e = \frac{1}{T} \int_T \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_y[k] c_y^*[k] dt = \frac{1}{T} \int_T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_y[k]|^2 dt$$

بالتعويض عن $c_y[k]$ نحصل على :

$$E_e = \frac{1}{T} \int_T \left(\sum_{k=-N}^N |c_{x,N}[k] - c_x[k]|^2 + \sum_{|k|>N} |-c_x[k]|^2 \right) dt$$

$$E_e = \sum_{k=-N}^N |c_{x,N}[k] - c_x[k]|^2 + \sum_{|k|>N} |c_x[k]|^2$$

كل الكميات التي يتم جمعها ليست سالبة، وحيث إن المجموع الثاني يكون ثابتاً، فإننا نريد المجموع الأول أن يكون أصغر ما يمكن. إنه يساوي صفرًا إذا كان $c_{x,N}[k]=c_x[k]$ ، مما يثبت أن دالة التوافقات $c_x[k]$ تعطي أقل متوسط لمربع الخطأ في تقريب المجموع الجزئي.

تتابع فوريير للدوال الدورية الزوجية والفردية

لنفترض حالة التعبير عن الإشارات الدورية الزوجية $x(t)$ ذات الدورة الأساسية T_0 في تتابع فوريير المستمر CTFS. الدالة التوافقية هي :

$$c_x[k] = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j2\pi kt/T} dt$$

بالنسبة للإشارات الدورية فإن هذا التكامل لا يعتمد على نقطة البداية. ولذلك يمكننا إعادة كتابة هذا

التكامل كما يلي :

$$c_x[k] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi kt/T} dt = \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt - j \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \right]$$

في التكامل الأول في الطرف الأيمن تكون الدالة $x(t)$ زوجية وجيب التمام $\cos(2\pi kt/T)$ زوجياً أيضاً، وبالتالي فإن حاصل ضربهما يكون زوجياً. بالنسبة للتكامل الثاني فإن $x(t)$ زوجية والجيب $\sin(2\pi kt/T)$ فردي، وبالتالي يكون حاصل ضربهما فردياً. باستخدام حقيقة أن تكامل أي دالة فردية على حدود متماثلة حول الصفر يكون صفرًا، وبالتالي فإن $c_x[k]$ ستكون حقيقية. بطريقة مماثلة يمكننا أن نبين أنه لأي دالة فردية فإن $c_x[k]$ ستكون تخيلية.

إذا كانت $x(t)$ زوجية وذات قيم حقيقية، فإن $c_x[k]$ ستكون زوجية وذات قيم حقيقية.
إذا كانت $x(t)$ فردية وذات قيم حقيقية، فإن $c_x[k]$ ستكون فردية وذات قيم تخيلية.

جداول تتابع فوريير وخواصه

خواص تتابع فوريير المستمر زمنياً CTFS موضحة في جدول ٦.١. يمكن إثبات كل هذه الخواص باستخدام

تعريف تتابع فوريير المستمر والدالة التوافقية الموضحين فيما يلي :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{j2\pi kt/T} \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} c_x[k] = \left(\frac{1}{T}\right) \int x(t) e^{-j2\pi kt/T} dt$$

في خاصية ثنائية الضرب والالتفاف، فإن التكامل التالي سيظهر :

$$x(t) \otimes y(t) = \int_T x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

إن ذلك يشبه كثيراً التكامل الالتفافي الذي رأينا مسبقاً فيما عدا أن مدى التكامل يكون على الدورة الأساسية T لتمثيل تتابع فوريير المستمر CTFS بدلاً من $-\infty$ إلى ∞ . هذه العملية تسمى الالتفاف الدوري periodic convolution. في العادة يتم عمل الالتفاف الدوري على إشارتين دوريتين، وعلى الدورة الأساسية T التي تكون مشتركة للإشارتين. الالتفاف الذي قدمناه في الفصل ٥ لم يكن التفافاً دورياً. الالتفاف الدوري يكافئ الالتفاف غير الدوري فيما يأتي. أي إشارة دورية $x_p(t)$ دورتها هي T يمكن التعبير عنها كمجموع من الإشارات متساوية التباعد غير الدورية $x_{ap}(t)$ كما يلي :

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{ap}(t - kT)$$

يمكننا أن نبين أن الالتفاف الدوري لـ $x_p(t)$ مع $y_p(t)$ يمكن كتابته كما يلي :

$$x_p(t) \otimes y_p(t) = x_{ap}(t) * y_p(t)$$

الدالة $x_{ap}(t)$ ليست دالة وحيدة أو فريدة. إنها يمكن أن تكون أي دالة تحقق الشرط التالي :

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{ap}(t - kT)$$

جدول ٦.٢ يبين بعض أزواج الـ CTFS الشائعة. كلها، فيما عدا واحدة تعتمد على الدورة الأساسية T

لتمثيل الـ CTFS الذي ستكون mT_0 ، حيث m أي رقم صحيح و T_0 هي الدورة الأساسية للإشارة.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{j2\pi kt/mT_0} \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} c_x[k] = \frac{1}{mT_0} \int_{mT_0} x(t) e^{-j2\pi kt/mT_0} dt$$

جدول رقم ٦.١ خواص تتابع فوريير المستمر زمنياً

$\alpha x(t) + \beta y(t) \xleftrightarrow[T_0]{\mathcal{F}} \alpha c_x[k] + \beta c_y[k]$	الخطية
$x(t - t_0) \xleftrightarrow[T_0]{\mathcal{F}} e^{-j2\pi k t_0 / T} c_x[k]$	الإزاحة الزمنية
$e^{j2\pi k t_0 / T} x(t) \xleftrightarrow[T_0]{\mathcal{F}} c_x[k - k_0]$	الإزاحة الترددية
$x^*(t) \xleftrightarrow[T_0]{\mathcal{F}} c_x^*[-k]$	الترافق
$\frac{d}{dt}(x(t)) \xleftrightarrow[T_0]{\mathcal{F}} (j2\pi k / T) c_x[k]$	التفاضل الزمني
$x(-t) \xleftrightarrow[T_0]{\mathcal{F}} c_x[-k]$	الانعكاس الزمني
$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow[T_0]{\mathcal{F}} \frac{c_x[k]}{j2\pi k / T}, k \neq 0 \text{ if } c_x[0] = 0$	التكامل الزمني
$\frac{1}{T} \int_T x(t) ^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] ^2$	نظرية بارسيغال
$x(t)\theta y(t) = \int_T x(t)y(t - \tau) d\tau \xleftrightarrow[T_0]{\mathcal{F}} T c_x[k] c_y[k]$ $x(t)y(t) \xleftrightarrow[T_0]{\mathcal{F}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_y[m] c_x[k - m] = c_x[k] * c_y[k]$	تبادل الضرب والالتفاف
$\text{if } x(t) \xleftrightarrow[T_0]{\mathcal{F}} c_x[k]$ $\text{and } x(t) \xleftrightarrow[T_0]{\mathcal{F}} c_{xm}[k]$ $c_{xm}[k] = \begin{cases} c_x[k/m], & k/m \text{ an integer} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	تغيير الفترة الزمنية
$\text{if } x(t) \xleftrightarrow[T_0]{\mathcal{F}} c_x[k]$ $\text{and } z(t) = x(mt) \xleftrightarrow[T_0]{\mathcal{F}} c_z[k]$ $c_z[k] = \begin{cases} c_x[k/m], & k/m \text{ an integer} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	التحجيم الزمني

جدول رقم ٦.٢ بعض أزواج تتابع فوريير المستمر زمنياً

$$\begin{aligned}
 e^{j2\pi t/T_0} &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \delta[k-m] \\
 & mT_0 \\
 \cos(2\pi k/T_0) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} (1/2)\delta[k-m] + \delta[k+m] \\
 & mT_0 \\
 \sin(2\pi k/T_0) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j/2)\delta[k+m] - \delta[k-m] \\
 & mT_0 \\
 1 &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \delta[k], T \text{ is arbitrary} \\
 & mT_0 \\
 \delta_{T_0}(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} (1/T_0)\delta_m[k] \\
 & mT_0 \\
 \text{rect}(t/\omega) * \delta_{T_0}(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} (\omega/T_0)\text{sinc}(\omega k/mT_0)\delta_m[k] \\
 & mT_0 \\
 \text{tri}(t/\omega) * \delta_{T_0}(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} (\omega/T_0)\text{sinc}^2(\omega k/mT_0)\delta_m[k] \\
 & mT_0 \\
 \text{sinc}(t/\omega) * \delta_{T_0}(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} (\omega/T_0)\text{rect}(\omega k/mT_0)\delta_m[k] \\
 & mT_0 \\
 t[u(t) - u(t - \omega)] * \delta_{T_0}(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{T_0} \frac{[j(2\pi k\omega/mT_0)+1]e^{-j(2\pi k\omega/mT_0)} - 1}{(2\pi k/mT_0)^2} \delta_m[k]
 \end{aligned}$$

مثال ٦.٢

الإثارة الدورية والاستجابة لنظام مستمر زمنياً

يمكن وصف النظام المستمر زمنياً بالمعادلة التفاضلية التالية :

$$y''(t) + 0.04y'(t) + 1.58y(t) = x(t)$$

إذا كانت الإثارة هي $x(t) = \text{tri}(t) * \delta_5(t)$ ، فأوجد الإستجابة $y(t)$.

يمكن التعبير عن هذه الإثارة بتتابع فوريير المستمر كما يلي :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{j2\pi kt/T_0}$$

حيث من جدول ٦.٢ يمكننا كتابة :

$$c_x[k] = \left(\frac{w}{T_0}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{wk}{mT_0}\right) \delta_m[k]$$

بوضع $\omega=1$ و $T_0=5$ و $m=1$ فإن :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{k}{5}\right) \delta_1[k] e^{j2\pi kt/5} = \frac{1}{5} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{5}\right) e^{j2\pi kt/5}$$

ونحن نعرف أن التعبير عن تتابع فوريير المستمر يكون مجموعاً من الجيوب المركبة، والاستجابة لكل واحد

من هذه الجيوب ستكون جيئاً آخر بالتردد نفس. لذلك يمكن التعبير عن الاستجابة كما يلي :

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_y[k] e^{j2\pi kt/5}$$

وكل جيب مركب في $y(t)$ بتردد دوري أساسي $k/5$ يكون بسبب الجيب المركب في $x(t)$ بالتردد نفسه.

بالتعويض عن هذه الاستجابة في المعادلة التفاضلية نحصل على :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{j2\pi k}{5}\right)^2 c_y[k] e^{j2\pi kt/5} + 0.04 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{j2\pi k}{5}\right) c_y[k] e^{j2\pi kt/5} + 1.58 \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_y[k] e^{j2\pi kt/5} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{j2\pi kt/5}$$

بتجميع بعض العناصر والتبسيط نحصل على :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{j2\pi k}{5}\right)^2 + 0.04 \left(\frac{j2\pi k}{5}\right) + 1.58 \right] c_y[k] e^{j2\pi kt/5} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{j2\pi kt/5}$$

وعلى ذلك، فلأي قيمة معينة لـ k ، فإن الإثارة والاستجابة سيرتبطان بالعلاقة التالية :

$$\left[\left(\frac{j2\pi k}{5}\right)^2 + 0.04 \left(\frac{j2\pi k}{5}\right) + 1.58 \right] c_y[k] = c_x[k]$$

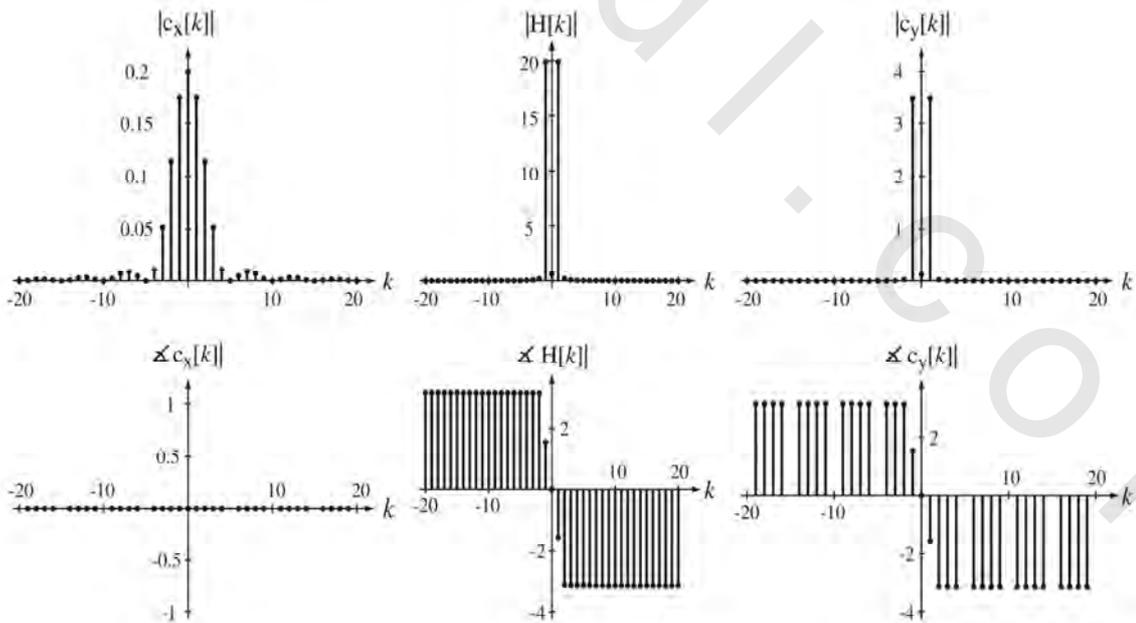
وبالتالي فإن :

$$\frac{c_y[k]}{c_x[k]} = \frac{1}{\left(\frac{j2\pi k}{5}\right)^2 + 0.04 \left(\frac{j2\pi k}{5}\right) + 1.58}$$

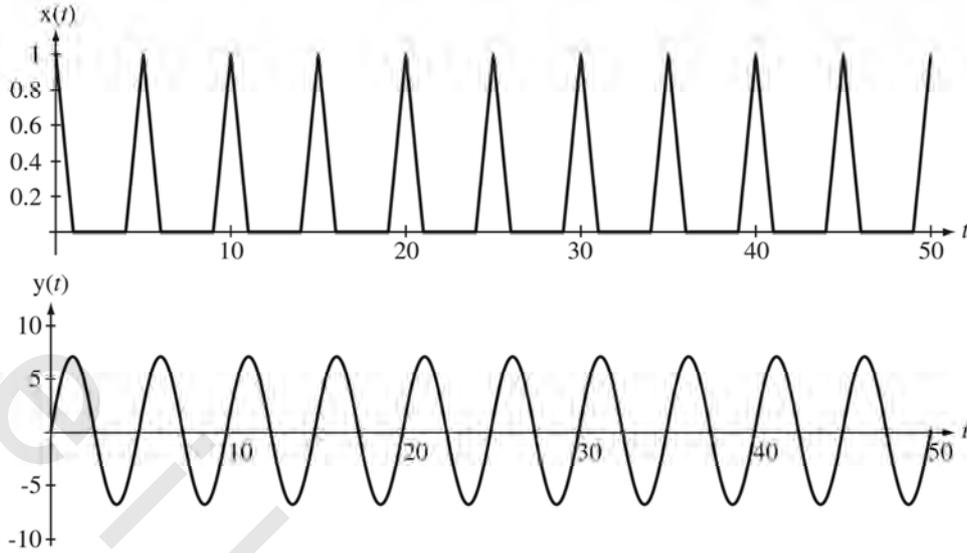
الكمية $H[k] = \frac{c_y[k]}{c_x[k]}$ تكافئ الاستجابة الترددية ويمكن بالمنطق نفسه أن نسميها الاستجابة التوافقية. استجابة

النظام ستكون :

$$y(t) = \left(\frac{1}{5}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sinc}^2\left(\frac{k}{5}\right)}{\left(\frac{j2\pi k}{5}\right)^2 + 0.04 \left(\frac{j2\pi k}{5}\right) + 1.58} e^{j2\pi kt/5}$$



شكل رقم (٦.١٣) دالة توافقات الإثارة، والاستجابة التوافقية للنظام، ودالة الاستجابة التوافقية.



شكل (٦.١٤) إثارة والاستجابة لها.

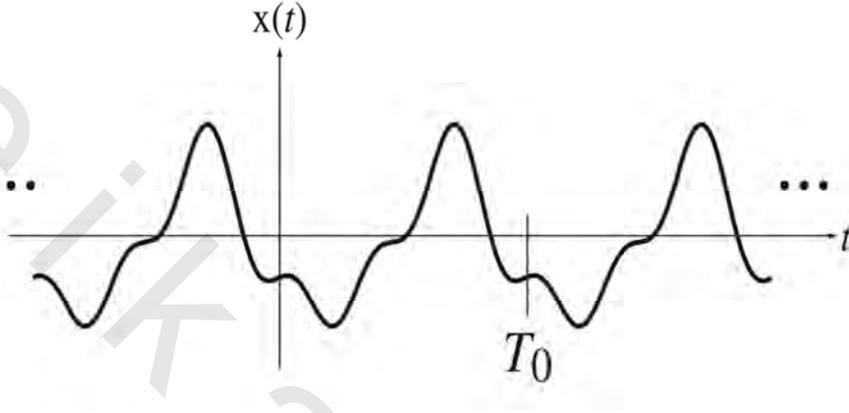
إن هذا التعبير السابق ذو الشكل المخيف إلى حد ما يمكن برمجته على الحاسب. بعض الإشارات، ودوالها التوافقية، والاستجابة التوافقية مبينة في شكل (٦.١٣) وشكل (٦.١٤).

يمكننا أن نرى من الاستجابة التوافقية أن النظام يستجيب بقوة عند التوافقية رقم واحد، وهي التردد الأساسي. الدورة الأساسية للإثارة $x(t)$ هي $T_0=5s$. وبالتالي فإن $y(t)$ يجب أن تكون لها استجابة قوية عند التردد $0.2Hz$. بالنظر إلى شكل الاستجابة، فإننا سنرى إشارة تشبه الإشارة الجيبية ودورتها الأساسية هي ٥ ثوانٍ، وبالتالي فإن ترددها الأساسي هو $0.2Hz$. مقدار كل التوافقات الأخرى، بما في ذلك $k=0$ تساوي الصفر تقريباً. وهذا هو السبب في أن القيمة المتوسطة للاستجابة تكون صفراً وتشبه الإشارة الجيبية، أي إشارة ذات تردد واحد. لاحظ أيضاً زاوية الاستجابة التوافقية عند التردد الأساسي. إنها تساوي 1.5536 راديان عند $k=1$ ، أي تساوي تقريباً $\pi/2$. هذه الإزاحة الزاوية ستغير جيب التمام إلى جيب. الإثارة دالة زوجية بمركبات جيب تمام فقط واستجابة تكون دالة فردية نتيجة هذه الإزاحة الطورية.

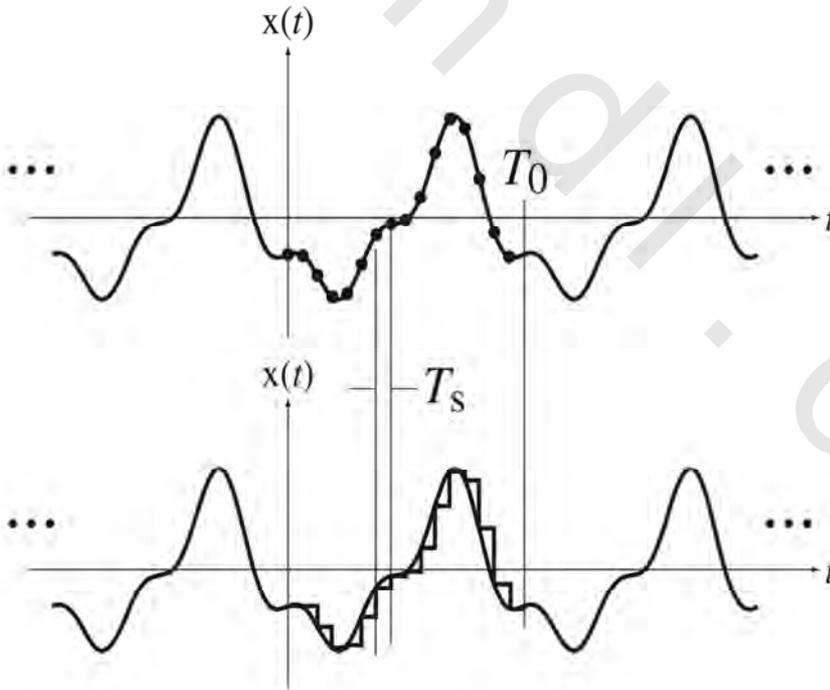
الحساب العددي لتتابع فوريير

دعنا نفترض مثالا لنوع مختلف من الإشارات فقد نحتاج إلى حساب تتابع فوريير المستمر، كما في شكل (٦.١٥). هذه الإشارة تعرض بعض المشاكل، حيث ليس من الواضح على الإطلاق كيف نصف هذه الإشارة. إنها ليست إشارة جيبية، أو أي إشارة لها شكل دالة رياضية معروفة. حتى الآن في دراستنا لتتابع فوريير المستمر، فإنه لكي نحسب الدالة التوافقية لتتابع فوريير المستمر لأي إشارة، فإننا نحتاج إلى وصف حسابي لهذه الإشارة. ولكن

ليس معنى أننا لا نستطيع وصف الإشارة حسابياً أنه لن يوجد تتابع فوريير CTFS لها. إن معظم الإشارات الحقيقية التي قد نحتاج لتحليلها عملياً ليس لها وصف حسابي معروف. إذا كان لدينا مجموعة من العينات المأخوذة من دورة واحدة من هذه الإشارة، فإنه يمكننا أن نقدر الدالة التوافقية لتتابع فوريير CTFS عددياً، وكلما كان عدد هذه العينات كبيراً، كان التقدير أكثر دقة كما في شكل (٦.١٦).



شكل رقم (٦.١٥) إشارة دورية اختيارية.



شكل رقم (٦.١٦) عينات مأخوذة من الإشارة الاختيارية لتقدير الدالة التوافقية لتتابع فوريير المستمر زمنياً CTFS لها

$$c_x[k] = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j2\pi kft/T} dt$$

حيث إن نقطة البداية للتكامل تكون اختيارية ، فإنه للتبسيط سنضع نقطة البداية لتكون $t=0$ وبالتالي :

$$c_x[k] = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi kft/T} dt$$

نحن الآن لا نعرف الدالة $x(t)$ ولكن إذا كان لدينا عدد N من العينات على مدى دورة واحدة تبدأ من $t=0$ ، فإن الزمن بين العينات سيكون $T_s=T/N$ ويمكننا في هذه الحالة تقريب التكامل بمجموع لعدد من التكاملات كل منها يغطي الفترة الزمنية T_s كما يلي :

$$\text{المعادلة رقم (٦.٨)} \quad c_x[k] \cong \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\int_{nT_s}^{(n+1)T_s} x(nT_s) e^{-j2\pi nT_s/T} dt \right]$$

(في شكل (٦.١٦) نرى أن العينات تمتد على مدى دورة أساسية واحدة ولكن يمكنها أن تمتد على مدى أي فترة وسيظل التحليل صحيحاً). إذا كانت العينات قريبة من بعضها بعضاً بما فيه الكفاية فإن $x(t)$ لن يكون هناك تغير كبير فيها بين العينات ، ويصبح التكامل في المعادلة (٦.٨) تقريباً جيداً. تفاصيل عملية التكامل موجودة في ملحق الويب رقم ح حيث تم بيان أنه بالنسبة للأرقام التوافقية $|k| < N$ يمكن تقريب الدالة التوافقية كما يلي :

$$\text{المعادلة رقم (٦.٩)} \quad c_x[k] \cong \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) e^{-j2\pi nk/N}$$

المجموع الذي على الجانب الأيمن من المعادلة (٦.٩) :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) e^{-j2\pi nk/N}$$

عملية مهمة جداً في معالجة الإشارات تسمى تحويل فوريير المتقطع discrete Fourier transform, DFT. وعلى

ذلك يمكن كتابة المعادلة (٦.٩) كما يلي :

$$\text{المعادلة رقم (٦.١٠)} \quad |k| \ll N \quad \text{حيث} \quad c_x[k] \cong (1/N) DFT(x(nT_s))$$

وأيضاً :

$$DFT(x(nT_s)) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) e^{-j2\pi nk/N}$$

إن تحويل فوريير المتقطع DFT يأخذ مجموعة من العينات التي تمثل دالة دورية على مدى دورة واحدة ويعطي مجموعة من الأرقام التي تمثل تقريباً للدالة التوافقية لتتابع فوريير المستمر زمنياً CTFS لهذه الدالة مضروباً في عدد العينات N . هذه العملية أصبحت دالة ذاتية ، أو مبرمجة داخلياً في العديد من لغات البرمجة المعروفة ، ومنها ماتلاب. في ماتلاب اسم هذه الدالة هو fft ، والتي تعني تحويل فوريير السريع fast Fourier transform. إن هذا التحويل يعتبر خواريزم فعالاً لحساب DFT أو تحويل فوريير المتقطع. (ال DFT وال FFT سيتم تغطيتهما بتفاصيل أكثر في الفصل (٧)).

أبسط أشكال الدالة fft هو $X = \text{fft}(x)$ ، حيث x هي متجه عينات الدالة مكون من N من العينات المرقمة في المدى $0 \leq n < N$ ، و X هي متجه من N من الأرقام المسترجعة من هذه الدالة في المدى $0 \leq k < N$. تحويل فوريير المتقطع الذي على الصورة :

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(nTs) e^{-j2\pi nk/N}$$

يكون دورياً بالنسبة للمتغير k ودورته هي N . يمكن توضيح ذلك عن طريق إيجاد $X[k+N]$ كما يلي :

$$X[k + N] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nTs) e^{-\frac{j2\pi n(k+N)}{N}} = \frac{e^{-j2\pi n}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nTs) e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} = X[k]$$

التقريب في المعادلة (٦.٩) محقق لقيم $|k| \ll N$. وهذا يحتوي على بعض القيم السالبة لـ k . ولكن الدالة fft تعطي قيم DFT في المدى من $0 \leq k < N$. إن قيم الـ DFT لقيم الـ k السالبة تكون هي نفسها مثل لقيم الـ k الموجبة المفصولة بدورة واحدة. وعلى ذلك، فمثلاً لإيجاد $X[-1]$ ، أوجد تكرارها الدوري $X[N-1]$ ، التي تكون موجودة في المدى $0 \leq k < N$.

من الممكن أن تكون هذه الطريقة العددية لإيجاد الدالة التوافقية لتتابع فوريير المستمر مفيدة أيضاً في حالات تكون فيها صورة الدالة لـ $x(t)$ معروفة ولكن التكامل :

$$c_x[k] = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j2\pi kt/T} dt$$

لا يمكن تنفيذه حسابياً أو تحليلياً.

مثال ٦.٣

استخدام DFT لتقريب CTFS

أوجد الدالة التوافقية التقريبية لتتابع فوريير المستمر CTFS للدالة الدورية $x(t)$ ، التي يمكن وصف دورة واحدة منها كما يلي :

$$x(t) = \sqrt{1-t^2} \quad \text{و} \quad -1 \leq t < 1$$

الدورة الأساسية لهذه الإشارة هي 2. لذلك يمكننا اختيار عدد صحيح من مضاعفات الرقم 2 على أنه الزمن الذي سنأخذ عليه العينات (تمثيل للزمن T). سنختار 128 عينة في دورة أساسية واحدة. برنامج ماتلاب التالي يحسب ويرسم الدوال التوافقية لتتابع فوريير المستمر CTFS باستخدام تحويل فوريير المتقطع DFT.

برنامج لتقريب تتابع فوريير المستمر باستخدام تحويل فوريير المتقطع %

لدالة دورية موصوفة على مدى دورة واحدة بالمعادلة : %

$x(t) = \sqrt{1-t^2}$, $-1 < t < 1$ %

عدد العينات % $N = 128$;

الدورة الأساسية % $T_0 = 2$;

زمن تمثيل الدالة % $T = T_0$;

الزمن بين العينات % $T_s = T/N$;

معدل أخذ العينات % $f_s = 1/T_s$;

أرقام العينات % $n = [0:N-1]'$;

مدة أخذ العينات % $t = n * T_s$;

حساب قيمة الدالة عند زمن أخذ العينة %

$x = \sqrt{1-t.^2} .* \text{rect}(t/2) + \dots$

$\sqrt{1-(t-2).^2} .* \text{rect}((t-2)/2) + \dots$

$\sqrt{1-(t-4).^2} .* \text{rect}((t-4)/2)$;

حساب تحويل فوريير المتقطع % $cx = \text{fft}(x)/N$;

متجه الأعداد التوافقية % $k = [0:N/2-1]'$;

رسم النتائج %

`subplot(3,1,1) ;`

`p = plot(t,x,'k'); set(p,'LineWidth',2); grid on ; axis('equal');`

`axis([0,4,0,1.5]) ;`

`xlabel('Time, t (s)'); ylabel('x(t)');`

`subplot(3,1,2) ;`

`p = stem(k,abs(cx(1:N/2)), 'k'); set(p,'LineWidth',2,'MarkerSize',4) ;`

`grid on ;`

`xlabel('Harmonic Number, k'); ylabel('|c_x[k]|');`

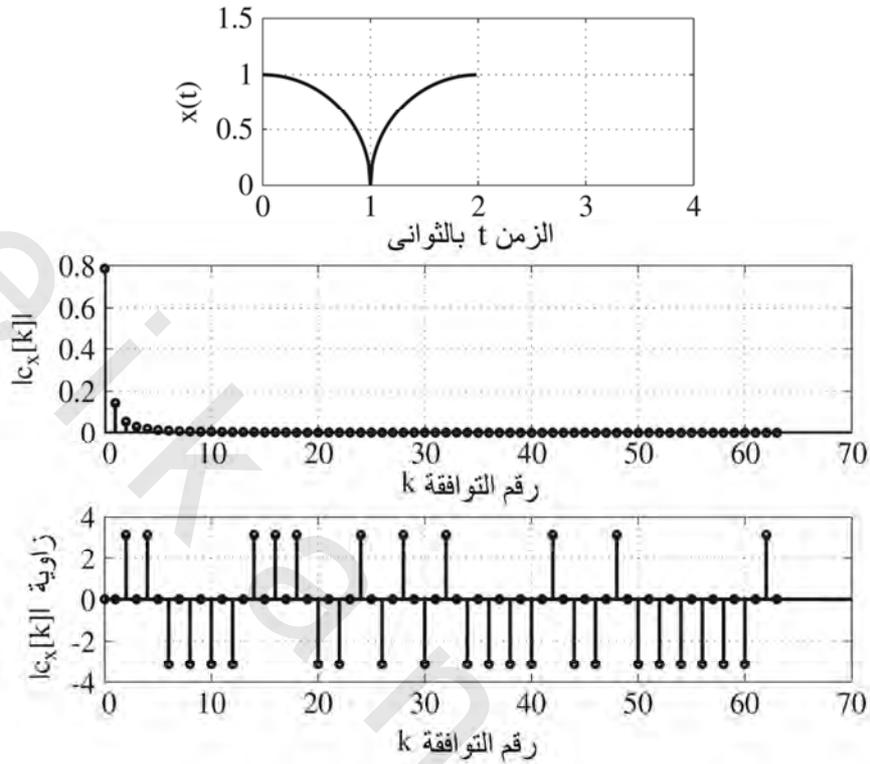
`subplot(3,1,3) ;`

`p = stem(k,angle(cx(1:N/2)), 'k'); set(p,'LineWidth',2,'MarkerSize',`

`4) ; grid on ;`

`xlabel('Harmonic Number, k'); ylabel('Phase of c_x[k]');`

شكل (٦.١٧) يبين رسماً لخرج هذا البرنامج.



شكل رقم (٦.١٧) الدالة $x(t)$ والتوافقات $c_x[k]$.

في رسم الزاوية يوجد فقط ثلاث قيم مميزة وهي 0 و π و $-\pi$. الزاويتان π و $-\pi$ متكافئتان، ولذلك كان من الممكن رسمهما على أنهما إما π أو $-\pi$. لقد حسب ماتلاب الزاوية ونتيجة أخطاء تقريبية في أثناء الحساب، فإنها أحياناً تكون رقم قريب جداً من π وأحياناً أخرى تكون رقم قريب جداً من $-\pi$.

رسومات المقدار والزاوية لـ $c_x[k]$ في شكل (٦.١٧) تم رسمها في المدى $0 \leq k < N/2$. حيث إن $c_x[k] = c_x^*[-k]$ فإن ذلك يكون كافياً لتحديد $c_x[k]$ في المدى $-N/2 \leq k < N/2$ ، لذلك يكون دائماً من المطلوب رسم الدالة التوافقية في المدى $-N/2 \leq k < N/2$ ، ويمكن عمل ذلك عن طريق فهم أن الأرقام التي يعطيها تحويل فوريير المقطع DFT تكون دورة واحدة تماماً من دالة دورية. إذا كان ذلك هو الحال، فإن النصف الثاني من الأرقام التي تغطي المدى $N/2 \leq k < N$ يكون هو نفسه تماماً مثل مجموعة الأرقام الواقعة الواقعة في المدى $-N/2 \leq k < 0$. هناك دالة في ماتلاب تسمى `fftshift` تقوم باستبدال النصف الثاني من مجموعة الأرقام مع النصف الأول، وبالتالي فإن المجموعة الكاملة N من الرقام ستغطي المدى $-N/2 \leq k < N/2$ بدلاً من المدى $0 \leq k < N$.

يمكننا تغيير برنامج ماتلاب لتحليل الإشارة على دورتين أساسيتين بدلاً من دورة واحدة عن طريق تغيير

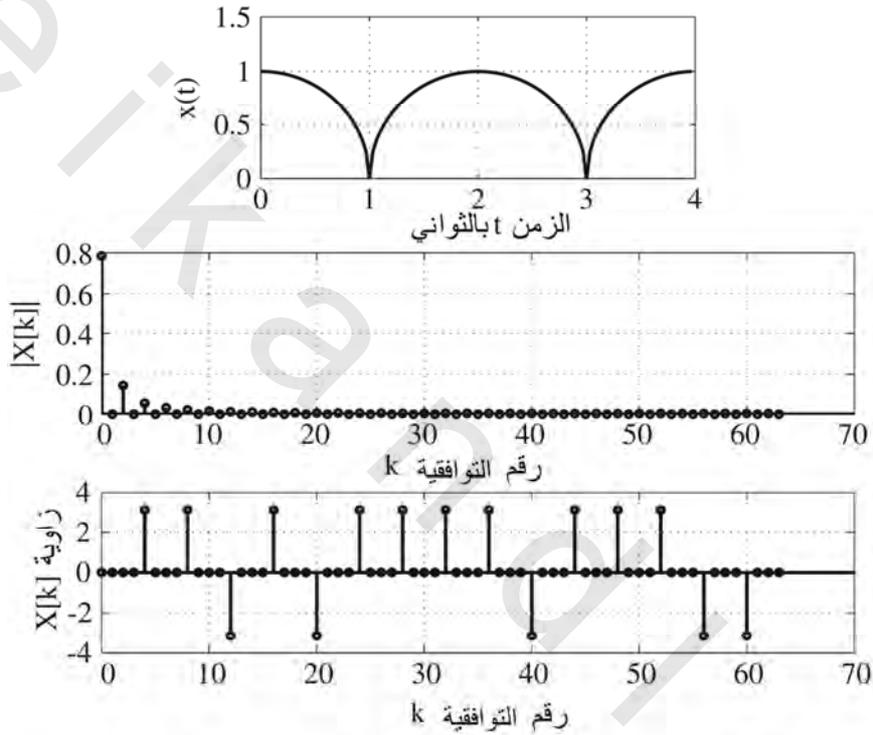
السطر :

$T=T_0$; % تمثيل الزمن

إلى

$T=2*T_0$ % تمثيل الزمن

وستكون النتيجة كما هو مبين في شكل (٦.١٨).



شكل رقم (٦.١٨) $x(t)$ و $X[k]$ باستخدام دورتين أساسيتين لتمثيل الزمن بدلاً من دورة واحدة.

لاحظ الآن أن الدالة التوافقية لتتابع فوريير المستمر CTFS تكون صفراً لكل القيم الفردية لـ k . لقد حدث ذلك نتيجة استخدامنا لاثنتين من دورات الدالة $x(t)$ لتمثيل الزمن T . التردد الأساسي لتمثيل CTFS يكون نصف التردد الأساسي للدالة $x(t)$. طاقة الإشارة تكون موجودة عند التردد الأساسي للإشارة $x(t)$ وتوافقاته الزوجية التي تمثل التوافقات الزوجية لدالة تتابع فوريير المستمر التوافقية، ولذلك فإن التوافقات الزوجية فقط هي التي ستختلف عن الصفر. التوافقية رقم k في التحليل السابق باستخدام دورة أساسية واحدة لتمثيل الزمن ستكون هي نفسها مثل التوافقية رقم $2k$ في هذا التحليل.

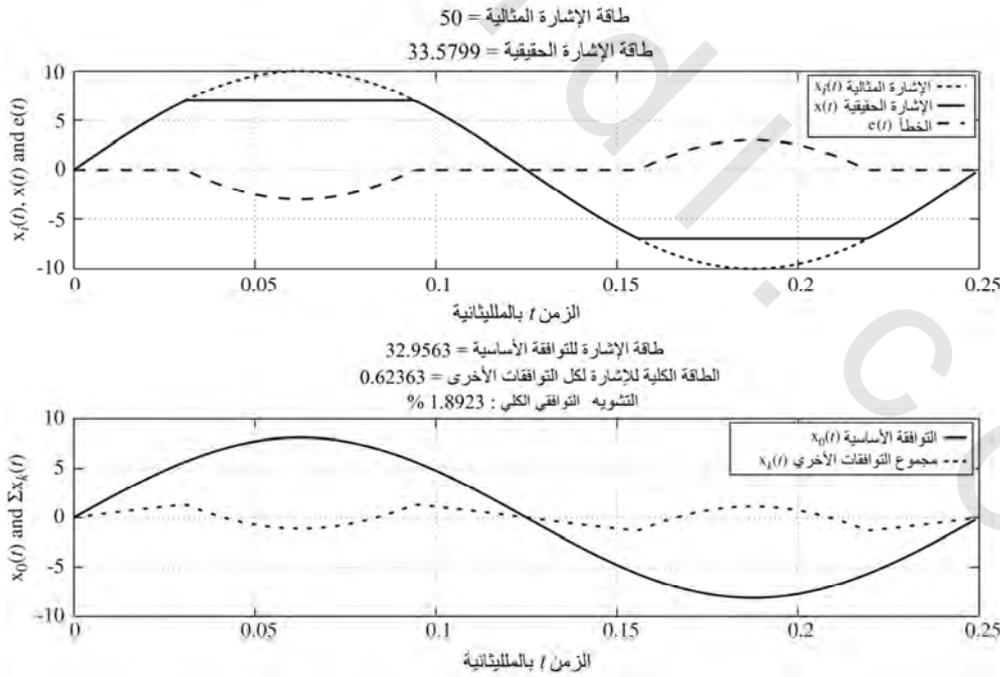
مثال ٦.٤

حساب مركبة التشويه للتوافقات الكلية

أحد أشكال الجدارة لبعض الأنظمة هو التشويه التوافقي الكلي THD, total harmonic distortion. إذا كانت إشارة الإثارة لأحد الأنظمة إشارة جيبيية، فإن التشويه التوافقي الكلي THD في إشارة الاستجابة تساوي طاقة الإشارة الكلية في إشارة الاستجابة لكل التوافقات المختلفة عن التوافقة الأساسية ($k \neq \pm 1$) مقسومة على طاقة الإشارة الكلية في إشارة الاستجابة عند التوافقة الأساسية.

غذي مكبر سمعي بمعامل تكبير اسمي يساوي 100 عند التردد 4 كيلوهرتز بإشارة جيبيية ترددها 4 كيلوهرتز أكبر مقدار لها يساوي 100 ميلي فولت. الاستجابة المثالية للمكبر من الممكن أن تكون $x_i(t) = 10 \sin(8000\pi t)$ فولت، ولكن إشارة الخرج الحقيقية للمكبر $x(t)$ كانت محدودة في المدى ± 7 فولت، لذلك فإن الاستجابة الحقيقية تكون صحيحة لكل الجهود التي مقدارها أقل من 7 فولت ولكن لكل الجهود التي يكون مقدارها أكبر من 7 فولت يتم قصها عند القيمة ± 7 فولت. احسب التشويه التوافقي الكلي THD لإشارة الاستجابة.

الدالة التوافقية لتتابع فورير المستمر $x(t)$ يمكن إيجادها تحليلياً ولكنها تكون أطول، وصعبة، وعرضة للخطأ. إذا كنا نبحث فقط عن THD، فإنه يمكننا إيجادها عددياً باستخدام تحويل فورير المتقطع وحاسب. ولقد تم ذلك في برنامج ماتلاب التالي، والنتيجة موضحة في شكل (٦.١٩):



شكل رقم (٦.١٩) نتائج حساب التشويه التوافقي الكلي THD.

$f_0 = 4000$; % التردد الأساسي للإشارة
 $T_0 = 1/f_0$; % الدورة الأساسية للإشارة
 $N = 256$; % عدد العينات في دورة واحدة
 $T_s = T_0/N$; % الزمن بين العينات
 $f_s = 1/T_s$; % معدل أخذ العينات بالعين/الثانية
 $t = T_s*[0:N-1]'$; % متجه الزمن لرسم الإشارات
 $A = 10$; % مقدار الإشارة المثالية
 $x_i = A*\sin(2*\pi*f_0*t)$; % الإشارة المثالية
 $P_{x_i} = A^2/2$; % طاقة الإشارة المثالية
 $x = \min(x_i, 0.7*A)$; % قص الإشارة المثالية عند V فولت
 $x = \max(x, -0.7*A)$; % قص الإشارة المثالية عند سالب V فولت
 $P_x = \text{mean}(x.^2)$; % طاقة الإشارة الحقيقية
 $c_x = \text{fftshift}(\text{fft}(x)/N)$; % حساب الدالة التوافقية حتى
% $k = +/- 128$
 $k = [-N/2:N/2-1]'$; % متجه أرقام التوافقيات
 $I_0 = \text{find}(\text{abs}(k) == 1)$; % إيجاد قيم الدالة التوافقية عند التوافقية الأساسية
 $P_0 = \text{sum}(\text{abs}(c_x(I_0)).^2)$; % حساب طاقة الإشارة للتوافقية الأساسية
 $I_k = \text{find}(\text{abs}(k) \sim= 1)$; % حساب قيم الدالة التوافقية للتوافقيات غير
% التوافقية الأساسية
 $P_k = \text{sum}(\text{abs}(c_x(I_k)).^2)$; % حساب طاقة الإشارة للتوافقيات
 $\text{THD} = P_k*100/P_0$; % حساب التشويه الكلي للتوافقيات
% حساب قيم المركبات الأساسية للإشارة الحقيقية
 $x_0 = 0*t$; for $kk = 1:\text{length}(I_0)$, $x_0 = x_0 + c_x(I_0(kk))*\exp(j*2*\pi*$
 $k(I_0(kk))*f_0*t)$; end
% حساب قيم مجموع مركبات الإشارة التي ليست توافقية أساسية في الإشارة الحقيقية
 $x_k = 0*t$; for $kk = 1:\text{length}(I_k)$, $x_k = x_k + c_x(I_k(kk))*\exp(j*2*\pi*$
 $k(I_k(kk))*f_0*t)$; end
 $x_0 = \text{real}(x_0)$; % إزالة أي أجزاء تخيلية متبقية نتيجة التقريب
 $x_k = \text{real}(x_k)$; % إزالة أي أجزاء تخيلية متبقية نتيجة التقريب
% رسم النتيجة وتسجيل طاقة الإشارة والتشويه الكلي للتوافقيات

```

ttl = ['Signal Power of Ideal Signal = ', num2str(Pxi)];
ttl = str2mat(ttl, ['Signal Power of Actual Signal = ', num2str(Px)]);
subplot(2,1,1);
ptr = plot(1000*t,xi,'k',1000*t,x,'k',1000*t,x-xi,'k--'); grid on;
set(ptr,'LineWidth',2);
xlabel('Time, {\itt} (ms)', 'FontName','Times', 'FontSize',24);
ylabel('x_i({\itt}), x({\itt}) and e({\itt})', 'FontName','Times',
'FontSize',24);
title(ttl, 'FontName','Times', 'FontSize',24);
ptr = legend('Ideal Signal, x_i({\itt})', 'Actual Signal, x({\itt})',
'Error, e({\itt})');
set(ptr,'FontName','Times', 'FontSize',18);
set(gca,'FontSize',18);
subplot(2,1,2);
ttl = ['Signal Power of Fundamental = ', num2str(P0)];
ttl = str2mat(ttl, ['Total Signal Power of All Other Harmonics = ',
num2str(Pk)]);
ttl = str2mat(ttl, ['Total Harmonic Distortion: ', num2str(THD), ' %']);
ptr = plot(1000*t,x0,'k',1000*t,xk,'k'); grid on;
set(ptr,'LineWidth',2);
xlabel('Time, {\itt} (ms)', 'FontName','Times', 'FontSize',24);
ylabel('x_0({\itt}) and \Sigma x_{\itk}({\itt})', 'FontName','Times',
'FontSize',24);
title(ttl, 'FontName','Times', 'FontSize',24);
ptr = legend('Fundamental, x_0({\itt})', 'Sum of Other Harmonics,
x_{\itk}({\itt})');
set(ptr,'FontName','Times', 'FontSize',18);
set(gca,'FontSize',18);

```

التشويه الكلي للتوافقات THD كان 1.8923% مع هذا المقدار الخطير للقص البالغ 30% قص من كل قمة موجبة وسالبة. لذلك فإنه للحصول على أمانة تكبير جيدة للإشارة، فإن THD يجب أن تكون عموماً أقل من 1%.

(٦.٣) تحويل فوريير للزمن المستمر

تتابع فوريير المستمر زمنياً CTFS يمثل أي إشارة دورية مع الفوائد الهندسية على مدار كل الأزمنة. بالطبع، فإن بعض الإشارات المهمة لا تكون دورية. ولذلك فإنه قد يكون من المفيد أن نمدد تتابع فوريير المستمر CTFS لنكون قادرين على تمثيل الإشارات غير الدورية على مدار كل الأزمنة. يمكن عمل ذلك والنتيجة هي ما يسمى بتحويل فوريير Fourier transform.

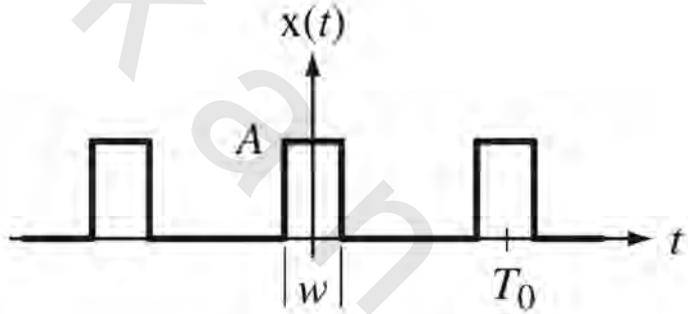
تمديد تتابع فوريير ليشتمل على الإشارات غير الدورية

الفرق البارز بين الإشارة الدورية والإشارة غير الدورية هو أن الإشارة الدورية تتكرر في زمن محدد يسمى الدورة. هذه الإشارة مفروض أنها تتكرر منذ الأبد وتستمر بهذه الدورة حتى الما لانهاية. الإشارة غير الدورية ليس لها دورة محددة. الإشارة غير الدورية من الممكن أن تكرر نموذجاً أو نمطاً معيناً عدة مرات خلال فترة زمنية معينة،

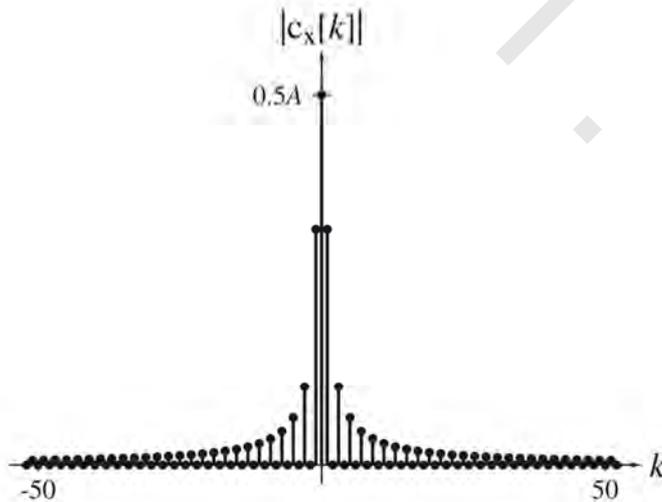
ولكن ليس على كل المدار الزمني. الانتقال من تتابع فوريير إلى تحويل فوريير يتم تحقيقه عن طريق إيجاد تتابع فوريير لإشارة دورية، وبعد ذلك نجعل دورة هذه الإشارة تمتد إلى ما لانهاية. حسابياً، فإن القول بأن الدالة تكون غير دورية أو القول بأن الإشارة لها دورة ممتدة إلى ما لانهاية يكون هو القول نفسه أو المعنى نفسه.

لنفترض دالة في المجال الزمني $x(t)$ تتكون من نبضات مستطيلة ارتفاعها هو A وعرضها هو w ودورتها الأساسية هي T_0 كما في شكل (٦.٢٠). هذه الإشارة ستوضح الظاهرة التي تحدث عند جعل الدورة الأساسية تقترب من المالا نهاية لأي إشارة عامة. تمثيل هذا القطار من النبضات بتتابع فوريير المستمر CTFS، فإن الدالة التوافقية وجد أنها تساوي $c_x[k] = (A\omega/T_0)\text{sinc}(k\omega/T_0)$ مع $T = T_0$.

لنفترض أن $\omega = T_0/2$ (مما يعني أن الشكل الموجي يكون A لمدة نصف الزمن، ويساوي صفراً في النصف الآخر، مما يعني ٥٠٪ زمن خدمة duty cycle). وعلى ذلك فإن $c_x[k] = (A/2)\text{sinc}(k/2)$ يمكن رسمها كما في شكل (٦.٢١).



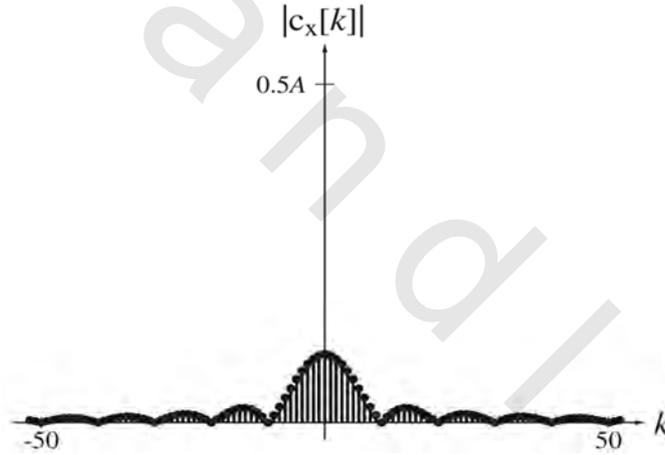
شكل رقم (٦.٢٠) إشارة موجة مستطيلة.



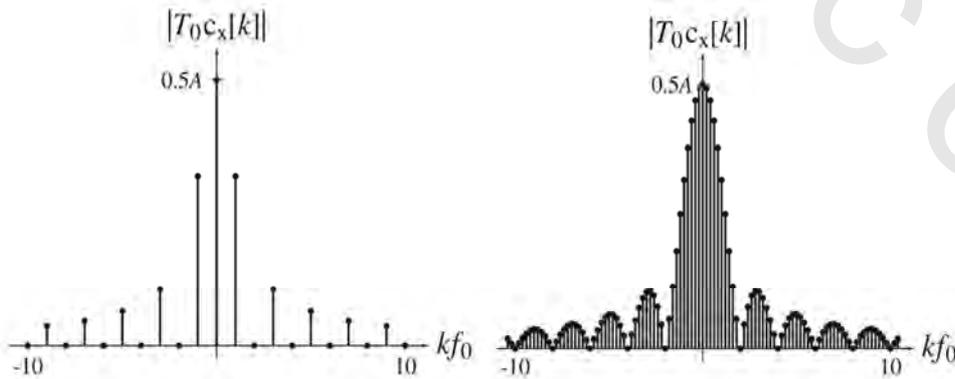
شكل رقم (٦.٢١) مقدار الدالة التوافقية لتتابع فوريير المستمر لإشارة مربعة الشكل وزمن الخدمة لها 50%.

سنفترض الآن أن الدورة الأساسية T_0 زادت من 1 إلى 5 بينما لم تتغير ω . في هذه الحالة تصبح $c_x[0]$ تساوي $1/10$ والدالة التوافقية لد CTFS تصبح $c_x[k]=(1/10)\text{sinc}(k/10)$ كما في شكل (٦.٢٢).

القيمة العظمى لمقدار التوافقة تكون 5 مرات أقل من ذي قبل؛ لأن القيمة المتوسطة للدالة تكون 5 مرات أقل من ذي قبل. مع زيادة الدورة الأساسية T_0 فإن مقادير مقادير التوافقات تقع في دالة سنك sinc أعرض مع نقص في مقاديرها مع زيادة T_0 . في النهاية ومع اقتراب T_0 من الما لانهاية فإن الشكل الموجي للدالة $x(t)$ في النطاق الزمني تقترب من نبضة واحدة مستطيلة عند نقطة الأصل، وتقترب عينات الدالة التوافقية من سنك عرضه لا نهائي مع مقدار يقترب من الصفر. إذا قمنا بضرب $c_x[k]$ في T_0 قبل رسمها، فإن المقدار من الممكن أن لا يصل إلى الصفر مع اقتراب T_0 من الما لانهاية ولكن ستظل كما هي ويكون هناك فقط تعريض لدالة السنك. أيضاً فإن الرسم مع $k/T_0=kf_0$ بدلاً من الرسم مع k سيجعل التدرج الأفقي هو التردد بدلاً من رقم التوافقات ومن الممكن أن يظل عرض دالة السنك كما هو على هذا التدرج الجديد مع اقتراب T_0 من الما لانهاية (ونقص f_0). مع عمل هذين التغيرين، فإن الشكلين الأخيرين سيكونان كما في شكل (٦.٢٣).

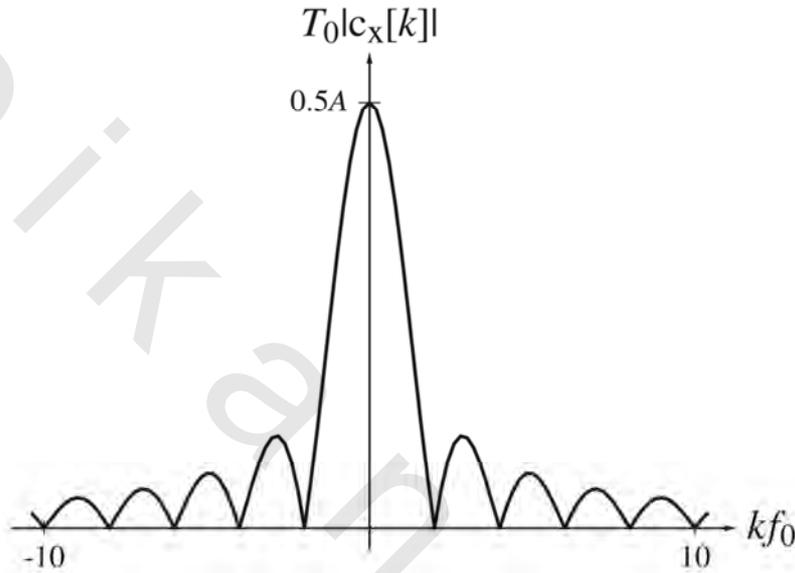


شكل رقم (٦.٢٢) مقدار دالة التوافقات لتتابع فوريير المستمر لإشارة مستطيلة مع تقليل في دورة التشغيل.



شكل رقم (٦.٢٣) مقادير الدوال التوافقية لتتابع فوريير المستمر لإشارات موجة مستطيلة مع دورات تشغيل ٥٠% و ١٠%.

سنسمي هذه الدالة الجديدة بدالة التوافقيات المعدلة. هذه الدالة المعدلة هي $T_0 c_x[k] = A \omega \text{sinc}(\omega k f_0)$. مع زيادة T_0 بدون حدود (مما يجعل من قطار النبضات نبضة واحدة)، فإن f_0 تقترب من الصفر ويصبح المتغير $k f_0$ متغيراً مستمراً (وسنطلق عليه f). الدالة التوافقية المعدلة لتتابع فوريير المستمر تقترب من الدالة الموضحة في شكل (٦.٢٤). هذه الدالة التوافقية المعدلة (مع بعض التغيرات الرمزية) تصبح تحويل فوريير المستمر زمنياً continuous time Fourier transform, CTFT لهذه النبضة الوحيدة.



شكل رقم (٦.٢٤) الشكل النهائي لدالة توافق تحويل فوريير المستمر زمنياً CTFT لإشارة موجة مستطيلة.

الفارق الترددي بين مقادير توافقيات تتابع فوريير المستمر زمنياً CTFS يكون هو نفسه مثل التردد الأساسي للـ CTFS وهو $f_0 = 1/T_0$. لكي نؤكد علاقة هذا التردد مع الفارق الترددي (والذي ستساويه في النهاية مع تقارب الدورة الأساسية من المالا نهاية) دعنا نفترض أن هذا الفارق هو Δf ، بمعنى سنفترض $\Delta f = f_0 = 1/T_0$. وبالتالي، فإن التمثيل المركب لتحويل فوريير المستمر CTFS للدالة $x(t)$ يمكن كتابته كما يلي :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{j2\pi k \Delta f t}$$

بالتعويض بالصورة التكاملية لـ $c_x[k]$ ،

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(\tau) e^{j2\pi k \Delta f \tau} d\tau \right] e^{j2\pi k \Delta f t}$$

(متغير التكامل هو τ لتمييزه من t في الدالة $e^{j2\pi k\Delta f t}$ ، وهو خارج التكامل). حيث إن نقطة البداية t_0 للتكامل تكون اختيارية، سنفترض أنها $t_0 = -T_0/2$ وبالتالي يمكن كتابة:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(\tau) e^{-j2\pi k\Delta f \tau} d\tau \right] e^{j2\pi k\Delta f t \Delta f}$$

حيث تم استبدال Δf مع $1/T_0$. في النهاية فإن T_0 تقترب من الما لانهاية، وتقترب Δf من الرمز التفاضلي df ، وتصبح $k\Delta f$ متغيراً مستمراً f ، وتقترب حدود التكامل من سالب ما لانهاية حتى موجب ما لانهاية ويصبح التجميع تكاملاً كما يلي:

$$x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(\tau) e^{-j2\pi k\Delta f \tau} d\tau \right] e^{j2\pi k\Delta f t \Delta f} \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \right] e^{j2\pi f t} df$$

المعادلة رقم (٦.١١)

الكمية التي بين القوسين في الطرف الأيمن من المعادلة (٦.١١) هي تحويل فوريير المستمر CTFT للدالة $x(t)$ ويمكن كتابته كما يلي:

المعادلة رقم (٦.١٢)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

وينتج من ذلك:

المعادلة رقم (٦.١٣)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

ولقد اعتمدنا هنا العرف السائد وهو أن تحويل فوريير لأي إشارة يرمز له الإشارة نفسه ولكن بالحرف الكبير بدلاً من الحرف الصغير المستخدم لتمثيل الإشارة نفسها. لاحظ أن تحويل فوريير يكون دالة في التردد الدوري f وأن الاعتماد الزمني للإشارة قد تم تكامله بحيث أصبح تحويل فوريير ليس دالة في الزمن. الدالة x وتحويل فوريير المستمر لها X يكونان "زوج تحويل فوريير" الذي يرمز له عادة بالرمز \mathcal{F} $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$. أيضاً من الرموز المتعارف عليها $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ و $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}$ حيث \mathcal{F}^{-1} تقرأ تحويل فوريير العكسي. شكل آخر معروف لتحويل فوريير يتحدد بوضع المتغير $f = \omega/2\pi$ حيث ω هي التردد الزاوي.

المعادلة رقم (٦.١٤)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega/2\pi) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{و} \quad X(\omega/2\pi) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

وهذه هي النتيجة التي نحصل عليها بالتعويض عن المتغير f بـ $\omega/2\pi$ و عن df بـ $d\omega/2\pi$. من الشائع جداً في المنشورات الهندسية أن نرى هذه الصورة :

$$\text{المعادلة رقم (٦.١٥)} \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{و} \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

في هذه الصورة الثانية، فإن المعنى الحسابي المحدد للدالة "X" قد تغير وهذا قد يصبح مصدراً للالتباس إذا كان الفرق بين الصورتين ضرورياً. لكي نحصر هذا الالتباس، فإنه من الشائع أن نرى هذه الصورة للمتغير ω كالتالي :

$$\text{المعادلة رقم (٦.١٧)} \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{و} \quad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

وللمرة الثانية تغير معنى الدالة X. السبب في تضمين المتغير j في هذه الدالة هو لجعل تحويل فوريير يتقابل مباشرة مع تحويل لابلاس في الفصل ٨.

افترض أننا استخدمنا المعادلة التالية :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

لتكوين زوج فوريير التالي :

$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) = \frac{1}{j2\pi f + \alpha}$$

إذا استخدمنا المتغير $X(j\omega)$ فإن :

$$X(f) \xrightarrow{f-j\omega} X(j\omega) = \frac{1}{j2\pi(j\omega) + \alpha} = \frac{1}{-2\pi\omega + \alpha}$$

ولكن من الشائع جداً في مطبوعات تحويل فوريير أن نقول أنه إذا كان شكل التردد الدوري لتحليل فوريير على الصورة :

$$X(f) = \frac{1}{j2\pi f + \alpha}$$

فإن صورة التردد الزاوي تكون :

$$X(j\omega) = \frac{1}{j2\pi(\omega/2\pi) + \alpha} = \frac{1}{j\omega + \alpha}$$

في الانتقال من $X(f)$ إلى $X(j\omega)$ فإن ما فعلناه حقيقة هو الانتقال من $X(f)$ إلى $x(t)$ باستخدام العلاقة :
 $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$ وبعد ذلك تم استخدام العلاقة $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ للحصول على $X(j\omega)$. بمعنى آخر $X(f) \xrightarrow{\mathcal{F}} x(t) \rightarrow X(j\omega)$. وهذا يؤدي إلى عمل هذا الانتقال $X(f) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$ عن طريق التعويض بـ $f = \omega/2\pi$ بدلاً من الانتقال $X(f) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$ عن طريق التعويض بـ $f = j\omega$. ونحن سنتبع هذا التفسير المعروف في هذا الكتاب.

في أي تحليل من المهم أن نختار التحليل ونستخدمه بعد ذلك باستمرار. في هذا الكتاب سنستخدم الصورتين التاليتين لأنهما الأكثر شيوعاً في الوسط الهندسي :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

هنا يتم تطبيق تحويل فوريير على الإشارات المستمرة زمنياً كما تم الإشارة إليه سابقاً. ولذلك فإنه يعرف عادة بمحول فوريير المستمر زمنياً continuous time Fourier transform, CTFT. يستخدم CTFT في تحليل أنظمة الاتصالات، والمرشحات، وبصريات فوريير.

صورة ω وصورة f لتحويل فوريير المستمر زمنياً يتم استخدامها بكثرة في التطبيقات الهندسية. إن استخدام أي واحدة من الصورتين في أي واحد من الكتب، أو أي واحد من المنشورات يعتمد على العديد من العوامل بما في ذلك طريقة الترميز في أي مجال من المجالات. حيث إن كلا من الصورتين يشيع استخدامها، فإننا في هذا الكتاب سنستخدم أيهما حيثما يبدو الوضع مريحاً في أي واحد من التحليلات. إذا احتجنا عند أي لحظة التغيير من صورة لأخرى، فإن ذلك يتم بسهولة عن طريق استبدال f بـ $\omega/2\pi$ أو ω بـ $2\pi f$. (بالإضافة إلى التعريفات المقدمة هنا، فإنه يوجد هناك العديد من الصور البديلة لتحويل فوريير التي يمكن إيجادها في كتب الهندسة والرياضيات والطبيعة). جدول ٦.٣ يعرض أزواجاً لتحليل فوريير المستمر زمنياً في صورة ω التي تم استنتاجها مباشرة من التعريفات المقدمة مسبقاً. لقد تم استخدام صورة ω هنا؛ لأنها في هذه الدوال تكون أكثر إدماجاً.

جدول رقم ٦.٣ بعض أزواج تحويل فوريير المستمر زمنياً CTFT

$\delta(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1$	١
$e^{-\alpha t}u(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1/(j\omega + \alpha), \alpha > 0$	٢
$-e^{-\alpha t}u(-t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1/(j\omega + \alpha), \alpha < 0$	٣
$te^{-\alpha t}u(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1/(j\omega + \alpha)^2, \alpha > 0$	٤
$-te^{-\alpha t}u(-t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1/(j\omega + \alpha)^2, \alpha < 0$	٥
$t^n e^{-\alpha t}u(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{n!}{(j\omega + \alpha)^{n+1}}, \alpha > 0$	٦
$-t^n e^{-\alpha t}u(-t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{n!}{(j\omega + \alpha)^{n+1}}, \alpha < 0$	٧
$e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)u(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{\omega_0}{(j\omega + \alpha)^2 + \omega_0^2}, \alpha > 0$	٨
$-e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)u(-t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{\omega_0}{(j\omega + \alpha)^2 + \omega_0^2}, \alpha < 0$	٩
$e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)u(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{\omega_0}{(j\omega + \alpha)^2 + \omega_0^2}, \alpha > 0$	١٠
$-e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)u(-t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{\omega_0}{(j\omega + \alpha)^2 + \omega_0^2}, \alpha < 0$	١١
$e^{-\alpha t } \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}, \alpha > 0$	١٢

تحويل فوريير العام

هناك بعض الإشارات العملية المهمة التي ليس لها تحويل فوريير بالمعنى المحدد. نتيجة لأهمية هذه الإشارات، فلقد تم تعميم صورة تحويل فوريير ليشمل هذه الإشارات. كمثال على تحويل فوريير المعمم، دعنا نحسب تحويل فوريير المستمر زمنياً للدالة $x(t)$ البسيطة التالية: $x(t)=A$ حيث A ثابت. باستخدام تعريف تحويل فوريير المستمر زمنياً CTFT التالي:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \leftrightarrow X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

سنحصل على:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-j2\pi ft} dt = X(f) = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} dt$$

وهذا التكامل لن يتقارب، وبالتالي فإن تحويل فوريير لن يكون موجوداً. ولكن يمكننا أن نتجنب هذه المشكلة عن طريق تعميم تحويل فوريير بالخطوات التالية: أولاً نحسب CTFT للدالة $x_{\sigma}(t)=Ae^{-\sigma|t|}$ ، حيث $\sigma > 0$ وهي دالة تقترب من القيمة الثابتة A مع اقتراب σ من الصفر. بعد ذلك سنجعل σ تقترب من الصفر بعد إجراء التحويل. معنى ذلك أن المعامل $e^{-\sigma|t|}$ يسمى معامل التقارب، أو convergence factor الذي يسمح لنا بإجراء التكامل كما في شكل (٦.٢٥).

سيكون التحويل كالتالي:

$$X_{\sigma}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-\sigma|t|} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^0 A e^{-\sigma t} e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^{\infty} A e^{-\sigma t} e^{-j2\pi ft} dt$$

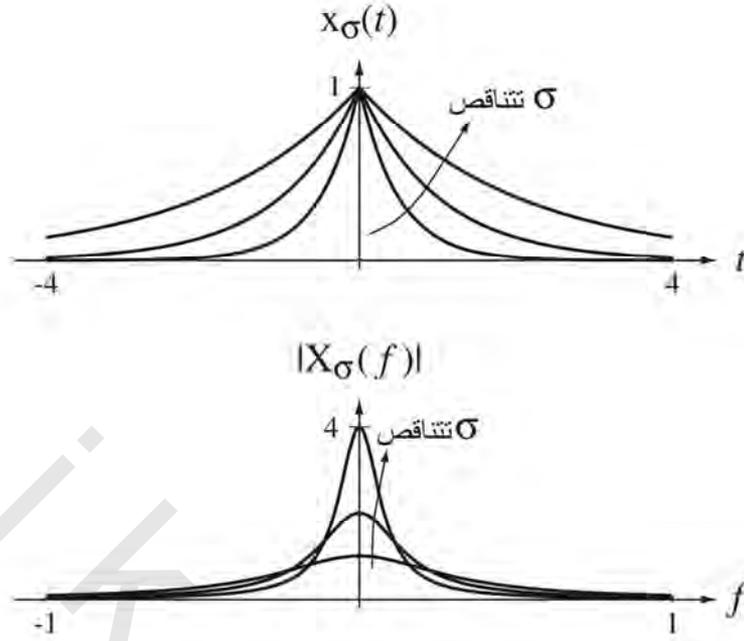
$$X_{\sigma}(f) = A \left[\int_{-\infty}^0 e^{(\sigma - j2\pi f)t} dt + \int_0^{\infty} e^{(-\sigma - j2\pi f)t} dt \right] = A \frac{2\sigma}{\sigma^2 + (2\pi f)^2}$$

الآن بأخذ النهاية مع اقتراب σ من الصفر لـ $X_{\sigma}(f)$. لقيم f التي لا تساوي الصفر نحصل على:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} A \frac{2\sigma}{\sigma^2 + (2\pi f)^2} = 0$$

بعد ذلك احسب المساحة تحت الدالة $X_{\sigma}(f)$ مع اقتراب σ من الصفر:

$$\text{المساحة} = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sigma}{\sigma^2 + (2\pi f)^2} df$$

شكل (٦.٢٥) تأثير معامل التقارب $e^{-\sigma|t|}$.

باستخدام التكامل التالي :

$$\int \frac{dx}{a^2 + (bx)^2} = \frac{1}{ab} \tan^{-1} \left(\frac{bx}{a} \right)$$

نحصل على :

$$\text{المساحة} = A \left[\frac{2\sigma}{2\pi\sigma} \tan^{-1} \left(\frac{2\pi f}{\sigma} \right) \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{A}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = A$$

أي أن المساحة تحت هذه الدالة هي A ولا تعتمد على قيمة σ . ولذلك مع تقارب σ من الصفر فإن تحويل فوريير للثابت A يكون دالة تساوي صفراً عندما f لا تساوي الصفر والمساحة تحت منحنى هذه الدالة تساوي A. وهذا يصف تماماً صدمة شدتها A تحدث عند $f=0$. ولذلك يمكننا كتابة زوج تحويل فوريير المعمم كما يلي :

$$A \xrightarrow{\mathcal{F}} A\delta(f)$$

تعميم تحويل فوريير CTFT يمتد إلى دوال أخرى مفيدة، بما في ذلك الدوال الدورية. بالطريقة نفسها يمكن

كتابة زوج تحويل فوريير المستمر للدالة التالية :

$$\cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} (1/2)[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

والدالة التالية :

$$\sin(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} (j/2)[\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$$

بالتعويض عن $f = \omega/2\pi$ واستخدام خاصية التحجيم للصدمة، يمكن إيجاد الصور المكافئة للتردد الزاوي كما يلي :

$$A \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi A\delta(\omega)$$

$$\cos(\omega_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\sin(\omega_0 t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

المشكلة التي تسببت في ظهور الحاجة إلى الصورة المعممة من تحويل فوريير هي أن هذه الدوال، الثوابت والدوال الجيبية، ليست قابلة للتكامل المطلق، على الرغم من أنها محددة. يمكن أيضاً تطبيق تحويل فوريير المعمم على إشارات أخرى ليست قابلة للتكامل المطلق ولكنها محددة، مثل وحدة الخطوة ودالة الإشارة.

طريقة أخرى لإيجاد تحويل فوريير المستمر زمنياً لقيمة ثابتة هي أن نقرب من المشكلة من جانب آخر عن طريق إيجاد تحويل فوريير المستمر زمنياً العكسي لدالة صدمة $X(f) = A\delta(f)$ باستخدام نظرية أخذ العينات أو العينة للصدمة.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{+j2\pi ft} df = A \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f)e^{+j2\pi ft} df = Ae^0 = A$$

وهذا بالطبع سرّع كثيراً في إيجاد التحويل الأمامي للقيمة الثابتة من الطريقة السابقة. ولكن المشكلة في هذه الطريقة هي أننا إذا حاولنا إيجاد التحويل الأمامي لدالة فإنه يجب أولاً أن نضمن أو نتوقع التحويل، وبعد ذلك نقوم بالتحقق من صحته عن طريق حساب التحويل العكسي.

مثال ٦.٥

تحويل فوريير المستمر زمنياً CTFT لدالة الإشارة ودالة وحدة الخطوة

احسب CTFT للدالة $x(t) = \text{sgn}(t)$ وبعد ذلك استخدم هذه النتيجة لحساب CTFT للدالة $x(t) = u(t)$.

بتطبيق الصورة التكاملية مباشرة نحصل على :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t)e^{-j2\pi ft} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^{\infty} e^{-j2\pi ft} dt$$

وهذه التكاملات لن تتقارب. يمكننا استخدام معامل تقارب لإيجاد تحويل فوريير المعمم. افترض $x_{\sigma}(t) = \text{sgn}(t)e^{-\sigma|t|}$

حيث $\sigma > 0$ ، وبالتالي يمكن كتابة ما يلي :

$$X_{\sigma}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t)e^{-\sigma|t|}e^{-j2\pi ft} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{(\sigma-j2\pi f)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+j2\pi f)t} dt$$

$$X_{\sigma}(f) = - \frac{e^{(\sigma-j2\pi f)t}}{\sigma-j2\pi f} \Big|_0^{-\infty} - \frac{e^{-(\sigma+j2\pi f)t}}{\sigma+j2\pi f} \Big|_0^{\infty} = - \frac{1}{\sigma-j2\pi f} + \frac{1}{\sigma+j2\pi f}$$

وبالتالي :

$$X(f) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} X_{\sigma}(f) = \frac{1}{j\pi f}$$

أو باستخدام التردد الزاوي :

$$X(j\omega) = 2/j\omega$$

لحساب CTFT للدالة $x(t) = u(t)$ ، نلاحظ أن :

$$u(t) = (1/2)[\text{sgn}(t) + 1]$$

وبالتالي يمكن كتابة CTFT كما يلي :

$$U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right) [\text{sign}(t) + 1] e^{-j2\pi ft} dt = (1/2) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t) e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} dt \right]$$

$$U(f) = (1/2)[1/j2\pi f + \delta(f)] = 1/j2\pi f + (1/2)\delta(f)$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة في صورة التردد الزاوي كما يلي :

$$U(j\omega) = 1/j\omega + \pi\delta(\omega)$$

مثال ٦.٦

إثبات أن تحويل فوريير العكسي للدالة $U(f) = 1/j2\pi f + (1/2)\delta(f)$ يكون هو دالة وحدة الخطوة

إذا طبقنا تكامل تحويل فوريير العكسي على الدالة $U(f) = 1/j2\pi f + (1/2)\delta(f)$ نحصل على :

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{j2\pi f} + \left(\frac{1}{2}\right)\delta(f) \right] e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j2\pi ft}}{j2\pi f} df + \left(\frac{1}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$u(t) = \frac{1}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2\pi ft)}{j2\pi f} df + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi ft)}{2\pi f} df = \frac{1}{2} + 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi ft)}{2\pi f} df$$

الحالة ١ $t=0$

$$u(t) = \frac{1}{2} + 2 \int_0^{\infty} (0) d\omega = 1/2$$

الحالة ٢ $t>0$

سنفترض $\lambda = 2\pi ft$ وبالتالي فإن $d\lambda = 2\pi t df$

$$u(t) = \frac{1}{2} + 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda)}{\lambda/t} \frac{d\lambda}{2\pi t} = \frac{1}{2} + 1/\pi \int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda)}{\lambda} d\lambda$$

الحالة ٣ $t<0$

$$u(t) = \frac{1}{2} + 2 \int_0^{-\infty} \frac{\sin(\lambda)}{\lambda/t} \frac{d\lambda}{2\pi t} = \frac{1}{2} + 1/\pi \int_0^{-\infty} \frac{\sin(\lambda)}{\lambda} d\lambda$$

التكاملات في الحالة ٢ والحالة ٣ هي تكاملات sine محددة كالتالي :

$$Si(z) = \int_0^z \frac{\sin(\lambda)}{\lambda} d\lambda$$

ومن الجداول الرياضية القياسية نجد أن :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} Si(z) = \frac{\pi}{2}, \quad Si(0) = 0, \quad Si(-z) = -Si(z)$$

انظر Abramowitz و Stegun صفحة ٢٣١. وبالتالي نحصل على :

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi ft)}{2\pi f} df = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -\frac{1}{2}, & t < 0 \end{cases}$$

وبالتالي فإن :

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

هذا التحويل العكسي يبين أنه، للتوافق التام مع نظرية تحويل فوريير، فإن القيمة $u(0)$ يجب تحديدها بالقيمة $\frac{1}{2}$ كما كان الحال في الفصل ٢. تحديد دالة وحدة الخطوة بهذه الطريقة يتوافق رياضياً ويمكن أحياناً أن يكون له أهمية هندسية (انظر الفصل ١٥، تصميم المرشحات الرقمية باستخدام طريقة الصدمة الثابتة).

مثال ٦.٧

تحويل فوريير المستمر للدالة المستطيلة

احسب تحويل فوريير المستمر لدالة وحدة المستطيل.

تحويل فوريير لهذه الدالة يمكن كتابته كما يلي :

$$\mathcal{F}(\text{rect}(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-1/2}^{1/2} [\cos(2\pi ft) + j\sin(2\pi ft)] dt$$

$$\mathcal{F}(\text{rect}(t)) = 2 \int_0^{1/2} \cos(2\pi ft) dt = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} = \text{sinc}(f)$$

نحن الآن لدينا الزوج التالي من تحويل فوريير المستمر $\text{rect}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \text{sinc}(f)$. (في صورة التردد الزاوي يصبح هذا الزوج كما يلي $\text{rect}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \text{sinc}(\omega/2\pi)$. في هذه الحالة كانت صورة التردد f أبسط وأكثر تماثلاً عن الصورة ω). بالرجوع إلى نتيجة المثال ٦.١ يمكننا كتابة :

$$A \text{rect}(t/\omega) * \delta_{T_0}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \left(\frac{A\omega}{T_0}\right) \text{sinc}\left(\frac{\omega k}{T_0}\right)$$

تحويل فوريير المستمر CTFT للدالة المستطيلة يساوي دالة سنك sinc، والدالة التوافقية لتتابع فوريير المستمر CTFS لدالة مستطيلة متكررة يكون عينات لدالة سنك. إنها معينة حيث إن k تأخذ قيماً صحيحة فقط. هذه العلاقة بين التكرار الدوري في النطاق الزمني والعينة في النطاق الترددي (أرقام التوافقات) سيكون مهماً في توضيح عملية العينة في الفصل ١٠.

نستطيع الآن أن نمدد جدول تحويل فوريير ليشتمل على العديد من الدوال الأخرى التي تحدث عادة في تحليل فوريير. في جدول ٦.٤ استخدمنا صورة التردد الدوري لل CTFT؛ لأنه الأبسط والأكثر تماثلاً لهذه الدوال.

جدول رقم ٦.٤ أزواج أخرى من تحويل فوريير

$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1$	١
$1 \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta(t)$	٢
$sg(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1/j\pi f$	٣
$u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} (1/2)\delta(f) + 1/j2\pi f$	٤
$rect(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} sinc(f)$	٥
$sinc(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} rect(f)$	٦
$tri(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} sinc^2(f)$	٧
$sinc^2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} tri(f)$	٨
$\delta_{T_0}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} f_0\delta_{f_0}(f), f_0 = 1/T_0$	٩
$T_0\delta_{T_0}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta_{f_0}(f), T_0 = 1/f_0$	١٠
$\cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} (1/2)[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$	١١
$\sin(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} (j/2)[\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$	١٢

خواص تحويل فوريير

جدول ٦.٥ وجدول ٦.٦ يوضحان بعض الخواص لتحويل فوريير المستمر زمنياً CTFT المستنتجة مباشرة

من التعريفين السابقين.

جدول رقم ٦.٥ خواص تحويل فوريير، صورة التردد الدوري f

$\alpha g(t) + \beta h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \alpha G(f) + \beta H(f)$	الخطية
$g(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(f)e^{-j2\pi f t_0}$	الإزاحة الزمنية
$e^{j2\pi f_0 t} g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(f - f_0)$	الإزاحة الترددية
$g(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} (1/ a)G(f/a)$	التحجيم الزمني
$(1/ a)g(t/a) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(af)$	التحجيم الترددي
$\frac{d}{dt}g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j2\pi f G(f)$	التفاضل الزمني
$\int_{-\infty}^t g(\lambda)d\lambda \xrightarrow{\mathcal{F}} (1/2)G(0)\delta(f)$	التكامل الزمني
$tg(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} -\frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} G(f)$	التفاضل الترددي
$g(t) * h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(f)H(f)$	الضرب
$g(t)h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(f) * H(f)$	ازدواجية الالتفاف
$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) ^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) ^2 df$	نظرية بارسيفال
$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$ or $X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)df$	المساحة الكلية

جدول ٦.٦ خواص تحويل فوريير، صورة التردد الزاوي ω

$\alpha g(t) + \beta h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \alpha G(j\omega) + \beta H(j\omega)$	الخطية
$g(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega)e^{-j\omega t_0}$	الإزاحة الزمنية
$e^{j\omega t_0} g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j(\omega - \omega_0))$	الإزاحة الترددية
$g(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} (1/ a)G(j\omega/a)$	التحجيم الزمني
$(1/ a)g(t/a) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(aj\omega)$	التحجيم الترددي
$\frac{d}{dt}g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j\omega G(j\omega)$	التفاضل الزمني
$\int_{-\infty}^t g(\lambda)d\lambda \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{G(j\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(j\omega)$	التكامل الزمني
$tg(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{d}{d\omega} G(j\omega)$	التفاضل الترددي
$g(t) * h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega)H(j\omega)$	الضرب
$g(t)h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} G(j\omega) * H(j\omega)$	ازدواجية الالتفاف
$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) ^2 d\omega$	نظرية بارسيفال
$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$ or $X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega$	المساحة الكلية

أي إشارة دورية يمكن التعبير عنها كتتابع فوريير مستمر على الصورة :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k]e^{j2\pi kt/T}$$

باستخدام خاصية الإزاحة الترددية، يمكننا إيجاد تحويل فوريير المستمر CTFT كما يلي :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k]\delta(f - \frac{k}{T})$$

وعلى ذلك فإن تحويل فوريير المستمر زمنياً CTFT لأي إشارة دورية يتكون كلياً من مجموعة عينات. شدة

هذه الصدمات عند التردد k/T هي نفسها قيم الدالة التوافقية لتتابع فوريير المستمر زمنياً عند الرقم التوافقي k .

مثال ٦.٨

الدالة التوافقية لتتابع فوريير المستمر CTFS لأي إشارة دورية باستخدام تحويل فوريير المستمر CTFT

استخدم العلاقة :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k]\delta(f - \frac{k}{T})$$

لحساب الدالة التوافقية لتتابع فوريير المستمر CTFS للدالة $\text{rect}(2t)*\delta_1(t)$

هذه الدالة التفاضل اثنين من الدوال. لذلك فمن خاصية ازدواجية الضرب والالتفاف، فإن CTFT سيكون

حاصل ضرب تحويل فوريير لكل من الدالتين :

$$X(f) = \left(\frac{1}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{f}{2}\right) \delta_1(f) = \left(\frac{1}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \delta(f-k)$$

ولذلك ستكون الدالة التوافقية لتتابع فوريير هي :

$$C_x[k] = (1/2) \text{sinc}(k/2)$$

إعتماداً على أن $T=T_0=1$.

مثال ٦.٩

تحويل فوريير المستمر لدالة جيبية معدلة

احسب تحويل فوريير CTFT للدالة $x(t) = 24 \cos(100\pi t) \sin(10000\pi t)$.

هذه الدالة عبارة عن حاصل ضرب دالتين. لذلك باستخدام ازدواجية الضرب والالتفاف، فإن CTFT

سيكون التفاضل تحويل فوريير لكل دالة على حدة. باستخدام هذه العلاقة :

$$\cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} (1/2)[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$$

وأيضاً :

$$\sin(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} (j/2)[\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0)]$$

نحصل على :

$$24 \cos(100\pi t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 12[\delta(f-50) + \delta(f+50)]$$

وأيضاً :

$$\sin(10000\pi t) \xrightarrow{\mathcal{F}} (j/2)[\delta(f+5000) - \delta(f-5000)]$$

وبالتالي فإن تحويل فوريير الكلي سيكون :

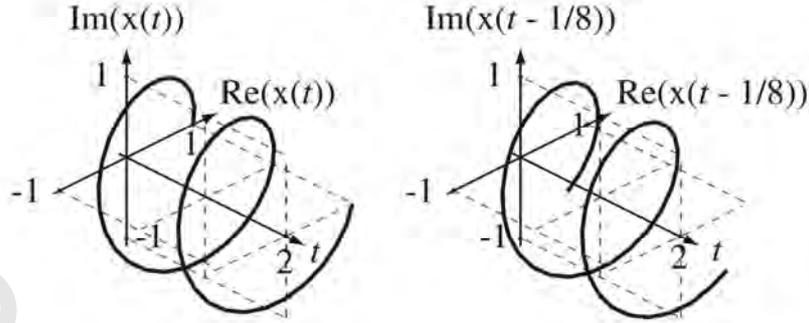
$$24 \cos(100\pi t) \sin(10000\pi t) \leftrightarrow 12[\delta(f-50) + \delta(f+50)] * (j/2)[\delta(f+5000) - \delta(f-5000)]$$

خاصية الإزاحة الزمنية تقول إن الإزاحة في المجال الزمني تقابل إزاحة طورية في المجال الترددي. كمثال على

معقولة خاصية الإزاحة الزمنية، افترض أن الإشارة الزمنية هي دالة الجيب المركبة $x(t) = e^{j2\pi t}$ بالتالي فإن

$$x(t - t_0) = e^{j2\pi(t-t_0)} = e^{j2\pi t} e^{-j2\pi t_0} \quad (6.26).$$

$$x(t) = e^{j2\pi t}$$



شكل رقم (٦.٢٦) الدالة الأسية $x(t) = e^{j2\pi t}$ ونسخة مؤخرتها $x(t - \frac{1}{8}) = e^{j2\pi(t - \frac{1}{8})}$.

إزاحة هذه الإشارة زمنياً تقابل ضربها في الثابت المركب $e^{-j2\pi t_0}$. معادلة تحويل فوريير العكسي التالية :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

تقول أن أي إشارة يمكن إيجاد تحويل فوريير لها يمكن التعبير عنها كمجموع خطي من الجيوب المركبة على مدى مستمر من الترددات f ، وإذا تمت إزاحة $x(t)$ بمقدار t_0 ، فإن كل واحد من هذه الجيوب المركبة يتم ضربه في الثابت المركب $e^{-j2\pi t_0}$. ماذا يحدث لأي عدد مركب عند ضربه في أس مركب على الصورة e^{jx} حيث x كمية حقيقية؟ مقدار الكمية e^{jx} يساوي واحداً لأي قيمة حقيقية للمتغير x . لذلك فإن الضرب في e^{jx} سيغير من الزاوية وليس المقدار للعدد المركب. تغيير الزاوية أو الطور يعني تغيير زاوية هذا العدد في المستوى المركب، وهذا يعني دوران بسيط للمتجه الممثل لهذا العدد. لذلك فإن ضرب أي دالة أسية مركبة في الزمن على الصورة $e^{j2\pi t}$ في أي ثابت مركب $e^{-j2\pi t_0}$ يتسبب في دوران الأس المركب $e^{j2\pi t}$ بالنسبة لمحور الزمن كمحور دوران. بالنظر لشكل (٦.٢٦) يتضح أنه نتيجة الشكل الحلزوني الوحيد، فإن دوران الدالة الأسية المركبة في الزمن والإزاحة خلال المحور الزمني يكون لهما نفس التأثير.

خاصية الإزاحة الترددية يمكن إثباتها عن طريق البدء بنسخة مزاحة ترددياً لـ $X(f)$ ، على الصورة $X(f-f_0)$

واستخدام تكامل تحويل فوريير العكسي. ستكون النتيجة كالتالي :

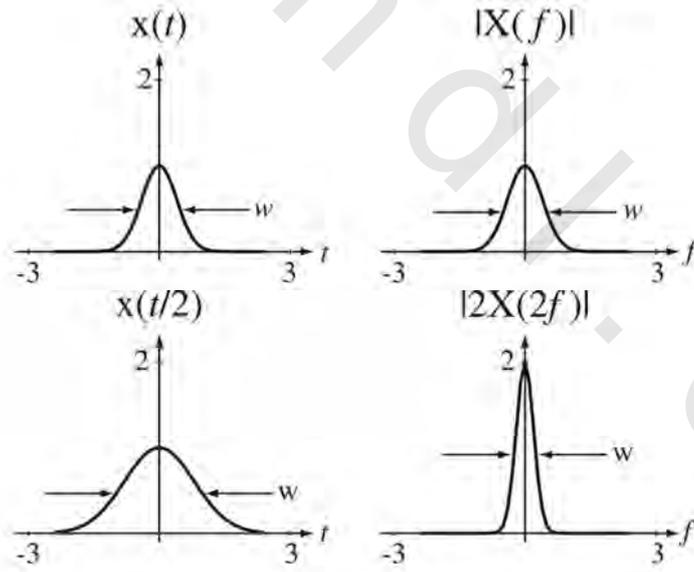
$$x(t) e^{j2\pi f_0 t} \stackrel{F}{\leftrightarrow} X(f - f_0)$$

لاحظ التشابه بين خاصيتي الإزاحة الزمنية والإزاحة الترددية. كل منهما ينتج عنه الضرب في جيب مركب في النطاق الآخر، بينما تكون إشارة الأس في الجيب المركب مختلفة. إن ذلك يحدث نتيجة الإشارات في تحويل فوريير الأمامي والعكسي.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt, \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{+j2\pi ft} df$$

إن خاصية الإزاحة الترددية تعتبر أساسية لفهم تأثيرات التعديل في أنظمة الاتصالات.

أحد تأثيرات خاصية التحجيم الزمني والتحجيم الترددي هي أن الضغط في نطاق معين يقابله تمدد في النطاق الآخر. إحد الطرق الجيدة لتوضيح ذلك تكون من خلال الدالة $x(t) = e^{-\pi t^2}$ التي يكون تحويل فوريير لها هو شكل الدالة $e^{-\pi f^2} \xleftrightarrow{F} e^{-\pi t^2}$. يمكننا تخصيص معامل عرض مميز ω لهذه الدوال وهو المسافة بين نقاط الانقلاب (الزمن أو التردد بين نقاط المقادير العظمى). هذه النقاط تحدث على $t = \pm 1/\sqrt{2\pi}$ عند $t = \pm 1/\sqrt{2\pi}$ ، ولذلك فإن $w = \sqrt{2/\pi}$. إذا قمنا الآن بعمل تحجيم زمني من خلال التحويل $t \rightarrow t/2$ ، مثلاً، فإن زوج تحويل فوريير السابق يصبح $2e^{-\pi(t/2)^2} \xleftrightarrow{F} e^{-\pi(2f)^2}$ كما في شكل (٦.٢٧) ومعامل العرض للدالة الزمنية يصبح $2\sqrt{2/\pi}$ بينما يكون معامل العرض للدالة الترددية هو $\sqrt{2\pi}/2$.



شكل رقم (٦.٢٧) التمدد الزمني ويقابله الضغط الترددي.

إن وضع $t \rightarrow t/2$ يسبب تمدد زمني والتأثير المقابل في النطاق الترددي يكون ضغطاً ترددياً (يحدث عن طريق تحجيم تدرج معامل المقدار). مع تمديد إشارة النطاق الزمني، فإنها تنزلق من قيمتها العظمى التي تساوي واحداً عند $t=0$ أبطاً وأبطاً مع ابتعاد الزمن من الصفر في أي واحد من الاتجاهين، وفي النهاية مع اقتراب معامل التمدد الزمني من المالا لنهاية، فإنها لا تتغير على الإطلاق وتقترب من القيمة الثابتة 1 ($w \rightarrow \infty$). مع تمدد إشارة النطاق الزمني بمعامل معين، فإن تحويل فوريير لها ينضغط ومقدارها يتم ضربه في المعامل نفسه. في النهاية مع اقتراب معامل التمدد في النطاق الزمني من المالا لنهاية، فإن تحويل فوريير CTFT يقترب من أن يكون صدمة :

$$\lim_{a \rightarrow \infty} e^{-\pi(t/a)^2} = 1 \leftrightarrow \lim_{a \rightarrow \infty} (1/|a|) e^{-\pi(af)^2} = \delta(f)$$

المعادلة رقم (٦.١٧)

انظر شكل (٦.٢٨) مع $w \rightarrow 0$



شكل رقم (٦.٢٨) القيمة الثابتة والصدمة كحدود نهائية للتحجيم الزمني والترددي للدالة $x(t) = e^{-\pi t^2}$ وتحويل فوريير لها.

العلاقة بين الضغط في نطاق معين والتمدد في النطاق الآخر هي الأساس لفكرة تسمى أساسيات عدم التأكد uncertainty principle لتحليل فوريير. مع اقتراب a من المالا لنهاية في المعادلة (٦.١٧)، فإن طاقة الإشارة للدالة في النطاق الزمني تصبح أقل تركزاً وطاقة الإشارة المقابلة في النطاق الترددي تصبح أكثر تركزاً. في النهاية، فإن طاقة الإشارة في النطاق الترددي تكون لا نهائية التمرکز عند تردد وحيد $f=0$ ، بينما يكون عرض الدالة الزمنية لانهاية وبالتالي طاقة إشارتها تكون غير متمركزة نهائياً في النطاق الزمني. إذا ضغطنا الدالة الزمنية، بحيث تصبح صدمة عند الزمن $t=0$ وتحديث طاقة إشارتها عند نقطة واحدة بينما يصبح تحويل فوريير لها منتشراً بانتظام على المدى $-\infty < f < \infty$ وتكون طاقة إشارتها الترددية غير متمركزة بالمرّة. كلما عرفنا موضع طاقة أفضل وأفضل في نطاق معين، فإننا نفقد المعرفة بموضع طاقة هذه الإشارة في النطاق المقابل. اسم غير التأكد أو الشك يأتي أساساً من ميكانيكا الكم بالاسم نفسه.

إذا كانت $x(t)$ لها قيم حقيقية، فإن $x(t) = x^*(t)$. تحويل فوريير CTFT للدالة $x(t)$ هو $X(f)$ فإن تحويل فوريير

للدالة $x^*(t)$ سيكون :

$$\mathcal{F}(x^*(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j2\pi ft} dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{+j2\pi ft} dt \right]^* = X^*(-f)$$

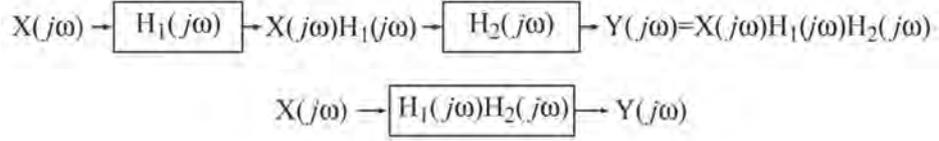
ولذلك، إذا كان $x(t)=x^*(t)$ فإن $X(f)=X^*(-f)$. بمعنى آخر، إذا كانت الإشارة في النطاق الزمني ذات قيم حقيقية، فإن تحويل فوريير لها يكون له خاصية أن السلوك في النطاق الترددي السالب يكون المرافق المركب للسلوك في النطاق الترددي الموجب.

افترض الإشارة $x(t)$ ذات القيم الحقيقية. مربع مقدار $X(f)$ يساوي $|X(f)|^2=X(f)X^*(f)$ ، وباستخدام حقيقة أن $X(f)=X^*(-f)$ يمكننا أن نبين أن مربع المقدار لـ $X(-f)$ سيكون:

$$|X(-f)|^2=X(-f)X^*(-f)=X(f)X^*(f)=|X(f)|^2$$

مما يثبت أن مقدار تحويل فوريير لأي إشارة ذات قيم حقيقية يكون دالة زوجية في التردد. باستخدام $X(f)=X^*(-f)$ ، يمكننا أن نبين أيضاً أن زاوية تحويل فوريير المستمر لأي دالة ذات قيمة حقيقية يمكن دائماً التعبير عنها كدالة فردية في التردد. (حيث إن الزاوية لأي دالة مركبة تكون عديدة القيم، فإنه توجد العديد من الطرق المتساوية الدقة للتعبير عن الزاوية. لذلك لا يمكننا القول بأن الزاوية تكون دالة فردية، فقط نستطيع القول بأن الزاوية يمكن التعبير عنها كدالة فردية). في العادة، وفي تحليل الإشارات والأنظمة العملية، فإن تحويل فوريير المستمر CTFT لأي إشارة ذات قيم حقيقية يتم عرضه فقط في الترددات الموجبة، وحيث إن $X(f)=X^*(-f)$ ، فإنه إذا كنا نعرف سلوك الدالة للترددات الموجبة، فإنه يمكننا أن نعرف أيضاً سلوكها في الترددات السالبة.

افترض أن لدينا الإشارة $x(t)$ كدخل أو إثارة لنظام LTI له استجابة صدمة $h(t)$ وكانت استجابة النظام هي $y(t)$. بالتالي فإن $y(t)=x(t)*h(t)$. باستخدام خاصية ازدواج الضرب والالتفاف، يمكننا أن نكتب $Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$. أو بمعنى آخر، أنه عند ضرب تحويل فوريير للإثارة $X(j\omega)$ وهو دالة في التردد في $H(j\omega)$ التي تمثل تحويل فوريير لاستجابة الصدمة $h(t)$ فإن النتيجة تكون $Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$ وهي تحويل فوريير لاستجابة النظام $y(t)$. $X(j\omega)$ تصف تغير الإشارة $x(t)$ مع التردد الزاوي، و $Y(j\omega)$ هي الشيء نفسه للدالة $y(t)$. وعلى ذلك فإن الضرب في $H(j\omega)$ يغير الوصف الترددي للإثارة إلى وصف ترددي للاستجابة. لذلك فإن $H(j\omega)$ تسمى الاستجابة الترددية للنظام frequency response. (إنها نفس الاستجابة الترددية التي تم استنتاجها في الفصل ٥). عند وضع نظامين LTI على التوالي فإن استجابة الصدمة للنظام الكلي تساوي التفاف استجابة الصدمة لكل من النظامين المنفردين. وباستخدام خاصية ازدواج الضرب والالتفاف، فإن الاستجابة الترددية للنظام الكلي ستساوي حاصل ضرب الاستجابة الترددية لكل من النظامين منفرداً كما في شكل (٦.٢٩).



شكل (٦.٢٩) الاستجابة الترددية لنظامين LTI موصلين على التوالي.

مثال ٦.١٠

تحويل فوريير المستمر زمنياً باستخدام خاصية التفاضل

احسب تحويل فوريير CTFT للدالة $x(t) = \text{rect}((t+1)/2) - \text{rect}((t-1)/2)$ باستخدام خاصية التفاضل لتحويل فوريير ومدخلات جدول تحويلات فوريير للدالة المثلثة الموضحة في شكل (٦.٣٠).

الدالة $x(t)$ هي تفاضل الدالة المثلثة المتمركزة عند الصفر، ولها نصف عرض للقاعدة يساوي 2 ومقدار يساوي 2.

$$x(t) = \frac{d}{dt}(2\text{tri}(t/2))$$

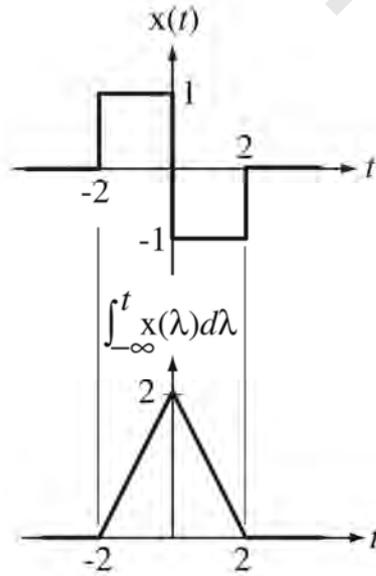
في جدول أزواج تحويلات فوريير سنجد الزوج التالي $\text{tri}(t) \xleftrightarrow{F} \text{sinc}^2(f)$. باستخدام خواص التحجيم

والخطية يمكننا كتابة ما يلي: $2\text{tri}(t/2) \leftrightarrow 4\text{sinc}^2(2f)$. ثم باستخدام خاصية التفاضل

الزمني والإزاحة الزمنية نحصل على $x(t) \leftrightarrow j8\pi f \text{sinc}^2(2f)$. إذا استخدمنا جدول تحويلات فوريير للدالة المستطيلة $\text{rect}(t) \leftrightarrow \text{sinc}(f)$ وخاصيتي التحجيم

الزمني والإزاحة الزمنية نحصل على $x(t) \leftrightarrow j4\text{sinc}(2f)\sin(2\pi f)$ وباستخدام تعريف الدالة sinc يمكن أن نبين أنه يكافئ:

$$x(t) \xleftrightarrow{F} j8\pi f \text{sinc}^2(2f) = j8\pi f \text{sinc}(2f) \frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f} = j4\text{sinc}(2f)\sin(2\pi f)$$

شكل (٦.٣٠) الدالة $x(t)$ وتكاملها.

تقول نظرية بارسيغال إنه يمكننا أن نحسب طاقة الإشارة إما في النطاق الزمني أو النطاق الترددي كما يلي :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad \text{المعادلة رقم (٦.١٨)}$$

(مارك أنتونيو بارسيغال هو عالم رياضيات عالم لفورير في أواخر القرن الثامن عشر وبدايات القرن التاسع عشر ولد في ٢٧ أبريل عام ١٧٥٥ وتوفي في ١٦ أغسطس عام ١٨٣٦). الكمية التي يتم تكاملها في الجانب الأيمن من المعادلة (٦.١٨) وهي $|X(f)|^2$ تسمى كثافة قدرة الطيف energy spectral density. يأتي هذا الاسم من حقيقة أن التكامل على كل الترددات (كل الطيف الترددي) هو كل طاقة الإشارة. لذلك حتى يكون هناك توافق في المعنى العام للتكامل، فإن $|X(f)|^2$ يجب أن تكون طاقة إشارة على وحدة التردد الدوري، أي كثافة طاقة الإشارة. مثلاً، افترض أن $x(t)$ تمثل التيار بالأمبير A. وبالتالي من تعريف طاقة الإشارة، فإن وحدات طاقة هذه الإشارة ستكون $A^2 \cdot s$. تحويل فورير للدالة $x(t)$ هو $X(f)$ ووحداتها هي A.s أو A/Hz. عند تربيع هذه الكمية نحصل على الوحدات :

$$\frac{A^2}{Hz^2} = \frac{A^2 \cdot s}{Hz}$$

التي تؤكد أن الكمية $|X(f)|^2$ ووحداتها هي طاقة إشارة لكل وحدة تردد دوري.

مثال ٦.١١

المساحة الكلية تحت منحنى دالة باستخدام تحويل فورير

احسب المساحة الكلية تحت منحنى الدالة $x(t)=10\text{sinc}((t+4)/7)$.

في الأصل فإننا سنحاول مباشرة تكامل هذه الدالة على كل الأزمنة t.

$$\text{المساحة} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} 10\text{sinc}((t+4)/7) dt = \int_{-\infty}^{\infty} 10 \frac{\sin(\frac{\pi(t+4)}{7})}{\pi(t+4)/7} dt$$

وهذا التكامل هو التكامل الجيبى الذي ذكرناه أولاً في مثال ٦.٦ والمعرف كما يلي :

$$Si(z) = \int_0^z \frac{\sin(t)}{t} dt$$

يمكن إيجاد هذا التكامل في كتب الجداول الرياضية. على الرغم من ذلك فإن إجراء هذا التكامل ليس

ضرورياً لحل هذه المشكلة. لذلك يمكننا استخدام :

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

لذلك، فإننا نحسب أولاً تحويل فورير للدالة CTFT $x(t)$ ، وهو $X(f)=70\text{rect}(7f)e^{j8\pi f}$ ، وعلى ذلك فإن

المساحة ستكون $X(0)=70$.

مثال ٦.١٢

تحويل فوريير لبعض الدوال الجيبية المحجمة والمزاحة زمنياً

إذا كانت $x(t)=10\sin(t)$ ، احسب (أ) تحويل فوريير للدالة $x(t)$ ، (ب) تحويل فوريير للدالة $x(2(t-1))$ ، و (ت) تحويل فوريير للدالة $x(2t-1)$.

(أ) في هذا المثال التردد الدوري لدالة الجيب يساوي $1/2\pi$ ، والتردد الزاوي يساوي 1. لذلك فإن الأرقام ستكون أبسط إذا استخدمنا صورة التردد الزاوي لتحويل فوريير. باستخدام خاصية الخطية والنظر في تحويل الصورة العامة للدالة الجيبية :

$$\begin{aligned}\sin(\omega_0 t) &\stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)] \\ \sin(t) &\stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)] \\ 10\sin(t) &\stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j10\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]\end{aligned}$$

(ب) من الجزء (أ)، لدينا $10\sin(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j10\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]$. باستخدام خاصية التحجيم الزمني نحصل على :

$$10\sin(2t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j5\pi[\delta(\omega/2+1)-\delta(\omega/2-1)]$$

بعد ذلك باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية نحصل على :

$$10\sin(2(t-1)) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j5\pi[\delta(\omega/2+1)-\delta(\omega/2-1)]e^{-j\omega}$$

بعد ذلك باستخدام خاصية التحجيم لدالة الصدمة :

$$10\sin(2(t-1)) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j10\pi[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-1)]e^{-j\omega}$$

أو :

$$10\sin(2(t-1)) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j10\pi[\delta(\omega+2)e^{j2} - \delta(\omega-1)e^{j2}]$$

(ج) من الجزء (أ)، لدينا $10\sin(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j10\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]$.

بتطبيق خاصية الإزاحة الزمنية أولاً :

$$10\sin(t-1) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j10\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]e^{-j\omega}$$

بعد ذلك بتطبيق خاصية التحجيم الزمني نحصل على :

$$10\sin(2t-1) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j5\pi[\delta(\omega/2+1)-\delta(\omega/2-1)]e^{-j\omega/2}$$

بعد ذلك نستخدم خاصية تحجيم الصدمة :

$$10\sin(2t-1) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j10\pi[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)]e^{-j\omega/2}$$

أو :

$$10\sin(2t-1) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j10\pi[\delta(\omega+2)e^j - \delta(\omega-2)e^j]$$

مثال ٦.١٣

تحويل فوريير لدالة المستطيل المحجمة والمزاحة زمنياً

احسب تحويل فوريير للدالة $x(t)=25\text{rect}((t-4)/10)$

يمكننا حساب تحويل فوريير لدالة وحدة المستطيل في جدول تحويلات فوريير $\text{rect}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \text{sinc}(f)$. سنطبق أولاً

خاصية الخطية وبالتالي: $25\text{rect}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 25\text{sinc}(f)$. بعد ذلك نطبق خاصية التحجيم كالتالي: $25\text{rect}(t/10) \xleftrightarrow{\mathcal{F}}$

$250\text{sinc}(10f)$. بعد ذلك نطبق خاصية الإزاحة الزمنية كالتالي:

$$25\text{rect}\left(\frac{t-4}{10}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 250\text{sinc}(10f)e^{-j8\pi f}$$

مثال ٦.١٤

تحويل فوريير للالتفاف بعض الإشارات

احسب تحويل فوريير للالتفاف الدالة $10\sin(t)$ مع الدالة $2\delta(t+4)$.

الطريقة ١: سنجري الالتفاف أولاً ثم نجري تحويل فوريير على النتيجة:

$$10\sin(t) * 2\delta(t+4) = 20\sin(t+4)$$

بتطبيق خاصية الإزاحة الزمنية لتحويل فوريير نحصل على:

$$20\sin(t+4) \leftrightarrow j20\pi[\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)]e^{j4\omega}$$

أو:

$$20\sin(t+4) \leftrightarrow j10[\delta(f+1/2\pi) - \delta(f-1/2\pi)]e^{j8\pi f}$$

الطريقة ٢: نجري تحويل فوريير أولاً لتجنب عملية الالتفاف.

$$10\sin(t) * 2\delta(t+4) \leftrightarrow \mathcal{F}(10\sin(t))\mathcal{F}(2\delta(t+4)) = 2\mathcal{F}(10\sin(t))\mathcal{F}(\delta(t))e^{j4\omega}$$

$$10\sin(t) * 2\delta(t+4) \leftrightarrow j20\pi[\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)]e^{j4\omega}$$

أو:

$$10\sin(t) * 2\delta(t+4) \leftrightarrow \mathcal{F}(10\sin(t))\mathcal{F}(2\delta(t+4)) = 2\mathcal{F}(10\sin(t))\mathcal{F}(\delta(t))e^{j8\pi f}$$

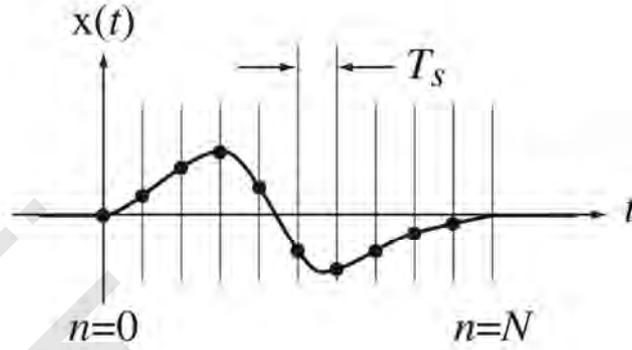
$$10\sin(t) * 2\delta(t+4) \leftrightarrow j10\pi[\delta(f+1/2\pi) - \delta(f-1/2\pi)]e^{j8\pi f}$$

الحساب العددي لتحويل فوريير

في الحالات التي لا يمكن وصف الإشارة المطلوب إجراء تحويل فوريير لها عن طريق دالة تحليلية، أو إذا كان تكامل تحويل فوريير لا يمكن إجراؤه، فإننا يمكن أن نجد طريقة تقريبية لحساب تحويل فوريير عددياً باستخدام تحويل فوريير المتقطع discrete Fourier transform, DFT، والذي تم استخدامه لتقريب الدالة التوافقية لتتابع فوريير فيما سبق. إذا كانت الإشارة المطلوب تحويلها إشارة سببية وتمثل إشارة طاقة، فإنه يمكننا أن نبين أنه يمكن تقريب تحويل فوريير لها (صورة التردد الدوري f) عند ترددات متقطعة كما يلي: (انظر الملحق خ).

$$\text{المعادلة رقم (٦.١٩)} \quad X\left(\frac{kf_s}{N}\right) \cong T_s \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) e^{-j2\pi kn/N} \cong T_s xDFT(x(nT_s)), \quad |k| \ll N$$

حيث $T_s = 1/f_s$ يتم اختيارها بحيث إن الإشارة x لا تتغير كثيراً في هذه الفترة الزمنية و N يتم اختيارها بحيث يكون المدى الزمني 0 حتى NT_s يغطي كل منطقة الطاقة للإشارة x كما في شكل (٦.٣١).



شكل رقم (٦.٣١) إشارة سببية تمت عينتها باستخدام T_s ثانية بين العينات على المدى الزمني NT_s .

ولذلك فإذا كانت الإشارة المطلوب تحويلها إشارة سببية وإشارة طاقة وقمنا بأخذ عيناتها على مدى زمني يغطي كل منطقة الطاقة بها وإذا كانت العينات قريبة من بعضها بعضاً بما فيه الكفاية؛ بحيث إن الإشارة لن تتغير كثيراً بين هذه العينات، فإن التقريب في المعادلة (٦.١٩) يصبح أكثر دقة عندما $|k| \ll N$.

مثال ٦.١٩

استخدام DFT لتقريب تحويل فوريير المستمر CTFT

باستخدام DFT احسب CTFT التقريبي للإشارة :

$$x(t) = \begin{cases} t(1-t), & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases} = t(1-t) \text{rect}(t-1/2)$$

عددياً عن طريق العينة بمقدار 32 عينة على مدى الفترة الزمنية $0 \leq t < 2$.

برنامج لتوضيح تقريب لتحويل فوريير للدالة %

% t(1-t)*rect(t-1/2)

عن طريق عينتها 32 مرة في الفترة الزمنية من صفر حتى 2 ثانية وباستخدام تحويل فوريير المتقطع %

عدد العينات 32 % ; N = 32

أخذ العينات لمدة 2 ثانية وحدد فترة العينة % ; Ts = 2/N

حدد معدل أخذ العينات % ; fs = 1/Ts

وضع التحديدية في النطاق الترددي % ; df = fs/N

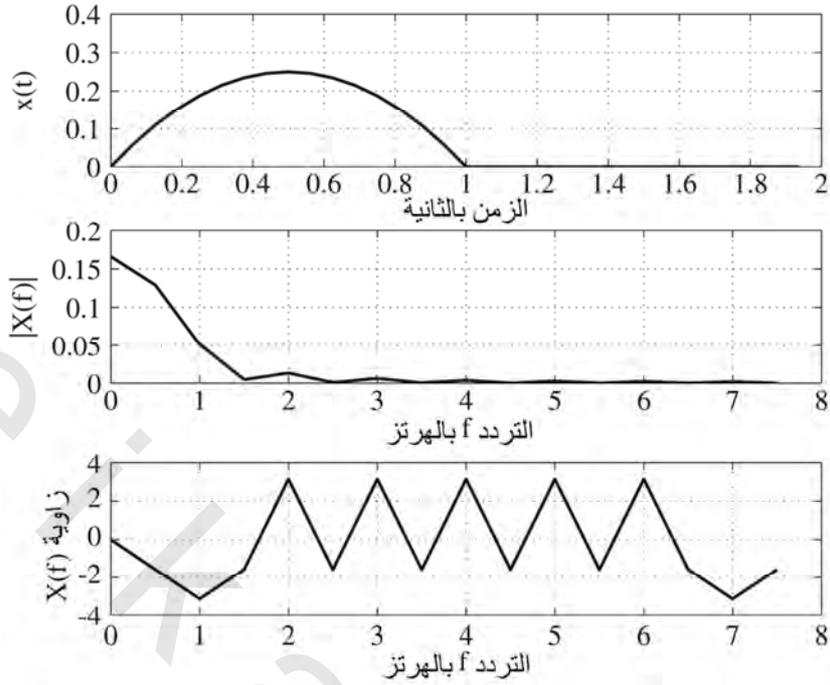
```

n = [0:N-1]'; % متجه من ٣٢ مؤشر %
t = Ts*n; % متجه الأزمنة %
x = t.*(1-t).*rect((t-1/2)); % متجه من ٣٢ قيمة من قيمة الدالة %
X = Ts*fft(x); % متجه من ٣٢ قيمة من قيم التحويل المقرب %
k = [0:N/2-1]'; % متجه من ١٦ مؤشر ترددي %
% رسم النتيجة %
subplot(3,1,1);
p = plot(t,x,'k'); set(p,'LineWidth',2); grid on;
xlabel('Time, t (s)'); ylabel('x(t)');
subplot(3,1,2);
p = plot(k*df,abs(X(1:N/2)),'k'); set(p,'LineWidth',2); grid on;
xlabel('Frequency, f (Hz)'); ylabel('|X(f)|');
subplot(3,1,3);
p = plot(k*df,angle(X(1:N/2)),'k'); set(p,'LineWidth',2); grid on;
xlabel('Frequency, f (Hz)'); ylabel('Phase of X(f)');

```

بتنفيذ هذا البرنامج نحصل على النتائج الموضحة في شكل (٦.٣٢).

لاحظ أنه تم أخذ 32 عينة من الإشارة في النطاق الزمني، وتحويل فورير المتقطع DFT أعطى 32 رقماً أو نتيجة، ولقد استخدمنا أو 16 رقماً منها في هذه الرسومات. الفترة الدورية للـ DFT و 32 نقطة المسترجعة تمثل دورة زمنية واحدة. ولذلك فإن الـ 16 نقطة الثانية تكون هي نفسها الـ 16 نقطة الثانية التي تحدث في الدورة السابقة ويمكن استخدامها لرسم DFT للترددات السالبة. أمر ماتلاب `fftshift` موجود لهذا الغرض. البرنامج التالي يعتبر مثلاً على استخدام الأمر `fftshift` ورسم تحويل فورير المستمر CTFT على ترددات سالبة وموجبة متساوية.



شكل رقم (٦.٣٢) إشارة وتحويل فوريير المستمر التقريبي لها باستخدام الـ DFT.

برنامج لتوضيح تحويل فوريير المستمر للدالة %

% $t(1-t)*\text{rect}(t-1/2)$

عن طريق أخذ ٣٢ عينة في الفترة الزمنية من صفر حتى ٢ ثانية %

باستخدام تحويل فوريير المتقطع. الرسم في النطاق الترددي يغطي ترددات متساوية سالبة وموجبة %

أخذ ٣٢ عينة % ; $N = 32$

أخذ العينات لمدة ٢ ثانية وتحديد فترة العينة % ; $T_s = 2/N$

تحديد معدل العينة % ; $f_s = 1/T_s$

وضع التحديدية في النطاق الترددي % ; $df = f_s/N$

متجه لـ ٣٢ مؤشراً زمنياً % ; $n = [0:N-1]'$

متجه الأزمنة % ; $t = T_s*n$

متجه ٣٢ قيمة من الدالة % ; $x = t.*(1-t).*\text{rect}((t-1/2))$

متجه من ٣٢ قيمة من تحويل فوريير المتقطع % ; $X = \text{fftshift}(T_s*\text{fft}(x))$

متجه من ٣٢ مؤشراً ترددياً % ; $k = [-N/2:N/2-1]'$

رسم النتائج %

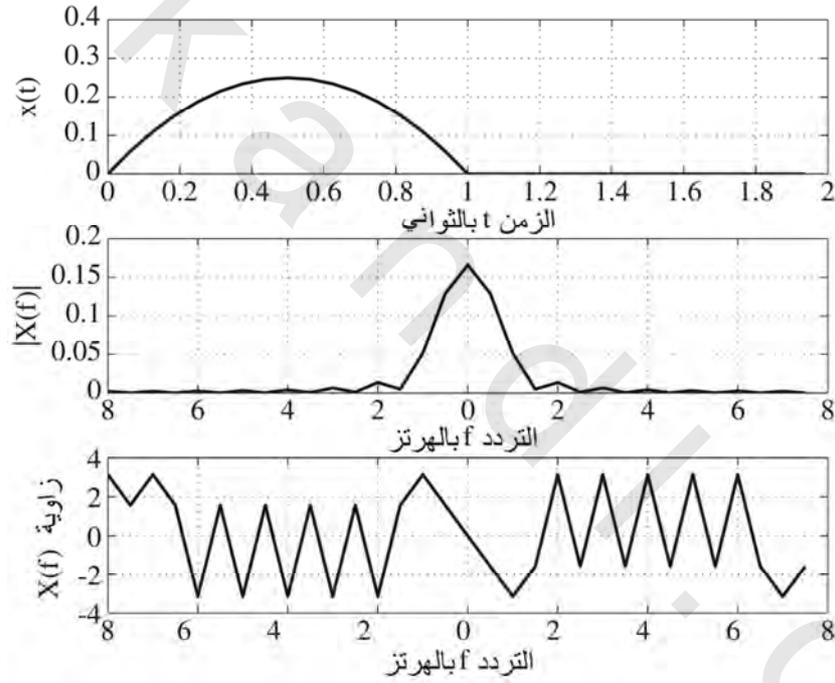
```

subplot(3,1,1);
p = plot(t,x,'k'); set(p,'LineWidth',2); grid on;
xlabel('Time, t (s)'); ylabel('x(t)');
subplot(3,1,2);
p = plot(k*df,abs(X),'k'); set(p,'LineWidth',2); grid on;
xlabel('Frequency, f (Hz)'); ylabel('|X(f)|');
subplot(3,1,3);
p = plot(k*dF,angle(X),'k'); set(p,'LineWidth',2); grid on;
xlabel('Frequency, f (Hz)'); ylabel('Phase of X(f)');

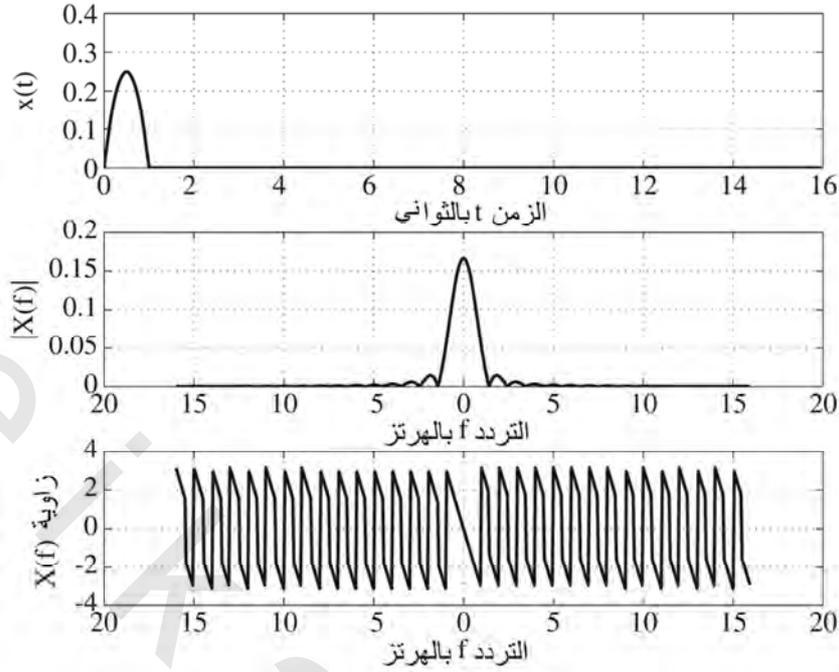
```

شكل (٦.٣٣) وشكل (٦.٣٤) يوضحان نتائج هذا البرنامج باستخدام 32 و 512 نقطة.

هذه النتيجة تعتبر تقريباً لتحويل فوريير المستمر CTFT؛ لأنه يستخدم 32 نقطة. إذا استخدمنا 512 نقطة على الفترة الزمنية التي تبلغ 16 ثانية فإننا نحصل على تقريب بتحديدية عالية في النطاق الترددي، وعلى مدى ترددي أوسع.



شكل رقم (٦.٣٣) تقريب لتحويل فوريير المستمر CTFT باستخدام تحويل فوريير المتقطع DFT مرسوم على ترددات سالبة وموجبة تساوية.



شكل رقم (٦.٣٤) تقريب لتحويل فوريير المستمر CTFT باستخدام DFT بتحديدية عالية.

مثال ٦.١٦

تحليل الأنظمة باستخدام تحويل فوريير المستمر CTFT

نظام موصوف بالمعادلة التفاضلية التالية : $y'(t) + 1000y(t) = 1000x(t)$ تمت إثارته بالإشارة $x(t) = 4\text{rect}(200t)$.

احسب وارسم الاستجابة $y(t)$.

إذا قمنا بعمل تحويل فوريير للمعادلة التفاضلية نحصل على :

$$j2\pi f Y(f) + 1000Y(f) = 1000X(f)$$

التي يمكن إعادة ترتيبها كما يلي :

$$Y(f) = \frac{1000X(f)}{j2\pi f + 1000}$$

تحويل فوريير للإشارة هو $X(f) = 0.02\text{sinc}(f/200)$. ولذلك فإن تحويل فوريير للاستجابة ستكون :

$$Y(f) = \frac{20\text{sinc}(f/200)}{j2\pi f + 1000}$$

أو باستخدام تعريف دالة السنك والتعريف الأسّي للدالة الجيبية :

$$Y(f) = 20 \frac{\sin(\pi f/200)}{(\frac{\pi f}{200})(j2\pi f + 1000)} = 4000 \frac{e^{j2\pi f/400} - e^{-j2\pi f/400}}{j2\pi f(j2\pi f + 1000)}$$

لإيجاد تحويل فورير العكسي، سنبدأ بزوج تحويل فورير التالي: $\alpha > 0$ ، $e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j2\pi f + \alpha}$

$$e^{-1000t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j2\pi f + 1000}$$

بعد ذلك نستخدم خاصية التكامل:

$$\int_{-\infty}^t g(\lambda) d\lambda \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{G(f)}{j2\pi f} + \left(\frac{1}{2}\right)G(0)\delta(f)$$

$$\int_{-\infty}^t e^{-1000\lambda}u(\lambda) d\lambda \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j2\pi f} \frac{1}{j2\pi f + 1000} + \frac{1}{2000}\delta(f)$$

بعد ذلك طبق خاصية الإزاحة الزمنية:

$$g(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

$$\int_0^{t+1/400} e^{-1000\lambda} d\lambda \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j2\pi f} \frac{e^{j2\pi f/400}}{j2\pi f + 1000} + \frac{e^{j2\pi f/400}}{2000}\delta(f)$$

$$\int_0^{t-1/400} e^{-1000\lambda} d\lambda \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j2\pi f} \frac{e^{-j2\pi f/400}}{j2\pi f + 1000} + \frac{e^{-j2\pi f/400}}{2000}\delta(f)$$

ب طرح النتيجة الثانية من النتيجة الأولى والضرب في 4000:

$$4000 \int_{-\infty}^{t+\frac{1}{400}} e^{-1000\lambda}u(\lambda) d\lambda - 4000 \int_{-\infty}^{t-\frac{1}{400}} e^{-1000\lambda}u(\lambda) d\lambda \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{4000}{j2\pi f} \frac{e^{j2\pi f/400} - e^{-j2\pi f/400}}{j2\pi f + 1000}$$

$$4000 \left[\int_{-\infty}^{t+\frac{1}{400}} e^{-1000\lambda}u(\lambda) d\lambda - \int_{-\infty}^{t-\frac{1}{400}} e^{-1000\lambda}u(\lambda) d\lambda \right] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{4000}{j2\pi f} \frac{e^{j2\pi f/400} - e^{-j2\pi f/400}}{j2\pi f + 1000}$$

يمكن تبسيط التكاملين السابقين كما يلي:

$$\int_{-\infty}^{t+\frac{1}{400}} e^{-1000\lambda}u(\lambda) d\lambda = \begin{cases} \left(\frac{1}{1000}\right) \left(1 - e^{-1000(t+\frac{1}{400})}\right), & t \geq -1/400 \\ 0, & t < -1/400 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{1000} \left(1 - e^{-1000(t + \frac{1}{400})}\right) u\left(t + \frac{1}{400}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{t - \frac{1}{400}} e^{-1000\lambda} u(\lambda) d\lambda = \begin{cases} \left(\frac{1}{1000}\right) \left(1 - e^{-1000(t - \frac{1}{400})}\right), & t \geq 1/400 \\ 0, & t < 1/400 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{1000} \left(1 - e^{-1000(t - \frac{1}{400})}\right) u\left(t - \frac{1}{400}\right)$$

وعلى ذلك :

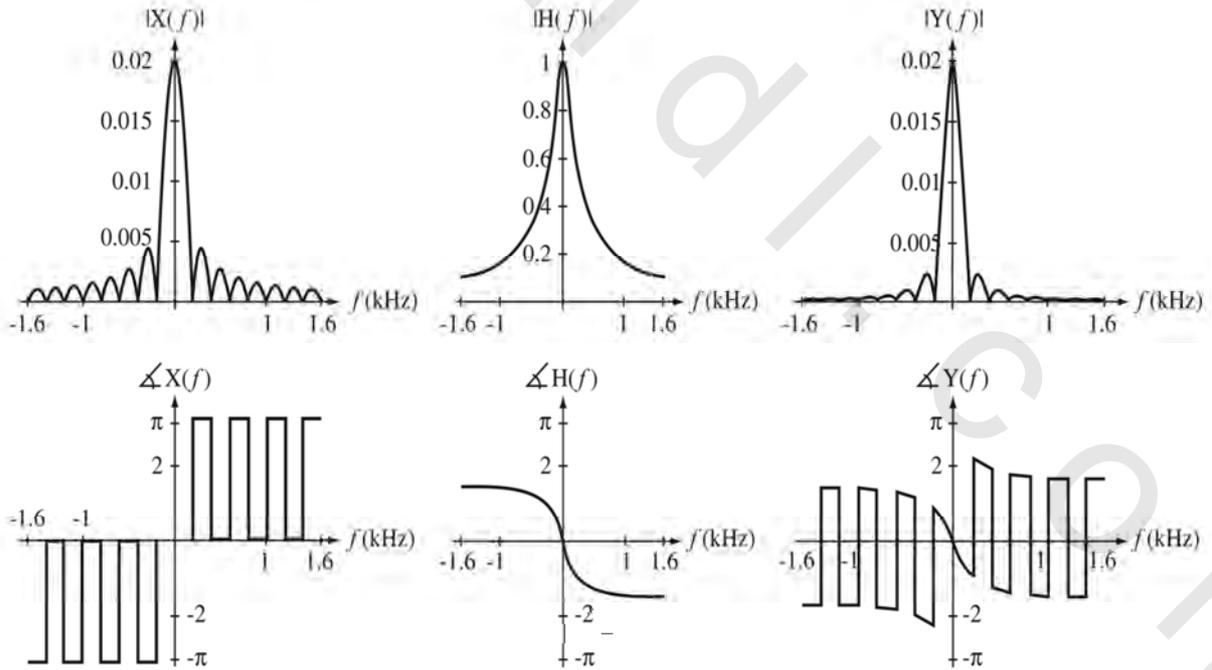
$$4 \left[\left(1 - e^{-1000(t + \frac{1}{400})}\right) u\left(t + \frac{1}{400}\right) - \left(1 - e^{-1000(t - \frac{1}{400})}\right) u\left(t - \frac{1}{400}\right) \right] \leftrightarrow$$

$$\frac{4000 e^{j2\pi f/400} - e^{-j2\pi f/400}}{j2\pi f} \frac{1}{j2\pi f + 1000}$$

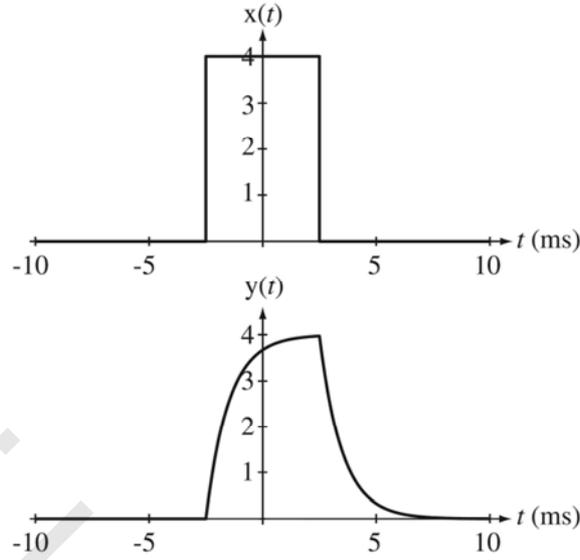
وعلى ذلك فالاستجابة ستكون :

$$y(t) = 4 \left[\left(1 - e^{-1000(t + \frac{1}{400})}\right) u\left(t + \frac{1}{400}\right) - \left(1 - e^{-1000(t - \frac{1}{400})}\right) u\left(t - \frac{1}{400}\right) \right]$$

انظر شكل (٦.٣٥) وشكل (٦.٣٦).



شكل رقم (٦.٣٥) مقدار وزاوية، تحويل فوريير المستمر CTFT، والإثارة، والاستجابة، والاستجابة الترددية للنظام.



شكل رقم (٦.٣٦) إثارة نبضة مستطيلة واستجابة النظام لها.

مثال ٦.١٧

تحليل النظام باستخدام تحويل فوريير المستمر CTFT

نظام موصوف بالمعادلة التفاضلية التالية : $y'(t) + 1000y(t) = 1000x(t)$ تمت إثارته بالإشارة $x(t) = 4\text{rect}(200t) * \delta_{0.01}(t)$. احسب وارسم الاستجابة $y(t)$.

من مثال ٦.١٦ حصلنا على :

$$Y(f) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} Y(j\omega) = \frac{1000X(j\omega)}{j\omega + 1000}$$

تحويل فوريير (صورة التردد الدوري) للإشارة هو $X(f) = 0.02\text{sinc}(f/200)\delta_{100}(f)$ وبالتالي فإن $X(j\omega) =$

$0.02\text{sinc}(\omega/400\pi)\delta_{100}(\omega/2\pi)$. باستخدام خاصية التحجيم للصدمة الدورية :

$$X(j\omega) = 0.02\text{sinc}(\omega/400\pi) \times 2\pi\delta_{200\pi}(\omega) = 0.04\pi\text{sinc}(\omega/400\pi)\delta_{200\pi}(\omega)$$

وعلى ذلك فإن تحويل فوريير المستمر للاستجابة سيكون :

$$Y(j\omega) = \frac{4000\pi\text{sinc}\left(\frac{\omega}{400\pi}\right)\delta_{200\pi}(\omega)}{j\omega + 1000}$$

أو باستخدام تعريف الصدمة الدورية :

$$Y(j\omega) = 4000\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sinc}\left(\frac{\omega}{400\pi}\right)\delta(\omega - 200\pi k)}{j\omega + 1000}$$

والآن باستخدام خاصية التكافؤ لدالة الصدمة فإن :

$$Y(j\omega) = 4000\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sinc}(k/2)\delta(\omega - 200\pi k)}{j\omega + 1000}$$

بإجراء تحويل فوريير العكسي نحصل على :

$$y(t) = 2000 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sinc}(k/2)}{j200\pi k + 1000} e^{j200\pi kt}$$

إذا قمنا بفصل الجزء $k=0$ وازدواج كل k و $-k$ نحصل على :

$$y(t) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sinc}(k/2)}{j200\pi k + 1000} e^{j200\pi kt} + \frac{\text{sinc}(-k/2)}{-j200\pi k + 1000} e^{-j200\pi kt}$$

باستخدام حقيقة أن دالة الـ sinc تكون دالة زوجية ويربط الحدود على مقام متحد :

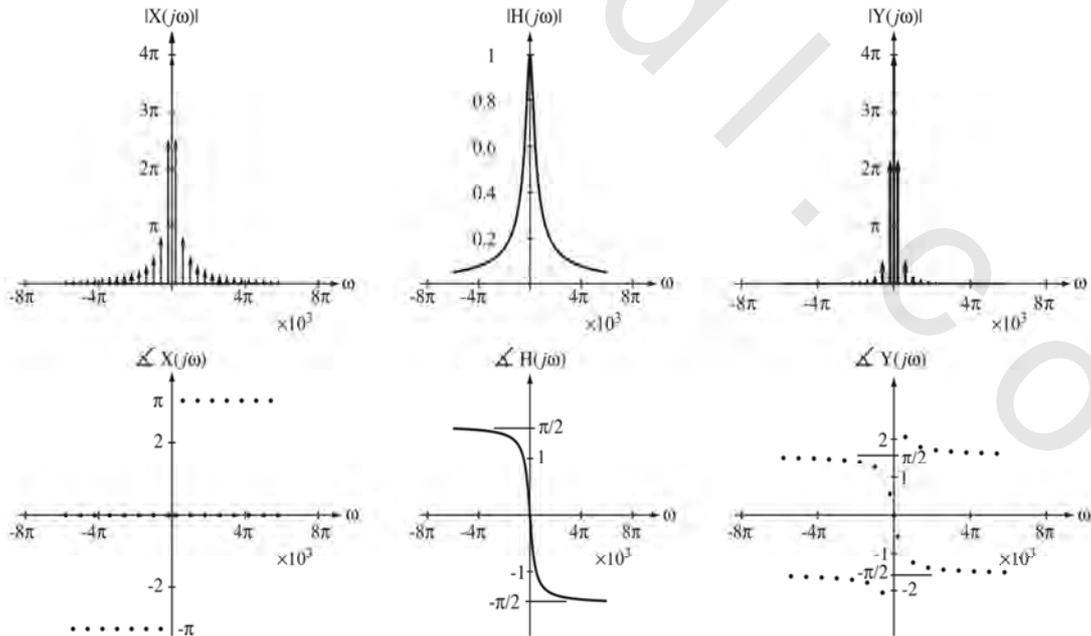
$$y(t) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \text{sinc}(k/2) \frac{(-j200\pi k + 1000)e^{j200\pi kt} + (j200\pi k + 1000)e^{-j200\pi kt}}{(200\pi k)^2 + (1000)^2}$$

$$y(t) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \text{sinc}(k/2) \frac{2000 \cos(200\pi kt) + 400\pi k \sin(200\pi kt)}{(200\pi k)^2 + (1000)^2}$$

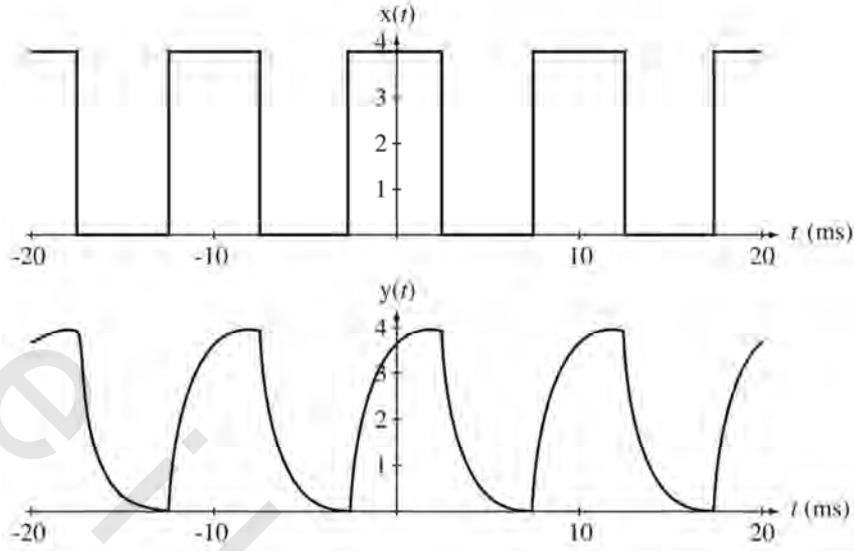
$$y(t) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \text{sinc}(k/2) \frac{5\cos(200\pi kt) + \pi k \sin(200\pi kt)}{25 + (\pi k)^2}$$

واضح أن الاستجابة هي ثابت زائد مجموع خطي من الجيب وجيب التمام الحقيقي عند مضاعفات حقيقية

من الـ 100 هرتز كما في شكل (٦.٣٧) وشكل (٦.٣٨).



شكل رقم (٦.٣٧) مقدار وزاوية، تحويل فوريير المستمر، والإثارة، والاستجابة، والاستجابة الترددية للنظام.



شكل رقم (٦.٣٨) الإثارة والاستجابة.

(٦.٤) ملخص النقاط المهمة

- ١- تتابع فوريير هو طريقة للتعبير عن أي إشارة اختيارية مع الأهمية الهندسية كتجميع خطي من الدوال الجيبية ذات القيمة الحقيقية، أو المركبة.
- ٢- مجموعة الدوال الجيبية المركبة المستخدمة عن طريق الصورة المركبة لتتابع فوريير تكون مجموعة من الدوال المتعامدة التي يمكن دمجها في ترابط خطي لتكوين أي دالة دورية اختيارية ذات فائدة هندسية.
- ٣- العلاقة التي تعطي الدالة التوافقية لتتابع فوريير يمكن استنتاجها باستخدام أساسيات التعامد.
- ٤- يمكن استخدام تتابع فوريير لإيجاد استجابة أي نظام LTI لأي إثارة دورية.
- ٥- يمكن مد تتابع فوريير لكي يسمح بالتعبير عن الدوال غير الدورية وهذا الامتداد يسمى تحويل فوريير.
- ٦- بمساعدة جدول أزواج تحويلات فوريير وخواصها، فإن التحويل والتحويل العكسي لكل الإشارات ذات الأهمية الهندسية الدورية أو غير الدورية يمكن إيجادها.
- ٧- الاستجابة الترددية لأي نظام مستقر هي تحويل فوريير لاستجابته الصدمية.
- ٨- يمكن استخدام تحويل فوريير لإيجاد استجابة أي نظام LTI لإشارات الطاقة وأيضاً للإشارات الدورية.

تمارين مع إجاباتها

(في كل تمرين تكون الإجابات مدونة بترتيب عشوائي).

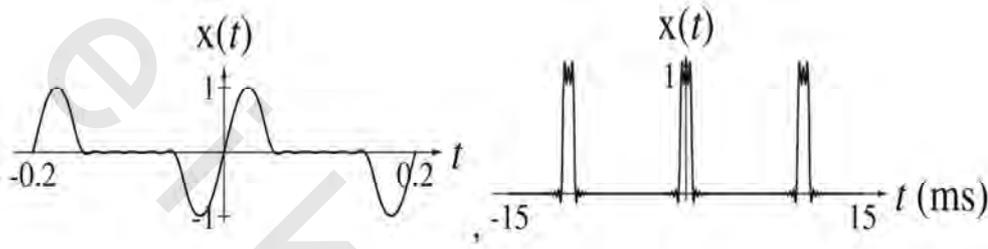
تتابع فوريير

١- باستخدام ماتلاب ارسم مجموع الدوال الجيبية المركبة على الفترة الزمنية الموضحة :

$$x(t) = \frac{1}{10} \sum_{k=-30}^{30} \text{sinc}\left(\frac{k}{10}\right) e^{j200\pi kt}, \quad -15 < t < 15 \text{ms} \quad (\text{أ})$$

$$x(t) = \frac{j}{4} \sum_{k=-9}^9 \left[\text{sinc}\left(\frac{k+2}{2}\right) - \text{sinc}\left(\frac{k-2}{2}\right) \right] e^{j10\pi kt}, \quad -200 < t < 200 \text{ms} \quad (\text{ب})$$

الإجابة :



شكل رقم (ج.ت.١-).

التعامد

٢- وضح باستخدام التكامل التحليلي بأن تكامل الدالة التالية يكون صفر في الفترة الزمنية - $1/2 < t < 1/2$

$$g(t) = A \sin(2\pi t) B \sin(4\pi t)$$

الدوال التوافقية لتتابع فوريير المستمر زمنياً

٣- لكل إشارة من الإشارات التالية، احسب تتابع فوريير المستمر CTFS اعتماداً على الدورة الأساسية، وارسم مقدار وزاوية الدالة التوافقية مع الرقم التوافقي k، وبعد ذلك حوّل الإجابات إلى

الصورة المثلية للدالة التوافقية :

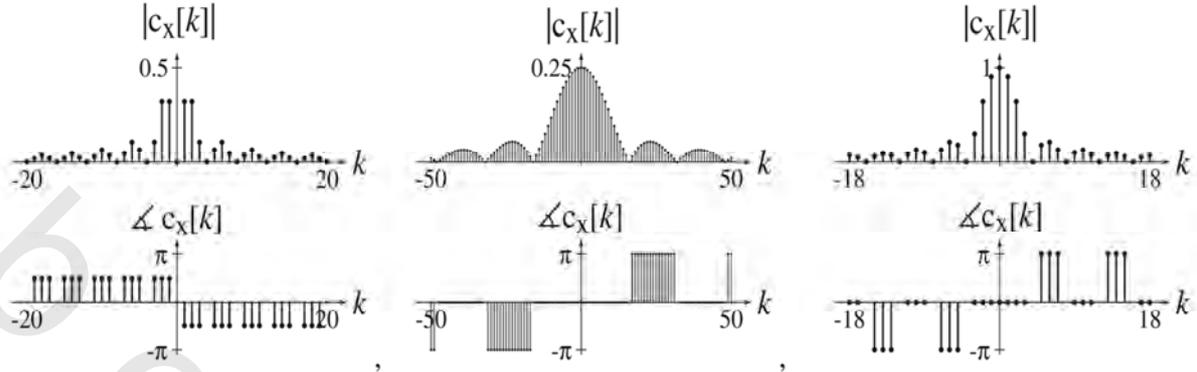
$$x(t) = 4 \text{rect}(4t) * \delta_1(t) \quad (\text{أ})$$

$$x(t) = 4 \text{rect}(4t) * \delta_4(t) \quad (\text{ب})$$

(ت) دالة دورية موصوفة على الدورة الأساسية بالمعادلة التالية :

$$x(t) = \begin{cases} \text{sgn}(t), & |t| < 1 \\ 0, & 1 < |t| < 2 \end{cases}$$

الإجابة :



شكل رقم (ج.ت-٣).

٤- دالة دورية $x(t)$ دورتها ٤ ثوانٍ موصوفة على مدار دورة أساسية واحدة بالعلاقة $x(t)=3-t, 0 < t < 4$. ارسم هذه الإشارة واحسب الدالة التوافقية لتتابع فوريير لها. بعد ذلك ارسم على التدرج نفسه تقريبات الإشارة $x_N(t)$ المعطاة بالعلاقة التالية:

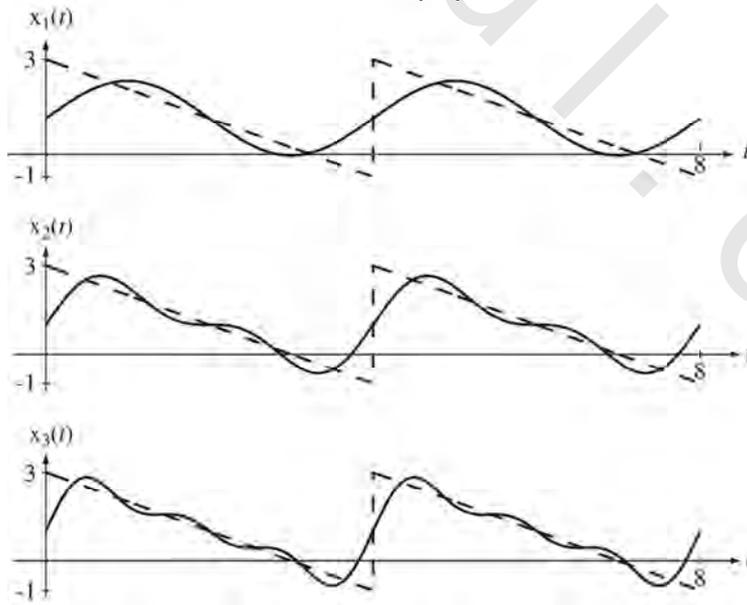
$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_x[k] e^{j2\pi kt/T_0}$$

لقيم $N=1, 2, 3$. (في كل حالة يجب أن يغطي تدرج الشكل دورتين أساسيتين على الأقل من الإشارة

(الأصلية)

الإجابة:

$$c_x[k] = \frac{1}{4} \frac{2e^{-j2\pi k}(-2 - j\pi k) - j6\pi k + 4}{(\pi k)^2}$$



شكل رقم (ج.ت-٤).

٥- باستخدام جدول تتابع فوريير المستمر للتحويلات وخواص تتابع فوريير، احسب الدالة التوافقية لتتابع فوريير لكل من الإشارات الدورية التالية باستخدام زمن التمثيل T الموضح :

$$x(t)=10\sin(20\pi t), \quad T=1/10 \quad (\text{أ})$$

$$x(t)=2\cos(100\pi(t-0.005)), \quad T=1/50 \quad (\text{ب})$$

$$x(t)=-4\cos(500\pi t), \quad T=1/50 \quad (\text{ت})$$

$$x(t) = \frac{d}{dt}(e^{-j10\pi t}), \quad T = 1/5 \quad (\text{ث})$$

$$x(t)=\text{rect}(t)*4\delta_4(t) \quad T=4 \quad (\text{ج})$$

$$x(t)=\text{rect}(t)*4\delta_1(t) \quad T=1 \quad (\text{ح})$$

$$x(t)=\text{tri}(t)*\delta_1(t) \quad T=1 \quad (\text{خ})$$

الإجابة :

$$j(\delta[k+1]-\delta[k-1]), \quad j5(\delta[k+1]-\delta[k-1]), \quad \delta[k], \quad \delta[k], \quad -2(\delta[k-5]+\delta[k+5])$$

$$\text{sinc}(k/4), \quad -j10\pi\delta[k+1]$$

٦- الدالة التوافقية لتتابع فوريير المستمر للدالة $x(t)$ اعتماداً على دورة أساسية واحدة هي :

$$c_x[k] = \frac{1-\cos(\pi k)}{(\pi k)^2}$$

(أ) هل هذه الإشارة زوجية أم فردية أم أنها لا زوجية ولا فردية ؟

(ب) ما هي القيمة المتوسطة لهذه الإشارة ؟

الإجابة : زوجية، $1/2$.

٧- احسب الدالة التوافقية لدالة جيبيية على الصورة العامة التالية $A\sin(2\pi f_0 t)$. بعد ذلك، استخدم نظرية

بارسيغال احسب طاقة هذه الإشارة وتحقق من أنها هي نفسها مثل طاقة الإشارة المحسوبة من الدالة نفسها مباشرة.

الإجابة : $A^2/2$

٨- افترض زوج التحويل التالي : فيما عدا ذلك $c_x[k] = \begin{cases} j4k, & |k| < 4 \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$ إذا كانت $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} c_x[k]$ و $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

$$y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} c_y[k]$$

(أ) ما هي القيمة المتوسطة للإشارة $x(t)$ ؟

(ب) ما هي القيمة العددية لـ $c_y[1]$ ؟

(ج) هل هذه $x(t)$ زوجية أم فردية أم لا زوجية ولا فردية ؟

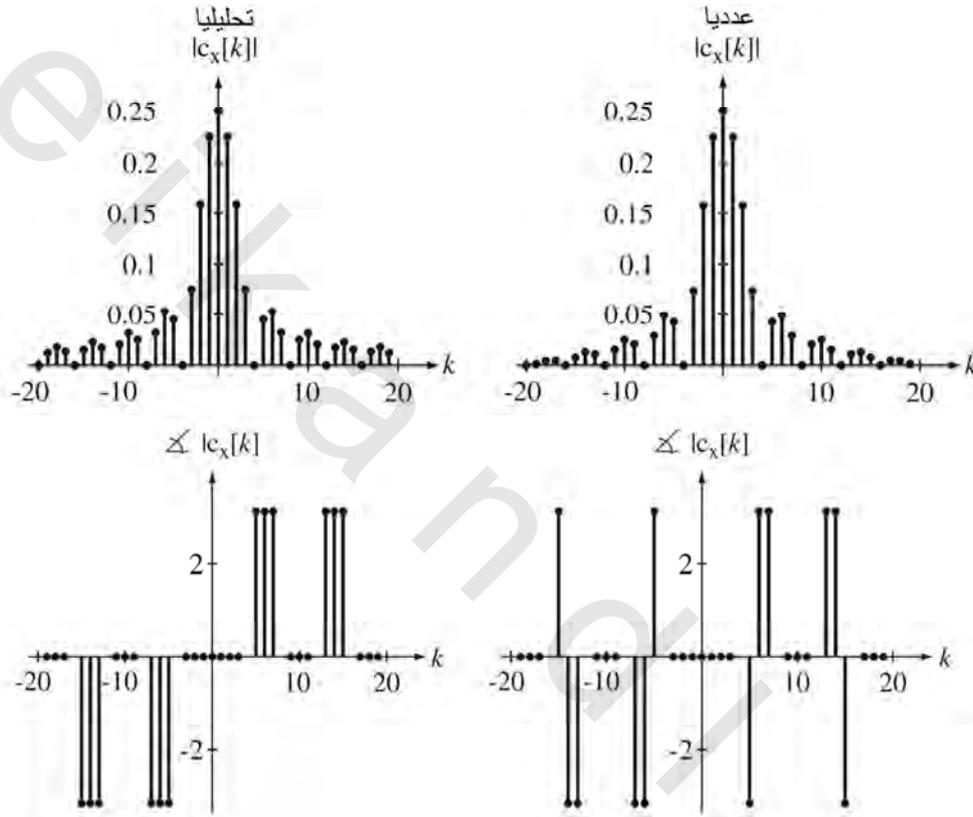
الإجابة : $0, 16/\pi$ ، فردية

٩- احسب وارسم مقدار وزاوية الدالة التوافقية لتتابع فوريير CTFS للدالة $x(t)=\text{rect}(20t)*\delta_{1/5}(t)$ مستخدماً زمن تمثيل $T=1/5$ باستخدام:

(أ) جداول تتابع فوريير المستمر CTFS

(ب) زمن بين العينات $T_s=1/2000$ عودياً

الإجابة: $c_x[k]=(1/4)\text{sinc}(k/4)$



شكل رقم (ج.ت-٩)

١٠- مكّتم يقبل إشارة دخل مستمرة زمنياً ويعطي إشارة خرج مستمرة زمنياً لها عدد محدد من القيم المتساوية التباعد. إذا كانت $x_{in}(t)$ هي إشارة الدخل، و $x_{out}(t)$ هي إشارة الخرج و q هي الفرق بين مستويين متجاورين من الخرج، قيمة $x_{out}(t)$ عند أي لحظة زمنية يمكن حسابها عن طريق تكوين النسبة $x_{in}(t)/q$ ، مقرباً إياها لأقرب رقم صحيح، وبعد ذلك يتم ضرب النتيجة في q . افترض أن مدى مستويات الإشارة الداخلة للمكّتم تتراوح بين -10 حتى +10 وافترض أن عدد مستويات التكميم تساوي ١٦. احسب التشويه التوافقي العددي الكلي (انظر مثال ٦.٤) لإشارة خرج هذا المكّتم إذا كانت إشارة الدخل هي $x_{in}(t)=10\sin(2000\pi t)$

الإجابة : 0.2342%.

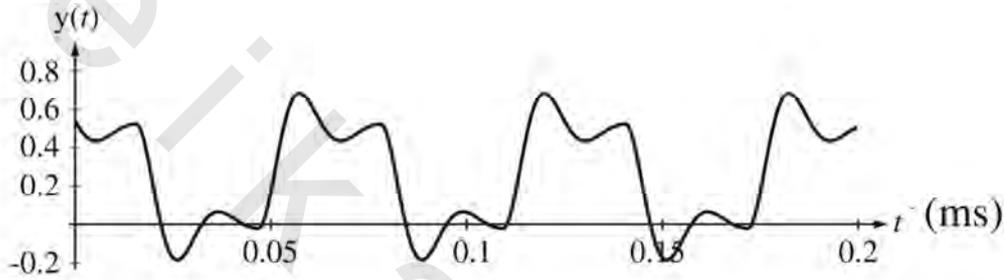
استجابة الأنظمة للإثارة الدورية

١١ - نظام مستمر زمنياً موصوف بالمعادلة التفاضلية التالية :

$$y''(t) + 200y'(t) + 10^5y(t) = 10^5x(t)$$

إذا كانت الإثارة هي $x(t) = \text{rect}(32t) * \delta_{1/16}(t)$ ، ارسم الاستجابة $y(t)$.

الإجابة :



شكل (ج.ت-١١).

تحويلات فوريير الأمامية والعكسية

١٢ - افترض إشارة يمكن تعريفها كما يلي :

$$x(t) = 2\cos(4\pi t) + 5\cos(15\pi t)$$

احسب تحويل فوريير المستمر CTFT للإشارة $x(t-1/40)$ ، والإشارة $x(t+1/20)$ وحدد الإزاحة الزاوية لكل

دالة جيبية في كل حالة. ارسم زاوية الطور لتحويل فوريير المستمر CTFT وارسم خطاً مستقيماً خلال الأرباع

نقاط الطورية التي تنتج في كل حالة. ما هي العلاقة بين ميل هذا الخط والتأخير الزمني ؟

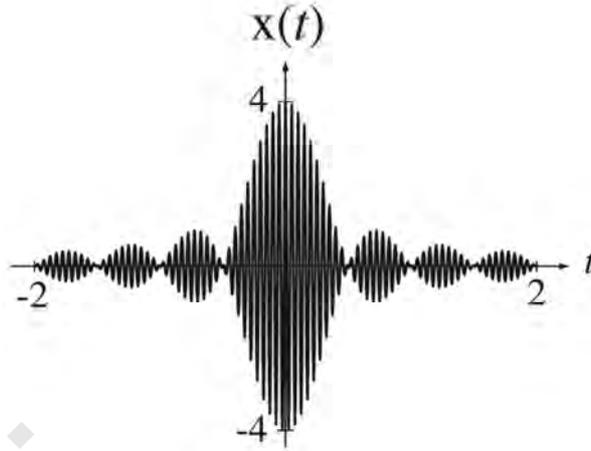
الإجابة :

ميل هذا الخط هو $-2\pi f$ مضروباً في زمن التأخير

١٣ - باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية ، احسب وارسم مع الزمن تحويل فوريير العكسي للدالة :

$$X(f) = \text{rect}\left(\frac{f-20}{2}\right) + \text{rect}\left(\frac{f+20}{2}\right)$$

الإجابة :



شكل رقم (ج.ت-١٣)

١٤- احسب تحويل فوريير المستمر CTFT للدالة $x(t)=\text{sinc}(t)$. بعد ذلك غير التدرج الزمني $t \leftrightarrow 2t$ في الإشارة $x(t)$ واحسب تحويل فوريير للإشارة المحجمة زمنياً.

الإجابة: $\text{rect}(f)$ ، $(1/2)\text{rect}(f/2)$

١٥- باستخدام الازدواجية بين الضرب والالتفاف لتحويل فوريير المستمر، احسب معادلة $y(t)$ التي لا تستخدم عملية الالتفاف * وارسم $y(t)$.

(أ) $y(t)=\text{rect}(t)*\cos(\pi t)$

(ب) $y(t)=\text{rect}(t)*\cos(2\pi t)$

(ت) $y(t)=\text{sinc}(t)*\text{sinc}(t/2)$

(ث) $y(t)=\text{sinc}(t)*\text{sinc}^2(t/2)$

(ج) $y(t)=e^{-t}u(t)*\sin(2\pi t)$

الإجابة: $\frac{\cos(2\pi t+2.984)}{\sqrt{1+(2\pi)^2}}$ ، $2/\pi \cos(\pi t)$ ، 0 ، $\text{sinc}(t/2)$ ، $\text{sinc}^2(t/2)$

١٦- باستخدام تحويل فوريير المستمر للدالة المستطيلة وخاصية التفاضل للـ CTFT، احسب تحويل فوريير للدالة:

$$x(t)=\delta(t-1) - \delta(t+1)$$

تحقق من إجابتك مع تحويل فوريير المحسوب باستخدام الجداول وخاصية الإزاحة الزمنية.

الإجابة: $-j2\sin(2\pi f)$

١٧- احسب القيم العددية التالية:

(أ) $x(t)=20\text{rect}(4t)$ $X(f)|_{f=2}$

$$\begin{aligned}
& \text{(ب)} \quad x(t)=2\text{sinc}(t/8)*\text{sinc}(t/4) \quad x(4) \\
& \text{(ج)} \quad x(t)=2\text{tri}(t/4)*\delta(t-2) \quad x(1) \text{ و } x(-1) \\
& \text{(د)} \quad x(t)=-5\text{rect}(t/2)*(\delta(t+1)+\delta(t)) \quad x(1/2) \text{ و } x(-1/2) \text{ و } x(-5/2) \\
& \text{(هـ)} \quad x(t)=3\text{rect}(t-1) \quad X(f)|_{f=1/4} \\
& \text{(و)} \quad x(t)=4\text{sinc}^2(3t) \quad X(j\omega)|_{\omega=4\pi} \\
& \text{(ز)} \quad x(t)=\text{rect}(t)*\text{rect}(2t) \quad X(f)|_{f=1/2} \\
& \text{(ح)} \quad X(f)=10[\delta(f-1/2)+\delta(f+1/2)] \quad x(1) \\
& \text{(ط)} \quad X(j\omega)=-2\text{sinc}(\omega/2\pi)*3\text{sinc}(\omega/\pi) \quad x(0)
\end{aligned}$$

الإجابة : -5 و 1/2 و 3/2 و 4/9 و 0 و -3 و 3.1831 و -10 و -20 و -j2.7 و 0.287 و 5.093

١٨- احسب تحويل فوريير الأمامي أو العكسي لكل مما يأتي. يجب ألا تحتوي الإجابة النهائية على عملية

الالتفاف.*

$$\begin{aligned}
& \text{(أ)} \quad \mathcal{F}(15\text{rect}((t+2)/7)) \\
& \text{(ب)} \quad \mathcal{F}^{-1}(2\text{tri}(f/2)e^{-j6\pi f}) \\
& \text{(ج)} \quad \mathcal{F}(\sin(20\pi t)\cos(200\pi t)) \\
& \text{الإجابة : } [j/2][\delta(f-90)+\delta(f+110)-\delta(f-110)-\delta(f+90)] \text{ و } 105\text{sinc}(7f)e^{j4\pi f} \text{ و } 4\text{sinc}^2(2(t-3))
\end{aligned}$$

١٩- استخدم نظرية بارسيغال واحسب طاقة الإشارة للإشارات التالية :

$$\begin{aligned}
& \text{(أ)} \quad x(t)=4\text{sinc}(t/5) \\
& \text{(ب)} \quad x(t)=2\text{sinc}^2(3t) \\
& \text{الإجابة : } 80 \text{ و } 8/9
\end{aligned}$$

٢٠- احسب القيم العددية للثوابت التالية :

$$\begin{aligned}
& \text{(أ)} \quad 6\text{rect}(2t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} A\text{sinc}(bf) \quad \text{أوجد } A \text{ و } b \\
& \text{(ب)} \quad 10\text{tri}((t-1)/8) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} A\text{sinc}^2(bf)e^{-jB\pi f} \quad \text{أوجد } A \text{ و } B \text{ و } b \\
& \text{(ج)} \quad 10[\delta(f-4)+\delta(f+4)] \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} A\cos(2\pi f_0 t) \quad \text{أوجد } A \text{ و } f_0 \\
& \text{(د)} \quad (A/b)\delta_{1/b}(t)e^{jB\pi t} \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (1/5)\delta_{1/10}(f-1/5) \quad \text{أوجد } A \text{ و } B \text{ و } b
\end{aligned}$$

الإجابة : 1/10 و 1/5 و 80 و 20 و 3 و 2 و 8 و 2/5 و 4 و 1/2

٢١- ما هي المساحة الكلية تحت الدالة $g(t)=100\text{sinc}((t-8)/30)$ ؟

الإجابة : 3000

٢٢- باستخدام خاصية التكامل احسب تحويل فوريير المستمر CTFT لكل من الدوال التالية مع تحويل فوريير

المحسوب باستخدام الخواص الأخرى.

$$g(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 2 - |t|, & 1 < |t| < 2 \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases} \quad (\text{أ})$$

$$g(t) = 8\text{rect}(t/3) \quad (\text{ب})$$

الإجابة : $24\text{sinc}(3f)$ و $3\text{sinc}(3f)\text{sinc}(f)$

٢٣- ارسم مقدار وزاوية تحويلات فوريير المستمر للإشارات التالية في صورة التردد الدوري f .

$$x(t) = \delta(t-2) \quad (\text{أ})$$

$$x(t) = u(t) - u(t-1) \quad (\text{ب})$$

$$x(t) = 5\text{rect}((t+2)/4) \quad (\text{ج})$$

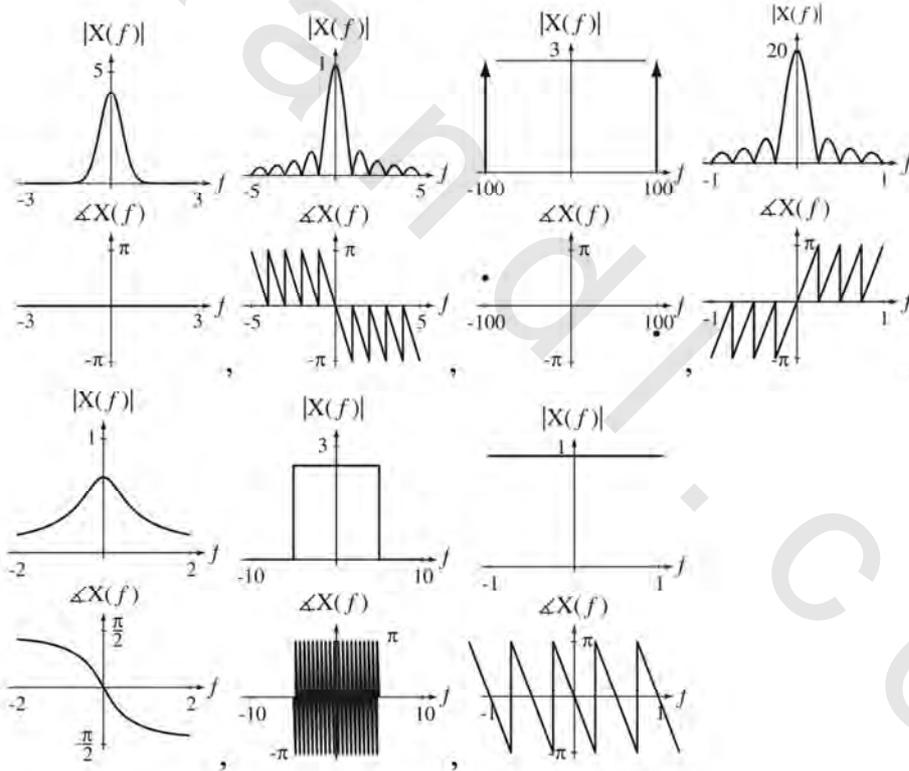
$$x(t) = 25\text{sinc}(10(t-2)) \quad (\text{د})$$

$$x(t) = 6\sin(200\pi t) \quad (\text{هـ})$$

$$x(t) = 2e^{-3t}u(3t) \quad (\text{و})$$

$$x(t) = 4e^{-3t^2} \quad (\text{ز})$$

الإجابة :



شكل رقم (ج.ت-٢٣).

٢٤- ارسم مقدار وزاوية تحويل فوريير المستمر CTFT لكل من الإشارات التالية في صورة التردد الزاوي ω .

$$x(t) = \delta_2(t) \quad (\text{أ})$$

$$x(t) = \text{sgn}(2t) \quad (\text{ب})$$

$x(t)=10\text{tri}((t-4)/20)$ (ج)

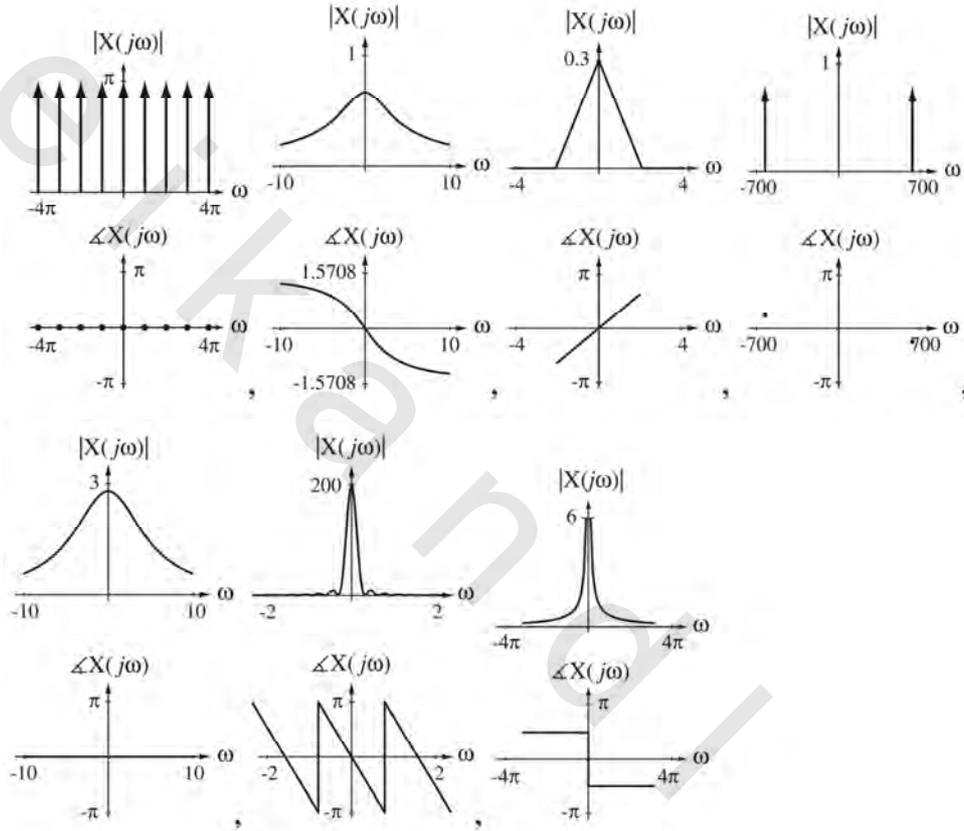
$x(t)=(1/10)\text{sinc}^2((t+1)/3)$ (د)

$x(t) = \frac{\cos(200\pi t - \frac{\pi}{4})}{4}$ (هـ)

$x(t)=2e^{-3t}u(t)$ (و)

$x(t)=7e^{-5|t|}$ (ز)

الإجابة :



شكل رقم (ج.ت-٢٤).

٢٥ - ارسم تحويلات فوريير العكسية لكل من الدوال التالية :

$X(f)=15\text{rect}(f/4)$ (أ)

$X(f) = \frac{\text{sinc}(-10f)}{30}$ (ب)

$X(f) = \frac{18}{9+f^2}$ (ج)

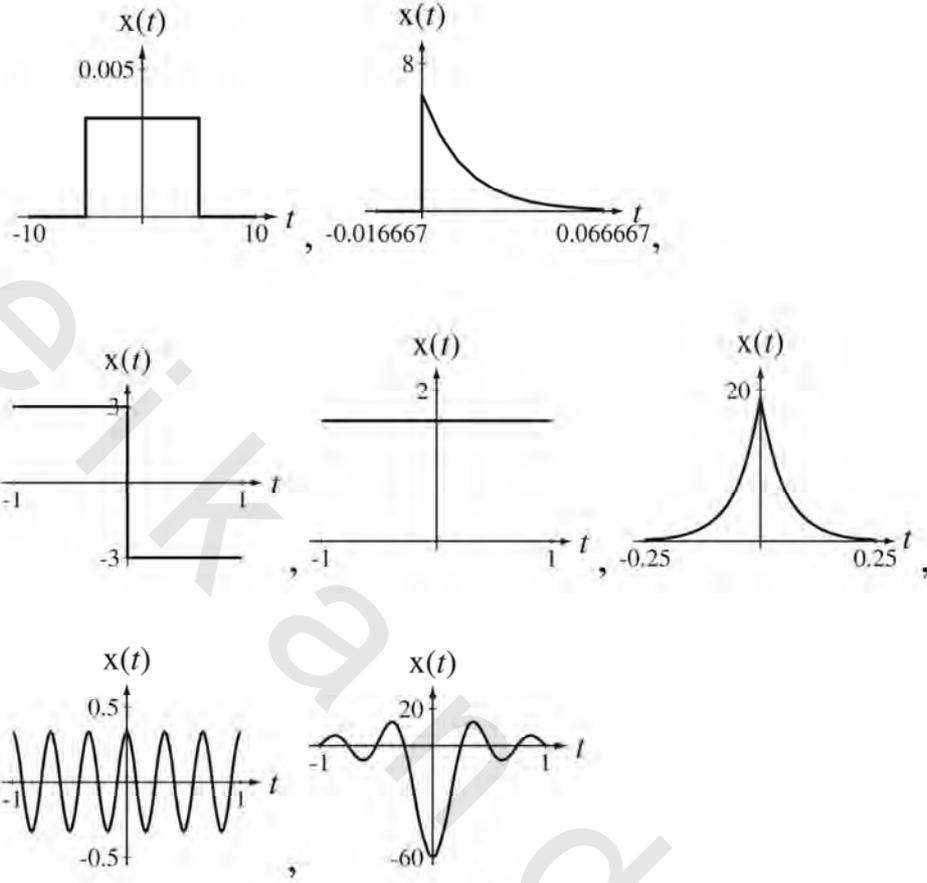
$X(f) = \frac{1}{10+jf}$ (د)

$X(f) = \frac{\delta(f-3)+\delta(f+3)}{6}$ (هـ)

$X(f) = 8\delta(5f)$ (و)

$X(f) = -\frac{3}{j\pi f}$ (ز)

الإجابة :



شكل رقم (ج.ت-٢٥).

٢٦- ارسم تحويلات فوريير العكسية لكل من الدوال التالية :

(أ) $X(j\omega) = e^{-4\omega^2}$

(ب) $X(j\omega) = 7\text{sinc}^2(\omega/\pi)$

(ج) $X(j\omega) = j\pi[\delta(\omega+10\pi) - \delta(\omega-10\pi)]$

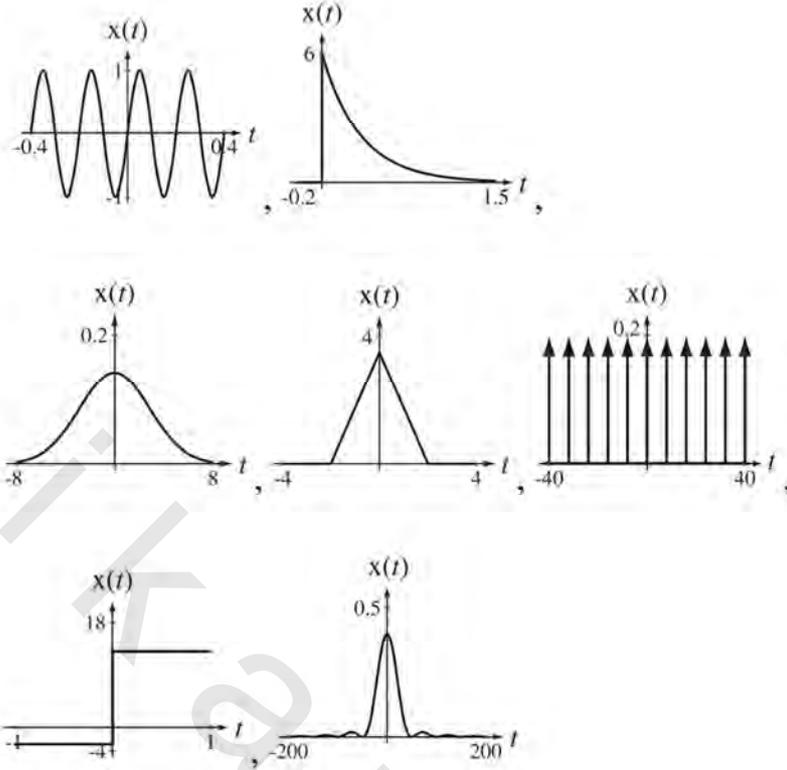
(د) $X(j\omega) = (\pi/20)\delta_{\pi/20}(\omega)$

(هـ) $X(j\omega) = 5\pi/j\omega + 10\pi\delta(\omega)$

(و) $X(j\omega) = \frac{6}{3+j\omega}$

(ز) $X(j\omega) = 20\text{tri}(8\omega)$

الإجابة :



شكل رقم (ج.ت-٢٦).

٢٧- احسب تحويل فوريير المستمر CTFT للإشارات التالية في صورة التردد الدوري f أو التردد الزاوي ω

أيهما يكون مريحا :

(أ) $x(t) = 3\cos(10t) + 4\sin(10t)$

(ب) $x(t) = 2\delta_2(t) - 2\delta_2(t-1)$

(ج) $x(t) = 4\text{sinc}(4t) - 2\text{sinc}(4(t-1/4)) - 2\text{sinc}(4(t+1/4))$

(د) $x(t) = [2e^{(-1+j2\pi)t} + 2e^{(-1-j2\pi)t}]u(t)$

(هـ) $x(t) = 4e^{-|t|/16}$

الإجابة : $(5\pi e^{-j0.927})\delta(\omega-10) + (5\pi e^{j0.927})\delta(\omega-10)$ و $4 \frac{j2\pi f + 1}{(j2\pi f + 1)^2 + (2\pi)^2}$

و $\text{Rect}(\omega/8\pi) - \text{rect}(\omega/8\pi)\cos(\omega/4)$ و $\frac{128}{1+256\omega^2}$ و $j4\pi e^{-j\omega/2} \delta_\pi(\omega)\sin(\omega/2)$

٢٨- ارسم مقدار وزاوية هذه الدوال. ارسم أيضاً تحويل فوريير العكسي لهذه الدوال :

(أ) $X(j\omega) = \frac{10}{3+j\omega} - \frac{4}{5+j\omega}$

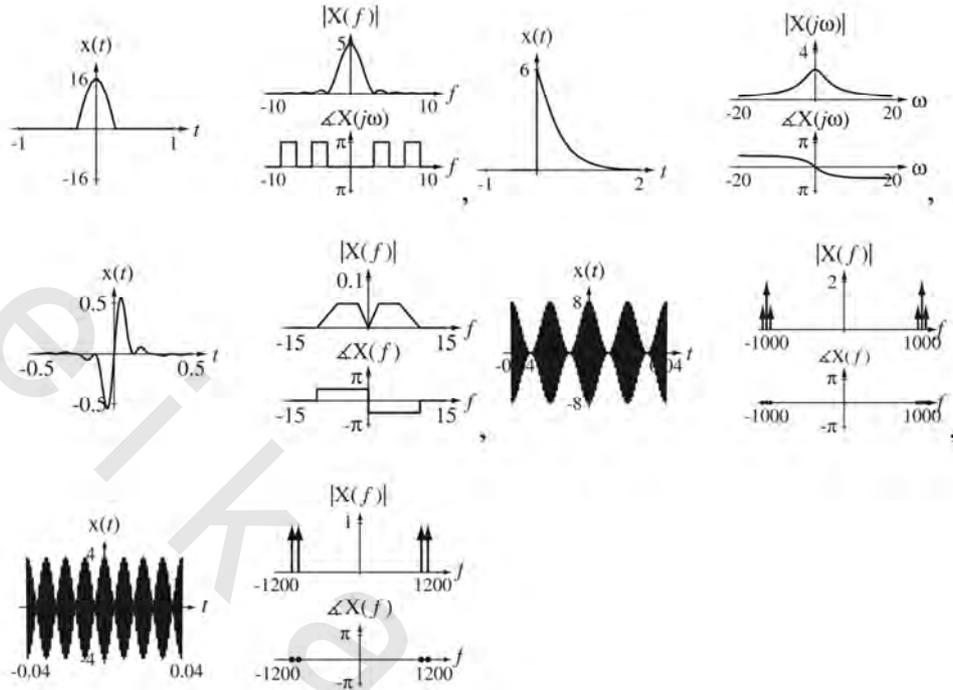
(ب) $X(f) = 4 \left[\text{sinc}\left(\frac{f-1}{2}\right) + \text{sinc}\left(\frac{f+1}{2}\right) \right]$

(ج) $X(f) = \frac{j}{10} \left[\text{tri}\left(\frac{f+2}{8}\right) - \text{tri}\left(\frac{f-2}{8}\right) \right]$

(د) $X(f) = \delta(f+1050) + \delta(f+950) + \delta(f-950) + \delta(f-1050)$

(هـ) $X(f) = \left[\begin{array}{l} \delta(f+1050) + 2\delta(f+1000) + \delta(f+950) \\ +\delta(f-950) + 2\delta(f-1000) + \delta(f-1050) \end{array} \right]$

الإجابة :



شكل رقم (ج.ت-٢٨).

٢٩- ارسم الإشارات التالية مع الزمن. ارسم مقدار وزاوية تحويل فوريير المستمر لها في صورة التردد

الدوري f أو التردد الزاوي ω أيهما يكون أكثر راحة.

$$x(t) = \text{rect}(2t) * \delta_1(t) - \text{rect}(2t) * \delta_1(t-1/2) \quad (\text{أ})$$

$$x(t) = -1 + 2\text{rect}(2t) * \delta_1(t) \quad (\text{ب})$$

$$x(t) = e^{-t/4} u(t) * \sin(2\pi t) \quad (\text{ج})$$

$$x(t) = e^{-\pi t^2} * [\text{rect}(2t) * \delta_1(t)] \quad (\text{د})$$

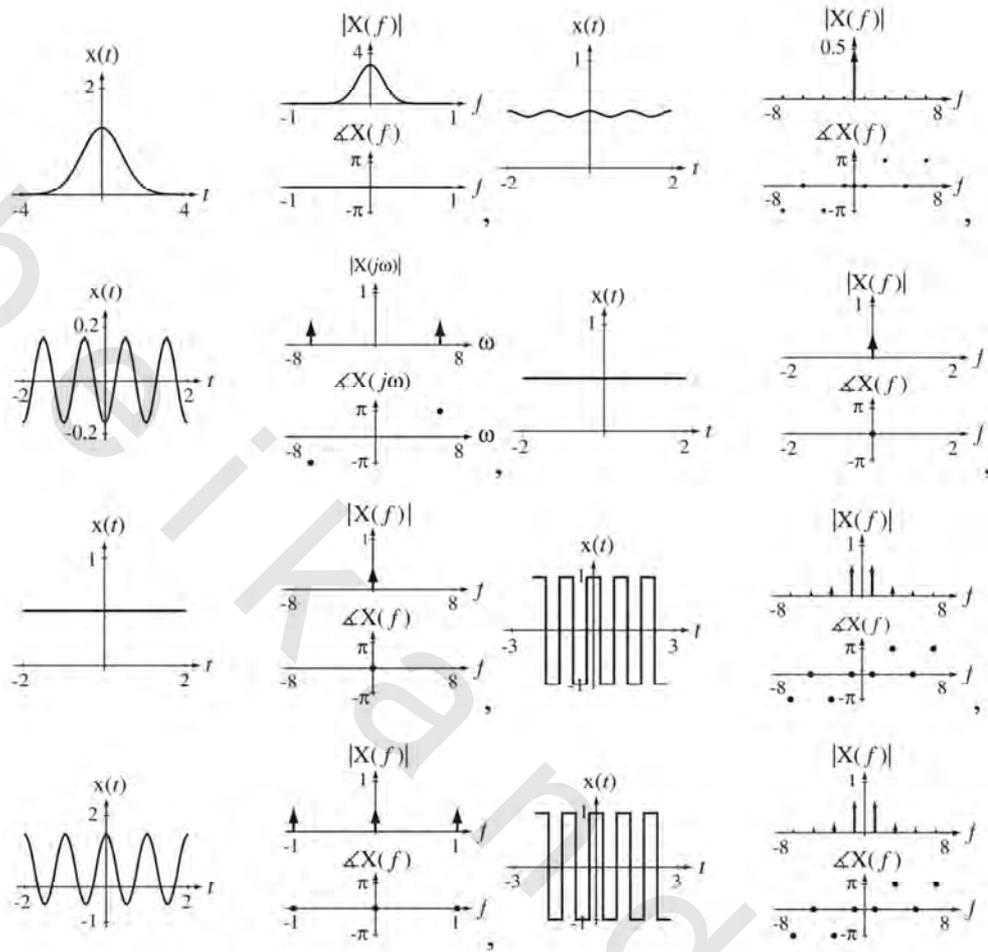
$$x(t) = \text{rect} * [\text{tri}(2t) * \delta_1(t)] \quad (\text{هـ})$$

$$x(t) = \text{sinc}(2.01t) * \delta_1(t) \quad (\text{و})$$

$$x(t) = \text{sinc}(1.99t) * \delta_1(t) \quad (\text{ز})$$

$$x(t) = e^{-t^2} * e^{-t^2} \quad (\text{ح})$$

الإجابة :



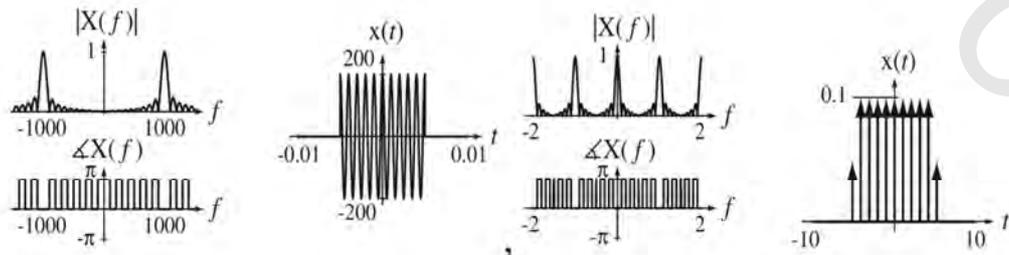
شكل رقم (ج.ت-٢٩).

٣٠- ارسم مقدار وزاوية كل دالة من الدوال التالية. ارسم تحويل فوريير العكسي أيضاً لهذه الدوال :

$$X(f) = \text{sinc}\left(\frac{f}{100}\right) * [\delta(f - 1000) + \delta(f + 1000)] \quad (\text{أ})$$

$$X(f) = \text{sinc}(10f) * \delta_1(f) \quad (\text{ب})$$

الإجابة :



شكل رقم (ج.ت-٣٠).

٣١- ارسم الإشارات التالية مع الزمن. ارسم مقدار وزاوية تحويل فورير المستمر CTFT لهذه الإشارات إما في صورة التردد الدوري f أو في صورة التردد الزاوي ω ، أيهما يكون مريحا لك. في بعض الأحوال يكون من المريح رسم المخطط الزمني أولا. في بعض الأحوال الأخرى يكون من المريح عمل المخطط الزمني بعد حساب تحويل فورير المستمر عن طريق إيجاد تحويل فورير العكسي.

$$x(t) = e^{-\pi t^2} \sin(20\pi t) \quad (\text{أ})$$

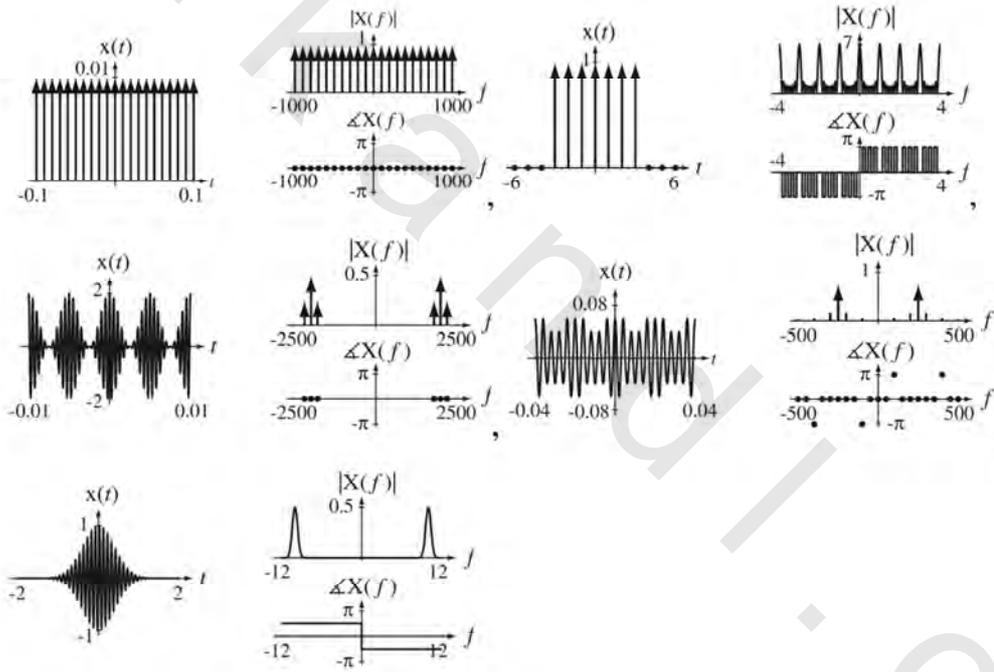
$$x(t) = (1/100) \cos(400\pi t) \delta_{1/100}(t) \quad (\text{ب})$$

$$x(t) = [1 + \cos(400\pi t)] \cos(400\pi t) \quad (\text{ج})$$

$$x(t) = [1 + \text{rect}(100t) * \delta_{1/50}(t)] \cos(500\pi t) \quad (\text{د})$$

$$x(t) = \text{rect}(t/7) \delta_1(t) \quad (\text{هـ})$$

الإجابة :



شكل رقم (ج.ت-٣١).

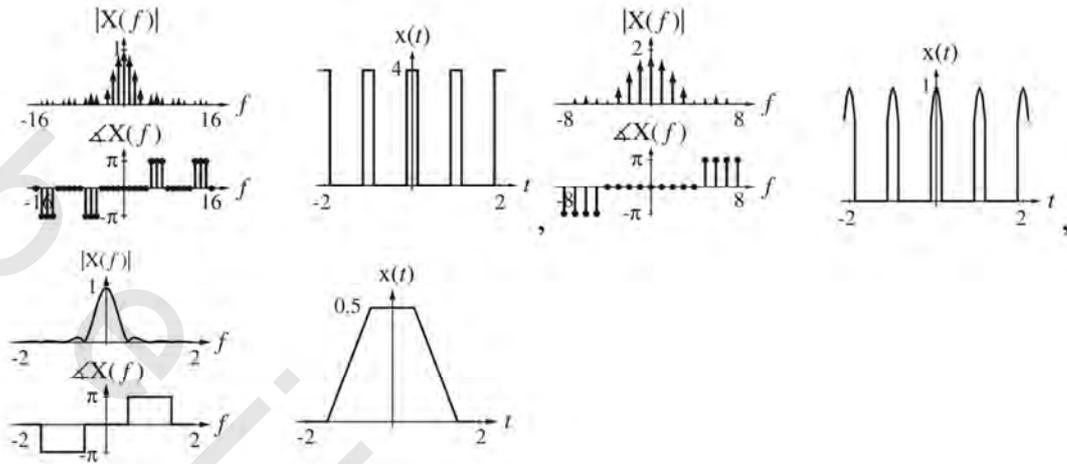
٣٢- ارسم مقدار وزاوية كل من الدوال التالية :

$$X(f) \text{sinc}(f/4) \delta_1(f) \quad (\text{أ})$$

$$X(f) = \left[\text{sinc}\left(\frac{f-1}{4}\right) + \text{sinc}\left(\frac{f+1}{4}\right) \right] \delta_1(f) \quad (\text{ب})$$

$$X(f) = \text{sinc}(f) \text{sinc}(2f) \quad (\text{ج})$$

الإجابة :



شكل رقم (ج.ت-٣٢).

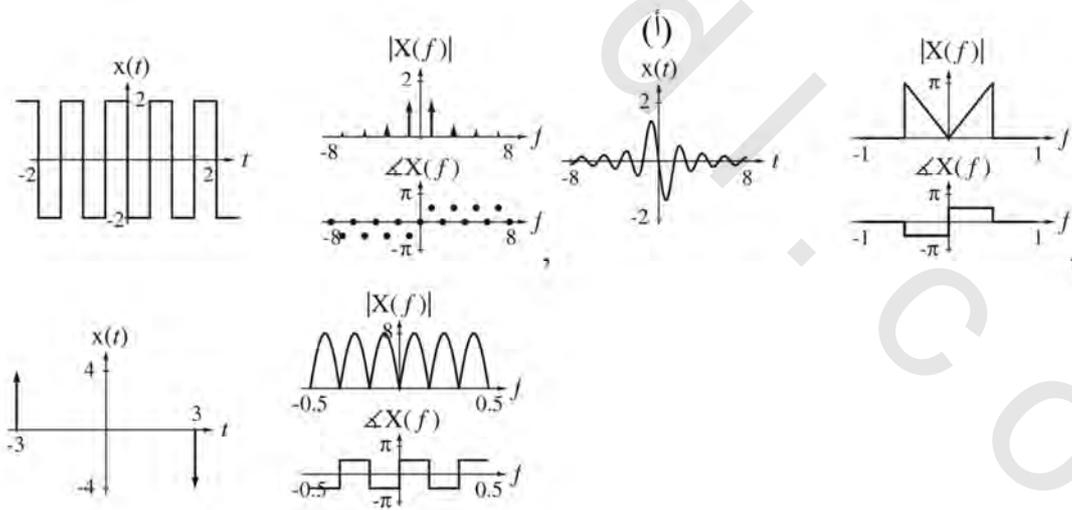
٣٣- ارسم الدوال التالية مع الزمن ومقدارة وزاوية تحويل فوريير المستمر لها :

(أ) $x(t) = \frac{d}{dt}[\text{sinc}(t)]$

(ب) $x(t) = \frac{d}{dt}[4\text{rect}(\frac{t}{6})]$

(ج) $x(t) = \frac{d}{dt}(\text{tri}(2t) * \delta_1(t))$

الإجابة :



شكل رقم (ج.ت-٣٣).

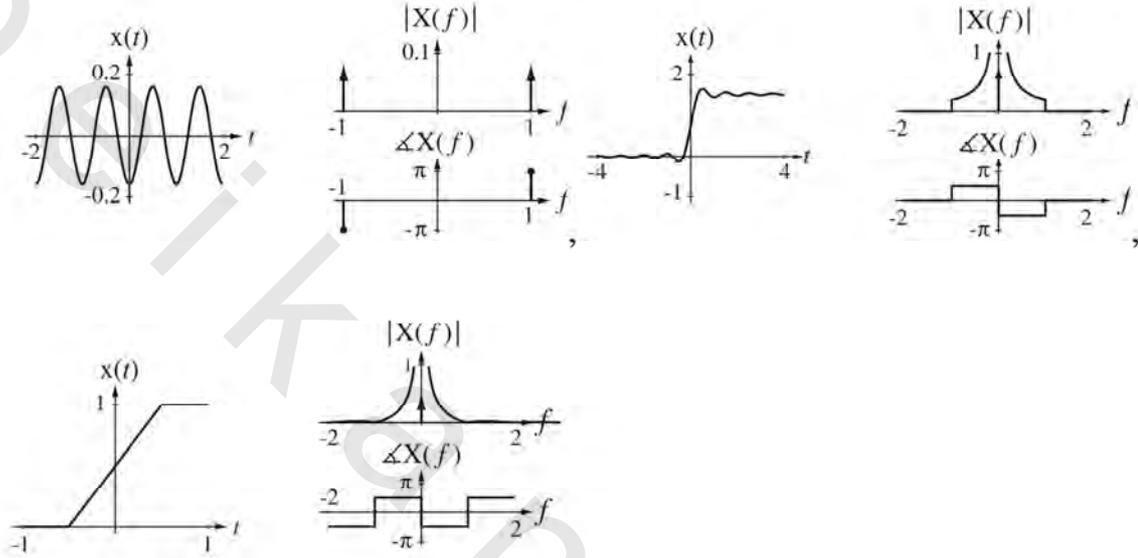
٣٤- ارسم الدوال التالية مع الزمن ومقدارة وزاوية تحويل فوريير المستمر لها :

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \sin(2\pi\lambda) d\lambda \quad (\text{أ})$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \text{rect}(\lambda) d\lambda \quad (\text{ب})$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^t 3\text{sinc}(2\lambda) d\lambda \quad (\text{ج})$$

الإجابة :



شكل رقم (ج.ت-٣٤).

العلاقة بين تتابع فوريير CTFS وتحويل فوريير CTFT

٣٥- الانتقال من تتابع فوريير CTFS وتحويل فوريير CTFT موضحة بالإشارة التالية :

$$x(t) = \text{rect}(t/\omega) * \delta_{T_0}(t)$$

أو :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t - nT_0}{\omega}\right)$$

الدالة التوافقية لتتابع فوريير CTFT لهذه الإشارة يُعطي بالعلاقة التالية :

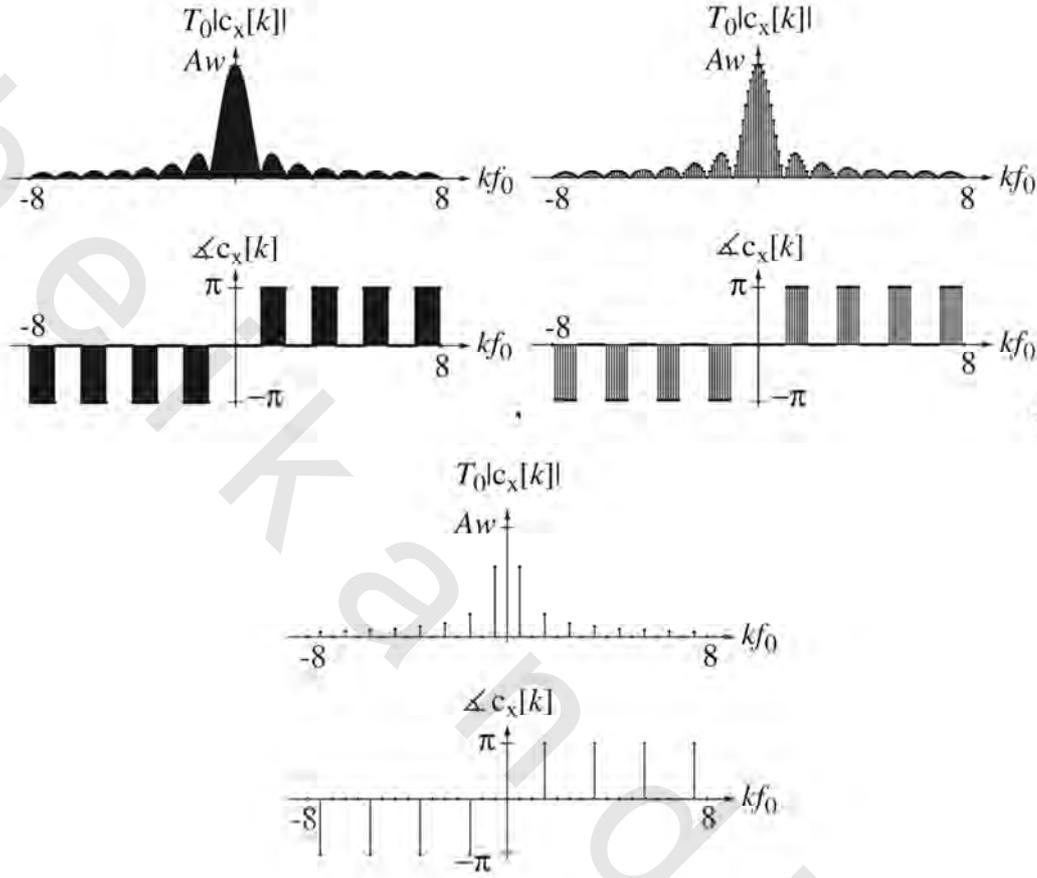
$$c_x[k] = (A\omega/T_0) \text{sinc}(k\omega/T_0)$$

ارسم الدالة التوافقية المعدلة لتتابع فوريير :

$$T_0 c_x[k] = A\omega \text{sinc}(\omega(kf_0))$$

لقيم $\omega = 1$ و $f_0 = 0.5, 0.1, 0.02$ مع kf_0 في المدى $-8 < kf_0 < 8$.

الإجابة :



شكل رقم (ج.ت-٣٥).

٣٦- احسب الدالة التوافقية لتتابع فوريير وتحويل فوريير المستمر لهذه الدوال الدورية التالية وقارن بين

الإجابات :

$$x(t) = \text{rect}(t) * \delta_2(t) \quad (\text{أ})$$

$$x(t) = \text{tri}(10t) * \delta_{1/4}(t) \quad (\text{ب})$$

الإجابة :

$$(1/2)\text{sinc}(f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{2}) \quad \text{و} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{5 \cos(\frac{4\pi k}{5}) - 1}{4(\pi k)^2} \delta(f - rk)$$

$$\frac{5 \cos(\frac{4\pi k}{5}) - 1}{4(\pi k)^2} \quad \text{و} \quad (1/2)\text{sinc}(k/2) \quad \text{و}$$

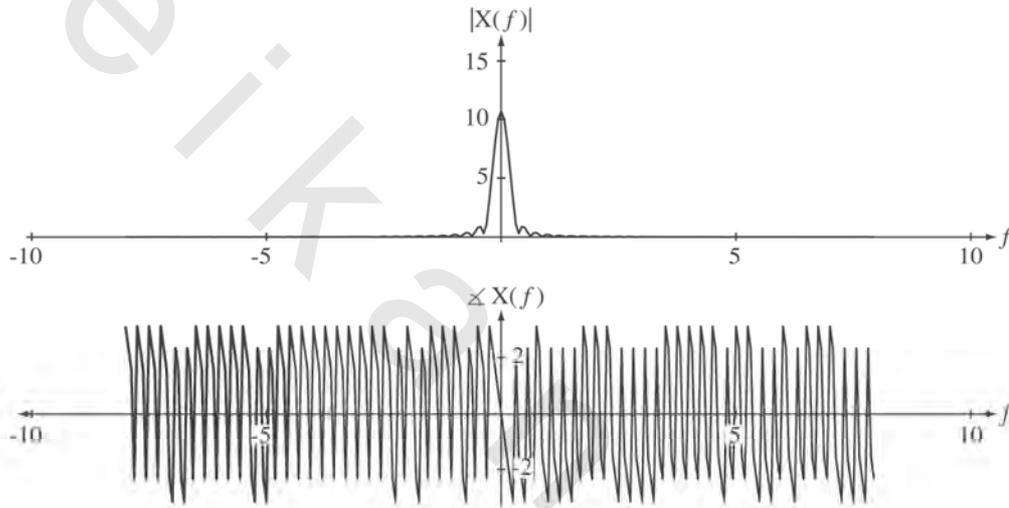
تحويل فوريير المستمر زمنياً CTFT العددي

٣٧- احسب وارسم مقدار وزاوية تحويل فوريير المستمر التقريبي للدالة التالية :

$$x(t)=[4-(t-2)^2]\text{rect}((t-2)/4)$$

باستخدام تحويل فوريير المتقطع DFT لتقريب تحويل فوريير المستمر. افترض الزمن بين العينات $x(t)$ يساوي $1/16$ والعينات مأخوذة على المدى الزمني $0 \leq t < 16$.

الإجابة :



شكل رقم (ج.ت-٣٧).

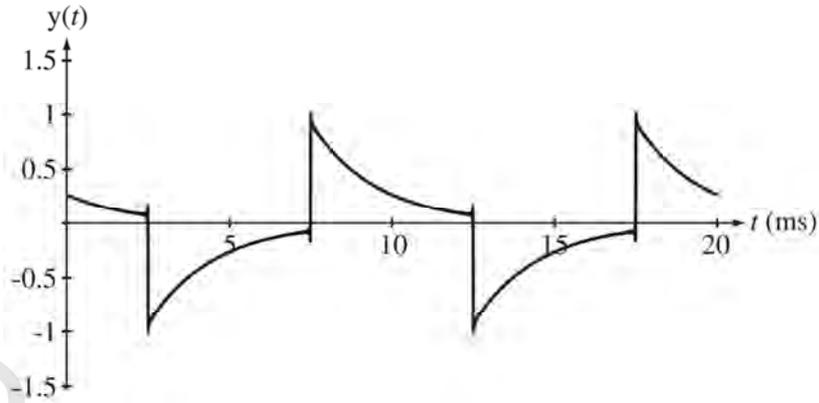
استجابة الأنظمة

٣٨- نظام موصوف بالمعادلة التفاضلية التالية :

$$y''(t)+500y(t)=500x'(t)$$

إذا كانت الإثارة هي $x(t)=\text{rect}(200t)*\delta_{10\text{ms}}(t)$ ، فارسم الاستجابة $y(t)$:

الإجابة :



شكل رقم (ج.ت-٣٨).

تمارين بدون إجابات

٣٩- إشارة دورية $x(t)$ بدورة أساسية تساوي ٢ ثانية يمكن وصفها على مدى الدورة الأساسية بالمعادلة التالية :

$$x(t) = \begin{cases} \sin(2\pi t), & |t| < 1/2 \\ 0, & \frac{1}{2} < |t| < 1 \end{cases}$$

ارسم الإشارة واحسب تتابع فوريير CTFS لها. بعد ذلك ارسم على التدرج نفسه تقريبات للإشارة $x_N(t)$ الموضحة بالمعادلة التالية :

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_x[k] e^{j2\pi kt/T_0}$$

لقيم $N=1, 2, 3$. (في كل حالة يجب أن يغطي التدرج الزمني للرسم دورتين أساسيتين على الأقل من الإشارة الأساسية)

٤٠- باستخدام ماتلاب ارسم الإشارات التالية على المدى الزمني $-3 < t < 3$.

$$x_0(t) = 1 \quad (\text{أ})$$

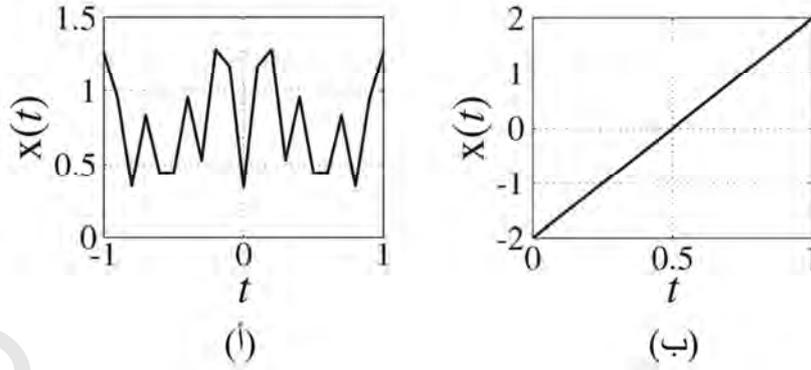
$$x_1(t) = x_0(t) + 2\cos(2\pi t) \quad (\text{ب})$$

$$x_2(t) = x_1(t) + 2\cos(4\pi t) \quad (\text{ج})$$

$$x_{20}(t) = x_{19}(t) + 2\cos(40\pi t) \quad (\text{د})$$

لكل جزء (أ) حتى (ث)، احسب عددياً مساحة الإشارة على المدى الزمني $-1/2 < t < 1/2$.

٤١- الإشارة الموجودة في شكل (ت-٤١) مرسومة على مدى دورة أساسية واحدة تماماً. أي واحدة من الإشارات يكون لها الدوال التوافقية $c_x[k]$ التي يكون لها قيمة حقيقية خالصة لكل قيمة لـ k ؟ وأيها يكون له قيم تخيلية خالصة لكل قيمة لـ k ؟



شكل رقم (ت-٤١).

٤٢- في بعض أنواع أنظمة الاتصالات، يتم إرسال البيانات الثنائية باستخدام طريقة تسمى التبديل بالإزاحة الطورية الثنائية binary phase shift keying, BPSK والذي يتم فيه تمثيل الواحد بدفعة من موجة جيبية ويمثل الصفر بدفعة تكون معكوسة أو سالبة الموجة التي تمثل الواحد. افترض التردد الجيبي يساوي 1 ميغاهرتز وافترض أن عرض الدفعة يساوي 10 دورات من الموجة الجيبية. احسب وارسم الدالة التوافقية لتتابع فورير المستمر CTFS لإشارة دورية ثنائية تتكون من ترددات من الواحد والأصفر، اعتماداً على الدورة الأساسية لهذه الإشارة؟

التعامد

٤٣- في التكامل المحدود التالي :

$$\int_0^{qT_1} \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t) dt$$

حيث $f_1 \neq 0$ و $f_2 = mf_1$ و m رقم صحيح و $T_1 = 1/f_1$ و q أيضاً عبارة عن رقم صحيح. أوجد كل أزواج m و q على كل المدى $-\infty < m < \infty$ والتي تكون القيم الصحيحة لها لا تساوي الصفر.

٤٤- نظام مستمر زمنياً يمكن وصفه بالمعادلة التفاضلية التالية :

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_2 x''(t) + b_1 x'(t) + b_0$$

وتمت إثارة النظام بالإشارة $x(t) = \text{rect}(t/\omega) * \delta_{T_0}(t)$ (أ) افترض $a_2=1$ و $a_1=20$ و $a_0=250, 100$ و $b_2=1$ و $b_1=0$ و $b_0=250000$. افترض أيضاً أن $T_0 = 3 \frac{2\pi}{\sqrt{b_0}}$ وأن $\omega = T_0/2$. ارسم الاستجابة $y(t)$ على المدى الزمني $0 \leq t < 2T_0$. ما هو التردد الدوري المقابل لذلك ؟هل يمكنك رؤية تأثير أقل مقدار للاستجابة في $y(t)$ ؟(ب) غير T_0 إلى $\frac{2\pi}{\sqrt{b_0}}$ وأعد الجزء (أ).

تحويل فوريير الأمامي والعكسي

٤٥ - لقد تمت إثارة أحد الأنظمة بالإشارة التالية : $x(t)=4\text{rect}(t/2)$ وكانت الاستجابة لها هي :

$$y(t)=10[1-e^{-(t+1)}]u(t+1) - (1-e^{-(t-1)})u(t-1)]$$

ما هي استجابة الصدمة لهذا النظام ؟

٤٦ - ارسم مقدار وزاوية تحويل فوريير المستمر CTFT للدوال التالية :

(أ) $g(t)=5\delta(4t)$

(ب) $g(t)=4[\delta_4(t+1)-\delta_4(t-3)]$

(ج) $g(t)=u(2t)+u(t-1)$

(د) $g(t)=\text{sgn}(t)-\text{sgn}(-t)$

(هـ) $g(t) = \text{rect}\left(\frac{t+1}{2}\right) + \text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$

(و) $g(t)=\text{rect}(t/4)$

(ز) $g(t)=5\text{tri}(t/5)-2\text{tri}(t/2)$

(ح) $g(t)=(3/2)\text{rect}(t/8)*\text{rect}(t/2)$

٤٧ - ارسم مقدار وزاوية تحويل فوريير المستمر CTFT للدوال التالية :

(أ) $\text{rect}(4t)$

(ب) $\text{rect}(4t)*4\delta(t)$

(ج) $\text{rect}(4t)*4\delta(t-2)$

(د) $\text{rect}(4t)*4\delta(2t)$

(هـ) $\text{rect}(4t)*\delta_1(t)$

(و) $\text{rect}(4t)*\delta_1(t-1)$

(ز) $(1/2)\text{rect}(4t)*\delta_{1/2}(t)$

(ح) $(1/2)\text{rect}(t)*\delta_{1/2}(t)$

٤٨ - دالة دورية دورتها الأساسية تساوي 4 ثوانٍ :

(أ) ما هو أقل تردد موجب يمكن أن يكون تحويل فوريير المستمر لها لا يساوي الصفر.

(ب) ما هو أقل تردد موجب تالٍ يمكن أن يكون تحويل فوريير المستمر له لا يساوي الصفر.

٤٩ - إشارة تحويل فوريير المستمر لها هو $X(f) = \frac{j2\pi f}{3+jf/10}$:

(أ) ما هي المساحة الكلية تحت الإشارة $x(t)$ ؟

(ب) افترض أن $y(t)$ هي تكامل $x(t)$ ، وأن $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda$ ، ماهي المساحة الكلية تحت $y(t)$ ؟

(ج) ما هي القيمة العددية لـ $|X(f)|$ عندما $f \rightarrow +\infty$ ؟

٥٠ - أجب عن الأسئلة التالية :

(أ) إشارة $x_1(t)$ لها تحويل فوريير مستمر $X_1(f)$. إذا كانت $x_2(t)=x_1(t+4)$ ، فما هي العلاقة بين $|X_1(f)|$ و

$|X_2(f)|$ ؟

(ب) إشارة $x_1(t)$ لها تحويل فوريير مستمر $X_1(f)$. إذا كانت $x_2(t) = x_1(t/5)$ ، فما هي العلاقة بين القيمة

العظمى لـ $|X_1(f)|$ والقيمة العظمى لـ $|X_2(f)|$ ؟

(ج) تحويل فوريير لإحدى الدوال يساوي $e^{-j\pi/4}$ عند التردد $f=20$. فما هي قيمة تحويل فوريير نفسه عند التردد

$f=-20$ ؟

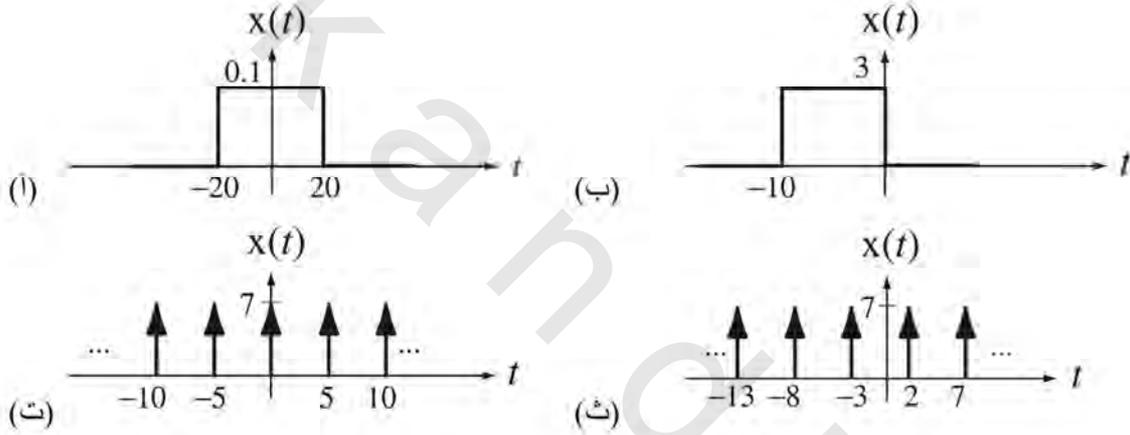
٥١- إذا كانت $y(t) \leftrightarrow Y(f)$ و $1 - e^{-j\pi f/2} \leftrightarrow \frac{d}{dt}(y(t))$ فاحسب وارسم $y(t)$.

٥٢- افترض أن الإشارة $x(t)$ لها تحويل فوريير يساوي $X(f) = \begin{cases} |f|, & |f| < 2 \\ 0, & |f| \geq 2 \end{cases}$ افترض أن $y(t) = x(4(t-2))$.

احسب قيم عددية لمقدار وزاوية $Y(3)$ حيث $y(t) \leftrightarrow Y(f)$.

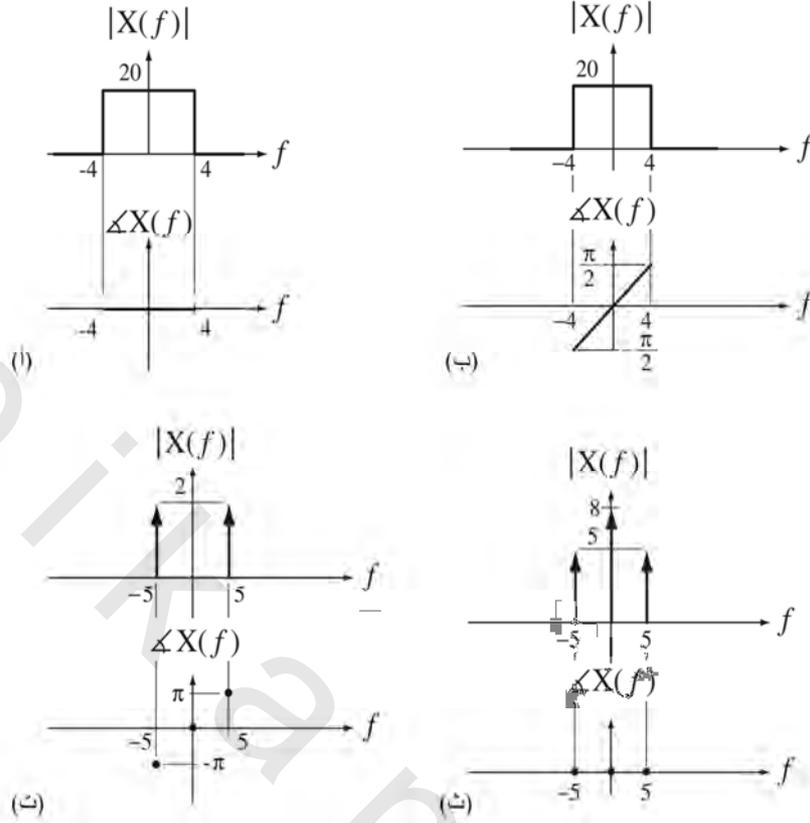
٥٣- ارسم مقدار وزاوية تحويل فوريير لكل من الإشارات الموضحة في شكل (ت- ٥٣) في صورة التردد

الزاوي ω .



شكل رقم (ت-٥٣).

٥٤- ارسم تحويل فوريير العكسي للدوال الموضحة في شكل (ت- ٥٤) :



شكل (ت-٥٤).

٥٥ - فيما يلي ترى قائمتين، واحدة في النطاق الزمني، والأخرى في النطاق الترددي. طابق أو وصل كل دالة في النطاق الترددي مع تحويل فوريير العكسي لها في قائمة دوال النطاق الزمني. (من الممكن ألا يكون هناك تطابق)؟

(أ)

دوال النطاق الزمني		دوال النطاق الترددي	
1	$-(1/2)\delta_{1/2}(t)$	A	$5[\delta(f - 200) + \delta(f + 200)]$
2	$5\text{sinc}(2(t + 2))$	B	$(5/2)\text{rect}(f/2)e^{-j4\pi f}$
3	$3\delta(3t - 9)$	C	$180\text{sinc}(20f)e^{-j8\pi f}$
4	$-7\text{sinc}^2(t/12)$	D	$-84\text{tri}(12f)$
5	$5\text{sinc}(2(t - 2))$	E	$-96\text{sinc}(4f)e^{j2\pi f}$
6	$5\cos(200\pi t)$	F	$-4\delta_8(-f)$
7	$2\text{tri}((t + 5)/10)$	G	$e^{-j6\pi f}$
8	$3\delta(3t - 3)$	H	$10\text{sinc}^2(5f)e^{j10\pi f}$
9	$-24[u(t + 1) - u(t - 3)]$		
10	$-2\delta_{1/4}(-t)$		
11	$9\text{rect}((t - 4)/20)$		
12	$2\text{tri}((t + 10)/5)$		
13	$-24[u(t + 3) - u(t - 1)]$		
14	$10\cos(400\pi t)$		

(ب)

دوال النطاق الزمني		دوال النطاق الترددي	
1	$3\delta(3t - 3)$	A	$-4\delta_8(-f)$
2	$3\text{sinc}(8t + 7)$	B	$0.375\text{rect}(\omega/16\pi)e^{j7\omega}$
3	$-\text{rect}((t + 3)/6)$	C	$e^{j3\omega}$
4	$12[u(t - 3) - u(t + 5)]$	D	$12\text{tri}(3f)e^{-j2\pi f}$
5	$4\text{sinc}^2((t + 1)/3)$	E	$0.375\text{rect}(f/8)e^{j7\pi f/4}$
6	$10\sin(5\pi t)$	F	$j10\pi[\delta(\omega + 10\pi) + \delta(\omega - 10\pi)]$
7	$-(1/2)\delta_{1/8}(t)$	G	$-1.25\text{sinc}^2(f/4)e^{-j4\pi f}$
8	$3\text{sinc}(8(t + 7))$	H	$3e^{-j3\omega}$
9	$3\delta(3t - 9)$	I	$96\text{sinc}(4\omega/\pi)e^{-j\omega}$
10	$12[u(t + 3) - u(t - 5)]$	J	$-6\text{sinc}(6f)e^{j6\pi f}$
11	$18\text{tri}(6(t + 5))$	K	$10\text{sinc}^2(3\omega/\pi)e^{j5\omega}$
12	$-5\text{tri}(4(t - 2))$		
13	$-2\delta_4(-t)$		
14	$5\sin(10\pi t)$		

٥٦ - طابق الإشارات في القائمة التي على اليسار مع تحويلات فورير التي في القائمة التي على اليمين (قد لا

يوجد هناك تطابق)

(أ)

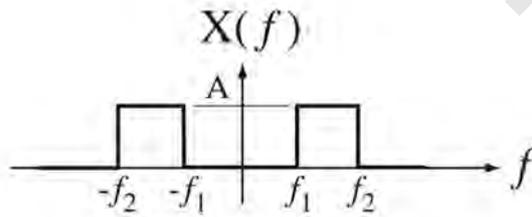
دوال النطاق الزمني		دوال النطاق الترددي	
A	$5\text{rect}(2t - 1)$	1	$10\text{sinc}(2f)e^{-j4\pi f}$
B	$5\text{rect}((t/2) - 1)$	2	$j5\pi[\delta(\omega + 3) - \delta(\omega - 3)]e^{+j\omega}$
C	$5\text{rect}(2(t - 1))$	3	$2.5\text{rect}(2f)e^{-j2\pi f}$
D	$5\text{rect}((t - 1)/2)$	4	$2.5\text{sinc}(f/2)e^{-j\pi f}$
E	$5\text{sinc}(2t - 1)$	5	$2.5\text{rect}(f/2)e^{-j\pi f}$
F	$5\text{sinc}((t/2) - 1)$	6	$2.5\text{rect}(f/2)e^{-j2\pi f}$
G	$5\text{sinc}(2(t - 1))$	7	$10\text{rect}(2f)e^{-j2\pi f}$
H	$5\text{sinc}((t - 1)/2)$	8	$10\text{rect}(f/2)e^{-j\pi f}$
I	$5\sin(3t - (\pi/4))$	9	$j5\pi[\delta(\omega + (1/3)) - \delta(\omega - (1/3))]e^{+j3\pi\omega/4}$
J	$5\sin(3(t + 1))$	10	$10\text{rect}(2f)e^{-j4\pi f}$
K	$5\sin((t/3) - (\pi/4))$	11	$2.5\text{sinc}(f/2)e^{-j2\pi f}$
L	$5\sin((t + 1)/3)$	12	$j2.5\pi[\delta(\omega + 3/(2\pi)) - \delta(\omega - 3/(2\pi))]e^{-j\pi\omega/12}$
		13	$2.5\text{sinc}(2f)e^{-j2\pi f}$
		14	$j2.5\pi[\delta(\omega + 1/(6\pi)) - \delta(\omega - 1/(6\pi))]e^{+j\omega}$
		15	$10\text{sinc}(f/2)e^{-j4\pi f}$
		16	$2.5\text{sinc}(2f)e^{-j\pi f}$
		17	$j5\pi[\delta(\omega + 3) - \delta(\omega - 3)]e^{-j\omega}$
		18	$10\text{sinc}(f/2)e^{-j2\pi f}$
		19	$j5\pi[\delta(\omega + 3) - \delta(\omega - 3)]e^{-j\pi\omega/12}$
		20	$10\text{rect}(f/2)e^{-j2\pi f}$
		21	$j5\pi[\delta(\omega + (1/3)) - \delta(\omega - (1/3))]e^{-j3\pi\omega/4}$
		22	$10\text{sinc}(2f)e^{-j2\pi f}$
		23	$2.5\text{rect}(2f)e^{-j4\pi f}$
		24	$j5\pi[\delta(\omega + (1/3)) - \delta(\omega - (1/3))]e^{+j\omega}$

(ب)

دوال النطاق الزمني		دوال النطاق الترددي	
A	$(5/2)\text{rect}(t/2) * \delta_1(t)$	1	$8\delta_3(f)e^{-j2\pi f/3}$
B	$8\delta(3(t+1)) - 8\delta(3(t-1))$	2	$-j48\sin(6\pi f)$
C	$(8/3)\delta_{1/3}(t-1/3)$	3	$48\cos(2\pi f)$
D	$(8/3)\delta_{1/3}(t-1)$	4	$72\delta_3(f)e^{-j2\pi f/3}$
E	$8\delta(3t-1) + 8\delta(3t+1)$	5	$(5/2)\text{sinc}(f)\delta_{1/2}(f)$
F	$8\delta((t+1)/3) + 8\delta((t-1)/3)$	6	$(16/3)\cos(2\pi f/3)$
G	$5\text{rect}(t) * \delta_2(t-1)$	7	$8\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi k/3} \delta(f-k/3)$
H	$24\delta_3(t-3)$	8	$-j(16/3)\sin(2\pi f)$
I	$(5/2)\text{rect}((t-1)/2) * \delta_1(t)$	9	$(8/9)\delta_{1/3}(f)e^{j6\pi f}$
J	$8\delta((t/3)-1) - 8\delta((t/3)+1)$	10	$(5/8)\text{sinc}(f)\delta_{1/2}(f)e^{-j2\pi f}$
K	$24\delta_3(t-1)$	11	$8\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi k/3} \delta(f-3k)$
L	$5\text{rect}(t) * \delta_2(t)$	12	$5\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(2k)e^{-j2\pi k} \delta(f-k)$
		13	$5\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(k) \delta(f-k)$
		14	$(8/9)\delta_{1/3}(f)e^{-j6\pi f}$
		15	$j(16/3)\sin(2\pi f)$
		16	$(16/3)\cos(2\pi f)$
		17	$(4/5)\text{sinc}(f)\delta_{1/2}(f)$
		18	$8\delta_{1/3}(f)e^{-j6\pi f}$
		19	$(16/3)\cos(6\pi f)$
		20	$5\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(2k) \delta(f-k)$
		21	$5\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(2k)e^{-j4\pi k} \delta(f-k)$
		22	$(5/2)\text{sinc}(f)\delta_{1/2}(f)e^{-j2\pi f}$
		23	$48\cos(6\pi f)$
		24	$8\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j6\pi k} \delta(f-3k)$

٥٧- احسب تحويل فوريير العكسي للدالة الحقيقية في النطاق الترددي الموضحة في شكل (ت- ٥٧) وارسم

هذه الدالة. افترض $A=1$ و $f_1=95\text{kHz}$ و $f_2=105\text{kHz}$.

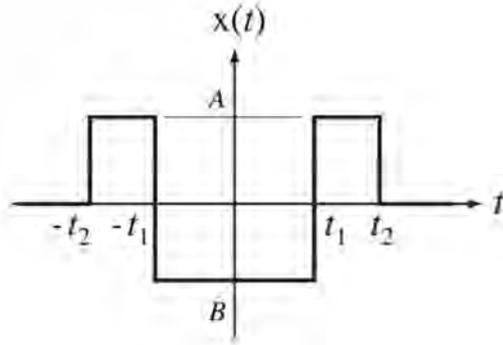


شكل رقم (ت-٥٧) دالة حقيقية في النطاق الترددي.

٥٨- احسب تحويل فوريير المستمر (أي واحدة من الصورتين f أو ω) للإشارة الموجودة في شكل (ت- ٥٨)

وارسم مقدار هذا التحويل وزاويته مع التردد على رسم منفصل. افترض $A=B=1$ وأن $t_1=1$ و $t_2=2$.

ملحوظة : عبر عن هذه الإشارة كمجموع دالتين واستخدم خاصية الخطية.



شكل رقم (ت-٥٨) الدالة.

٥٩- يوجد في العديد من أنظمة الاتصالات جهاز يسمى الخالط mixer يتم استخدامه. في أبسط صورته يكون الخالط ضارباً تماثلياً. بمعنى، أن إشارة الخرج $y(t)$ هي حاصل ضرب إشارتي الدخل. إذا كانت إشارتاً الدخل هما :

$$x_1(t) = 10 \text{sinc}(20t) \quad \text{و} \quad x_2(t) = 5 \cos(2000\pi t)$$

ارسم مقدار تحويل فوريير المستمر للخرج $y(t)$ ، وهو $Y(f)$ ، وقارنه مع مقدار تحويل فوريير للدالة $x_1(t)$ في عبارات مختصرة ماذا يفعل الخالط ؟

٦٠- إحدى المشاكل الأساسية في أنظمة الأجهزة الحقيقية هي التداخل الكهرومغناطيسي بسبب خطوط القدرة التي ترددها 60 هرتز. يمكن لنظام له استجابة صدمة على الصورة $h(t) = A(u(t) - u(t - t_0))$ أن يتخلص من هذا التداخل ذي التردد 60 هرتز وكل توافقاته. احسب القيمة العددية لـ t_0 التي تحقق ذلك.

٦١- ارسم التفاف كل دالتين في كل حالة مما يأتي :

(أ) $\text{rect}(t) * \text{rect}(t)$

(ب) $\text{rect}(t-1/2) * \text{rect}(t+1/2)$

(ج) $\text{tri}(t) * \text{tri}(t-1)$

(د) $3\delta(t) * 10\cos(t)$

(هـ) $10\delta_1(t) * \text{rect}(t)$

(و) $5\delta_1(t) * \text{tri}(t)$

٦٢- إلكترونياً، واحدة من أول الدوائر التي تمت دراستها كانت دائرة الموحد rectifier. هناك صورتان للموحد وهما موحد نصف الموجة وموحد الموجة الكاملة. موحد نصف الموجة يقطع نصف الموجة الجيبية ويبقى على النصف الآخر. موحد الموجة الكاملة يعكس إشارة أحد نصفي موجة الدخل ويترك النصف الآخر. لنفترض أن جهد الدخل الجيبية هو الجهد المنزلي الذي له 120Vrms و 60 هرتز، وسنفترض أن كلاً من الموحدين سيغير النصف السالب من الموجة الجيبية بينما سيترك النصف الموجب بدون تغيير. احسب وارسم مقدار تحويل فوريير المستمر لإشارة جهد الخرج لكل من الموحدين (في أي من الصورتين f أو ω).