الفصل السابع

طرق فورير في الزمن المتقطع

(٧.١) المقدمة والأهداف

قدمنا في الفصل٦ تتابع فورير المستمر زمنياً كطريقة للتعبير عن الإشارات المستمرة زمنياً وحساب الاستجابة لنظام مستمر زمنياً LTI لأي إثارة دورية. بعد ذلك مددنا تتابع فورير، أو وسعناه ليصبح تحويل فورير المستمر عن طريق فرض أن دورة الإشارة الدورية تقترب من الما لانهاية. سنتخذ مساراً مشابها لذلك في هذا الفصل ولكن مع الأنظمة في الزمن المتقطع. معظم المفاهيم الأساسية ستكون كما هي ولكن سيكون هناك بعض الفروق المهمة.

أهداف الفصل

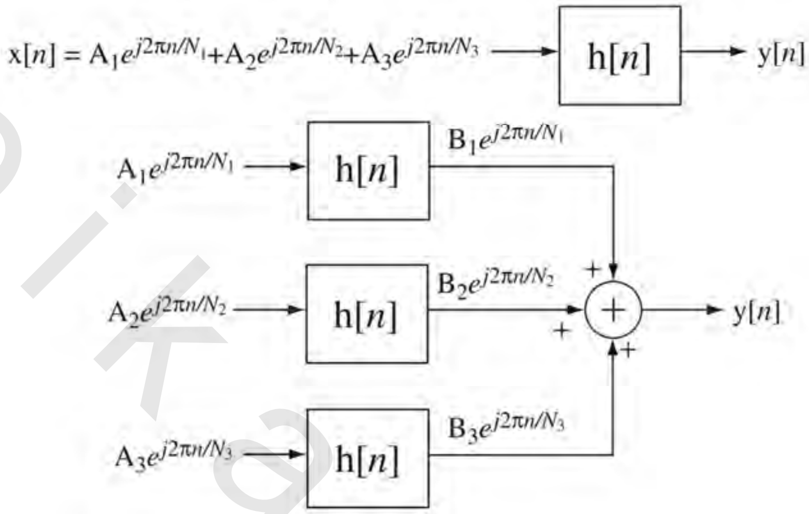
١- تطوير طرق للتعبير عن الإشارات في الزمن المتقطع كمجموع خطي من الدوال الجيبية، الحقيقية أو المركبة.
٢- استكشاف الخواص العامة لهذه الطرق المعبرة عن الإشارات في الزمن المتقطع.
٣- تعميم تتابع فورير في الزمن المتقطع ليشتمل على الإشارات غير الدورية عن طريق تقديم أو تعريف تحويل فورير في الزمن المتقطع.
٤- تقديم أنواع الإشارات التي يمكن أو لا يمكن وصفها عن طريق تحويل فورير في الزمن المتقطع.
٥- استنتاج وإثبات خواص تحويل فورير في الزمن المتقطع.
٦- توضيح العلاقات البينية بين طرق فورير المختلفة.

(٧.٢) تتابع فورير في الزمن المتقطع وتحويل فورير المتقطع

الخطية والإثارة الأسية المركبة

كما كان الأمر حقيقياً في الأنظمة المستمرة، فإنه إذا تمت إثارة أي نظام LTI في الزمن المتقطع عن طريق موجة جيبية، فإن استجابة النظام تكون جيبية أيضاً، بنفس التردد ولكن عموماً بمقدار وزاوية طور مختلفين. إذا تمت

إثارة نظام LTI عن طريق مجموعة من الإشارات، فإن الاستجابة الكلية للنظام تكون مجموع الاستجابات لكل إشارة على حدة. تتابع فورير المتقطع زمنياً discrete time Fourier series, DTFS يعبر عن أي إشارة دورية كمجموع خطي من الدوال الجيبية الحقيقية أو المركبة، ولذلك فإنه يمكن تطبيق نظرية التجميع لإيجاد استجابة أي نظام LTI لأي إشارة اختيارية عن طريق تجميع الاستجابات لهذه الدوال الجيبية كما في شكل (٧.١).



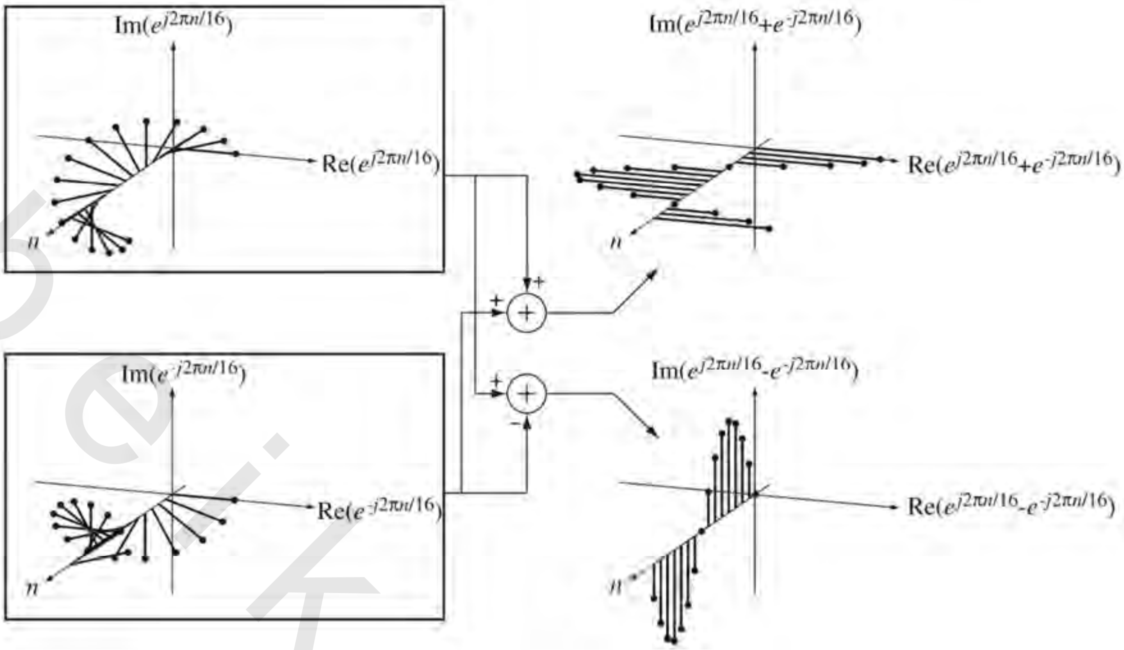
شكل رقم (٧.١). تكافؤ استجابة نظام LTI لإشارة معينة مع مجموع استجابات النظام نفسه لعدد من الدوال الجيبية التي يمثل مجموعها الإشارة الداخلة للنظام

يمكن للدوال الجيبية أن تكون حقيقية القيمة أو مركبة. العلاقة بين القيم الحقيقية والمركبة للدوال الجيبية هي كما يلي:

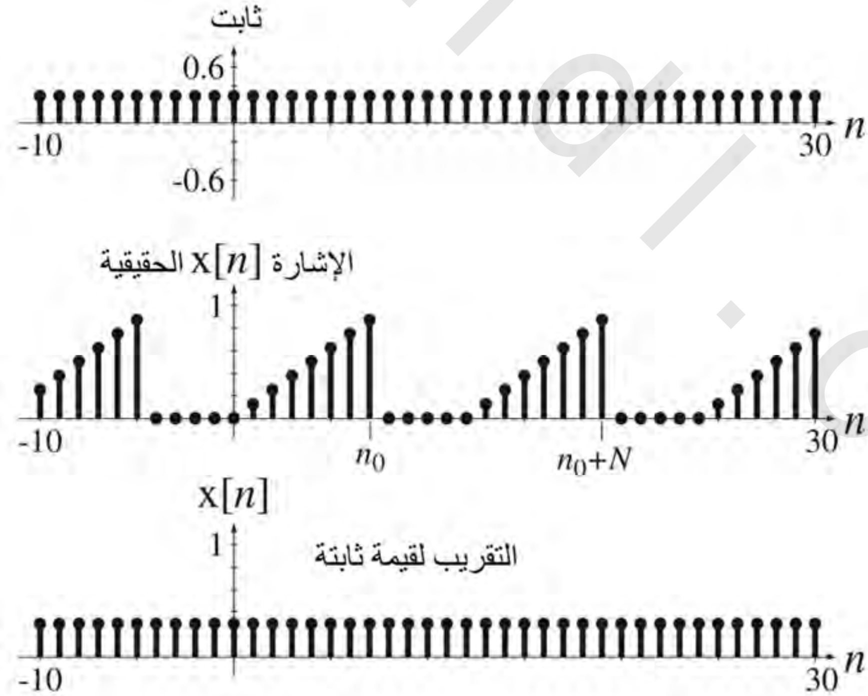
$$\sin(x) = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{j2} \quad \text{و} \quad \cos(x) = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$$

وهذه العلاقة موضحة في شكل (٧.٢).

افترض أي إشارة اختيارية دورية x[n] التي من المطلوب التعبير عنها كمجموع خطي من الدوال الجيبية كما هو موضح في الرسم الأوسط في شكل (٧.٣). (لقد استخدمنا هنا دوال جيبية ذات قيمة حقيقية لتبسيط الرؤية).



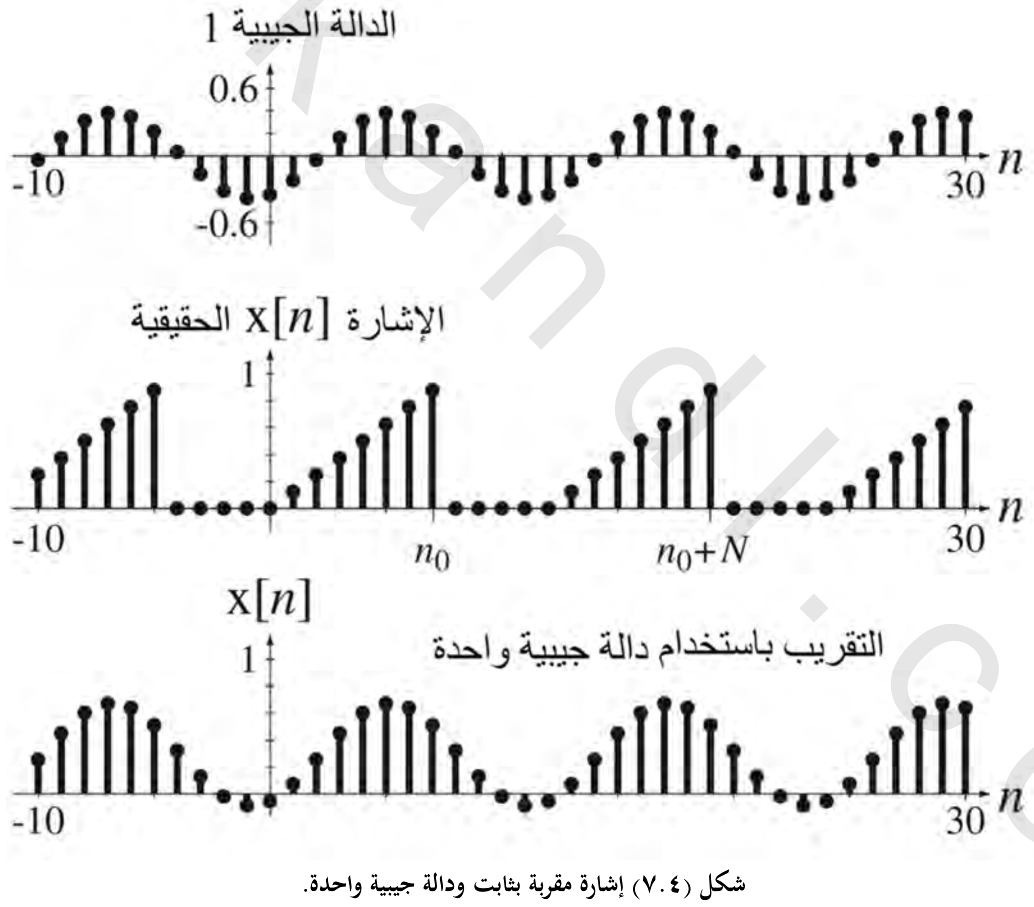
شكل رقم (٧.٢) جمع وطرح الأس ej2πn/16 والأس e-j2πn/16 لتكوين الدالة 2cos(2πn/16) والدالة 2jsin(2πn/16).



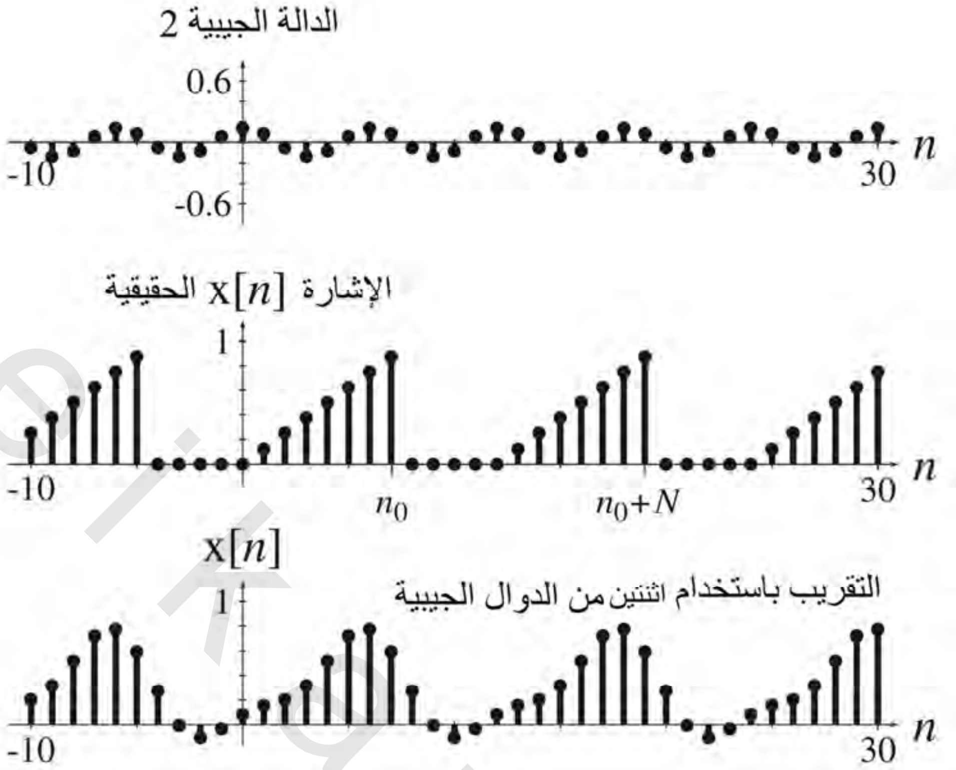
شكل (٧.٣) إشارة مقربة إلى ثابت .

في شكل رقم (٧.٣) تم تقريب الإشارة بالثابت 0.2197، الذي يمثل القيمة المتوسطة للإشارة. تعتبر القيمة الثابتة حالة خاصة من الدالة الجيبية كالتالي: $0.2197\cos(2\pi kn/N)$ وذلك بوضع $k=0$. وهذا هو أفضل تقريب ممكن للإشارة $x[n]$ بقيمة ثابتة لأن متوسط مربع الخطأ بين $x[n]$ والقيمة الثابتة يكون أقل ما يمكن. يمكننا أن نجعل هذا التقريب غير الدقيق أفضل من ذلك عن طريق إضافة دالة جيبية للقيمة الثابتة تكون دورتها الأساسية N هي الدورة الأساسية للإشارة $x[n]$ كما في شكل (٧.٤).

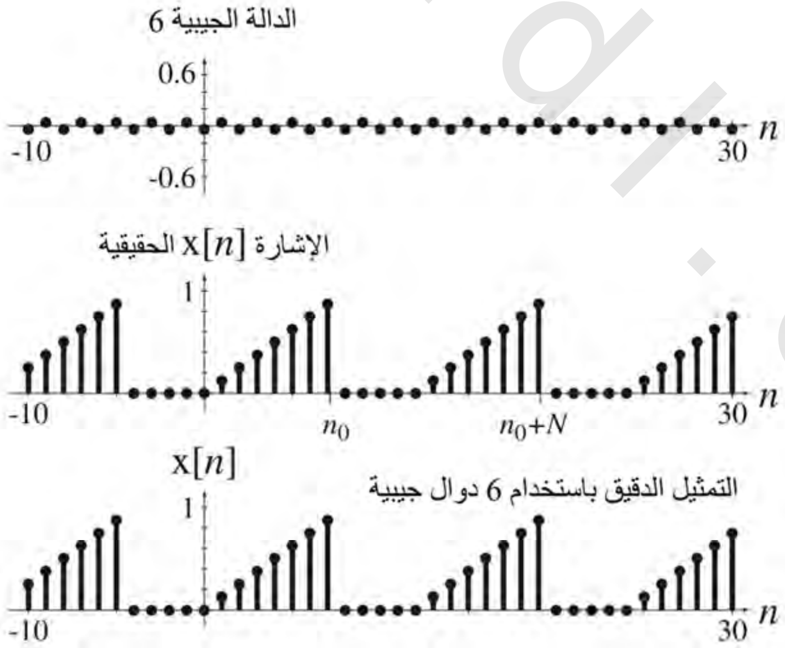
إن ذلك يعتبر أفضل تقريب يمكن عمله باستخدام قيمة ثابتة ودالة جيبية واحدة دورتها الأساسية مثل دورة الإشارة $x[n]$. يمكن تحسين هذا التقريب أفضل من ذلك عن طريق إضافة دالة جيبية أخرى بتردد ضعف التردد الأساسي للإشارة $x[n]$ كما في شكل (٧.٥).



شكل (٧.٤) إشارة مقربة بثابت ودالة جيبية واحدة.



شكل رقم (٧.٥) إشارة مقربة بثابت واثنتين من الدوال الجيبية.



شكل رقم (٧.٦) إشارة ممثلة بثابت وست من الدوال الجيبية.

إذا تم الاستمرار في إضافة دوال جيبية مختارة جيداً بترددات تساوي مضاعفات صحيحة للتردد الأساسي للإشارة x[n]، فإنه يمكننا جعل التقريب أفضل وأفضل. على العكس من الحالة العامة في الزمن المستمر، فإنه باستخدام عدد محدد من الدوال الجيبية يصبح التقريب مساوياً تماماً للإشارة كما في شكل (٧.٦).
إن ذلك يبين فرق أساسي بين التمثيل بتتابع فورير المستمر وتتابع فورير المتقطع. في الزمن المتقطع يمكن عادة الوصول إلى تمثيل تام للدالة الدورية بعدد محدد من الدوال الجيبية.

تماماً مثلما كان الحال في تتابع فورير المستمر CTFS، فإن k تسمى الرقم التوافقي وكل الدوال الجيبية يكون لها ترددات تساوي k من المرات من التردد الأساسي الدوري للإشارة، والذي يكون في حالة تتابع فورير المتقطع DTFS يساوي 1/N. تتابع فورير المتقطع DTFS يعبر عن أي إشارة دورية متقطعة زمنياً دورتها الأساسية N_0 كمجموع خطي من الجيوب المركبة على الصورة التالية:

$$x[n] = \sum_{k<n>} c_x[k] e^{j2\pi kn/N}$$

حيث $N=mN_0$، و m أرقام صحيحة، و $c_x[k]$ هي الدالة التوافقية لتتابع فورير المتقطع. الرمز $\sum_{k=<N>}$ يكافئ الرمز $\sum_{k=n_0}^{n_0+N-1}$ حيث n_0 ثابت اختياري، بمعنى آخر، مجموع على أي عدد N ذي قيم متتابعة من k. على الرغم من أن القيم الشائعة المستخدمة لـ N تكون هي الدورة الأساسية N_0 (بمعنى m=1)، فإن N ليس بالضرورة أن تكون N_0 بل N من الممكن أن تكون أي دورة للإشارة.

في الإشارات المتقطعة زمنياً وتحليل الأنظمة يوجد هناك صورة مشابهة للتعبير عن الإشارات الدورية المتقطعة زمنياً باستخدام تحويل فورير المتقطع discrete Fourier transform, DFT الذي سبق ذكره في الفصل ٦. إنها تعبر أيضاً عن الإشارات الدورية المتقطعة كمجموع خطي من الدوال الجيبية الأسية. تحويل فورير المتقطع العكسي تتم كتابته في العادة كما يلي:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N}$$

حيث X[k] هي الدالة التوافقية لتحليل فورير المتقطع للدالة x[n] و $X[k]=Nc_x[k]$. إن الاسم هنا يبدأ بكلمة تحويل بدلا من كلمة تتابع ولكن حيث إنه مجموع خطي من الدوال الجيبية عند ترددات متقطعة، فإنه للتوافق التعبيري قد يكون من الممكن تسميته تتابعاً. إن كلمة تحويل قد تكون نبعت من استخدامها في المعالجة الرقمية للإشارات التي يستخدم فيها لإيجاد التقريب العددي لتحويل فورير المستمر CTFT. يستخدم DFT بكثرة ويشبه كثيراً DTFS بحيث سنركز في هذا الكتاب على DFT مع العلم أن التحويل إلى DTFS يكون بسيطاً جداً.

المعادلة $x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]e^{j2\pi kn/N}$ هي تحويل فورير العكسي. إنها تعطي الدالة في النطاق الزمني ممثلة كمجموع خطي من الدوال الجيبية المركبة. تحويل فورير المتقطع الأمامي هو:

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

حيث N هي أي دورة للإشارة x[n]. إنها تعطي الدالة التوافقية من الدالة الممثلة في النطاق الزمني.

كما رأينا في الفصل ٦ أن من الخصائص المهمة لتحويل فورير المتقطع: أن X[k] تكون دورية أيضاً، بمعنى:

X[k]=X[k+N] حيث k أي رقم صحيح

ولذلك يجب أن يكون واضحا الآن لماذا يكون المجموع في تحويل فورير المتقطع على مدى محدد من قيم ال k. الدالة التوافقية X[k] تكون دورية بدورة مقدارها N، ولذلك فإنها يكون لها عدد N فقط من القيم الفريدة. هذا المجموع يحتاج فقط لـ N من الحدود لتحديد كل القيم الفريدة في X[k]. معادلة تحويل فورير العكسي المتقطع تكتب في العادة على الصورة:

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]e^{j2\pi kn/N}$$

ولكن حيث إن X[k] دورية بدورة مقدارها N، فإنه يمكن كتابتها بصورة أكثر عمومية كما يلي:

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=<N>}X[k]e^{j2\pi kn/N}$$

التعامدية والدالة التوافقية

يمكننا إيجاد تحويل فورير المتقطع الأمامي DFT، وهو X[k]، للدالة x[n] باستخدام عملية مشابهة للعملية المستخدمة مع تتابع فورير المستمر CTFS. لتبسيط الرموز في المعادلات المستخدمة مستقبلاً سنضع:

$$W_N=e^{j2\pi/N} \qquad \text{المعادلة رقم (٧.١)}$$

حيث أن نقطة البداية في المجموع $x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=<N>}X[k]e^{j2\pi kn/N}$ تكون اختيارية، فإننا سنفترضها k=0. بعد ذلك سنكتب $e^{j2\pi kn/N}$ لكل قيم n بحيث $n_0\le n<n_0+N$، وباستخدام المعادلة (٧.١) يمكننا كتابة المعادلة المصفوفية كما يلي:

$$\begin{bmatrix} x[n_0] \\ x[n_0+1] \\ .. \\ .. \\ x[n_0+N-1] \end{bmatrix}=\frac{1}{N}\begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^{n_0} & \dots & W_N^{n_0(N-1)} \\ W_N^0 & W_N^{n_0+1} & \dots & W_N^{(n_0+1)(N-1)} \\ & & \dots\dots\dots & \\ & & \dots\dots\dots & \\ W_N^0 & W_N^{n_0+N-1} & \dots & W_N^{(n_0+N-1)(N-1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ .. \\ .. \\ X[N-1] \end{bmatrix} \qquad \text{المعادلة رقم (٧.٢)}$$

$$\text{x} \quad = \quad \text{W} \quad \text{X}$$

أو في الصورة المدمجة التالية: Nx=WX. حيث W مصفوفة غير أحادية، ولذلك يمكننا مباشرة كتابة X كما يلي: $X=W^{-1}Nx$. المعادلة (٢.٧) يمكن كتابتها أيضاً على الصورة:

$$N\underbrace{\begin{bmatrix} x[n_0] \\ x[n_0+1] \\ .. \\ .. \\ x[n_0+N-1] \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ .. \\ .. \\ 1 \end{bmatrix}}_{k=0} X[0] + \underbrace{\begin{bmatrix} W_N^{n_0} \\ W_N^{n_0+1} \\ .. \\ .. \\ W_N^{n_0+N-1} \end{bmatrix}}_{k=1} X[1] + \cdots + \underbrace{\begin{bmatrix} W_N^{n_0(N-1)} \\ W_N^{(n_0+1)(N-1)} \\ .. \\ .. \\ W_N^{(n_0+N-1)(N-1)} \end{bmatrix}}_{k=N-1} X[N-1]$$

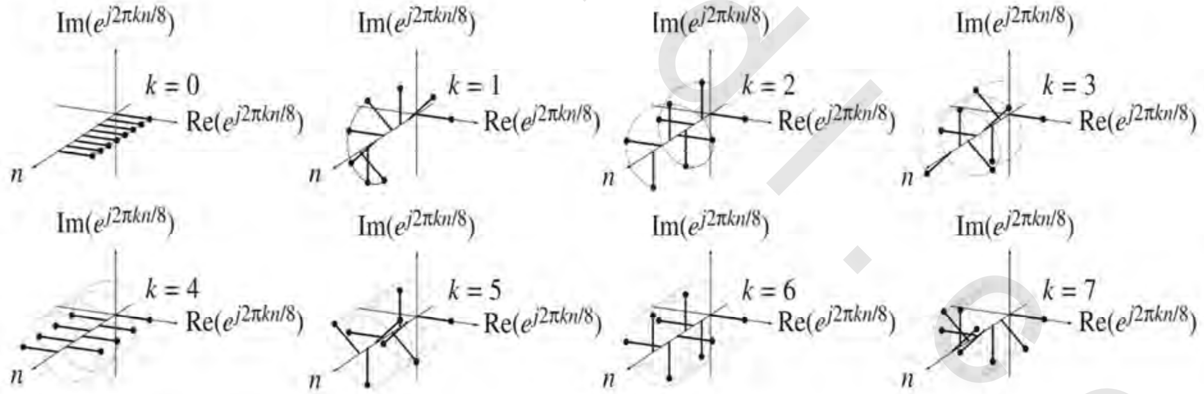
المعادلة رقم (٧.٣)

$$Nx = w_0X[0] + w_1X[1] + \ldots + w_{N-1}X[N-1]$$

المعادلة رقم (٧.٤)

حيث $W=[w_0\ w_1\ \ldots\ w_{N-1}]$. عناصر متجه العمود الأول w_0 كلها ثابتة وتساوي واحداً ويمكن التفكير فيها على أنها دوال جيبية مركبة ترددها صفر. متجه العمود الثاني w_1 يتكون من قيم دالة من دورة واحدة من الدالة الجيبية المركبة على الفترة الزمنية $n_0 \le n < n_0+N$. متجه كل عمود من الأعمدة التالية يتكون من قيم الدالة من k من الدورات من الدالة الجيبية المركبة عند الرقم التوافقي الأعلى في الفترة الزمنية $n_0 \le n < n_0+N$. شكل (٧.٧) يوضح هذه الدوال الجيبية في حالة $N=8$ و $n_0=0$.

لاحظ أن تتابع قيم الدوال الجيبية المركبة مع n عندما $k=7$ يشبه تماماً التتابع عندما $k=1$، فيما عدا الدوران في الاتجاه المعاكس. في الحقيقة فإن التتابع عندما $k=7$ هو نفسه التتابع عندما $k=-1$. إن ذلك لا بد أن يحدث نتيجة الدورية في تتابع فورير المتقطع DFT.



شكل رقم (٧.٧) توضيح لمجموعة كاملة من متجهات القواعد المتعامدة عندما N=8 و n0=0.

هذه المجموعة تكّون عائلة من المتجهات المتعامدة. بالرجوع إلى أساسيات الجبر الخطي وتحليل المتجهات نجد أن المسقط p لمتجه حقيقي x في اتجاه متجه آخر حقيقي y هو:

$$p = \frac{x^T y}{y^T y} y$$ المعادلة رقم (٧.٥)

وعندما يكون هذا الإسقاط يساوي صفراً، فإن كلاً من x و y يقال عنهما إنهما متعامدان. يحدث ذلك عندما يكون حاصل الضرب القياسي للمتجهين x و y، وهو $x^T y$ يساوي صفراً. إذا كان المتجهين لهما قيم مركبة، فإن النظرية تبقى كما هي، فيما عدا أن الضرب القياسي يكون $x^H y$ ويكون الإسقاط كما يلي:

$$p = \frac{x^H y}{y^H y} y$$ المعادلة رقم (٧.٦)

حيث الرمز x^H يعني المرافق المركب لدوران، أو بديل المتجه x. (هذه العملية شائعة في المصفوفات ذات القيم المركبة، وهي أن دوران أو تبديل المصفوفة ذات القيم المركبة يعرف عادة على أنه يشتمل على عملية المرافق المركب. وهذا حقيقي في تبديل المصفوفات في ماتلاب). أي مجموعة من المتجهات المتعامدة المختارة جيداً، يمكن أن تشكل أساسات. متجهات الأساس المتعامدة هي مجموعة من المتجهات التي يمكن تجميعها في مجموعة خطية لتكوين متجه اختياري من الأبعاد نفسها.

الضرب القياسي لأول متجهين أساسيين في المعادلة (٧.٤) هو:

$$w_0^H w_1 = [1 \ 1 \ldots \ 1] \begin{bmatrix} W_N^{n_0} \\ W_N^{n_0+1} \\ \vdots \\ W_N^{n_0+N-1} \end{bmatrix} = W_N^{n_0}(1 + W_N + \cdots + W_N^{N-1})$$ المعادلة رقم (٧.٧)

مجموع المتوالية الهندسية المحددة الطول هو:

$$\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \begin{cases} N, & r = 1 \\ \dfrac{1 - r^N}{1 - r}, & r \neq 1 \end{cases}$$

بجمع المتوالية الهندسية في (٧.٧) نحصل على:

$$w_0^H w_1 = W^{n_0} \frac{1 - W_N^N}{1 - W_N} = W_N^{n_0} \frac{1 - e^{j2\pi}}{1 - e^{j2\pi/N}} = 0$$

مما يثبت أنهما حقاً متعامدان (إذا كانت $N \neq 1$). عموماً، فإن الضرب القياسي لمتجه التوافقية k_1 ومتجه التوافقة k_2 يكون على الصورة:

$$w_{k_1}^H w_{k_2} = \left[W_N^{-n_0 k_1} \ W_N^{-(n_0+1)k_1} \ \ldots \ W_N^{-(n_0+N-1)k_1}\right] \begin{bmatrix} W_N^{n_0 k_2} \\ W_N^{(n_0+1)k_2} \\ \vdots \\ W_N^{(n_0+N-1)k_2} \end{bmatrix}$$

$$w_{k_1}^H w_{k_2} = W_N^{n_0(k_2-k_1)}\left[1 + W_N^{(k_2-k_1)} + \ldots + W_N^{(N-1)(k_2-k_1)}\right]$$

$$w_{k_1}^H w_{k_2} = W_N^{n_0(k_2-k_1)} \frac{1 - \left[W_N^{(k_2-k_1)}\right]^N}{1 - W_N^{(k_2-k_1)}} = W_N^{n_0(k_2-k_1)} \frac{1 - e^{j2\pi(k_2-k_1)}}{1 - e^{j2\pi(k_2-k_1)/N}}$$

$$w_{k_1}^H w_{k_2} = \begin{Bmatrix} 0, & k_1 \neq k_2 \\ N, & k_1 = k_2 \end{Bmatrix} = N\delta[k_1 - k_2]$$

هذه النتيجة تساوي صفراً عندما $k_1 \neq k_2$ لأن البسط يساوي صفراً بينما المقام لا يساوي الصفر. البسط يساوي صفراً لأن كل من k_1 و k_2 أرقاماً صحيحة وبالتالي تكون الكمية $e^{j2\pi(k_2-k_1)}$ تساوي واحد. المقام لا يساوي صفراً لأن كل من k_1 و k_2 يكونان في المدى $0 \leq k_1$ و $k_2 < N$ والنسبة $(k_2-k_1)/N$ لا يمكن أن تكون صحيحة (إذا كانت $k_1 \neq k_2$ و $N \neq 1$). وعلى ذلك فإن كل المتجهات في المعادلة (٧.٤) يكون كل منها متعامداً مع الآخر.

حقيقة أن الأعمدة W تكون متعامدة تؤدي إلى تفسير مهم عن كيفية حساب X. إذا قمنا بضرب كل حدود المعادلة (٧.٤) في الكمية w_0^H من الجانب الأيسر نحصل على:

$$w_0^H N x = \underbrace{w_0^H w_0}_{=N} X[0] + \underbrace{w_0^H w_1}_{=0} X[1] + \cdots + \underbrace{w_0^H w_{N-1}}_{=0} X[N-1] = NX[0]$$

وعلى ذلك يمكننا حساب $X[0]$ كما يلي:

$$X[0] = \frac{w_0^H N}{w_0^H w_0} = w_0^H X$$

المتجه $X[0]w_0$ هو إسقاط المتجه Nx في اتجاه متجه الأساس w_0. بالطريقة نفسها، يكون كل $X[k]w_k$ هو إسقاط المتجه Nx في اتجاه متجه الأساس w_k. قيمة الدالة التوافقية $X[k]$ يمكن إيجادها عند كل رقم توافقي كما يلي:

$$X[k] = w_k^H X$$

ويمكننا تلخيص كل عملية إيجاد الدالة التوافقية كما يلي:

$$X = \begin{bmatrix} w_0^H \\ w_1^H \\ .. \\ .. \\ w_{N-1}^H \end{bmatrix} X = w^H X \qquad \text{(٧.٨) المعادلة رقم}$$

نتيجة التعامد بين المتجهات w_{k_1} و w_{k_2} (عندما $k_1 \neq k_2$) فإن حاصل ضرب W ودوران مرافقها المركب W^H سيكون:

$$WW^H = [w_0\ w_1\ \dots\ w_{N-1}] \begin{bmatrix} w_0^H \\ w_1^H \\ .. \\ .. \\ w_{N-1}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N & \dots & 0 \\ & \dots\dots & & \\ & \dots\dots & & \\ 0 & 0 & \dots & N \end{bmatrix} = NI$$

بقسمة طرفي المعادلة على N

$$\frac{WW^H}{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots\dots & & \\ & \dots\dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I$$

وعلى ذلك، فإن معكوس W سيكون:

$$W^{-1} = \frac{W^H}{N}$$

ومن المعادلة $X=W^{-1}Nx$ يمكننا حساب قيمة X كما يلي :

$$X=W^{H}x$$ المعادلة رقم (٧.٩)

والتي هي نفسها كما في المعادلة (٧.٨). المعادلة (٧.٨) والمعادلة (٧.٩) يمكن كتابتهما في صورة المجموع التالية :

$$X[k] = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

والآن يصبح لدينا تحويل فورير المتقطع الأمامي والعكسي كما يلي :

$$X[k] = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} \quad x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=<N_0>} X[K]e^{j2\pi kn/N}$$ المعادلة رقم (٧.١٠)

إذا كانت الدالة x[n] في النطاق الزمني محدودة زمنياً في المدى $n_0 \le n < n_0+N$ ، فإنه يمكن دائماً حساب الدالة التوافقية وهي نفسها تكون محدودة لأنها تكون مجموعاً لعدد محدود من الحدود.

في معظم المؤلفات عن تحويل فورير المتقطع تتم كتابة زوج التحويل كما يلي :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} \quad \text{و} \quad x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[K]e^{j2\pi kn/N}$$ المعادلة رقم (٧.١١)

نقطة البداية للإشارة x[n] هي $n_0=0$ ونقطة البداية لـ X[k] هي k=0. هذه هي صورة تحويل فورير المتقطع التي يتم تنفيذها عملياً بكل لغات البرمجة. وعلى ذلك فعند استخدام DFT على الحاسب، فإن المستخدم يجب أن يكون على وعي بأن النتيجة المسترجعة من الحاسب تعتمد على افتراض أن العنصر الأول من الـ N من العناصر للإشارة x التي يتم إرسالها لإجراء DFT عليها هي القيمة، أو العينة X[0]. فإذا العنصر الأول هو $x[n_0]$ ، $n_0 \neq 0$ ، فإن نتيجة DFT ستحتوي مركبة زاوية خطية زائدة مقدارها $e^{j2\pi kn_0/N}$. ويمكن تعويض ذلك عن طريق ضرب نتيجة DFT في الكمية $e^{-j2\pi kn_0/N}$. بالطريقة نفسها فإذا كانت أول قيمة في X[k] ليست عند k=0 ، فإن نتيجة DFT العكسي سيتم ضربها في دالة جيبية مركبة.

خواص تحويل فورير المتقطع

في كل الخواص المدونة في جدول ٧.١ تذكر الأزواج التالية : $x[n] \leftrightarrow X[k]$ و $y[n] \leftrightarrow Y[k]$.

إذا كانت أي إشارة x[n] زوجية ودورية بدورة مقدارها N ، فإن دالتها التوافقية ستكون :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

إذا كنت N رقماً زوجياً فإن :

$$X[k] = x[0] + \sum_{n=1}^{N/2-1} x[n]e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} + x\left[\frac{N}{2}\right]e^{-j\pi k} + \sum_{n=\frac{N}{2}+1}^{N-1} x[n]e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

$$X[k] = x[0] + \sum_{n=1}^{N/2-1} x[n]e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} + \sum_{n=N-1}^{\frac{N}{2}+1} x[n]e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} + (-1)^k x[\frac{N}{2}]$$

جدول رقم ٧.١ خواص تحويل فورير المتقطع DFT

الخطية	$\alpha x[n] + \beta y[n] \underset{N}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}} \alpha X[k] + \beta Y[k]$
الإزاحة الزمنية	$x(n - n_0) \underset{N}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}} X[k]e^{-j2\pi k n_0/N}$
الإزاحة الترددية	$x[n]e^{j2\pi k_0 n/N} \underset{N}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}} X[k - k_0]$
الانعكاس الزمني	$x[-n] = x[N - n] \underset{N}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}} X[-k] = x[N - k]$
الترافق	$x^*[n] \underset{N}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}} X*[-k] = X*[N - k]$ $x^*[-n]X*[N - n] \underset{N}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}} X*[k]$
التحجيم الزمني	$z[n] = \begin{cases} x[n/m], & n/m \text{ an intger} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ $N \to mN,\ Z[k] = X[k]$
تغيير الدورة	$N \to qN$, q a postive integer $X_q[k] = \begin{cases} qX[k/q], & k/q \text{ an intger} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
ازدواجية الضرب والالتفاف	$x[n]\,y[n] \underset{N}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}} (1/N)Y[k]\Theta X[k]$ $x[n]\,y[n] \underset{N}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}} Y[k]\Theta X[k]$ where $x[n]\Theta\, y[n] = \sum_{m=\langle N\rangle} x[m]\,y[n - m]$
نظرية بارسيفال	$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\lvert x[n]\rvert^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{n=\langle N\rangle}\lvert X[k]\rvert^2$

بمعلومية أن x دورية بدورة مقدارها N ، فإنه يمكننا أن نطرح N من n في المجموع الثاني كما يلي :

$$X[k] = x[0] + \sum_{n=1}^{N/2-1} x[n]e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} + \sum_{n=-1}^{-(\frac{N}{2}-1)} x[n]e^{-\frac{j2\pi k(n-N)}{N}} + (-1)^k x[\frac{N}{2}]$$

$$X[k] = x[0] + \sum_{n=1}^{N/2-1} x[n]e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} + e^{j2\pi k} \sum_{n=-1}^{-(\frac{N}{2}-1)} x[n]e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} + (-1)^k x[\frac{N}{2}]$$

$$X[k] = x[0] + \sum_{n=1}^{N/2-1} \left(x[n]e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} + x[-n]e^{\frac{j2\pi kn}{N}}\right) + (-1)^k x[\frac{N}{2}]$$

والآن حيث إن x[n]=x[-n] فيمكننا كتابة ما يلي :

$$X[k] = x[0] + 2\sum_{n=1}^{N/2-1} \left(x[n]\cos(\frac{2\pi k}{N})\right) + (-1)^k x[\frac{N}{2}]$$

كل هذه الحدود لها قيم حقيقية ، ولذلك فإن X[k] ستكون كذلك. بتحليل مماثل يمكن بيان أنه إذا كانت N فردية ، فإن النتيجة ستكون كما هي حيث ستكون قيم X[k] في هذه الحالة حقيقية. أيضاً ، إذا كانت x[n] دالة فردية ودورية بدورة مقدارها N ، فإن قيم X[k] ستكون قيماً تخيلية خالصة.

مثال ٧.١

تحويل فورير المتقطعDFT لنبضة مربعة دورية متكررة 1

أوجد تحويل فورير المتقطع DFT للدالة $x[n]=(u[n]-u[n-n_x])*\delta_{N_0}[n]$ حيث $0\leq n_x\leq N_0$ مستخدما N_0 كزمن للتعبير عن هذه الإشارة.

$$(u[n]-u[n-n_x])*\delta_{N_0}[n]\underset{N_0}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}}\sum_{n=0}^{n_x-1}e^{-j2\pi kn/N_0}$$

بإجراء مجموع المتوالية الهندسية المحدودة :

$$(u[n]-u[n-n_x])*\delta_{N_0}[n]\underset{N_0}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}}\frac{1-e^{-j2\pi kn_x/N_0}}{1-e^{-j2\pi kn/N_0}}=\frac{e^{-j\pi kn_x/N_0}}{e^{-j\pi k/N_0}}\frac{e^{j\pi kn_x/N_0}-e^{-j\pi kn_x/N_0}}{e^{j\pi k/N_0}-e^{-j\pi k/N_0}}$$

$$(u[n]-u[n-n_x])*\delta_{N_0}[n]\underset{N_0}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}}e^{-j\pi k(n_x-1)/N_0}\frac{\sin\left(\frac{\pi kn_x}{N_0}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N_0}\right)},\qquad 0\leq n_x\leq N_0$$

مثال ٧.٢

تحويل فورير المتقطعDFT لنبضة مربعة دورية متكررة 2

احسب تحويل فورير المتقطع DFT للدالة $x[n]=(u[n-n_0]-u[n-n_1])*\delta_{N_0}[n]$ حيث $0\leq n_1-n_0\leq N_0$.

نحن نعرف مبدئياً من مثال ٧.١ زوج التحويل المتقطع التالي :

$$(u[n]-u[n-n_x])*\delta_{N_0}[n]\underset{N_0}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}}e^{-j\pi k(n_x-1)/N_0}\frac{\sin\left(\frac{\pi kn_x}{N_0}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N_0}\right)},\qquad 0\leq n_x\leq N_0$$

إذا طبقنا خاصية الإزاحة الزمنية :

$$x[n-n_y]\underset{N}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}}X[k]e^{-j2\pi kn_y/N}$$

بهذه النتيجة يمكننا كتابة ما يلي :

$$(u[n-n_y]-u[n-n_y-n_x])*\delta_{N_0}[n]\underset{N_0}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}}e^{-j\pi k(n_x-1)/N_0}\,e^{-j2\pi kn_y/N_0}\frac{\sin\left(\frac{\pi kn_x}{N_0}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N_0}\right)},\qquad 0\leq n_x\leq N_0$$

$$(u[n-n_y]-u[n-n_y-n_x])*\delta_{N_0}[n]\underset{N_0}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}}e^{-j\pi k(n_x+2n_y-1)/N_0}\frac{\sin\left(\frac{\pi kn_x}{N_0}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N_0}\right)},\qquad 0\leq n_x\leq N_0$$

الآن دع $n_0=n_y$ و $n_1=n_y+n_x$.

$$(u[n-n_0]-u[n-n_1]) * \delta_{N_0}[n] \underset{N_0}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}} e^{-j\pi k(n_0+n_1-1)/N} \frac{\sin\left(\frac{\pi k(n_1-n_0)}{N_0}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N_0}\right)}, \qquad 0 \le n_1 - n_0 \le N_0$$

افترض الحالة الخاصة التي فيها $n_0+n_1=1$، فيمكننا كتابة:

$$(u[n-n_0]-u[n-n_1]) * \delta_{N_0}[n] \underset{N_0}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}} \frac{\sin\left(\frac{\pi k(n_1-n_0)}{N_0}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N_0}\right)}, \qquad n_0+n_1=1$$

هذه هي حالة النبضة المستطيلة ذات العرض $n_1-n_0=2n_1-1$، المتمركزة عند $n=0$. إن ذلك يكافئ النبضة الدورية المتكررة في الزمن المستمر التي على الصورة:

$$T_0 rect\left(\frac{t}{w}\right) * \delta_{T_0}(t)$$

قارن دوالهما التوافقية التالية:

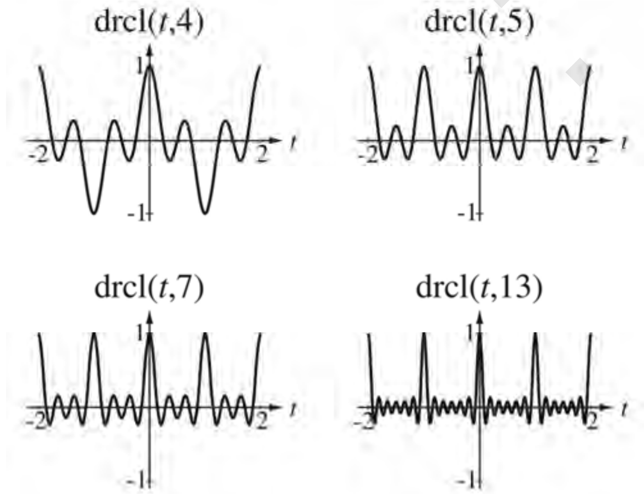
$$T_0 rect\left(\frac{t}{w}\right) * \delta_{T_0}(t) \underset{T_0}{\overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow}} w\ sinc\left(\frac{wk}{T_0}\right) = \frac{\sin(\pi wk/T_0)}{\pi k/T_0}$$

$$(u[n-n_0]-u[n-n_1]) * \delta_{N_0}[n] \underset{N_0}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}} \frac{\sin\left(\frac{\pi k(n_1-n_0)}{N_0}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N_0}\right)}, \qquad n_0+n_1=1$$

الدالة التوافقية لـ $T_0 rect\left(\frac{t}{w}\right) * \delta_{T_0}(t)$ هي دالة سنك sinc. على من عدم وضوحها حتى الآن، فإن الدالة التوافقية لـ $u[n-n_0]-u[n-n_1]$ عبارة عن دالة سنك دورية ومتكررة.

صورة الدالة $\frac{\sin(\pi Nx)}{N\sin(\pi x)}$ (انظر مثال ٧.٢) يشيع ظهورها بما فيه الكفاية في تحليل الإشارات والأنظمة تعطي الاسم دالة درتشليت Dirichlet كما في شكل (٧.٨).

$$drcl(t,N) = \frac{\sin(\pi Nt)}{N\sin(\pi t)} \qquad \text{المعادلة رقم (٧.١٢)}$$



شكل رقم (٧.٨) دالة درتشليت عند N=4, 5, 7, 13

عندما تكون N فردية فإن التشابه مع الدالة سنك يكون واضحاً، الدالة درتشليت عبارة عن مجموع لا نهائي لدوال سنك منتظمة التباعد. البسط sin(Nπt) يكون صفراً عندما تكون t أي مضاعف صحيح من 1/N. ولذلك فإن دالة درتشليت تكون صفراً عند هذه النقاط، إلا إذا كان المقام هو الآخر يساوي صفراً. المقام Nsin(πt) يساوي صفراً عند كل قيمة صحيحة لـ t. ولذلك علينا استخدام قانون لوبيتال لإجراء دالة درتشليت عند القيم الصحيحة لـ t.

$$\lim_{t\to m} drcl(t,N) = \lim_{t\to m}\frac{\sin(\pi N t)}{N sin(\pi t)} = \lim_{t\to m}\frac{\mathrm{N\pi cos(N\pi t)}}{N\pi cos(\pi t)} = \pm 1,$$

حيث m رقم صحيح.

إذا كانت N زوجية، فإن النقاط العظمى لدالة درتشليت ستتبدل بين 1+ و 1-. إذا كانت N فردية، فإن النقاط العظمى كلها تكون عند 1+. أحد إصدارات الدالة درتشليت جزء من صندوق أدوات الإشارة في ماتلاب واسم الدالة هو diric، وهي معرفة كالتالي:

$$diric(x,N) = \frac{\sin(Nx/2)}{N sin(x/2)}$$

ولذلك فإن:

drcl(t,N)=diric(2πt,N)

```
% دالة لحساب قيم دالة درتشليت
% تعمل بالطريقة نفسها مع المتجهات والكميات القياسية
%
% x = sin(N*pi*t)/(N*sin(pi*t))
%
function x = drcl(t,N)
x = diric(2*pi*t,N) ;
```

```
% دالة لإجراء دالة درتشليت بدون استخدام دالة
% MATLAB diric.
% تعمل مع المتجهات والكميات القياسية
%
% x = sin(N*pi*t)/(N*sin(pi*t))
%
function x = drcl(t,N),
num = sin(N*pi*t) ; den = N*sin(pi*t) ;
I = fi nd(abs(den) < 10*eps) ;
num(I) = cos(N*pi*t(I)) ; den(I) = cos(pi*t(I)) ;
x = num./den ;
```

باستخدام تعريف دالة درتشليت، فإن زوج تحويل فورير المتقطع DFT من مثال ٧.٢ يمكن كتابته كالتالي:

$$(u[n-n_0) - u[n-n_1]) * \delta_N[n] \underset{N}{\overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow}} \frac{e^{-j\pi k(n_1+n_0)/N}}{e^{-j\pi k/N}}(n_1-n_0)drcl(\frac{k}{N}, n_1-n_0)$$

جدول ٧.٢ يبين العديد من أزواج تحويل فورير المتقطع الشائعة.

جدول رقم ٧–٢ أزواج شائعة من تحويل فورير المتقطع في كل زوج تكون m رقماً صحيحاً موجباً

١	$e^{j2\pi n/N} \xleftrightarrow[mN]{\mathcal{DFT}} mN\delta_{mN}[k-m]$
٢	$\cos(2\pi qn/N) \xleftrightarrow[mN]{\mathcal{DFT}} (mN/2)\delta_{mN}[k-mq] + \delta_{mN}[k+mq]$
٣	$\sin(2\pi qn/N) \xleftrightarrow[mN]{\mathcal{DFT}} (jmN/2)\delta_{mN}[k+mq] - \delta_{mN}[k-mq]$
٤	$\delta_N[n] \xleftrightarrow[mN]{\mathcal{DFT}} M\,\delta_{mN}[k]$
٥	$1 \xleftrightarrow[N]{\mathcal{DFT}} N\,\delta_N[k]$
٦	$\left(u[n-n_0] - u[n-n_1] * \delta_N[n] \xleftrightarrow[N]{\mathcal{DFT}} \frac{e^{-j\pi k(n_1+n_0)/N}}{e^{-j\pi k/N}}(n_1-n_0)\mathrm{drcl}(k/N, n_1-n_0)\right)$
٧	$\mathrm{tri}(n/N_w) * \delta_N[n] \xleftrightarrow[N]{\mathcal{DFT}} N_w\,\mathrm{drcl}^2\,(k/N, N_w)N_w$ an integer
٨	$\mathrm{sinc}(n/w) * \delta_N[n] \xleftrightarrow[N]{\mathcal{DFT}} w\mathrm{rect}\,(wk/N)\delta_N[k]$

تحويل فورير السريع

لقد تم تحديد تحويل فورير المتقطع DFT الأمامي كما يلي :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

الطريقة المباشرة لحساب DFT من الممكن أن تكون كما هو مبين في الخواريزم التالي (المكتوب بماتلاب) والذي يقوم بإجراء العمليات السابقة مباشرة :

```
.
.
.
% اكتساب بيانات الدخل ووضعها في متجه
% x
% مكون من عدد
% N
% من العناصر
%
% بدأ متجه تحويل فورير المتقطع من متجه عمود كله أصفار
%
X = zeros(N,1) ;
%
% حساب تحويل فورير المتقطع باستخدام حلقتين متداخلتين
%
for k = 0:N-1
     for n = 0:N-1
          X(k+1) = X(k+1) + x(n+1)*exp(-j*2*pi*n*k/N) ;
     End
end
.
.
.
```

(لن يحتاج أي أحد لكتابة هذا البرنامج في ماتلاب ؛ لأن تحويل فورير المتقطع مبنى جاهز في ماتلاب كدالة ضمنية تسمى fft)

إن حساب DFT باستخدام هذا الخواريزم يتطلب عدد N^2 من عمليات الضرب والجمع المركب. ولذلك فإن عدد هذه الحسابات يزداد تربيعياً مع زيادة عدد عناصر متجه الدخل المطلوب تحويله. في عام 1965 نشر كل من جيمس كوولي James Cooley و جون تيوكي John Tukey خواريزم أكثر كفاءة في زمن الحساب لمتجهات الدخل الكبيرة التي يكون طولها قوي من الرقم 2. هذا الخواريزم لحساب الـ DFT هو ما أطلق عليه تحويل فورير السريع fast Fourier transform أو باختصار الـ FFT.

جدول ٧.٣ يبين النقص في زمن حساب تحويل فورير السريع مع طريقة الحلقتين المتداخلتين التي قدمت فيما قبل وفيه A تمثل عدد عمليات الجمع المركب المطلوبة ، و M تمثل عدد عمليات الضرب المركب المطلوبة ، والرمز DFT الجانبي يبين استخدام طريقة الحلقتين المتداخلتين المباشرة ، والرمز FFT يبين استخدام خواريزم تحويل فورير السريع FFT.

مع زيادة عدد النقاط N في عملية التحويل ، فإن ميزة سرعة تحويل فورير السريع FFT تتنامي بسرعة كبيرة. ولكن معامل التحسن في السرعة لا يطبق إذا كانت N ليست قوة صحيحة للرقم 2. لهذا السبب ، فإن كل تحليلات ال DFT الحقيقية يتم إجراؤها عملياً باستخدام الـ FFT باستخدام أطوال متجه يكون طوله قوة صحيحة للرقم 2. (في ماتلاب إذا كان طول متجه الدخل قوة صحيحة من الرقم 2 ، فإن الخواريزم المستخدم في دالة ماتلاب ، fft ، يكون هو خواريزم FFT الذي تم تقديمه. إذا كان طول المتجه ليس قوة صحيحة من الرقم 2 ، فإن DFT لا يزال يحسب ولكن بسرعة أقل لأنه يتم استخدام خواريزم أقل كفاءة).

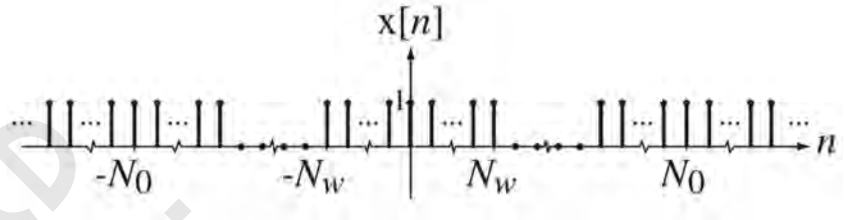
جدول رقم ٧.٣ عدد عمليات الجمع وعمليات الضرب ونسبها لقيم مختلفة لعدد العناصر N

γ	$N = 2^\gamma$	A_{DFT}	M_{DFT}	A_{FFT}	M_{FFT}	A_{DFT}/A_{FFT}	M_{DFT}/M_{FFT}
1	2	2	4	2	1	1	4
2	4	12	16	8	4	1.5	4
3	8	56	64	24	12	2.33	5.33
4	16	240	256	64	32	3.75	8
5	32	992	1024	160	80	6.2	12.8
6	64	4032	4096	384	192	10.5	21.3
7	128	16256	16384	896	448	18.1	36.6
8	256	65280	65536	2048	1024	31.9	64
9	512	261632	262144	4608	2304	56.8	113.8
10	1024	1047552	1048576	10240	5120	102.3	204.8

(٧.٣) تحويل فورير في الزمن المتقطع

امتداد تحويل فورير المتقطع إلى الإشارات غير الدورية

افترض إشارة الموجة المستطيلة الموضحة في شكل (٧.٩).



شكل رقم (٧.٩) إشارة موجة مستطيلة عامة.

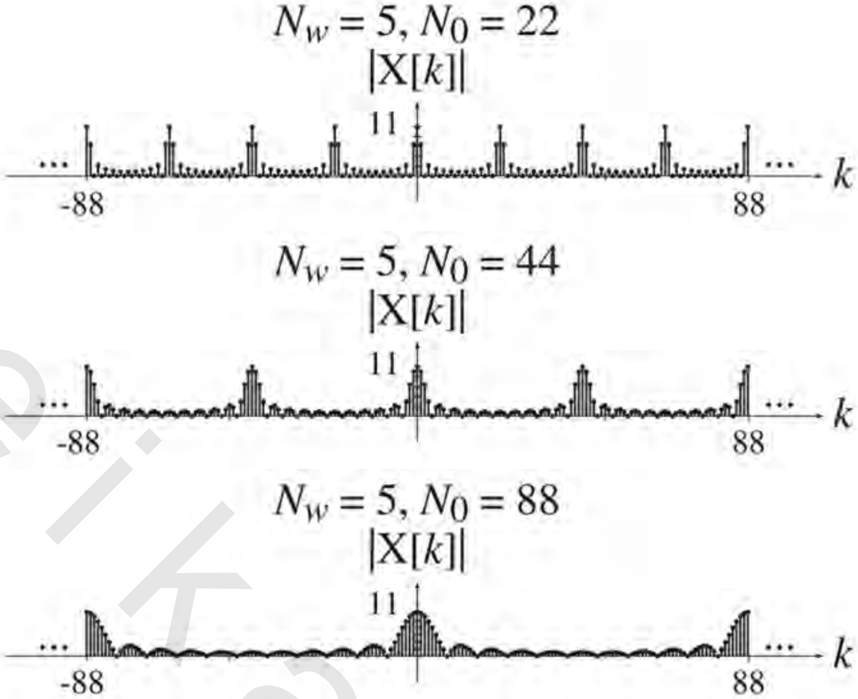
الدالة التوافقية لتحويل فورير المتقطع DFT اعتمادا على الدورة الأساسية ($N=N_0$) هي :

$$X[k]=(2N_w+1)drcl(k/N_0,2N_w+1)$$

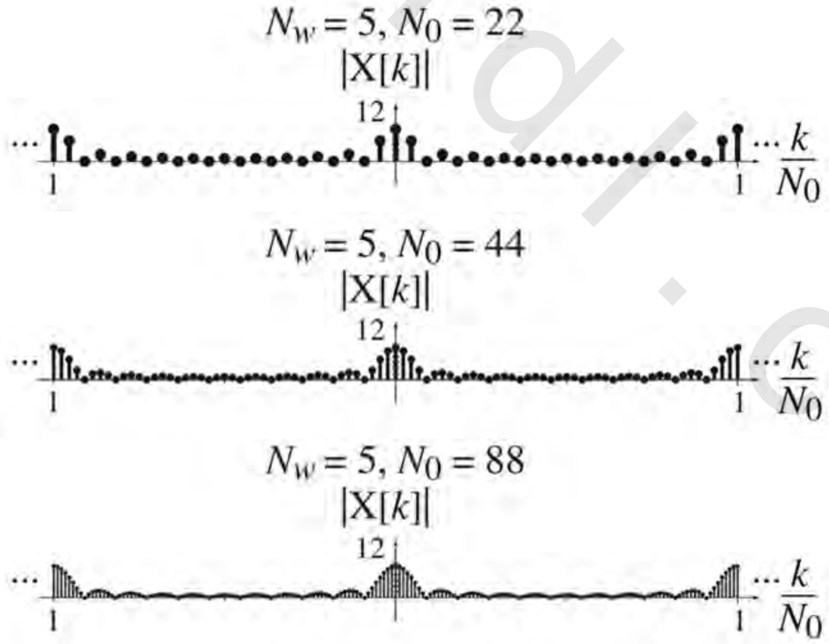
وهي دالة ديرشليت (Dirichlet) معيننة ونقاطها العظمى عند $2N_w+1$ ودورة مقدارها N_0.

لبيان تأثيرات الدورات الأساسية المختلفة N_0 سنفترض $N_w=5$ وسنرسم مقدار X[k] مع k لقيم $N_0=22, 44,$ 88 كما هو مبين في شكل (٧.١٠).

تأثير زيادة الدورة الأساسية للإشارة x[n] على الدالة التوافقية لتحويل فورير المتقطع هو زيادة انتشار هذه الدالة بدلالة الرقم التوافقي k. ولذلك ففي النهاية ، ومع اقتراب N_0 من الما لانهاية فإن دورة الدالة التوافقية لتحويل فورير المتقطع DFT ستقترب أيضاً من الما لانهاية. إذا كانت دورة أي دالة غير محددة ، فإن هذه الدالة لن تكون بالتالي دالة دورية. يمكننا أن نطبع ذلك عن طريق رسم الدالة التوافقية لتحويل فورير المتقطع مع التردد الدوري k/N_0 بدلاً من الرقم التوافقي k. وبالتالي فإن الدورة الأساسية للدالة التوافقية لـ DFT (كما تم رسمها) تكون عادة واحداً بدلاً من N_0 كما في شكل (٧.١١).

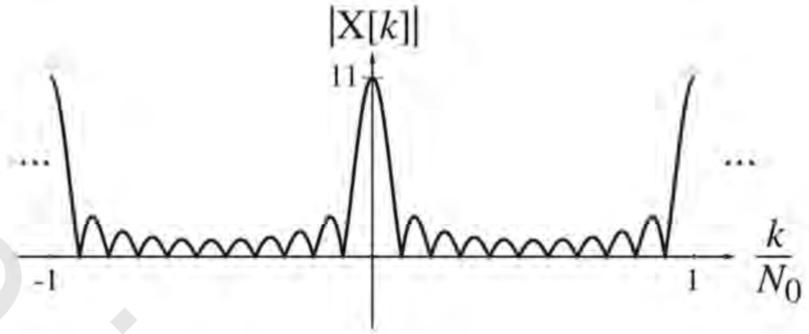


شكل رقم (٧.١٠) تأثير الدورة الأساسية N0 على مقدار الدالة التوافقية لـ DFT لإشارة موجة مستطيلة.



شكل رقم (٧.١١) مقدار الدالة التوافقية لـ DFT لإشارة موجة مستطيلة مرسومة مع k/N0 بدلا من k.

مع اقتراب N_0 من الما لانهاية، فإن الفاصل بين نقاط الـ X[k] يقترب من الصفر ويصبح شكل التردد المتقطع شكلاً ترددياً مستمراً كما في شكل (٧.١٢).



شكل رقم (٧.١٢) الشكل النهائي للدالة التوافقية لتحويل فورير المتقطع لإشارة الدالة الموجية

التعريف والاستنتاج

لتمديد تحويل فورير المتقطع تحليلياً ليشتمل على الإشارات غير الدورية، سنفترض أن $\Delta F=1/N_0$، عبارة عن تغير متقطع زمنياً محدد في التردد الدوري F. وبالتالي يمكن كتابة x[n] على أنها تحويل فورير المتقطع العكسي لـ X[k] كما يلي:

$$x[n]=\frac{1}{N_0}\sum_{k=<N_0>}X[k]e^{j2\pi kn/N_0}=\Delta F\sum_{k=<N_0>}X[k]e^{j2\pi k\Delta Fn}$$

بالتعويض بمعادلة المجموع لـ X[k] من تعريف تحويل فورير المتقطع:

$$x[n]=\Delta F\sum_{k=<N_0>}\left(\sum_{m=0}^{N_0-1}x[m]e^{-j2\pi k\Delta Fm}\right)e^{j2\pi k\Delta Fn}$$

(مؤشر المجموع n في معادلة X[k] تم تغييرها إلى m لتجنب الخلط أو الالتباس مع n في معادلة x[n] حيث إنهما متغيران مستقلان).

حيث إن x[n] دالة دورية بدورة أساسية مقدارها N_0، فإن المجموع الداخلي من الممكن أن يكون على أي دورة وعلى ذلك فالمعادلة السابقة تصبح كما يلي:

$$x[n]=\sum_{k=<N_0>}\left(\sum_{m=<N_0>}x[m]e^{-j2\pi k\Delta Fm}\right)e^{j2\pi k\Delta Fn}\Delta F$$

سنفترض أن مدى المجموع الداخلي هو $-N_0/2\le m<N_0/2$ للقيم الزوجية لـ N_0 أو للقيم الفردية لـ N_0 يمكن كتابة هذا المدى كالتالي : $-(N_0-1)/2\le m<(N_0+1)/2$. المجموع الخارجي يكون على أي مدى اختياري k بعرض مقداره N_0 ، ولذلك سنفترض أن هذا المدى سيكون $k_0\le k<k_0+N_0$ ، وبالتالي يمكن كتابة :

$$x[n] = \sum_{k=k_0}^{k_0+N_0-1}\left(\sum_{m=-N_0/2}^{\frac{N_0}{2}-1} x[m]e^{-j2\pi k\Delta Fm}\right)e^{j2\pi k\Delta Fn}\Delta F \qquad \text{(٧.١٣) المعادلة رقم}$$

عندما n تكون زوجية. و

$$x[n] = \sum_{k=k_0}^{k_0+N_0-1}\left(\sum_{m=-(N_0-1)/2}^{\frac{(N_0-1)}{2}} x[m]e^{-j2\pi k\Delta Fm}\right)e^{j2\pi k\Delta Fn}\Delta F \qquad \text{(٧.١٤) المعادلة رقم}$$

عندما تكون n فردية.

الآن سنفترض أن الدورة الأساسية N_0 لتحويل فورير المتقطع DFT ستقترب من الما لانهاية. عند هذا الحد تحدث الأشياء التالية :

١- تقترب ΔF من تفاضل التردد المتقطع زمنياً dF.
٢- تصبح $k\Delta F$ تردداً متقطعاً زمنياً F ، وهي عبارة عن متغير مستقل مستمر ، لأن ΔF تقترب من dF.
٣- يقترب المجموع الخارجي من تكامل في $F=k\Delta F$. يغطي المجموع للمدى $k_0\le k<k_0+N_0$. المدى المكافئ له في التكامل يمكن إيجاده باستخدام العلاقة $F=kdF=k/N_0$. بقسمة مدى الرقم التوافقي $k_0\le k<k_0+N_0$ على N_0 ينقل هذا المدى إلى تردد الزمن المتقطع $F_0<F<F_0+1$ حيث F_0 تكون اختيارية حيث إن k_0 تكون اختيارية. المجموع الداخلي يغطي مدى لانهائي لأن N_0 تقترب من الما لانهاية.

في النهاية تصبح كل من المعادلة (٧.١٣)والمعادلة (٧.١٤) على الصورة :

$$x[n] = \int_1 \underbrace{\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j2\pi Fm}\right)}_{=\mathcal{F}(x[m])} e^{j2\pi Fm}dF$$

وصورة التردد الزاوي ستكون كما يلي :

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\Omega m}\right)e^{j\Omega m}d\Omega$$

حيث $\Omega = 2\pi F$ و $dF=d\Omega/2\pi$. هذه النتائج تعطي تعريف تحويل فورير في الزمن المتقطع DTFT كما يلي :

$$x[n] = \int_1 X(F)\, e^{j2\pi Fn}dF \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j2\pi Fn}$$

أو :

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\Omega})\, e^{j\Omega n}d\Omega \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}$$

جدول ٧.٤ يبين بعض أزواج تحويل فورير في الزمن المستمر لبعض الإشارات البسيطة.

نحن هنا مواجهون مع نظام الترميز نفسه المعتمد في استنتاج تحويل فورير في الزمن المتقطع CTFT في الفصل ٦. X(F) ستعرف بالمعادلة التالية: $X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j2\pi Fn}$ و $X(e^{j\Omega})$ ستعرف كما يلي: $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}$، ولكن في الحقيقة، فإن الاثنين X يكونان دوال مختلفة حسابيا لأن $X(e^{j\Omega}) \neq X(F)_{F\to e^{j\Omega}}$. القرار هنا سيكون مشابهاً للقرار الذي تم الوصول إليه في الفصل ٦. سنستخدم الصورة X(F) والصورة $X(e^{j\Omega})$ للأسباب نفسها. إن استخدام $X(e^{j\Omega})$ بدلاً من الصورة المبسطة $X(\Omega)$ تكون مدفوعة بالرغبة في الحفاظ على التطابق في التعريف الدالي بين ال DTFT وتحويل زد z الذي سيتم تقديمه في الفصل ٩.

جدول رقم (٧.٤). بعض أزواج تحويل فورير في الزمن المتقطع DTFT المستنتجة مباشرة من التعريف.

$\delta[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1$	١
$e^{n}u[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-\alpha} = \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}},\ \lvert\alpha\rvert < 1$	٢
$-\alpha^{n}u[-n-1] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-\alpha} = \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}},\ \lvert\alpha\rvert > 1$	٣
$n\alpha^{n}u[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{\alpha e^{j\Omega}}{(e^{j\Omega}-\alpha)^2} = \frac{\alpha e^{-j\Omega}}{(1-ae^{-j\Omega})^2},\ \lvert\alpha\rvert < 1$	٤
$-n\alpha^{n}u[-n-1] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{\alpha e^{j\Omega}}{(e^{j\Omega}-\alpha)^2} = \frac{\alpha e^{-j\Omega}}{(1-ae^{-j\Omega})^2},\ \lvert\alpha\rvert > 1$	٥
$\alpha^{n}\sin(\Omega_0 n)u[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{e^{j\Omega}\alpha\sin(\Omega_0)}{e^{j2\Omega}-2\alpha e^{j\Omega}\cos(\Omega_0)+\alpha^2}, \lvert\alpha\rvert < 1$	٦
$-\alpha^{n}\sin(\Omega_0 n)u[-n-1] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{e^{j\Omega}\alpha\sin(\Omega_0)}{e^{j2\Omega}-2\alpha e^{j\Omega}\cos(\Omega_0)+\alpha^2}, \lvert\alpha\rvert > 1$	٧
$\alpha^{n}\cos(\Omega_0 n)u[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{e^{j\Omega}[e^{j\Omega}-\alpha\cos(\Omega_0)]}{e^{j2\Omega}-2\alpha e^{j\Omega}\cos(\Omega_0)+\alpha^2}, \lvert\alpha\rvert < 1$	٨
$-\alpha^{n}\cos(\Omega_0 n)u[-n-1] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{e^{j\Omega}[e^{j\Omega}-\alpha\cos(\Omega_0)]}{e^{j2\Omega}-2\alpha e^{j\Omega}\cos(\Omega_0)+\alpha^2}, \lvert\alpha\rvert > 1$	٩
$\alpha^{\lvert n\rvert} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-\alpha} - \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-1/\alpha}, \lvert\alpha\rvert < 1$	١٠

الصورة العامة لتحويل فورير في الزمن المتقطع DTFT

تماماً كما رأينا في الزمن المستمر، فإنه في الزمن المتقطع يكون هناك بعض الإشارات المهمة عملياً، التي لا يكون لها DTFT بالمعنى الصارم. حيث إن هذه الإشارات تكون غاية في الأهمية، فقد تم تعميم DTFT ليشمل هذه الإشارات. افترض DTFT للدالة x[n]=A، حيث A ثابت :

$$X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Ae^{-j2\pi Fn} = A\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi Fn}$$

هذا التتابع لن يتقارب. ولذلك، فإنه بالمعنى الصارم، فإن DTFT لا يوجد. لقد واجهنا موقفا مشابهاً في حالة CTFT ووجدنا أن CTFT العام للقيمة الثابتة يكون صدمة عند f=0 أو w=0. نتيجة العلاقات القريبة بين CTFT والـ DTFT فإننا يجب أن نتوقع نتيجة مشابهة عند إجراء DTFT على الكمية الثابتة. ولكن كل DTFT يجب أن

تكوندورية ، ولذلك فإن الصدمة الدورية تكون هي الاختيار المنطقي في هذه الحالة. افترض أن الإشارة x[n] سيكون لها DTFT على الصورة $A\delta_1(F)$ ، لذلك فإن x[n] يمكن إيجادها عن طريق حساب الـ DTFT العكسي للكمية $A\delta_1(F)$ كما يلي :

$$x[n] = \int_{1} A\delta_1(F)e^{j2\pi Fn}\, dF = A\int_{-1/2}^{1/2} \delta(F)e^{j2\pi Fn}\, dF = A$$

وعلى ذلك نحصل على زوج التحويل DTFT التالي :

$$A \leftrightarrow A\delta_1(F), \quad A \leftrightarrow 2\pi A\delta_{2\pi}(\Omega)$$

إذا عممنا هذه الصورة إلى الصورة $A\delta_1(F-F_0)$ حيث $-1/2<F_0<1/2$ سنحصل على التالي :

$$x[n] = \int_{1} A\delta_1(F-F_0)e^{j2\pi Fn}\, dF = A\int_{-1/2}^{1/2} \delta(F-F_0)e^{j2\pi Fn}\, dF = Ae^{j2\pi F_0 n}$$

وعلى ذلك فإذا كانت $x[n]=A\cos(2\pi f_0 n)=(A/2)(e^{j2\pi F_0 n}+e^{-j2\pi F_0 n})$ سنحصل على زوج تحويل الـ DTFT التالي :

$$A\cos(2\pi F_0 n) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \left(\frac{A}{2}\right)[\delta_1(F-F_0)+\delta_1(F+F_0)]$$

أو :

$$A\cos(\Omega_0 n) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \pi A[\delta_1(\Omega-\Omega_0)+\delta_1(\Omega+\Omega_0)]$$

بعملية مماثلة يمكننا أن نستنتج أزواج التحويل التالية :

$$A\sin(2\pi F_0 n) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \left(\frac{jA}{2}\right)[\delta_1(F+F_0)-\delta_1(F-F_0)]$$

أو :

$$A\sin(\Omega_0 n) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j\pi A[\delta_1(\Omega+\Omega_0)-\delta_1(\Omega-\Omega_0)]$$

ونستطيع الآن نوسع جدول الـ DTFT ليشتمل على دوال مفيدة أكثر كما في جدول ٧.٥.

تقارب تحويل فورير في الزمن المتقطع

شرط التقارب للـ DTFT هو ببساطة أن يكون المجموع التالي متقارباً :

$$X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi Fn}, \quad X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \qquad \text{المعادلة رقم (٧.١٥)}$$

وهذا المجموع سيتقارب إذا كان :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \qquad \text{المعادلة رقم (٧.١٦)}$$

إذا كانت دالة DTFT محدودة ، فإن التحويل العكسي التالي :

$$x[n] = \int_{1} X(F)e^{j2\pi FN}\, dF, \quad x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}\, d\Omega \qquad \text{المعادلة رقم (٧.١٧)}$$

سيتقارب دائماً حيث إن فترة التكامل محدودة.

جدول رقم (٧.٥) المزيد من أزواج الـ DTFT .

١	$\delta[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1$
٢	$u[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j2\pi F}} + (1/2)\delta_1(F),$
٣	$u[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\delta_1(\Omega),$
٤	$\mathrm{sinc}(n/w) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} w\ \mathrm{rect}(wF) * \delta_1(F),$
٥	$\mathrm{sinc}(n/w) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} w\ \mathrm{rect}(w\Omega/2\pi) * \delta_{2\pi}(\Omega),$
٦	$\mathrm{tri}(n/w) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} w\ \mathrm{drcl}^2(F, w)$
٧	$\mathrm{tri}(n/w) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} w\ \mathrm{drcl}^2(\Omega/2\pi, w)$
٨	$1 \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \delta_1(F),$
٩	$1 \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 2\pi\delta_{2\pi}(\Omega),$
١٠	$\delta_{N_0}[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (1/N_0), \delta_{1/N_0}(F)$
١١	$\delta_{N_0}[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (2\pi/N_0), \delta_{2\pi/N_0}(\Omega)$
١٢	$\cos(2\pi f_0 n) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (1/2)[\delta_1(F - F_0) + \delta(F + F_0)]$
١٣	$\cos(\Omega_0 n) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \pi[\delta_{2\pi}(\Omega - \Omega_0) + \delta_{2\pi}(\Omega + \Omega_0)]$
١٤	$\cos(2\pi f_0 n) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (j/2)[\delta_1(F + F_0) - \delta(F - F_0)]$
١٥	$\sin(\Omega_0 n) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \pi[\delta_{2\pi}(\Omega + \Omega_0) - \delta_{2\pi}(\Omega - \Omega_0)]$
١٦	$u[n - n0] - u[n - n1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{e^{j2\pi F}}{e^{j2\pi F}-1}\left(e^{-j2\pi n_0 F} - e^{-j2\pi n_1 F}\right) = \frac{e^{-j\pi F(n_0+n_1)}}{e^{-j\pi F}}(n_0 - n_1)\mathrm{drcl}(F, n_0 - n_1)$
١٧	$u[n - n0] - u[n - n1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-1}\left(e^{-jn_0\Omega} - e^{-jn_1\Omega}\right) = \frac{e^{-j\Omega(n_0+n_1)/2}}{e^{-j\Omega/2}}(n_0 - n_1)\mathrm{drcl}(\Omega/2\pi, n_0 - n_1)$

خواص تحويل فورير في الزمن المتقطع DTFT

سنفترض أن الإشارتين x[n] و y[n] واللذان لهما DTFT يساوي X(F) و Y(F) أو $X(e^{j\Omega})$ و $Y(e^{j\Omega})$ وبالتالي فإن الخواص الموجودة في جدول ٧.٦ ستكون مطبقة.

جدول رقم (٧.٦) خواص ال DTFT .

$\alpha\, x[n] + \beta y[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \alpha\, X(F) + \beta\, Y(F)$	$\alpha\, x[n] + \beta y[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \alpha\, X(\mathrm{e}^{j\Omega}) + \beta\, Y(\mathrm{e}^{j\Omega})$
$x[n-n_0] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{-j2\pi F n_0/T} X[\mathrm{F}]$	$x[n-n_0] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{-j\Omega n_0/T} X(\mathrm{e}^{j\Omega})$
$e^{j2\pi F_0 n} x[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \mathrm{X}[\mathrm{F}-\mathrm{F}_0]$	$e^{j\Omega_0 n} x[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \mathrm{X}\left(e^{j(\Omega-\Omega_0)}\right)$
$\text{if } \mathrm{z}[\mathrm{n}] = \begin{Bmatrix} \mathrm{x}[\mathrm{n/m}], & \mathrm{n/m \ an \ intger} \\ 0, & otherwise \end{Bmatrix}\ then\ \mathrm{z}[\mathrm{n}] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(mF)\ or\ \mathrm{z}[\mathrm{n}] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\mathrm{e}^{jm\Omega})$	
$x^*[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X * [-F]$	$x^*[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X * (\mathrm{e}^{-j\Omega})$
$x[n] - x[n-1] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (1 - e^{-j2\pi F}) X(\mathrm{F})$	$x[n] - x[n-1] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (1 - \mathrm{e}^{-j\Omega}) X(\mathrm{e}^{j\Omega})$
$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{X(\mathrm{F})}{1-e^{-j2\pi F}} + \frac{1}{2} x(0) \delta_1(F)$	$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{X(\mathrm{e}^{j\Omega})}{1-\mathrm{e}^{-j\Omega}} + \pi x(0) \delta_{2\pi}(\Omega)$
$x[-n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(-F)$	$x[-n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\mathrm{e}^{-j\Omega})$
$x[n] * y[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\mathrm{F}) * Y(\mathrm{F})$	$x[n] * y[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\mathrm{e}^{j\Omega}) * Y(\mathrm{e}^{j\Omega})$
$x[n] y[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\mathrm{F}) \Theta Y(\mathrm{F})$	$x[n] y[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (1/2\pi) X(\mathrm{e}^{j\Omega}) \Theta Y(\mathrm{e}^{j\Omega})$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi F n} = \delta_1(\mathrm{F})$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{j\Omega n} = 2\pi \delta_{2\pi}(\Omega)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert^2 = \int_1 \lvert X(\mathrm{F})\rvert^2 dF$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert^2 = (1/2\pi) \int_{2\pi} \lvert X(\mathrm{e}^{j\Omega})\rvert^2 d\Omega$

في الخاصية :

$$X[n]y[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} (1/2\pi) X(e^{j\Omega}) \Theta\, Y(e^{j\Omega})$$

العملية ⊗ تبين الالتفاف الدوري الذي تم تقديمه في الفصل ٦. في هذه الحالة يكون :

$$X(e^{j\Omega}) \Theta\, Y(e^{j\Omega}) = \int_{2\pi} X(e^{j\Phi}) \Theta\, Y(e^{j(\Omega-\Phi)}) d\Phi$$

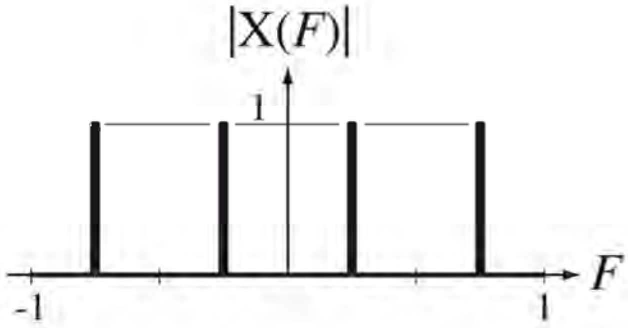
مثال ٧.٣

حساب ال DTFT العكسي لمستطيلين دوريين مزاحين.

احسب وارسم الـ DTFT العكسي للدالة :

$$X(F) = \left[rect\left(50\left(F - \frac{1}{4}\right)\right) + rect\left(50\left(F + \frac{1}{4}\right)\right) \right] * \delta_1(F)$$

انظر شكل (٧.١٣).



شكل رقم (٧.١٣) مقدار X(F)

يمكننا أن نبدأ من جدول الخواص $sinc\left(\frac{n}{w}\right) \leftrightarrow wrect(wF) * \delta_1(F)$ وفي هذه الحالة فإن:

$$\left(\frac{1}{50}\right) sinc\left(\frac{n}{50}\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} rect(50F) * \delta_1(F)$$

الآن بتطبيق خاصية الإزاحة الترددية $e^{j2\pi F_0 n}x[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(F-F_0)$ يمكننا كتابة ما يلي:

$$e^{j\pi n/2}\left(\frac{1}{50}\right) sinc\left(\frac{n}{50}\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} rect\left(50\left(F-\frac{1}{4}\right)\right) * \delta_1(F)$$ المعادلة رقم (٧.١٨)

وأيضاً:

$$e^{-j\pi n/2}\left(\frac{1}{50}\right) sinc\left(\frac{n}{50}\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} rect\left(50\left(F+\frac{1}{4}\right)\right) * \delta_1(F)$$ المعادلة رقم (٧.١٩)

(تذكر أنه عند التفاف الدالتين، فإن أي واحدة منهما وليس بإزاحة كلتيهما، سيزيح الالتفاف الناتج ب بالكمية نفسها). في النهاية بدمج المعادلتين (٧.١٨) و (٧.١٩) وبالتبسيط نحصل على:

$$\left(\frac{1}{25}\right) sinc\left(\frac{n}{50}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \left[rect\left(50\left(F-\frac{1}{4}\right)\right)+rect\left(50\left(F+\frac{1}{4}\right)\right)\right] * \delta_1(F)$$

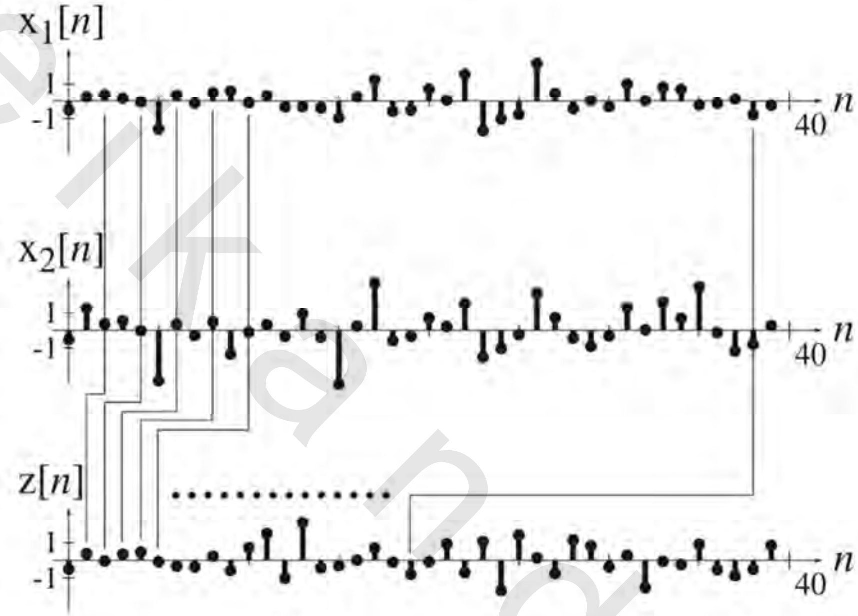
التحجيم الزمني في DTFT مختلف تماماً عن التحجيم الزمني في الـ CTFT نتيجة الاختلافات بين الزمن المتقطع والزمن المستمر. سنفترض أن z[n]=x[an]. إذا لم تكن a ثابتاً صحيحاً، فإن بعض القيم لـ z[n] ستكون غير محددة وبالتالي لن يمكن إيجاد DTFT لها. إذا كانت a ثابتاً صحيحاً أكبر من الواحد، فإن بعض القيم لـ x[n] لن تظهر في z[n] نتيجة التقسيم، ولن تكون هناك علاقة وحيدة أو فريدة بين DTFT و x[n] و z[n] كما في شكل (٧.١٤).

في شكل (٧.١٤) فإن الإشارتين $x_1[n]$ و $x_2[n]$ إشارتان مختلفتان ولكنهما لهما القيمة نفسها عند القيم الزوجية لـ n. إذا تم تقسيم كل من الدالتين بالمعامل ٢، فإنها ستعطي نفسها الإشارة المقسمة z[n]. لذلك فإن ال DTFT للإشارة وال DTFT لصورة مقسمة من نفس الإشارة لن تكون وحيدة أو فريدة ولن يمكن إيجاد خاصية لهذا النوع من التحجيم الزمني. بينما إذا كانت z[n] صورة موسعة من x[n]، يتم تكوينها بوضع أصفار بين قيم x[n]، فإنه ستكون هناك علاقة وحيدة، أو فريدة بين الـ DTFT لكل من x[n] و z[n]. افترض أن:

$$z[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{m}\right], & \frac{n}{m} \text{ رقم صحيح} \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

حيث m رقم صحيح. بالتالي فإن $Z(e^{j\Omega})=X(e^{jm\Omega})$ وستكون خاصية التحجيم الزمني لـ DTFT كما يلي :

إذا كانت $z[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{m}\right], & \frac{n}{m} \text{ رقم صحيح} \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$، بالتالي فإن $\left\{\begin{matrix} z[n] \leftrightarrow X(mF) \\ z[n] \leftrightarrow X(e^{jm\Omega}) \end{matrix}\right\}$ المعادلة رقم (٧.٢٠)



شكل رقم (٧.١٤) الإشارات المختلفة التي عندما يتم تقسيمها بالمعامل 2 تعطي الإشارة نفسها

يمكن تفسير هذه النتائج أيضاً على أنها خاصية تحجيم ترددي. افترض ال DTFT التالي: $X(e^{j\Omega})$، وأنه تم تحجيم Ω إلى mΩ حيث m≥1، فإن التأثير في النطاق الزمني سيكون هو إدخال m-1 من الأصفار بين نقاط الإشارة x[n]. التحجيم الوحيد الذي يمكن عمله في النطاق الترددي هو الضغط وبمعامل صحيح فقط. إن ذلك ضروري؛ لأن كل الـ DTFT يجب أن تكون له فترة زمنية (ليست بالضرورة دورة أساسية) مقدارها 2π في **Ω**.

مثال ٧.٤

المعادلة العامة للـ DTFT لصدمة دورية

بمعلومية زوج الـ DTFT $1 \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 2\pi\delta_{2\pi}(\Omega)$ وباستخدام خاصية التقسيم الزمني لإيجاد المعادلة العامة للـ DTFT للـ $\delta_{N_0}[n]$.

الثابت 1 يمكن التعبير عنه بأنه $\delta_1[n]$. الصدمة الدورية $\delta_{N_0}[n]$ هي صورة محجمة زمنياً من $\delta_1[n]$ محجمة بالمقدار N_0. بمعنى :

$$\delta_{N_0}[n] = \begin{cases} \delta_1[\frac{n}{N_0}], & \frac{n}{N_0} \text{ رقم صحيح} \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

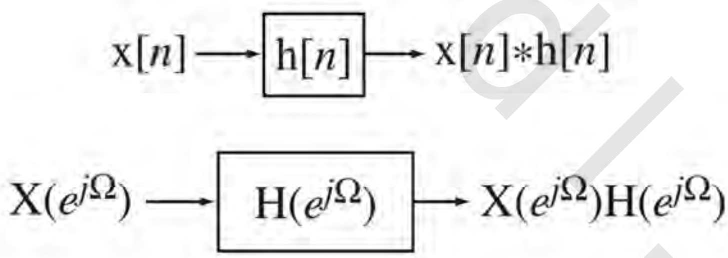
ولذلك فمن (٧.٢٠) يمكن كتابة :

$$\delta_{N_0}[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 2\pi\delta_{2\pi}(N_0\Omega) = (\frac{2\pi}{N_0})\delta_{2\pi/N_0}(\Omega)$$

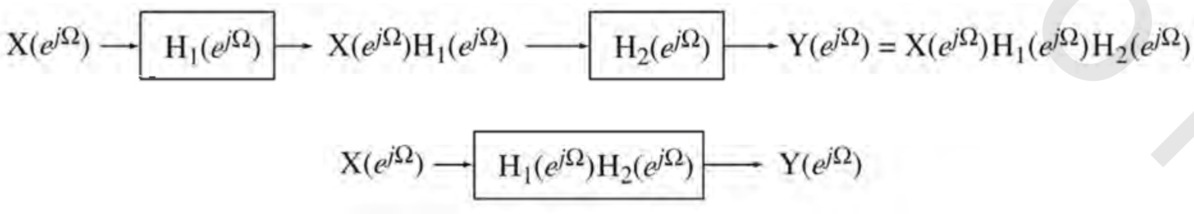
إن انعكاسات ازدواجية الضرب والالتفاف في تحليل الإشارات والأنظمة ستكون كما هي بالنسبة للإشارات والأنظمة المتقطعة زمنياً كما كانت في حالة الإشارات والأنظمة المستمرة زمنياً. إستجابة أي نظام هي التفاف الإثارة واستجابة الصدمة لهذا النظام. العبارة المكافئة لذلك في النطاق الترددي هي أن DTFT لاستجابة النظام تساوي حاصل ضرب DTFT للإثارة والاستجابة الترددية للنظام، والتي هي DTFT لاستجابة الصدمة لهذا النظام كما في شكل (٧.١٥).

انعكاسات ذلك على التوصيلات المتوالية للأنظمة ستكون كما هي وكما هو مبين في شكل (٧.١٦). إذا كانت الإثارة جيبية وعلى الصورة $x[n]=A\cos(2\pi n/N_0+\theta)$ فإنه يمكن كتابة :

$$X(e^{j\Omega}) = \pi A[\delta_{2\pi}(\Omega - \Omega_0) + \delta_{2\pi}(\Omega + \Omega_0)]e^{j\theta\Omega/\Omega_0}$$



شكل رقم (٧.١٥) التكافؤ بين الالتفاف في النطاق الزمني والضرب في النطاق الترددي.



شكل رقم (٧.١٦) التوصيل المتوالي للأنظمة

حيث $\Omega_0=2\pi/N_0$. وبالتالي يمكننا كتابة ما يلي :

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})x\,\pi A[\delta_{2\pi}(\Omega-\Omega_0)+\delta_{2\pi}(\Omega+\Omega_0)]e^{j\theta\Omega/\Omega_0}$$

باستخدام خاصية التكافؤ للصدمة ، وخاصية الدورية للـ DTFT ، وخاصية الترافق للـ CTFT يمكن كتابة ما يلي :

$$Y(e^{j\Omega}) = \pi A[H(e^{j\Omega_0})\delta_{2\pi}(\Omega-\Omega_0)+H(e^{-j\Omega_0})\delta_{2\pi}(\Omega+\Omega_0)]e^{j\theta\Omega/\Omega_0}$$

$$Y(e^{j\Omega}) = \pi A\left\{\begin{matrix} Re\left(H(e^{j\Omega_0})\right)[\delta_{2\pi}(\Omega-\Omega_0)+\delta_{2\pi}(\Omega+\Omega_0)] \\ +jIm\left(H(e^{j\Omega_0})\right)[\delta_{2\pi}(\Omega-\Omega_0)-\delta_{2\pi}(\Omega+\Omega_0)]\end{matrix}\right\}e^{j\theta\Omega/\Omega_0}$$

$$y[n] = A\left[Re\left(H(e^{j\Omega_0})\right)\cos\left(\frac{2\pi n}{N_0}+\theta\right)-Im\left(H(e^{j\Omega_0})\right)sin\left(\frac{2\pi n}{N_0}+\theta\right)\right]$$

$$y[n] = A|H(e^{j2\pi/N_0})|\cos\left(\frac{2\pi n}{N_0}+\theta+\measuredangle H(e^{j2\pi/N_0})\right)$$

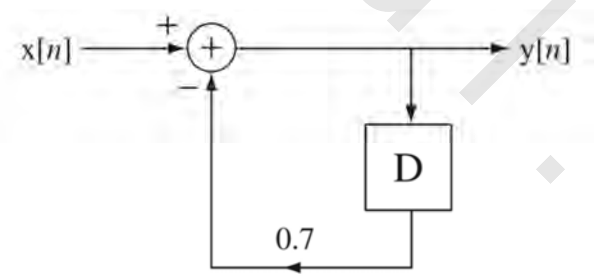
مثال ٧.٥

الاستجابة الترددية لأي نظام

ارسم مقدار وزاوية الاستجابة الترددية للنظام الموضح في شكل (٧.١٧). إذا تمت إثارة النظام بالإشارة $x[n]=\sin(\Omega_0 n)$ ، فأوجد وارسم استجابة النظام y[n] عندما $\Omega_0=\pi/4, \pi/2, 3\pi/4$.

المعادلة الفرقية التي تصف النظام هي: $y[n]+0.7y[n-1]=x[n]$ واستجابة الصدمة للنظام ستكون $h[n]=(-0.7)^n u[n]$. الاستجابة الترددية هي تحويل فورير لاستجابة الصدمة. لذلك يمكننا استخدام زوج التحويل DTFT التالي :

$$\alpha^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$$



شكل رقم (٧.١٧) نظام متقطع زمنياً

للحصول على :

$$h[n] = (-0.7)^n u[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1+0.7e^{-j\Omega}}$$

حيث إن الاستجابة الترددية تكون دورية في Ω بدورة مقدارها 2π ، فإن المدى $-\pi\leq\Omega<\pi$ سيبين كل سلوك الاستجابة الترددية. عندما Ω=0 فإن الاستجابة الترددية ستكون $H(e^{j0}) = 0.5882$. وعندما Ω=±π فإن الاستجابة الترددية ستكون $H(e^{\pm j\pi}) = 3.333$. وعندما $\Omega=\Omega_0$ فإن الاستجابة ستكون :

$$y[n] = \left|H(e^{j\Omega_0})\right| \sin\left(\Omega_0 n + \measuredangle H(e^{j\Omega_0})\right)$$

انظر شكل (٧.١٨).

مثال ٧.٦

احسب طاقة الإشارة للإشارة التالية : x[n]=(1/5)sinc(n/100).

طاقة الإشارة لأي إشارة تعرف كما يلي :

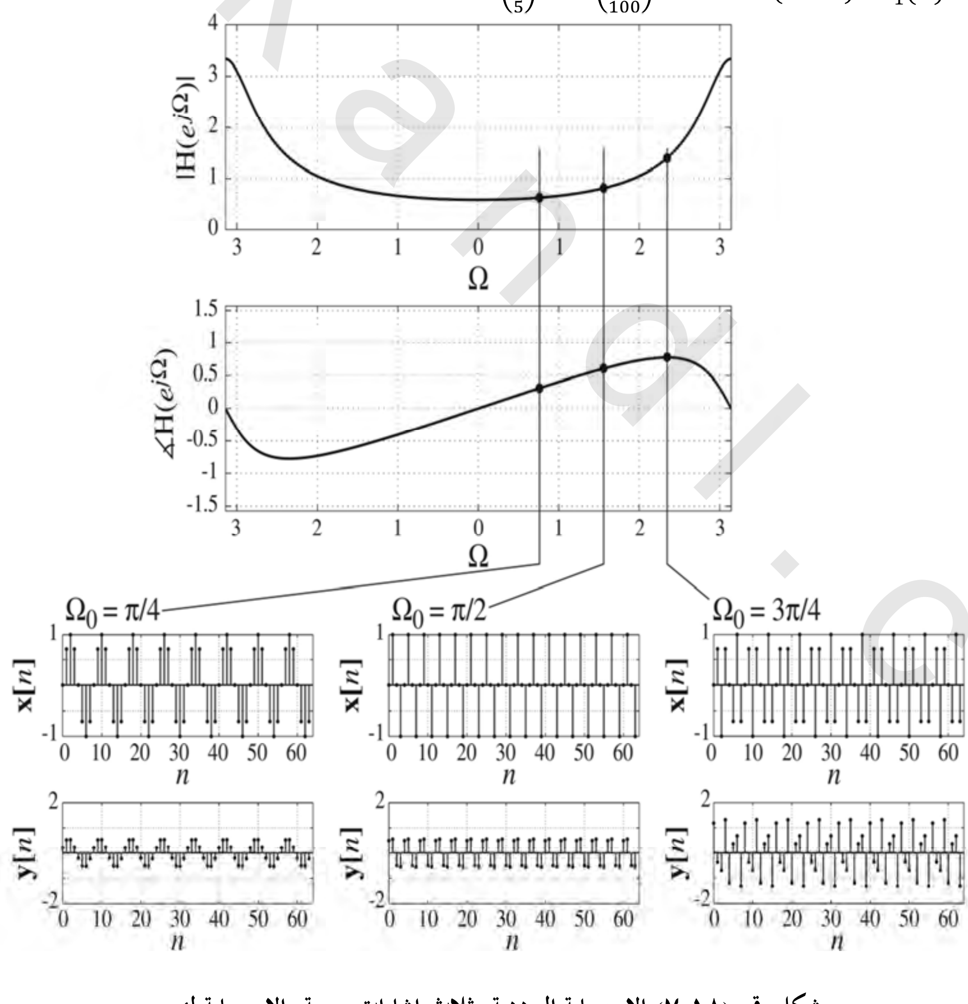
$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

ولكن يمكننا تجنب إجراء المجموع غير المحدود المعقد عن طريق استخدام نظرية بارسيفال. يمكن حساب الـ DTFT للإشارة x[n] عن طريق البدأ بزوج تحويل فورير التالي :

$$sinc\left(\frac{n}{w}\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} wrect(wF) * \delta_1(F)$$

وتطبيق خاصية الخطية لنحصل على المعادلة التالية :

$$\left(\frac{1}{5}\right) sinc\left(\frac{n}{100}\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 20\, rect(100F) * \delta_1(F)$$



شكل رقم (٧.١٨) الاستجابة الترددية وثلاث إشارات جيبية والاستجابة لهم

مثال ٧.٦

طاقة الإشارة لإشارة السنك sinc

تقول نظرية بارسيفال ما يلي :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \int_{1} |X(F)|^2 \, dF$$

وبالتالي ستكون طاقة الإشارة كما يلي :

$$E_x = \int_{1} |20rect(100F) * \delta_1|^2 \, dF = \int_{-\infty}^{\infty} |20rect(100F)|^2 \, dF$$

أو :

$$E_x = 400 \int_{-1/200}^{1/200} dF = 4$$

مثال ٧.٧

تحويل DTFT العكسي للمستطيل المتكرر دوريا

أوجد DTFT العكسي لـ $X(F)=rect(wF)*\delta_1(F)$ ، حيث w>1 باستخدام تعريف DTFT.

$$x[n] = \int_{1} X(F)e^{j2\pi Fn} \, dF = \int_{1} rect(\mathrm{w}F) * \delta_1(F)e^{j2\pi Fn} \, dF$$

حيث إنه يمكننا اختيار إجراء التكامل على أي فترة في F يكون عرضها واحداً ، ودعنا نختار الأسهل :

$$x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} rect(\mathrm{w}F) * \delta_1(F)e^{j2\pi Fn} \, dF$$

في هذه الفترة التكاملية ، يوجد هناك مستطيل واحد بعرض مقداره 1/w (لأن w>1) وبالتالي :

$$x[n] = \int_{-1/2\mathrm{w}}^{1/2\mathrm{w}} e^{j2\pi Fn} \, dF = 2\int_{0}^{1/2\mathrm{w}} \cos(2\pi Fn) \, dF = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{\mathrm{w}}\right)}{\pi n} = \frac{1}{\mathrm{w}} sinc\left(\frac{n}{\mathrm{w}}\right)$$ المعادلة رقم (٧.٢١)

من هذه النتيجة يمكننا الحصول زوج DTFT الكثيرة الاستخدام (والتي تظهر في جدول أزواج DTFT) التالية :

$$sinc\left(\frac{n}{\mathrm{w}}\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} w\, rect(\mathrm{w}\omega F) * \delta_1(F), \quad \mathrm{w} > 1$$

أيضاً :

$$sinc\left(\frac{n}{\mathrm{w}}\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \mathrm{w} \sum_{k=-\infty}^{\infty} rect\big(\mathrm{w}(F-k)\big), \quad \mathrm{w} > 1$$

أو في شكل التقدير الزاوي ، وباستخدام خاصية الالتفاف يمكن كتابة :

$$y(t) = x(t) * h(t) \to y(at) = |a|x(at) * h(at)$$

وبذلك نحصل على :

$$sinc\left(\frac{n}{\mathrm{w}}\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} w\, rect\left(\frac{\mathrm{w}\Omega}{2\pi}\right) * \delta_{2\pi}(\Omega), \quad \mathrm{w} > 1$$

وأيضاً:

$$sinc\left(\frac{n}{\mathrm{w}}\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \mathrm{w} \sum_{k=-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{\mathrm{w}(\Omega - 2\pi k)}{2\pi}\right), \quad \mathrm{w} > 1$$

(على الرغم من أن هذه الأزواج لتحويل فورير تم استنتاجها بفرض أن w>1 لجعل التكامل الانعكاسي في المعادلة (٧.٢١) أبسط، إلا أنها تكون صحيحة أيضاً عندما w≤1).

الحساب العددي لتحويل فورير في الزمن المتقطع

تحويل فورير في الزمن المتقطع DTFT تم تعريفه بالمعادلة $X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi Fn}$، وتم تعريف تحويل فورير المتقطع DFT بالمعادلة $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}$. إذا كانت الإشارة x[n] سببية ومحددة زمنياً، فإن المجموع في ال DTFT يكون على مدى محدود من قيم n بدءا من n=0. يمكننا وضع قيمة N عن طريق جعل N-1 تكون آخر قيمة ل n تغطي هذا المدى المحدود. وبالتالي فإن:

$$X(F) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

إذا جعلنا الآن التغير في المتغير F→k/N فإنه يمكننا كتابة ما يلي:

$$X_{F\to k/N} = X\left(\frac{k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} = X[k]$$

أو بالتقدير الزاوي ستكون على الصورة:

$$X(e^{j\Omega})_{\Omega\to 2\pi k/N} = X\left(e^{j2\pi k/N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} = X[k]$$

وعلى ذلك فإن الـ DTFT للإشارة x[n] يمكن حسابه من الـ DFT للإشارة x[n] عند مجموعة من الترددات المتقطعة F=k/N، أو بالتوازي Ω=2πk/N، حيث K أي قيمة ثابتة. إذا أردنا زيادة التحديدة لهذه الترددات المتقطعة، فإنه يمكننا أن نجعل N أكبر. القيم الإضافية ل x[n] المقابلة للقيمة المزادة من N ستكون أصفاراً كلها. هذه الطريقة لزيادة تحديدية النطاق الترددي تسمى الإلحاق بالأصفار.

DTFT العكسي يتم تعريفه بالمعادلة التالية:

$$x[n] = \int_{1} X(F)e^{j2\pi Fn}dF$$

وأما DFT العكسي فيعرف بالمعادلة التالية:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi Fn}$$

يمكن تقريب DTFT العكسي بمجموع N من التكاملات التي مع بعضها تقارب تكامل DTFT العكسي.

$$x[n] \cong \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k/N}^{(k+1)/N} X[k/N] e^{j2\pi Fn} dF = \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{k}{N}\right) \int_{k/N}^{(k+1)/N} e^{j2\pi Fn}\, dF$$

$$X[n] \cong \sum_{k=0}^{N-1} X(\mathrm{k/N}) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j2\pi(k+1)n/N}} - \mathrm{e}^{\mathrm{j2\pi k/N}}}{j2\pi n} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j2\pi k/N}} - 1}{j2\pi n} \sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{N-1}} \mathrm{X(k/N)e^{j2\pi kn/N}}$$

$$X[n] \cong \mathrm{e}^{\mathrm{j\pi k/N}} \frac{\mathrm{j2sin(\pi n/N)}}{j2\pi n} \sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{N-1}} \mathrm{X(k/N)e^{j2\pi kn/N}} = \mathrm{e}^{\mathrm{j\pi k/N}} sinc(\pi/\mathrm{N}) \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{\mathrm{k=0}}^{\mathrm{N-1}} \mathrm{X(k/N)e^{j2\pi kn/N}}$$

لقيم n<<N فإن :

$$x[n] \cong \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{k}{N}\right) e^{j2\pi kn/N}$$

أو في التردد الزاوي كالتالي :

$$x[n] \cong \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{j2\pi kn/N}\right) e^{j2\pi kn/N}$$

وهذا يمثل DFT العكسي مع :

$$X[k] = X(e^{j\Omega})_{\Omega \to 2\pi k/N} = X\left(e^{j2\pi k/N} \right) \quad \text{أو} \quad X[k] = X(F)_{F \to k/N} = X\left(\frac{k}{N}\right)$$

مثال ٧.٨

DTFT العكسي باستخدام DFT

احسب DTFT العكسي التقريبي للمعادلة :

$$X(F) = \left[rect\left(50\left(F - \frac{1}{4}\right)\right) + rect\left(50\left(F + \frac{1}{4}\right)\right)\right] * \delta_1(F)$$

باستخدام DFT.

```
N = 512 ; % X(F)عدد النقاط التي ستقارب
k = [0:N-1]' ; % الأرقام التوافقية
% حساب العينات من
% X(F)
% بين الصفر والواحد بافتراض التكرار الدوري بدورة مقدارها ١
X = rect(50*(k/N - 1/4)) + rect(50*(k/N - 3/4)) ;
% حساب تحويل فورير في الزمن المتقطع العكسي التقريبي
% n=0 ومركز الدالة عند
xa = real(fftshift(ifft(X))) ;
n = [-N/2:N/2-1]' ; % متجه الأزمنة المتقطعة للرسم
```

حساب إشارة الدخل من تحويل فورير العكسي في الأزمنة المتقطعة %

```
xe = sinc(n/50).*cos(pi*n/2)/25 ;
```

رسم تحويل فورير العكسي في الأزمنة المتقطعة %

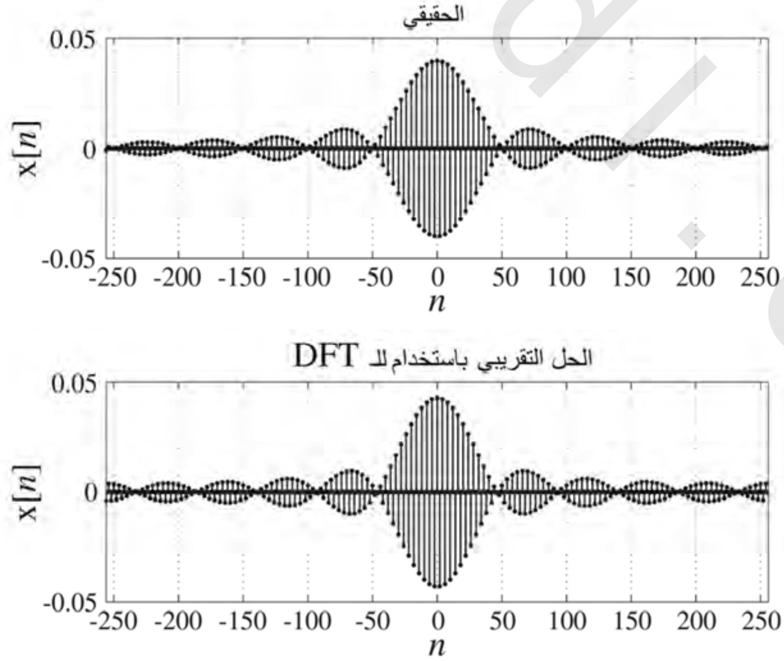
```
subplot(2,1,1) ; p = stem(n,xe,'k','fi lled') ; set(p,'LineWidth',1,
'MarkerSize',2) ;
axis([-N/2,N/2,-0.05,0.05]) ; grid on ;
xlabel('\itn','FontName','Times','FontSize',18) ;
ylabel('x[{\itn}]','FontName','Times','FontSize',18) ;
title('Exact','FontName','Times','FontSize',24) ;
```

رسم تحويل فورير العكسي التقريبي في الأزمنة المتقطعة %

```
subplot(2,1,2) ; p = stem(n,xa,'k','fi lled') ; set(p,'LineWidth',1,
'MarkerSize',2) ;
axis([-N/2,N/2,-0.05,0.05]) ; grid on ;
xlabel('\itn','FontName','Times','FontSize',18) ;
ylabel('x[{\itn}]','FontName','Times','FontSize',18) ;
title('Approximation Using the DFT','FontName','Times','FontSize',
24) ;
```

نتائج تحويل فورير العكسي الكامل والتقريبي في الأزمنة المتقطعة موضحة في شكل (٧.١٩). لاحظ أن من x[n] الحقيقية والتقريبية يكونان منطبقين عمليا بالقرب من n=0 ولكنهما يختلفان بالقرب من n=±256. يحدث ذلك نتيجة أن النتائج التقريبية تكون دورية ويتسبب التعدي المتكرر دورياً للدالة سنك في هذه الأخطاء بالقرب من موجب أو سالب نصف الدورة.

يوضح مثال ٧.٩ مشكلة تحليلية شائعة ونوعاً مختلفاً من الحلول.



شكل رقم (٧.١٩) تحويل فورير العكسي في الزمن المتقطع DTFT الحقيقي والتقريبي للدالة X(F)

مثال ٧.٩

استجابة النظام باستخدام DTFT و DFT

نظام له الاستجابة الترددية التالية: $H(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-0.7}$ وتمت إثارته بالإشارة التالية: x[n]=tri((n-8)/8). احسب استجابة النظام.

الـ DTFT للإثارة هي: $X(e^{j\Omega}) = 8drcl^2\left(\frac{\Omega}{2\pi},8\right)e^{-j8\Omega}$. وعلى ذلك فإن الـ DTFT للاستجابة ستكون:

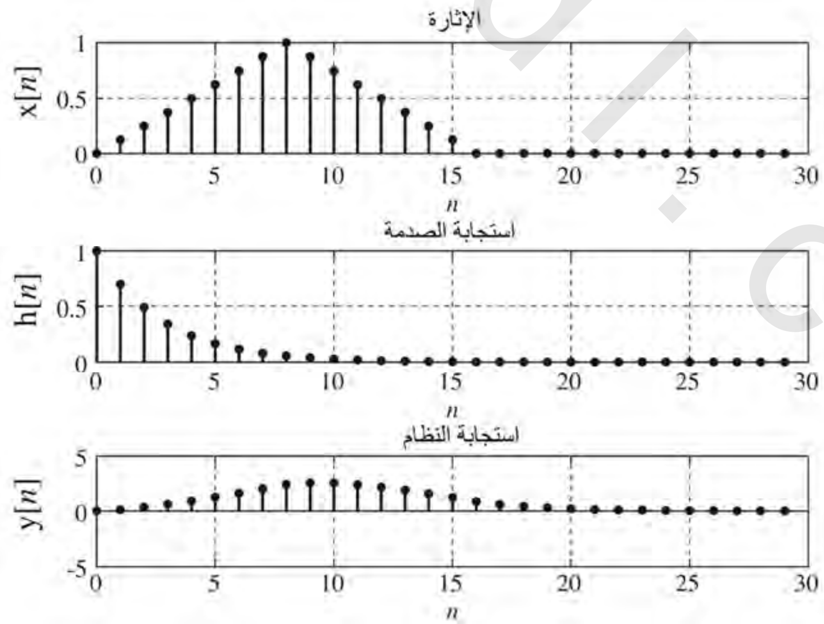
$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-0.7}\ x\ 8drcl^2\left(\frac{\Omega}{2\pi},8\right)e^{-j8\Omega}$$

ونحن هنا نواجه مشكلة. كيف سنحسب ال DTFT العكسي لـ $Y(e^{j\Omega})$ ؟ للحصول على حل تحليلي قد يكون من الأسهل في هذه الحالة أن نجري الالتفاف في النطاق الزمني عن استخدام التحويل بهذه الطريقة. ولكن هناك طريقة أخرى. من الممكن استخدام DFT العكسي للحصول على تقريب للـ DTFT العكسي لـ $Y(e^{j\Omega})$ عدديا.

عند حساب DFT العكسي، فإن عدد قيم y[n] سيكون هو نفسه عدد قيم $Y(e^{j2\pi k/N})$ المستخدم وهو N. لجعل هذا التقريب جيدا فإننا نحتاج أن تكون قيمة N كبيرة بما فيه الكفاية لتغطي المدى الزمني الذي نتوقع أن تكون فيه قيم y[n] مختلفة عن الصفر. الدالة المثلثة لها عرض قاعدة مقداره 16 واستجابة الصدمة للنظام هي $(0.7)^n u[n]$. إن هذه تمثل دالة أسية متناقصة، تقترب، ولكنها لا تصل أبدا، إلى الصفر. إذا استخدمنا العرض الذي تصل إليه القيم حتى ٪1 من قيمتها الابتدائية، فإننا سنحصل على عرض مقداره حوالي 13. حيث إن الالتفاف سيكون مجموع هذين العرضين ناقص واحد، والذي سيحتاج أن تكون N تساوي 28 على الأقل. تذكر أيضاً أن التقريب يعتمد على العلاقة n<<N للحصول على تقريب جيد. ولذلك دعنا نستخدم N=128 في إجراء الحسابات، وبعد ذلك نستخدم منها فقط أول 30 قيمة. برنامج ماتلاب التالي يحسب هذا DTFT العكسي. وبعد ذلك شكل (٧.٢٠) يوضح ثلاثة الأشكال الناتجة من هذا البرنامج.

```
% برنامج لحساب تحويل فورير العكسي في الزمن المتقطع باستخدام معكوس DFT
N = 128 ; % عدد النقاط المستخدمة
k = [0:N-1]' ; % متجه الأرقام التوافقية
n = k ; % متجه الأزمنة المتقطعة
x = tri((n-8)/8) ; % متجه قيم إشارة الإثارة
% حساب تحويل فورير في الزمن المتقطع للإثارة
X = 8*drcl(k/N,8).^2.*exp(-j*16*pi*k/N) ;
% حساب الاستجابة الترددية للنظام
H = exp(j*2*pi*k/N)./(exp(j*2*pi*k/N) - 0.7) ;
```

```
h = 0.7.^n.*uD(n) ; % متجه استجابة الصدمة
Y = H.*X ; % حساب تحويل فورير في الزمن المتقطع للاستجابة
y = real(ifft(Y)) ; n = k ; % متجه قيم استجابة النظام
% رسم الإثارة ، واستجابة الصدمة ، واستجابة النظام
n = n(1:30) ; x = x(1:30) ; h = h(1:30) ; y = y(1:30) ;
subplot(3,1,1) ;
ptr = stem(n,x,'k','fi lled') ; grid on ;
set(ptr,'LineWidth',2,'MarkerSize',4) ;
% xlabel('\itn','FontSize',24,'FontName','Times') ;
ylabel('x[{\itn}]','FontSize',24,'FontName','Times') ;
title('Excitation','FontSize',24,'FontName','Times') ;
set(gca,'FontSize',18,'FontName','Times') ;
subplot(3,1,2) ;
ptr = stem(n,h,'k','fi lled') ; grid on ;
set(ptr,'LineWidth',2,'MarkerSize',4) ;
% xlabel('\itn','FontSize',24,'FontName','Times') ;
ylabel('h[{\itn}]','FontSize',24,'FontName','Times') ;
title('Impulse Response','FontSize',24,'FontName','Times') ;
set(gca,'FontSize',18,'FontName','Times') ;
subplot(3,1,3) ;
ptr = stem(n,y,'k','fi lled') ; grid on ;
set(ptr,'LineWidth',2,'MarkerSize',4) ;
xlabel('\itn','FontSize',24,'FontName','Times') ;
ylabel('y[{\itn}]','FontSize',24,'FontName','Times') ;
title('System Response','FontSize',24,'FontName','Times') ;
set(gca,'FontSize',18,'FontName','Times') ;
```



شكل (٧.٢٠) الإثارة، واستجابة الصدمة، واستجابة النظام

مثال ٧.١٠

استخدام ال DFT لحساب استجابة النظام

مجموعة من العينات التالية :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x[n]	-9	-8	6	4	-4	9	-9	-1	-2	5	6

تم أخذها من تجربة معينة وتمت معالجتها عن طريق مرشح تنعيم استجابة الصدمة له هي : $h[n]=n(0.7)^n u[n]$. أوجد استجابة المرشح y[n].

يمكننا إيجاد DTFT لـ h[n] من الجدول، ولكن x[n] ليست شكلاً معروفاً لدالة من الدوال. لذلك يمكننا حساب تحويل x[n] باستخدام المعادلة المباشرة التالية :

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{10} x[n]e^{-j\Omega n}$$

ولكن ذلك يكون مملا ومضيعا للوقت، وبالطبع إذا كان الجزء الذي لا يساوي الصفر في x[n] كبيراً جداً فإن ذلك يصبح غير عملي على الإطلاق. بدلاً من ذلك يمكننا إيجاد الحل عددياً باستخدام العلاقة المستنتجة مسبقاً لإيجاد DTFT باستخدام الـ DFT كما يلي :

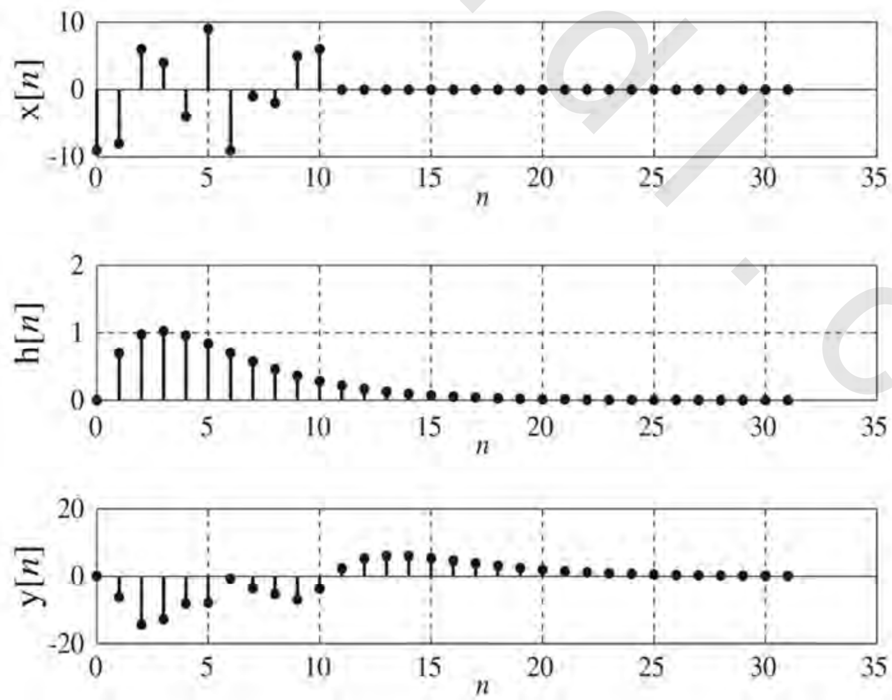
$$X\left(e^{j2\pi k/N}\right) = \sum_{n=0}^{10} x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

هذه المشكلة يمكن حلها أيضاً في النطاق الزمني باستخدام الالتفاف العددي، ولكن هناك سببين لتفضيل استخدام DFT. أولاً، إذا عدد النقاط المستخدمة أحد قوي الرقم ٢، فإن خواريزم الـ fft المستخدم لحساب DFT على الحاسب يكون فعالاً جداً وقد يكون له ميزة عظيمة في الحساب في وقت أقصر من طريقة الالتفاف العددي. ثانيا، فإن استخدام طريقة DFT، فإن التحجيم الزمني للإثارة، واستجابة الصدمة، واستجابة النظام ستكون كلها نفس الشيء، وهذا غير حقيقي عند استخدام الالتفاف العددي في النطاق الزمني.

برنامج ماتلاب التالي يحل هذه المشكلة عددياً باستخدام DFT. شكل (٧.٢١) يبين أشكال الإثارة، واستجابة الصدمة، واستجابة النظام.

```
% برنامج لحساب استجابة نظام متقطع زمنياً باستخدام DFT
N = 32 ; % استخدام ٣٢ نقطة
n = [0:N-1]' ; % المتجه الزمني
% وضع قيم الإثارة
x = [[-9,-8,6,4,-4,9,-9,-1,-2,5,6],zeros(1,21)]' ;
h = n.*(0.7).^n.*uD(n) ; % حساب استجابة الصدمة
```

```
X = fft(x) ; % حساب تحويل فورير المتقطع للإثارة
H = fft(h) ; % حساب تحويل فورير المتقطع لاستجابة الصدمة
Y = X.*H ; % حساب تحويل فورير لاستجابة النظام
y = real(ifft(Y)) ; % استجابة النظام
% رسم الإثارة، واستجابة الصدمة، واستجابة النظام
subplot(3,1,1) ;
ptr = stem(n,x,'k','filled') ; set(ptr,'LineWidth',2,'MarkerSize',4) ;
grid on ;
xlabel('\itn','FontName','Times','FontSize',24) ;
ylabel('x[{\itn}]','FontName','Times','FontSize',24) ;
set(gca,'FontName','Times','FontSize',18) ;
subplot(3,1,2) ;
ptr = stem(n,h,'k','filled') ; set(ptr,'LineWidth',2,'MarkerSize',4) ;
grid on ;
xlabel('\itn','FontName','Times','FontSize',24) ;
ylabel('h[{\itn}]','FontName','Times','FontSize',24) ;
set(gca,'FontName','Times','FontSize',18) ;
subplot(3,1,3) ;
ptr = stem(n,y,'k','filled') ; set(ptr,'LineWidth',2,'MarkerSize',4) ;
grid on ;
xlabel('\itn','FontName','Times','FontSize',24) ;
ylabel('y[{\itn}]','FontName','Times','FontSize',24) ;
set(gca,'FontName','Times','FontSize',18) ;
```



شكل رقم (٧.٢١) الإثارة، واستجابة الصدمة، واستجابة النظام.

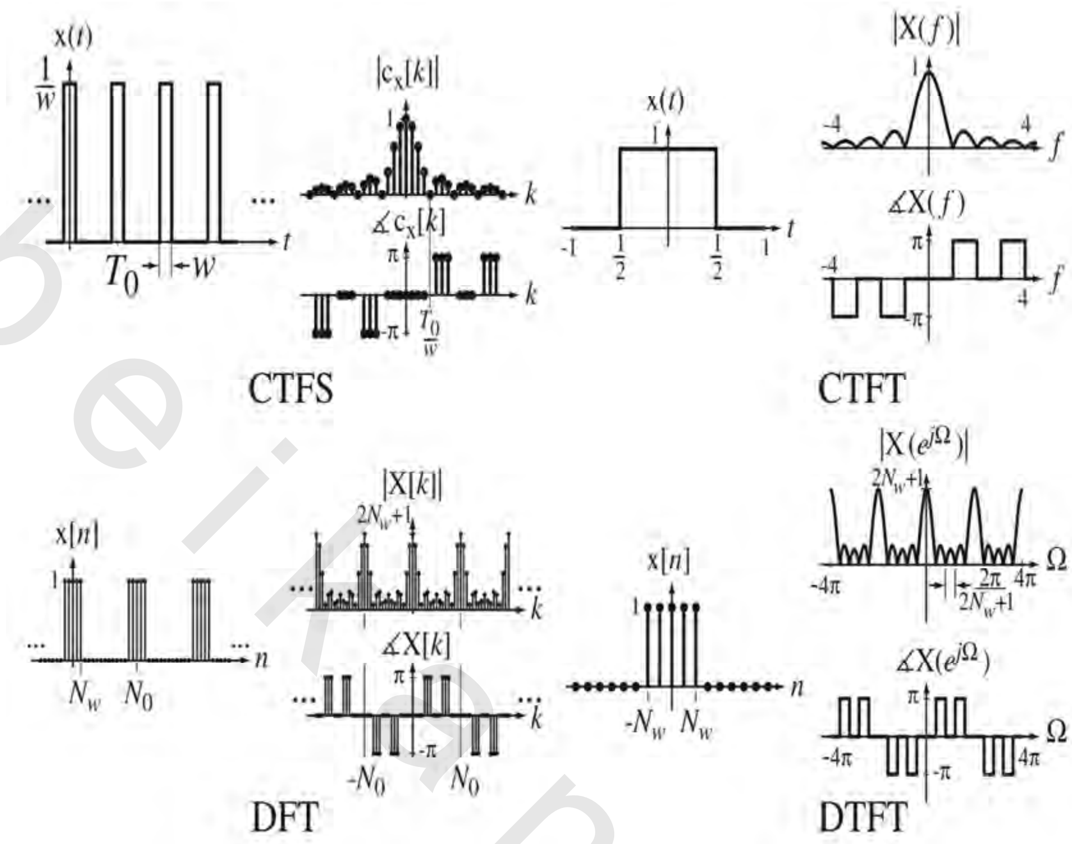
(٧.٤) مقارنات بين طرق فورير

لقد تم اكتمال طرق تحليل فورير بتقديم طريقة تحويل فورير في الزمن المتقطع DTFT. هذه الطرق الأربعة تكون مصفوفة من الطرق للأربع تشكيلات من الزمن المستمر والزمن المتقطع والتردد المستمر والتردد المتقطع (المعبر عنه بالرقم التوافقي) كما في شكل (٧.٢٢).

	تردد مستمر	تردد متقطع
زمن مستمر	CTFT	CTFS
زمن متقطع	DTFT	DFT

شكل رقم (٧.٢٢) مصفوفة طرق فورير.

شكل (٧.٢٣) يبين أربعة مستطيلات أو مستطيلات متكررة دورياً في كل من الزمن المستمر والزمن المتقطع مع تحويل فورير، أو الدوال التوافقية في كل حالة. CTFT لمستطيل واحد مستمر زمنياً يكون عبارة عن دالة سنك وحيدة مستمرة زمنياً. إذا تمت عينة هذا المستطيل ليعطي مستطيلاً واحداً متقطعاً زمنياً، فإن DTFT له يكون مشابهاً لـ CTFT فيما عدا أنه أصبح متكرراً دورياً. إذا تم تكرار المستطيل دورياً، فإن CTFS له يكون مشابها لـ CTFT فيما عدا أنه أصبح الأن معيناً أو متقطعاً في النطاق الترددي (رقم توافقي). إذا كان المستطيل المستمر زمنياً الأصلي متكرراً دورياً ومتقطعاً زمنياً، فإن DFT له يكون أيضاً متكرراً دورياً ومتقطعاً ترددياً. ولذلك، فعلى العموم، فإن التكرار الدوري في نطاق معين، الزمن أو التردد، يقابله تقطيع، أو عينة في النطاق الآخر، التردد، أو الزمن، والتقطيع أو العينة في نطاق معين، الزمن أو التردد، يقابله تكرار ترددي في النطاق الآخر، التردد، أو الزمن. هذه العلاقات ستكون مهمة في الفصل ١٠ عن التقطيع الزمني، أو العينة.



شكل رقم (٧.٢٣) مقارنة لتحويل فورير لأربع إشارات ذات علاقة.

(٧.٥) ملخص النقاط المهمة

١- أي إشارة متقطعة زمنياً ذات أهمية هندسية يمكن التعبير عنها بتتابع فورير في الزمن المتقطع، أو تحويل فورير العكسي المتقطع DFT، وعدد التوافقات المطلوبة في هذا التعبير هو نفسه مثل الدورة الأساسية في التعبير.

٢- الدوال الجيبية المستخدمة في DFT تكون مجموعة من دوال الأساس المتعامدة.

٣- تحويل فورير السريع FFT هو خواريزم على الحاسب لحساب الـ DFT إذا كان زمن التعبير قوة صحيحة للرقم ٢.

٤- يمكن امتداد DFT إلى تحويل فورير في الزمن المتقطع DTFT للإشارات غير الدورية عن طريق جعل زمن التعبير يقترب من الما لانهاية.

٥- عن طريق السماح بالصدمات في التحويلات، يمكن تعميم DTFT ليمكن تطبيقه على بعض الإشارات المهمة.

٦- DFT وDFT العكسي يمكن استخدامهما للتقريب العددي لـ DTFT و DTFT العكسي تحت شروط معينة.

٧- باستخدام جدول لأزواج تحويل فورير في الزمن المتقطع وخواصها، فإن التحويلات الأمامية والعكسية لكل الإشارات المهمة هندسيا يمكن حسابها.

٨- CTFS، و CTFT، و DFT، و DTFT كلها ذات علاقات متقاربة في طرق التحليل للإشارات الدورية، أو غير دورية، المستمرة أو المتقطعة زمنياً.

تمارين مع إجاباتها

(في كل تمرين، تم ترتيب الإجابات بطريقة عشوائية)

التعامد

١- بدون استخدام الآلة الحاسبة، أو الحاسب، احسب الضرب القياسي لما يأتي:

(أ) W_1 و w_{-1}

(ب) w_1 و w_{-2}

(ج) w_{11} و w_{37}

حيث:

$$W_N = e^{j2\pi/N} \quad \text{و} \quad w_k = \begin{bmatrix} W_4^0 \\ W_4^k \\ W_4^{2k} \\ W_4^{3k} \end{bmatrix}$$

لتبين أنها كلها متعامدة.

الإجابة: كل الضرب القياسي يساوي صفراً.

٢- أوجد الإسقاط p للمتجه $x = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \end{bmatrix}$ في اتجاه المتجه $y = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$؟

الإجابة: $18 \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

٣- أوجد الإسقاط p للمتجه $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ في اتجاه المتجه $y = \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ -1 \\ -j \end{bmatrix}$. بعد ذلك احسب DFT للمتجه x وقارن هذه النتيجة مع X[3]y/4؟

الإجابة: $\begin{bmatrix} \frac{1}{4}-j2 \\ 2+\frac{j}{4} \\ -\frac{1}{4}+j2 \\ -2-j/4 \end{bmatrix}$، كلها الشيء نفسه.

تحويل فورير المتقطع

٤- باستخدام معادلة التجميع المباشر احسب دالة DFT التوافقية لـ $\delta_{10}[n]$، حيث N=10 وقارن ذلك مع DFT الموجود في الجدول؟

٥- بدون استخدام الحاسب، احسب DFT الأمامي لتتابع البيانات التالي. بعد ذلك احسب ال DFT العكسي لهذا التتابع وتحقق من أنك قد حصلت على التتابع نفسه؟

$$x[n]_{n=0\to 3} = \{3,4,1,-2\}$$

الإجابة: $X[k]_{k=0\to 3} = \{6, 2-j6, 2, 2+j6\}$

٦- احسب دالة ال DFT التوافقية للإشارة x[n] التي دورتها ٤ والتي لها x[0]=3 و x[1]=1 و x[2]=-5 و x[3]=0 باستخدام ضرب المصفوفات $X=W^Hx$؟

الإجابة: $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 8-j \\ -3 \\ 8+j \end{bmatrix}$

٧- لكل واحدة من الإشارات التالية احسب دالة ال DFT التوافقية على مدى دورة أساسية واحدة وبين أن $X[N_0/2]$ حقيقية:

(أ) $x[n]=(u[n+2]-u[n-3])*\delta_{12}[n]$

(ب) $x[n]=(u[n+3]-u[n-2])*\delta_{12}[n]$

(ج) $x[n]=\cos(14\pi n/16)\cos(2\pi n/16)$

(د) $x[n]=\cos(12\pi n/14)\cos(2\pi(n-3)/14)$

الإجابة:

$$2(2\delta_8[k-4]+\delta_8[k-3]+\delta_8[k+3]),\ 5drcl(k/12.5)e^{j\pi k/6},$$
$$(49/14)(\delta_{14}[k-7]+\delta_{14}[k-5]+\delta_{14}[k+5]+\delta_{14}[k+7])e^{j3\pi k/7}, 5drcl(k/12.5)$$

تعريف تحويل فورير في الزمن المتقطع

٨- من تعريف المجموع، احسب DTFT للدالة:

$$x[n]=10(u[n+4]-u[n-5])$$

وقارن مع جدول الـ DTFT.

٩- من التعريف، استنتج تعريفاً عاماً للشكل Ω لـ DTFT للدوال التي على الصورة:

$$x[n] = \alpha^n \sin(\Omega_0 n)\, u[n], \quad |\alpha| < 1$$ ؟

وقارن مع جدول الـ DTFT.

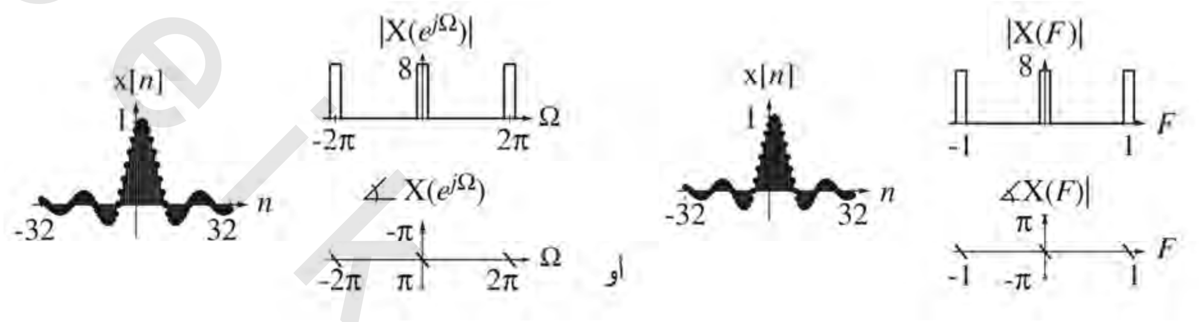
تحويل فورير في الزمن المتقطع الأمامي والعكسي

١٠- إشارة محددة بالمعادلة التالية:

x[n]=sinc(n/8)

ارسم مقدار وزاوية DTFT للإشارة x[n-2].

الإجابة:



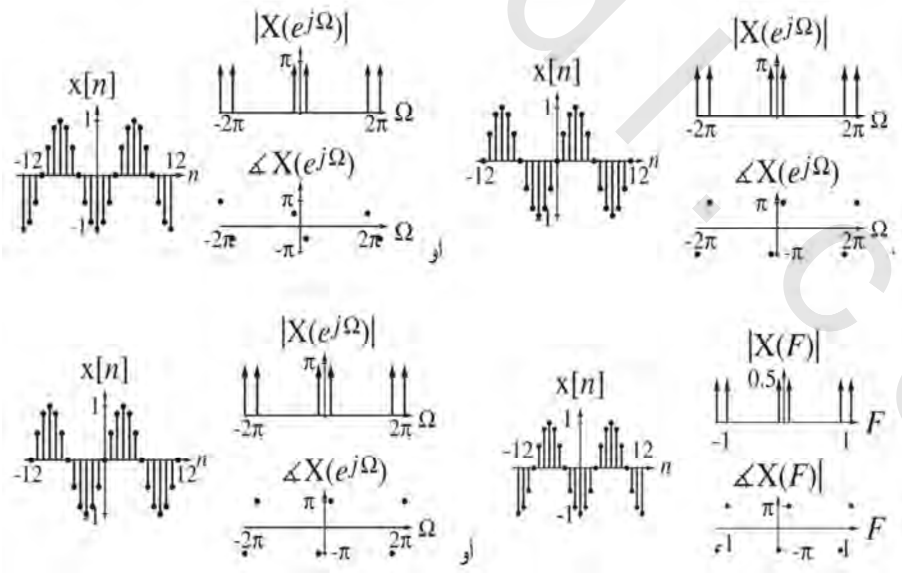
شكل رقم (ج.ت-١٠)

١١- إشارة معرفة بالمعادلة التالية:

x[n]=sin(πn/6)

ارسم مقدار وزاوية الـ DTFT لـ x[n-3] و x[n+12].

الإجابة:



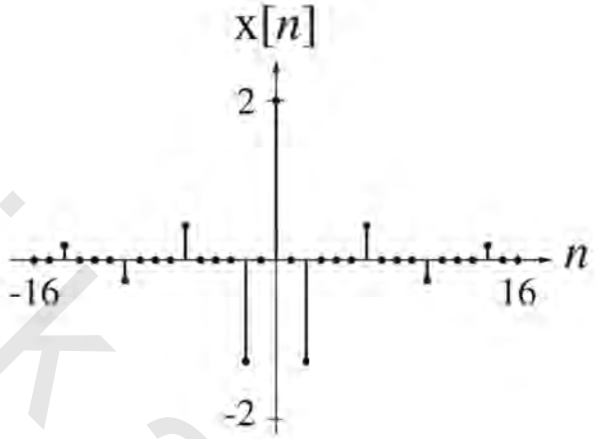
شكل رقم (ج.ت-١١)

١٢- الـ DTFT لإشارة معينة معرف كما يلي:

$$X(e^{j\Omega}) = 4\left[rect\left(\left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\Omega-\frac{\pi}{2}\right)\right) + rect\left(\left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\Omega-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right] * \delta_{2\pi}(\Omega)$$

ارسم x[n].

الإجابة:



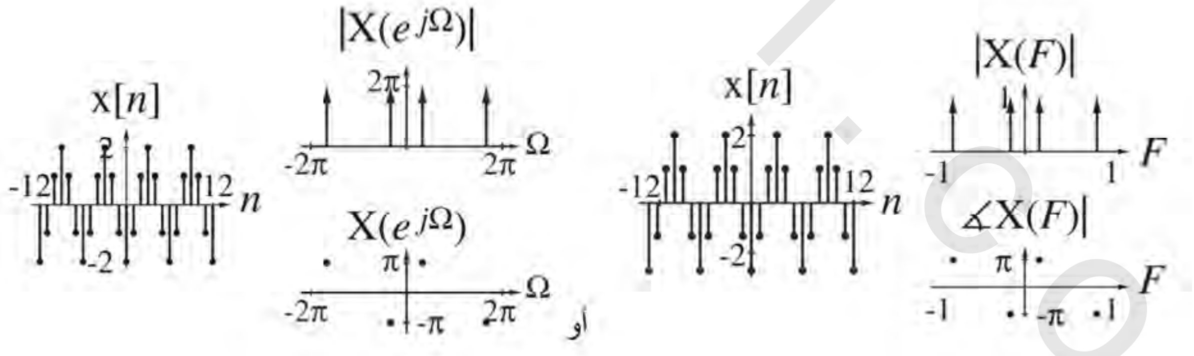
شكل رقم (ج.ت١٢)

١٣- ارسم مقدار وزاوية DTFT للإشارة التالية:

$$x[n] = (u[n+4] - u[n-5]) * \cos\left(\frac{2\pi n}{6}\right)$$

ثم ارسم x[n].

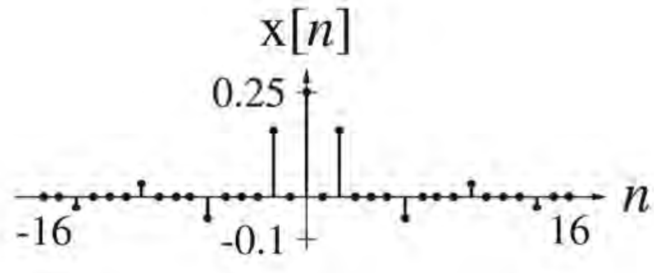
الإجابة:



شكل رقم (ج.ت-١٣)

١٤- ارسم DTFT العكسي للدالة $X(F) = \left(\frac{1}{2}\right)[rect(4F) * \delta_1(F)] \otimes \delta_{1/2}(F)$؟

الإجابة:



شكل رقم (ج.ت–١٤)

١٥- احسب القيم العددية للثوابت في كل مما يأتي:

(أ)

$$A(u[n+W] - u[n-W-1])e^{jB\pi n} \leftrightarrow 10\frac{\sin(5\pi(F+1))}{\sin(\pi(F+1))}$$

أوجد A و W و B.

(ب) $2\delta_{15}[n-3](u[n+3] - u[n-4]) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} Ae^{jB\Omega}$ أوجد A و B.

(ج) $\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n+2] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{Ae^{jB\Omega}}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$ أوجد A و B و α.

(د) $4sinc\left(\frac{n}{10}\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} A\, rect(BF) * \delta_1(F)$ احسب A و B

الإجابة: 2, -2, -3, 10, 2/3, 2, 4, 40, 10, 9/4

١٦- أوجد القيم العددية للدوال التالية:

(أ) $x[n] = 4\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n], \quad X(e^{j\Omega})|_{\Omega=\pi}$

(ب) $x[n] = 2(u[n+1] - u[n-6]), \quad X(e^{j\Omega})|_{\Omega=\pi/4}$

(ج) $x[2]$ $X(F) = [rect(10F) * \delta_1(F)] \otimes \left(\frac{1}{2}\right)\left[\delta_1\left(F - \frac{1}{4}\right) + \delta_1\left(F + \frac{1}{4}\right)\right]$

الإجابة: -0.09355, 2.4, -j2

١٧- باستخدام خاصية الفرق لـ DTFT وزوج التحويل التالي:

$$Tri(n/2) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1+\cos(2\pi F)$$

احسب DTFT للدالة $(1/2)(\delta[n+1]+\delta[n]-\delta[n-1]-\delta[n-2])$.قارنها مع تحويل فورير من الجدول؟

١٨- باستخدام نظرية بارسيفال، احسب طاقة الإشارة التالية:

$x[n]=sinc(n/10)\sin(2\pi n/4)$ ؟

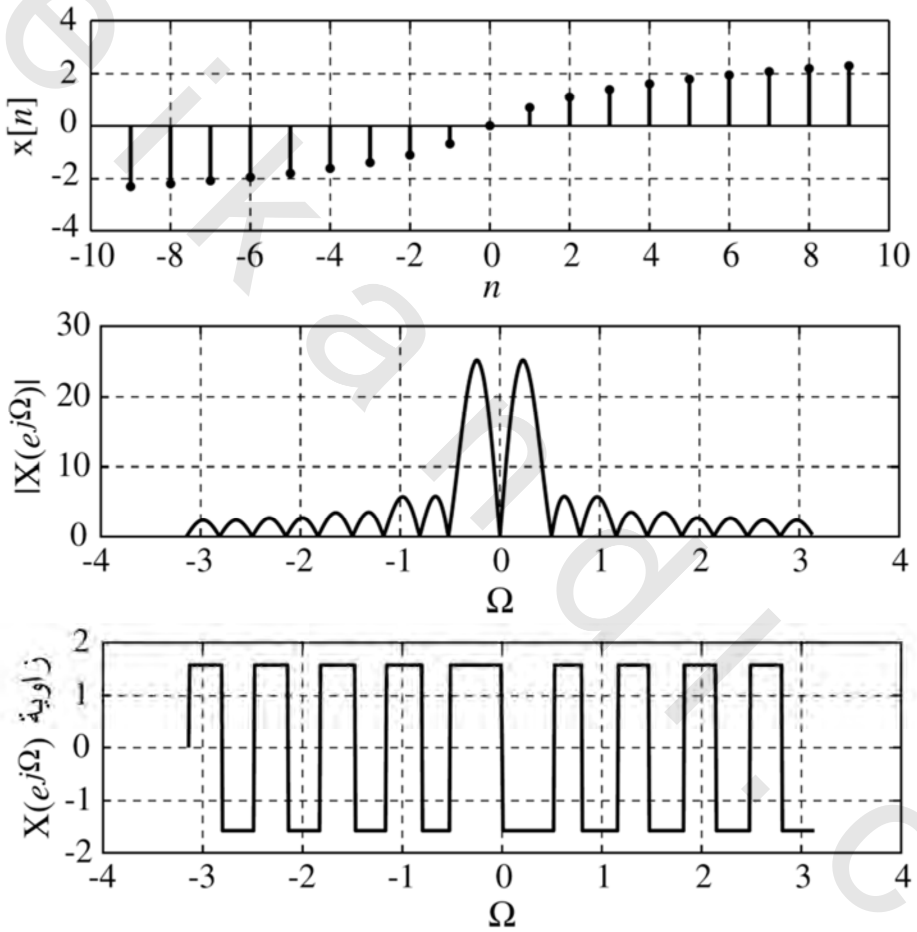
الإجابة: 5

١٩- إشارة موصوفة بالمعادلة التالية:

$$x[n] = \begin{cases} \ln(n+1), & 0 \le n < 10 \\ -lin(-n+1), & -10 < n < 0 \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

ارسم مقدار وزاوية DTFT لهذه الدالة على المدى $-\pi \le \Omega < \pi$؟

الإجابة:



شكل رقم (ج.ت-١٩)

تمارين بدون إجابات

تحويل فورير المتقطع

٢٠- افترض زوج التحويل التالي: $(u[n]-u[n-5]) * \delta_8[n] \xleftrightarrow[8]{\mathcal{DFT}} 5e^{-j\pi k/2} drcl\left(\frac{k}{8,5}\right)$ أوجد دالة DFT التوافقية للإشارة نفسها ولكن باستخدام 16 نقطة بدلاً من 8. بعد ذلك اكتب DFT العكسي في صورة

مجموع، وباستخدام ماتلاب، ونفذ المجموع الحقيقي وارسم النتيجة لتبين أن التغير في خاصية الدورة تكون صحيحة؟

٢١- دالة x[n] متقطعة زمنياً ودورية بدورة مقدارها 8. دورة من دالة DFT التوافقية لها هي:

$$\{X[0],\dots,X[7]\} = \{3, 4+j5, -4-j3, 1+j5, -4, 1-j5, -4+j3, 4-j5\}$$

(أ) ما هي القيمة المتوسطة لـ x[n] ؟

(ب) ماهي طاقة الإشارة لـ x[n] ؟

(ج) هل x[n] زوجية أم فردية أم لا فردية ولا زوجية ؟

٢٢- إذا كانت $x_1[n]=10\cos(2\pi n/8) \leftrightarrow X_1[k]$ و $x_2[n] \leftrightarrow X_1[k]$، احسب القيم العددية لكل من $x_2[2]$ و $x_2[4]$ و $x_2[8]$ و $x_2[204]$؟

٢٣- إشارة x(t) تمت عينتها ٤ مرات وكانت العينات كالتالي {x[0], x[1], x[2], x[3]}. دالة ال DFT التوافقية هي {X[0], X[1], X[2], X[3]} و X[3] يمكن كتابتها كالتالي:

X[3]=ax[0]+bx[1]+cx[2]+dx[3]

أوجد قيم كل من a و b و c و d ؟

تحويل فورير العكسي المتقطع الأمامي والعكسي

٢٤- احسب DTFT لكل من الإشارات التالية:

(أ) $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]$

(ب) $x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-2]$

(ج) $x[n] = sinc\left(\frac{2\pi n}{8}\right) * sinc\left(\frac{2\pi(n-4)}{8}\right)$

(د) $x[n] = sinc^2\left(\frac{2\pi n}{8}\right)$

٢٥- ارسم DTFT العكسي لكل من الدوال التالية:

(أ) $X(F) = \delta_1(F) - \delta_1\left(F-\frac{1}{2}\right)$

(ب) $X(e^{j\Omega}) = j2\pi\left[\delta_{2\pi}\left(\Omega+\frac{\pi}{4}\right) - \delta_{2\pi}\left(\Omega-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

(ج) $X(e^{j\Omega}) = 2\pi\left[\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\Omega-\frac{3\pi}{8}\right) + \delta\left(\Omega-\frac{5\pi}{8}\right)\right] * \delta_{2\pi}(2\Omega)$؟

٢٦- الإشارة x[n] لها DTFT التالي: $X(F)=10\mathrm{sinc}(5F)*\delta_1(F)$، فما هي طاقة هذه الإشارة؟

٢٧- الإشارة x[n] لها DTFT التالي:

$$X(e^{j\Omega}) = 2\pi\left[\delta_{2\pi}\left(\Omega-\frac{\pi}{2}\right) + \delta_{2\pi}\left(\Omega+\frac{\pi}{2}\right) + j\delta_{2\pi}\left(\Omega+\frac{2\pi}{3}\right) - j\delta_{2\pi}\left(\Omega-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

فما هي الدورة الأساسية N_0 للإشارة x[n] ؟

٢٨- الـ DTFT للإشارة $x[n]=2\delta[n+3]-3\delta[n-3]$ يمكن التعبير عنه بالصورة $X(F)=A\sin(bF)+Ce^{dF}$. احسب القيم العددية لكل من A و b و C و d؟

٢٩- افترض $x[n]$ أي إشارة، وافترض $y[n]=\sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$. إذا كانت $Y(e^{j\Omega})=\cos(2\Omega)$، وكانت $x[n]$ تتكون من تماماً من أربع صدمات. ما هي القيمة العددية لهذه الصدمات ومواضعها؟

٣٠- إشارة $x[n]=4\cos(2\pi n/15)+2\cos(2\pi n/9)$ تثير نظاماً استجابته الصدمية هي $h[n]=u[n+N_w]-u[n-N_w-1]$. عندما $N_w=22$ تكون استجابة النظام $y[n]$ تساوي صفراً. استجابة النظام تكون صفراً أيضاً عند بعض القيم العالية للـ N_w. أوجد أصغر قيمة عددية صحيحة تالية لـ N_w أكبر من ٢٢ التي تجعل الاستجابة تساوي صفر. (ملاحظة: أصفار ال drcl(F,N) تحدث عندما تكون F مضاعفاً صحيحاً لـ 1/N، إلا عندما تكون F نفسها رقماً صحيحاً).

٣١- في شكل (ت- ٣١) توجد بعض الإشارات المرقمة من ١ حتى ١٤. يوجد أسفلهم رسومات لمقدار بعض تحويلات DTFT. لكل رسم لمقدار DTFT، حدد الإشارة المقابلة له:

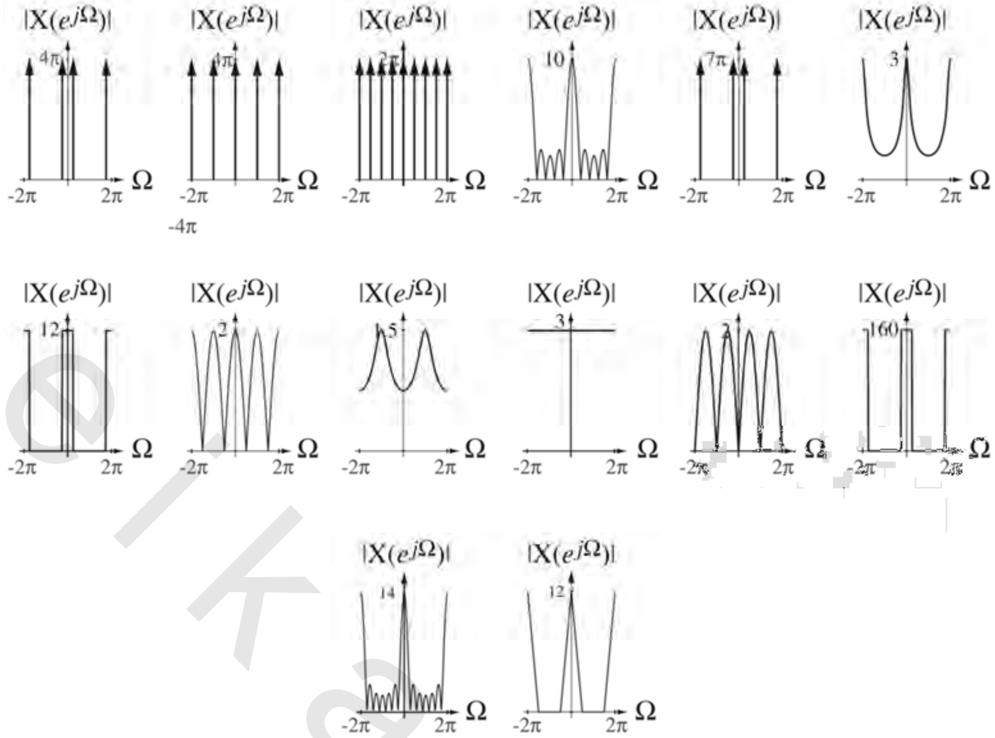
1. $3sinc(n)$ 2. $5sinc(n/4)*2sinc(n/4)$ 3. $7cos(2\pi n/8)$

4. $\delta[n+1]-\delta[n-1]$ 5. $3sinc(n/4)$ 6. $4sin(2\pi n/8)$

7. $(2/3)^n\ u[n]$ 8. $2(u[n-1]-u[n-6])$ 9. $4\delta_4[n]$

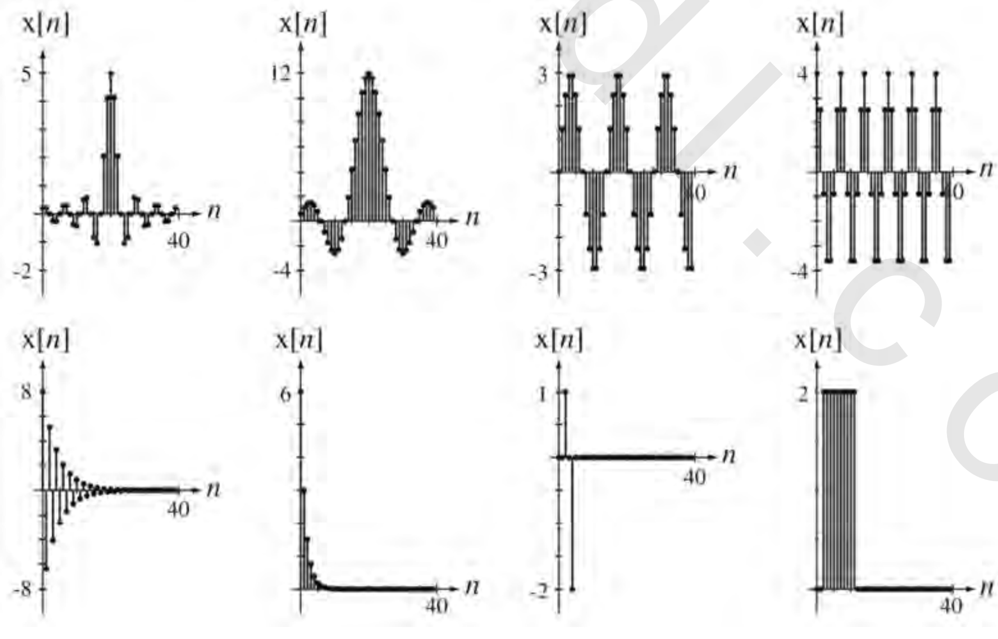
10. $-4\delta_2[n]$ 11. $-3sinc^2(n/4)$ 12. $\delta[n+1]+\delta[n-1]$

13. $2(u[n]-u[n-7])$ 14. $(-1/3)^n\ u[n]$

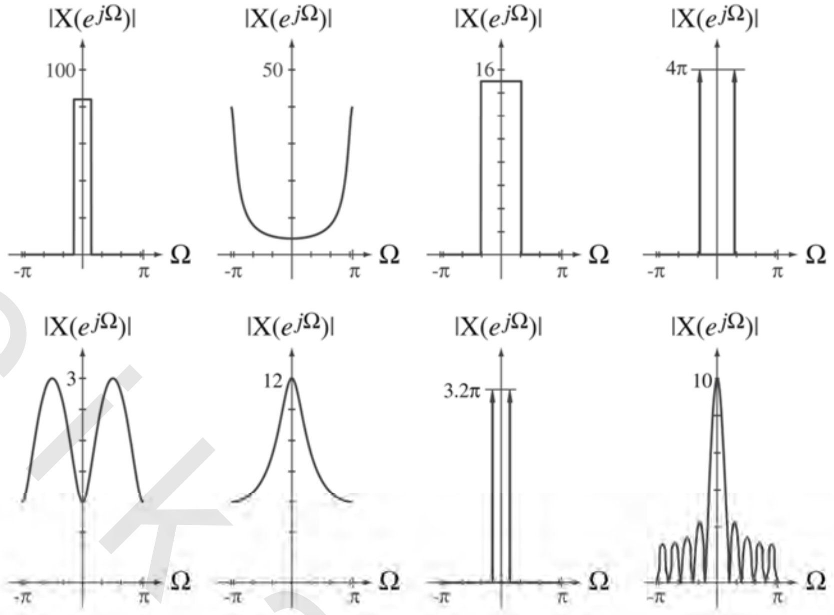


شكل رقم (ت-٣١)

٣٢- في شكل (ت- ٣٢أ) بعض الإشارات المتقطعة زمنياً. في شكل (ت- ٣٢ب) رسومات لبعض تحويلات DTFT. لكل رسم لمقدار DTFT حدد الإشارة المقابلة :



شكل رقم (ت-٣٢أ)



شكل رقم (ت–٣٢ب)

٣٣- احسب DTFT العكسي عددياً باستخدام DFT لدالة، دورتها يمكن وصفها كما يلي: $X(e^{j\Omega}) = \sqrt{\pi^2 - \Omega^2}$ حيث $-\pi<\Omega<\pi$، . ارسم هذه الدالة مع الزمن المتقطع n.