

تحويل لابلاس

(٨.١) المقدمة والأهداف

يعتبر تحويل فورير في الزمن المتقطع CTFT أداة فعالة في تحليل الإشارات والأنظمة ولكنه له حدود. هناك بعض الإشارات المفيدة التي ليس لها CTFT، حتى بالمعنى العام، مما يسمح بالصدمات في تحويل الـ CTFT لأي إشارة. إن CTFT يعبر عن الإشارات كمجموع خطي من الدوال الجيبية المركبة. في هذا الفصل سنمدد CTFT إلى تحويل لابلاس، الذي يعبر عن الإشارات كمجموع خطي من الأسس المركبة، وهي الدوال المميزة للمعادلات التفاضلية التي تصف الأنظمة الخطية المستقرة زمنياً LTI والمستمرة. الدوال الجيبية المركبة تعتبر حالة خاصة من الأسس المركبة. بعض الإشارات التي لن يكون لها CTFT سيكون لها تحويل لابلاس.

الاستجابة الصدمية لأنظمة LTI تميز هذا النوع من الأنظمة. حيث إن تحويل لابلاس يصف استجابة الصدمة لأنظمة LTI كمجموع خطي من الدوال المميزة لأنظمة LTI، إنه يحتوي مباشرة خواص أي نظام بطريقة مفيدة جداً. العديد من طرق تحليل الأنظمة وتصميمها تعتمد على تحويل لابلاس.

أهداف الفصل

- ١- عرض تحويل لابلاس، الذي سيتم تطبيقه على بعض الإشارات التي ليس لها CTFT.
- ٢- تعريف مدى الإشارات التي يمكن تطبيق تحويل لابلاس عليها.
- ٣- عرض طريقة لبناء نظام مباشرة من دالة العبور الخاصة به.
- ٤- سنتعلم كيفية إيجاد تحويل لابلاس الأمامي والعكسي.
- ٥- سنستنتج ونوضح خواص تحويل لابلاس، وبالذات هذه الخواص التي ليس لها نظير مباشر في تحويل فورير.
- ٦- سنعرف تحويل لابلاس أحادي الاتجاه ونستكشف خواصه الفريدة.
- ٧- سنتعرف على كيفية حل المعادلات التفاضلية مع الشروط الابتدائية باستخدام تحويل لابلاس أحادي الاتجاه.

- ٨- سنوجد العلاقة بين مواضع الأصفار والأقطاب لدالة عبور أي نظام مباشرة مع الاستجابة الترددية للنظام.
٩- سنتعلم كيف يعبر ماتلاب عن دوال عبور الأنظمة.

(٨.٢) استعراض تحويل لابلاس

عندما وسعنا تتابع فورير إلى تحويل فورير افترضنا أن الدورة الأساسية لأي إشارة دورية ستزداد إلى المالا نهاية، مما يجعل الترددات المتقطعة kf_0 في CTFT تندمج في الترددات f المستمرة في CTFT. إن ذلك يؤدي إلى التعريفات البديلة التالية لتحويل فورير:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad x(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{+j\omega t} d\omega$$

وأيضاً:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt, \quad x(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{+j2\pi ft} d\omega$$

هناك طريقتان شائعتان لتقديم تحويل لابلاس. إحداهما: استخلاص تحويل لابلاس كتعميم من تحويل فورير عن طريق التعبير عن الدوال كمجموع خطي من الأسس المركبة بدلاً من كونها مجموعاً من فصيل محدد من الدوال، وهو الدوال الجيبية المركبة المستخدمة في تحويل فورير. الطريقة الثانية هي: عن طريق استعراض الطبيعة الخاصة للأس المركب كدالة مميزة للمعادلات التفاضلية التي تصف الأنظمة الخطية وفهم أنه عند إثارة نظام LTI بدالة أسية مركبة فإنه يستجيب بدالة أسية مركبة أخرى. العلاقة بين الإثارة والاستجابة الأسية المركبة لأي نظام LTI وهي تحويل لابلاس، ونحن هنا سنفترض الطريقتين.

تعميم تحويل فورير

إذا عممنا ببساطة تحويل فورير الأمامي عن طريق استبدال الدوال الجيبية المركبة في الصورة $e^{j\omega t}$ حيث ω متغير حقيقي بالدالة الأسية e^{st} حيث s متغير مركب نحصل على ما يلي:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

والتي تحدد تحويل لابلاس الأمامي، حيث الرمز $\mathcal{L}\{.\}$ يعني تحويل لابلاس.

باعتبار المتغير s متغير مركب فإنها يمكنها أن تأخذ أي قيم في المستوى المركب. إن لها جزءاً مركباً هو σ وجزء تخيلي هو ω وبالتالي فإن $s = \sigma + j\omega$. وعلى ذلك ففي الحالة الخاصة التي تكون فيها $\sigma = 0$ ويكون تحويل فورير للدالة $x(t)$ موجوداً بالمعنى المحدود، فإن تحويل لابلاس الأمامي يكافئ تحويل فورير الأمامي.

$$X(j\omega) = X(s)_{s \rightarrow j\omega}$$

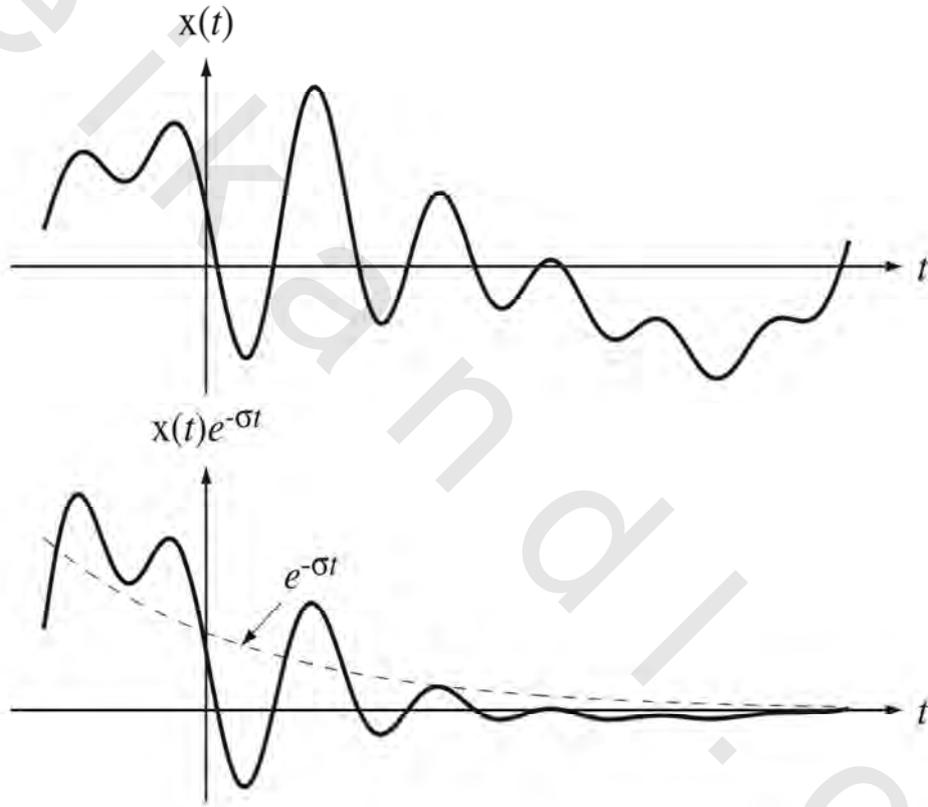
هذه العلاقة بين تحويل فوريير وتحويل لابلاس هي السبب في اختيار رمز CTFT في الفصل ٦ على الصورة $X(j\omega)$ بدلاً من $X(\omega)$. إن ذلك الاختيار يحافظ على المعنى الحسابي المحدد للدالة "X".

باستخدام $s = \sigma + j\omega$ في تحويل لابلاس الأمامي نحصل على :

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[x(t)e^{-\sigma t}]$$

وعلى ذلك فأحد الطرق لمفهوم تحويل لابلاس هي أنه يكافئ لتحويل فوريير للدالة $x(t)$ مضروبة في أس

حقيقي هو معامل تقاربي على الصورة $e^{-\sigma t}$ كما هو مبين في شكل (٨.١).



شكل رقم (٨.١) تأثير المعامل التقاربي الأسي المتناقص على الدالة الأصلية

هذا المعامل التقاربي يسمح لنا، في بعض الأحوال، بإيجاد التحويلات لبعض الدوال التي لا يمكن إيجاد تحويل فوريير لها. كما ذكرنا في فصل سابق، فإن تحويل فوريير لبعض الدوال لا يوجد (بالمعنى المحدد). فمثلا الدالة $g(t) = Au(t)$ من الممكن أن يكون لها تحويل فوريير التالي :

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Au(t)e^{-j\omega t} dt = A \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt$$

وهذا التكامل لن يتقارب. الطريقة المستخدمة في الفصل ٦ والتي تجعل تحويل فورير يتقارب كانت عن طريق ضرب الإشارة في معامل تقارب $e^{-\sigma t}$ حيث σ ثابت حقيقي وموجب. بعد ذلك يمكن إيجاد تحويل فورير للإشارة المعدلة ويتم أخذ النهاية مع اقتراب σ من الصفر. تحويل فورير المحسوب بهذه الطريقة تمت تسميته بتحويل فورير العام والذي سمح فيه بالصدمة كجزء من التحويل. لاحظ أنه عندما تكون $t > 0$ فإن معامل التقارب يكون هو نفسه في تحويل لابلاس وفي تحويل فورير العام، ولكن في تحويل لابلاس فإن النهاية مع تقارب σ من الصفر لن يتم إجراؤها. كما سنرى قريباً فإن هناك دوال أخرى مفيدة لن يكون لها حتى تحويل فورير العام.

الآن، لكي نستنتج تحويل لابلاس الأمامي والعكسي من تحويل فورير، فإننا نجري تحويل فورير للدالة $g_\sigma(t) = g(t)e^{-\sigma t}$ بدلا من الدالة الأصلية $g(t)$. من الممكن أن نكتب هذا التكامل كما يلي:

$$\mathcal{F}(g_\sigma(t)) = G_\sigma(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\sigma(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$$

هذا التكامل قد يتقارب أو لا يتقارب، اعتماداً على طبيعة الدالة $g(t)$ واختيار القيمة σ . سنستكشف حالا الشروط التي سيتقارب معها التكامل. باستخدام الرمز $s = \sigma + j\omega$ ، يمكننا أن نكتب ما يلي:

$$\mathcal{F}(g_\sigma(t)) = \mathcal{L}(g(t)) = G_L(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-st} dt$$

وهذا هو تحويل لابلاس للدالة $g(t)$ ، إذا كان هذا التكامل سيتقارب.

من الممكن كتابة تحويل فورير العكسي كما يلي:

$$\mathcal{F}^{-1}(G_\sigma(j\omega)) = g_\sigma(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_\sigma(j\omega) e^{+j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_L(s) e^{+j\omega t} d\omega$$

باستخدام $s = \sigma + j\omega$ و $ds = j d\omega$ سنحصل على ما يلي:

$$g_\sigma(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} G_L(s) e^{+(s-\sigma)t} ds = \frac{e^{-\sigma t}}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} G_L(s) e^{+st} ds$$

أو بقسمة كل من الطرفين على $e^{-\sigma t}$ نحصل على:

$$g(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} G_L(s) e^{+st} ds$$

وهذا يعرف، أو يحدد تحويل لابلاس العكسي. عندما نتعامل فقط مع تحويل لابلاس فإن الرمز \mathcal{L} لن نحتاج إليه لكي نتجنب الخلط مع تحويل فورير، وفي هذه الحالة يمكن كتابة التحويل والتحويل العكسي كما يلي:

$$\text{المعادلة رقم (٨.١)} \quad X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad , \quad x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{+st} ds$$

هذه النتيجة توضح أن أي دالة يمكن التعبير عنها كتجميع خطي لأسس مركبة، وهذا يعتبر تعميماً لتحويل فورير التي يتم فيها التعبير عن أي دالة كتجميع خطي من الجيوب المركبة. يمكننا كتابة الرمز الشائع عالمياً لتحويل لابلاس كما يلي:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$$

مما يوضح أن كلاً من $h(t)$ و $H(s)$ تشكلاّن زوجاً لتحويل لابلاس.

الإثارة والاستجابة الأسية المركبة

طريقة أخرى لتحويل لابلاس هي عن طريق فرض استجابة النظام LTI لإثارة أسية مركبة على الصورة $x(t) = Ke^{st}$ حيث $s = \sigma + j\omega$ و σ و ω و K كلها قيم حقيقية. باستخدام الالتفاف، يمكن كتابة استجابة النظام LTI الذي استجابته الصدمية هي $h(t)$ والإثارة هي $x(t)$ كما يلي:

$$y(t) = h(t) * Ke^{st} = K \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = Ke^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

استجابة أي نظام LTI للإثارة الأسية المركبة تكون هي نفسها ولكن مضروبة في الكمية $\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$ إذا كان هذا التكامل سيتقارب. هذا هو حاصل ضرب استجابة الصدمة $h(\tau)$ والأس المركب $e^{-s\tau}$ على كل قيم τ ونتيجة هذه العملية تكون دالة في τ فقط. عادة تكتب هذه النتيجة كالتالي:

المعادلة رقم (٨.٢)

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

و $H(s)$ تسمى تحويل لابلاس ل $h(t)$. (اسم متغير التكامل تم تغييره من τ إلى t ولكن ذلك لن يغير من النتيجة التي هي $H(s)$).

بالنسبة للأنظمة الـ LTI، فإن معرفة الـ $h(t)$ تكون كافية لتشخيص الكامل للنظام. تحتوي $H(s)$ على معلومات كافية للوصف الكامل للنظام، ولكن هذه المعلومات تكون في شكل مختلف. إن حقيقة أن هذا الشكل يكون مختلفاً من الممكن أن تؤدي إلى التعمق في عملية النظام التي يكون من الصعب رؤيتها عن طريق فحص $h(t)$ وحدها. في الفصول التالية سنرى العديد من الأمثلة على ميزة عرض خواص الأنظمة وأدائها من خلال $H(s)$ و $h(t)$.

(٨.٣) دالة العبور

دعنا الآن نوجد تحويل لابلاس $Y(s)$ للاستجابة $y(t)$ لنظام LTI استجابته الصدمية هي $h(t)$ للإثارة $x(t)$ كما

يلي:

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [h(t) * x(t)] e^{-st} dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau) d\tau \right) e^{-st} dt$$

بفض التكاملين فإن :

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) e^{-st} dt$$

سندع $\lambda = t - \tau$ وبالتالي $d\lambda = dt$ ، وعلى ذلك يمكننا كتابة :

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{-s(t+\lambda)} d\lambda = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau}_{=H(s)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda}_{=X(s)}$$

تحويل لابلاس $Y(s)$ للاستجابة $y(t)$ سيكون :

المعادلة رقم (٨.٣)

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

وهو حاصل ضرب تحويل لابلاس للإثارة وتحويل لابلاس لاستجابة الصدمة (إذا كانت هذه التحويلات موجودة). الدالة $H(s)$ تسمى دالة العبور للنظام لأنها تصف في المجال s كيف أن الإثارة تعبر من دخل النظام لخرجه ، وهذه تعتبر نتيجة أساسية في تحليل الأنظمة. في هذا النطاق الجديد ، النطاق s ، أصبح الالتفاف الزمني ضرباً في النطاق s تماماً كما حدث مع تحويل فوريير.

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)H(s)$$

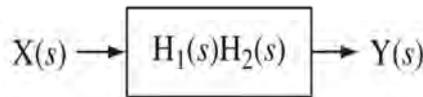
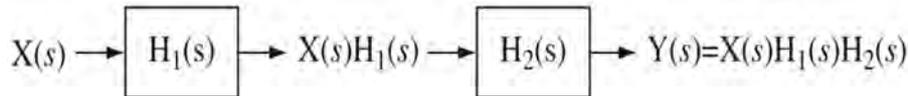
(٨.٤) الأنظمة الموصلة على التوالي

إذا كانت استجابة أحد الأنظمة هي الدخل أو الإثارة لنظام آخر ، فإن النظامين يقال عنهما إنهما موصلان

على التوالي كما في شكل (٨.٢). تحويل لابلاس للنظام الكلي هو :

$$Y(s) = H_2(s)[H_1(s)X(s)] = [H_1(s)H_2(s)]X(s)$$

وبذلك يصبح التوصيل المتوالي لنظامين مكافئاً لنظام واحد تكون دالة العبور له هي $H(s) = H_1(s)H_2(s)$.



شكل رقم (٨.٢) التوصيل المتوالي للأنظمة .

II (٨.٥) بناء المباشر شكل

بناء النظام هي عملية وضع مكونات النظام مع بعضها بعضاً لتكوين نظام يعطي دالة العبور المطلوبة. لقد رأينا في الفصل ٥ أنه إذا تم وصف نظام بمعادلة تفاضلية خطية على الصورة:

$$\sum_{k=0}^N a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^N b_k x^{(k)}(t)$$

فإن دالة العبور لها تساوي النسبة بين كثيرتي حدود في المتغير s ومعاملات قوى s تكون هي نفسها معاملات تفاضلات x وال y في المعادلة التفاضلية:

$$(٨.٤) \text{ المعادلة رقم} \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} = \frac{b_N s^N + b_{N-1} s^{N-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

(لقد افترض أن الدرجة الإسمية لكل من البسط والمقام هنا هي N . إذا كانت درجة البسط في الحقيقة أقل من N ، فإن بعض المعاملات b للدرجات العليا ستكون أصفاراً). درجة البسط يجب أن تكون N والمعامل a_N يجب ألا يساوي صفراً إذا كانت درجة هذه المعادلة هي N .

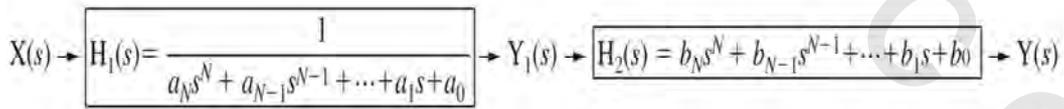
إحدى الصور القياسية لبناء النظام تسمى الطريقة المباشرة II. يمكن التفكير في دالة العبور في هذه الحالة على أنها حاصل ضرب دالتي عبور كما يلي:

$$(٨.٥) \text{ المعادلة رقم} \quad H_1(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} = \frac{1}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

والدالة:

$$H_2(s) = \frac{Y(s)}{Y_1(s)} = b_N s^N + b_{N-1} s^{N-1} + \dots + b_1 s + b_0$$

حيث إشارة الخرج للنظام الأول $Y_1(s)$ هي إشارة الدخل للنظام الثاني كما في شكل (٨.٣).



شكل رقم (٨.٣)

يمكننا أن نرسم مخططاً صندوقياً للنظام $H_1(s)$ عن طريق إعادة كتابة المعادلة (٨.٥) كما يلي:

$$X(s) = [a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0] Y_1(s)$$

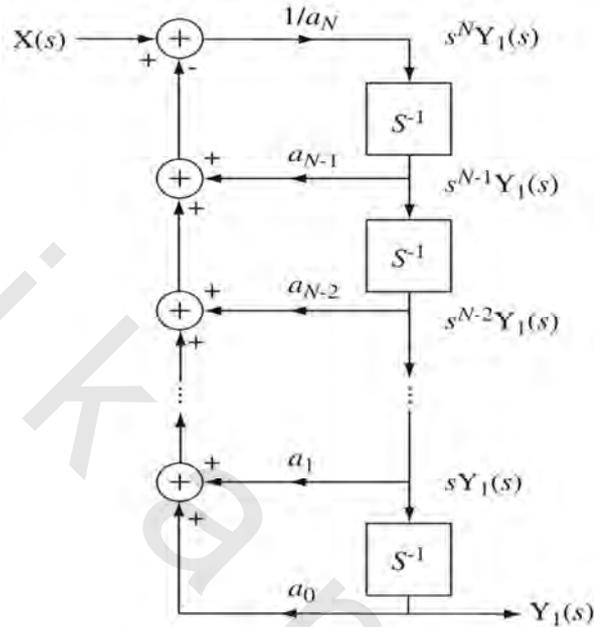
أو:

$$X(s) = a_N s^N Y_1(s) + a_{N-1} s^{N-1} Y_1(s) + \dots + a_1 s Y_1(s) + a_0 Y_1(s)$$

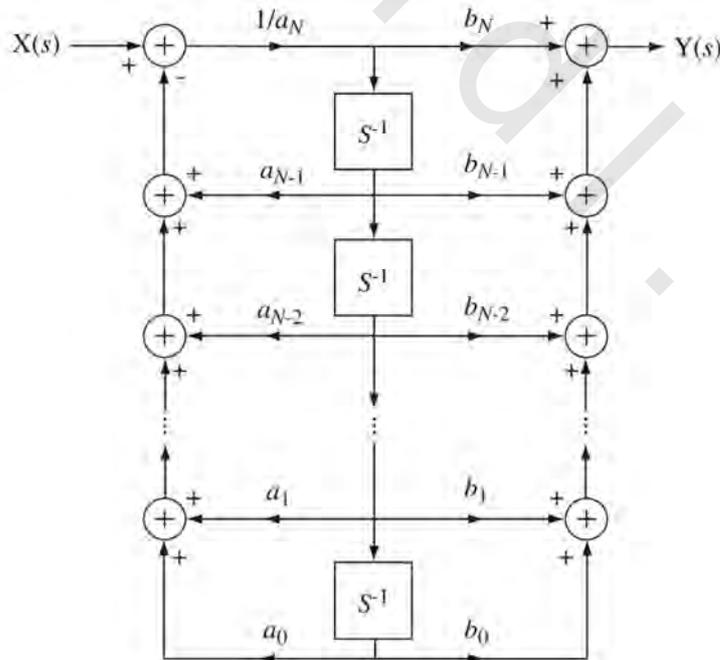
أو :

$$s^N Y_1(s) = \frac{1}{a_N} \{X(s) - [a_{N-1} s^{N-1} Y_1(s) + \dots + a_1 s Y_1(s) + a_0 Y_1(s)]\}$$

التي يمكن بناؤها كما في شكل (٨.٤).



شكل رقم (٨.٤) بناء H1(s)



شكل رقم (٨.٥) الصورة المباشرة الكلية لبناء النظام

يمكننا الآن وفوراً بناء الاستجابة الكلية $Y(s)$ كتجميع خطي من القوى المختلفة للمتغير s مضروبة في $Y_1(s)$ كما في شكل (٨.٥).

(٨.٦) تحويل لابلاس العكسي

في التطبيقات العملية لتحويل لابلاس سنحتاج إلى وسيلة لتحويل $Y(s)$ إلى $y(t)$ ، أو التحويل العكسي لتحويل لابلاس. لقد رأينا في المعادلة (٨.١) أن:

$$y(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y(s)e^{st} ds$$

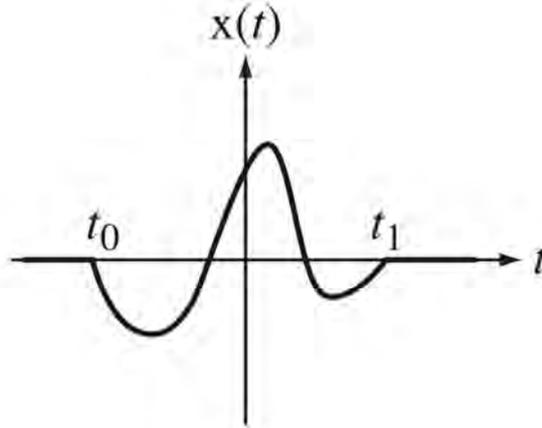
حيث σ هي الجزء الحقيقي من s . إن هذا يعتبر تكاملاً محيطياً أو كونتورياً في المستوى s المركب وهو خارج حدود هذا الكتاب. هذا التكامل العكسي نادراً ما يستخدم في حل المسائل العملية؛ لأن تحويل لابلاس لمعظم الإشارات المفيدة قد تم فعلاً حسابه ووضعها في جداول.

(٨.٧) تواجد تحويل لابلاس

يجب علينا الآن أن نستكشف تحت أي الشروط من الممكن أن يكون تحويل لابلاس $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$ موجوداً حقاً. إنه يوجد بالطبع إذا كان التكامل سيتقارب، وتقارب هذا التكامل سيعتمد على كل من $x(t)$ و s .

الإشارات المحدودة زمنياً

إذا كانت $x(t)=0$ عندما $t < t_0$ و $t > t_1$ (حيث كل من t_0 و t_1 محددتان) فإنها تسمى إشارة محدودة زمنياً. أيضاً إذا كانت $x(t)$ محددة لكل قيم t ، فإن تكامل تحويل لابلاس سيتقارب لأي قيمة لـ s وسيكون تحويل لابلاس للدالة $x(t)$ موجوداً كما في شكل (٨.٦).



شكل رقم (٨.٦) إشارة محدودة زمنياً ومحددة.

الإشارات اليمينية واليسارية الجانِب

إذا كانت $x(t)=0$ لقيم $t < t_0$ فإنها تسمى إشارة يمينية الجانِب وسيكون تحويل لابلاس لها كالتالي:

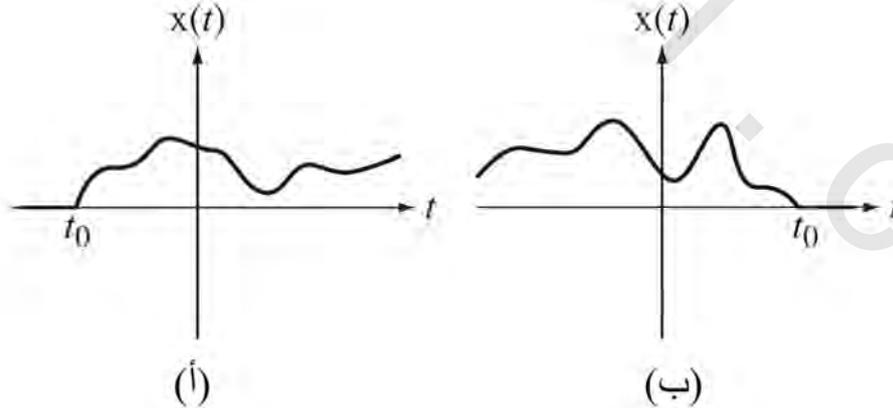
$$X(s) = \int_{t_0}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

كما في شكل (أ٨.٧)

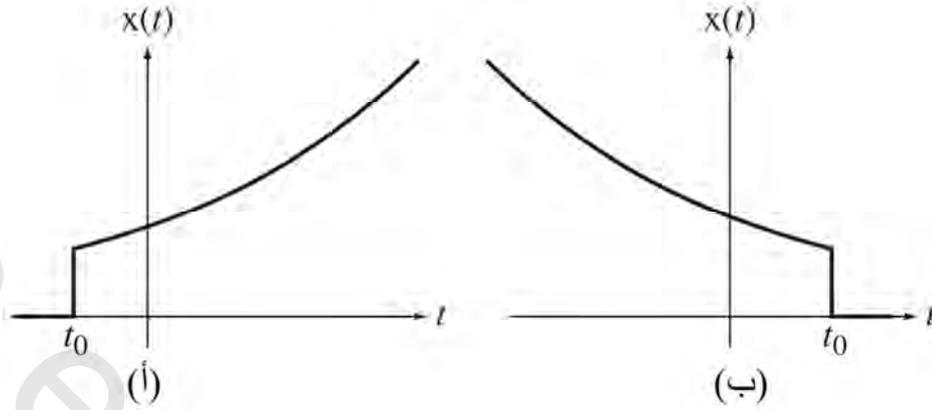
افتراض تحويل لابلاس $X(s)$ للإشارة اليمينية الجانِب $x(t)=e^{\alpha t}u(t-t_0)$ ، و $\alpha \in \mathbb{R}$ الذي يمكن كتابته كالتالي:

$$X(s) = \int_{t_0}^{\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{(\alpha-\sigma)t} e^{-wt} dt$$

كما في شكل (أ٨.٨).

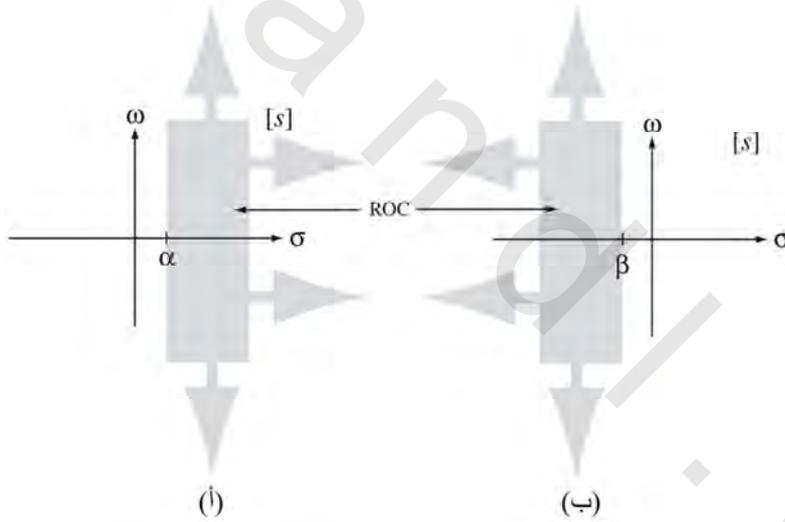


شكل رقم (٨.٧) (أ) إشارة يمينية الجانِب، (ب) إشارة يسارية الجانِب



شكل رقم (٨.٨) (أ) $x(t)=e^{\alpha t}u(t-t_0)$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ ، (ب) $x(t)=e^{\beta t}u(t-t_0)$ و $\beta \in \mathbb{R}$

إذا كانت $\sigma > \alpha$ فإن التكامل سيتقارب. إن عدم التساوي $\sigma > \alpha$ تحدد منطقة في المستوى s تسمى منطقة التقارب region of convergence, ROC كما في شكل (٨.٩).

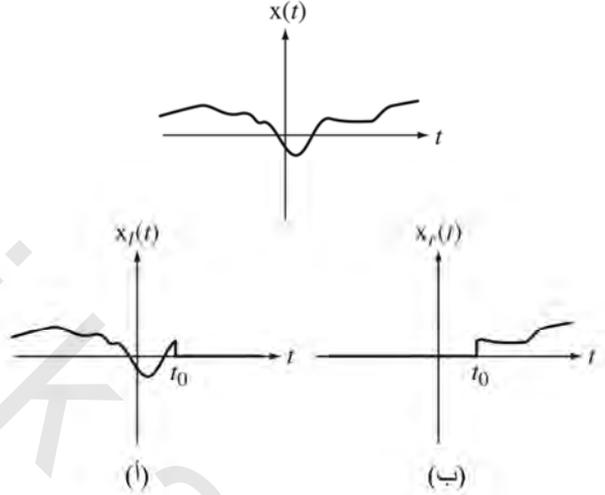


شكل رقم (٨.٩) مناطق التقارب ل (أ) الإشارة يمينية الجانب $x(t)=e^{\alpha t}u(t-t_0)$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ ، و (ب) الإشارة يسارية الجانب $x(t)=e^{\beta t}u(t-t_0)$ و $\beta \in \mathbb{R}$

إذا كانت $x(t)=0$ عندما $t > t_0$ فإن الإشارة تسمى إشارة يسارية الجانب كما في شكل (٨.٧)، ويصبح تحويل لابلاس لهذه الإشارة كالتالي: $X(s) = \int_{-\infty}^{t_0} x(t)e^{-st} dt$. إذا كانت $x(t)=e^{\beta t}u(t_0-t)$ و $\beta \in \mathbb{R}$ ، فإن تحويل لابلاس سيكون:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{t_0} e^{\beta t} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{t_0} e^{(\beta-\sigma)t} e^{-\omega t} dt$$

والتكامل سيتقارب لأي قيمة لـ $\sigma < \beta$ كما في شكل (٨.٨) وشكل (٨.٩).
أي إشارة يمكن التعبير عنها كمجموع من إشارة يمينية الجانب وأخرى يسارية الجانب كما في شكل (٨.١٠).



شكل رقم (٨.١٠) إشارة مقسمة إلى جزء يميني (أ) وآخر يساري (ب)

إذا كانت $x(t) = x_r(t) + x_l(t)$ حيث $x_r(t)$ هو الجزء اليميني و $x_l(t)$ هو الجزء اليساري ، وإذا كان $|x_r(t)| < |K_r e^{\beta t}|$ و $|x_l(t)| < |K_l e^{\alpha t}|$ ، حيث كل من K_r و K_l ثابت ، فإن تكامل تحويل لابلاس يتقارب وتحويل لابلاس نفسه سيكون موجوداً لقيم $\alpha < \sigma < \beta$. إن ذلك يعني أنه إذا كانت $\alpha < \beta$ فإنه يمكن إيجاد تحويل لابلاس ، وستكون منطقة التقارب في المستوى s هي $\alpha < \sigma < \beta$. إذا كانت $\alpha > \beta$ فإن تحويل لابلاس لن يكون موجوداً. بالنسبة للإشارات اليمينية الجانب تكون منطقة التقارب ROC في العادة هي المنطقة من المستوى s على يمين α . بالنسبة للإشارات اليسارية الجانب تكون منطقة التقارب ROC في العادة هي المنطقة من المستوى s على يسار β .

(٨.٨) أزواج تحويل لابلاس

يمكننا عمل جدول لأزواج تحويل لابلاس بدءاً من الإشارة الموصوفة بالدالة $\delta(t)$ و $e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t) u(t)$ حيث باستخدام التعريف الأساسي يمكننا كتابة :

$$\delta(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1, \quad \text{All } s$$

$$e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t) u(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t) u(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} e^{-(s+\alpha)t} dt, \sigma > -\alpha$$

$$e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} (1/2) \int_0^{\infty} (e^{-(s-j\omega_0+\alpha)t} + e^{-(s+j\omega_0+\alpha)t}) dt, \sigma > -\alpha$$

$$e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} (1/2) \left[\frac{1}{(s-j\omega_0+\alpha)} + \frac{1}{(s+j\omega_0+\alpha)} \right], \sigma > -\alpha$$

$$e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}, \quad \sigma > -\alpha$$

وإذا كانت $\alpha=0$:

$$\cos(\omega_0 t) u(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \sigma > -\alpha$$

وإذا كانت $\omega_0=0$:

$$e^{-at} u(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha}, \quad \sigma > -\alpha$$

وإذا كانت $\alpha=\omega_0=0$:

$$u(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/s, \quad \sigma > 0$$

باستخدام طرق مشابهة، يمكننا أن نبني جدولاً لأزواج تحويل لابلاس الأكثر استخداماً كما في جدول

(٨.١).

لتوضيح أهمية تحديد ليس فقط الصورة الجبرية لتحويل لابلاس ولكن أيضاً منطقة التقارب ROC،

افتراض تحويل لابلاس للدالة $e^{-at}u(t)$ والدالة $e^{-at}u(-t)$:

$$e^{-at}u(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha}, \quad \sigma > -\alpha \quad \text{and} \quad -e^{-at}u(-t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha}, \quad \sigma < -\alpha$$

جدول رقم (٨.١) بعض أزواج تحويل لابلاس الشائعة

$\delta(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1, \text{ All } \sigma$	
$u(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/s, \sigma > 0$	$-u(-t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/s, \sigma < 0$
$\text{ramp}(t) = tu(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/s^2, \sigma > 0$	$\text{ramp}(-t) = tu(-t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/s^2, \sigma < 0$
$e^{-at}u(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/(s+\alpha), \sigma > -\alpha$	$-e^{-at}u(-t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/(s+\alpha), \sigma < -\alpha$
$t^n u(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} n!/s^{n+1}, \sigma > 0$	$-t^n u(-t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} n!/s^{n+1}, \sigma < 0$
$te^{-at}u(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/(s+\alpha)^2, \sigma > -\alpha$	$-te^{-at}u(-t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 1/(s+\alpha)^2, \sigma < -\alpha$
$t^n e^{-at}u(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}, \sigma > -\alpha$	$-t^n e^{-at}u(-t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}, \sigma < -\alpha$
$\sin(\omega_0 t)u(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}, \sigma > 0$	$-\sin(\omega_0 t)u(-t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}, \sigma < 0$

$\cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \sigma > 0$	$-\cos(\omega_0 t)u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \sigma < 0$
$e^{-at} \sin(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}, \sigma > -\alpha$	$-e^{-at} \sin(\omega_0 t)u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}, \sigma < -\alpha$
$e^{-at} \cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}, \sigma > -\alpha$	$-e^{-at} \cos(\omega_0 t)u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}, \sigma < -\alpha$
$e^{-\alpha t } \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+\alpha} - \frac{1}{s-\alpha} = -\frac{2\alpha}{s^2 - \alpha^2}, -\alpha < \sigma < \alpha$	

التعبير الجبري لكل تحويل لابلاس هو نفسه في كل حالة ولكن مناطق التقارب تكون مختلفة تماماً، بل وتكون غير مترابطة تماماً. إن ذلك يعني أن تحويل لابلاس للمجموع الخطي لهاتين الدالتين لا يمكن إيجاده؛ لأننا لا يمكن أن نجد في المستوى s منطقة تكون عامة لكل من منطقتي التقارب للدالة $e^{-\alpha t}u(t)$ ، والدالة $-e^{-\alpha t}u(-t)$. إن القارئ الملاحظ سيرى أن بعض دوال الإشارات الشهيرة جدا لم تظهر في جدول ٨.١، مثل الكمية الثابتة. الدالة $x(t)=u(t)$ تظهر في الجدول ولكن الدالة $x(t)=1$ لم تظهر. سنكتب تحويل لابلاس لهذه الدالة كما يلي:

$$X(s) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt}_{ROC: \sigma < 0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt}_{ROC: \sigma > 0}$$

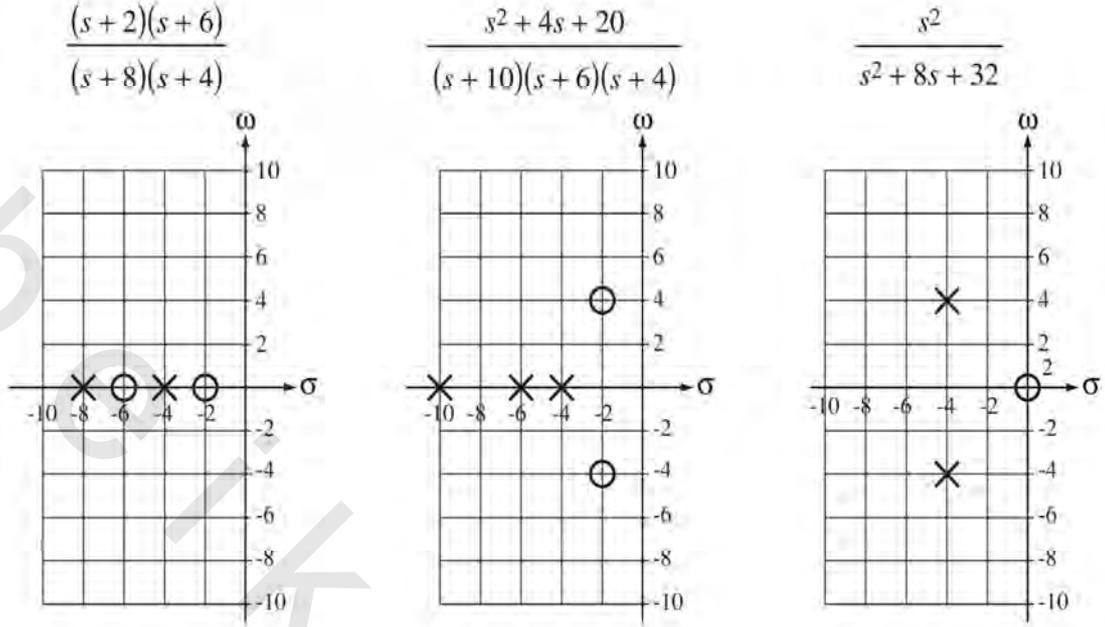
لا توجد هناك منطقة تقارب تكون عامة لكل من هذين التكاملين، لذلك فإن تحويل لابلاس لهذه الدالة لن يكون موجوداً. لنفس السبب فإن الدوال $\cos(\omega_0 t)$ و $\sin(\omega_0 t)$ و $\text{sgn}(t)$ و $\delta_{T_0}(t)$ لا تظهر في الجدول على الرغم من ظهور الدوال $\cos(\omega_0 t)u(t)$ و $\sin(\omega_0 t)u(t)$.

تحويل لابلاس $1/(s+\alpha)$ يكون محددًا عند كل نقطة في المستوى s فيما عدا عند النقطة $s=-\alpha$. هذه النقطة الفريدة تسمى قطب pole للدالة $1/(s+\alpha)$. على العموم فإن القطب لأي تحويل لابلاس يكون هو قيمة s التي يؤول عندها التحويل إلى المالا نهائية. على العكس من ذلك هناك مفهوم الصفر zero لتحويل لابلاس، وهو قيمة s التي يؤول عندها التحويل إلى الصفر. بالنسبة للتحويل $1/(s+\alpha)$ يكون هناك صفر واحد عند s تساوي المالا نهائية. تحويل لابلاس التالي:

$$\cos(\omega_0 t) u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

لها قطبان عند $s=\pm j\omega_0$ وصفر عند $s=0$ وآخر عند المالا نهائية.

من الأدوات المفيدة في تحليل الإشارات والأنظمة مخطط الأقطاب - الأصفار والذي يتم تعريف القطب فيه بالعلامة "X" وتعريف الصفر بالعلامة "O" في المستوى s كما في شكل (٨.١١).



شكل رقم (٨.١١) أمثلة على مخططات الأقطاب - الأصفار

ال "2" الصغيرة بجانب الصفر في المخطط الأيمن في شكل (٨.١١) توضح وجود صفر مزدوج عند $s=0$. كما سنرى في مواضع أخرى فإن الأصفار والأقطاب لتحويل لابلاس لأي دالة يحتوي على الكثير من المعلومات القيمة عن طبيعة هذه الدالة.

مثال ٨.١

تحويل لابلاس لإشارة أسية غير سببية

احسب تحويل لابلاس للإشارة $x(t) = e^{-t}u(t) + e^{2t}u(-t)$

تحويل لابلاس لهذا المجموع هو مجموع تحويل لابلاس لكل عنصر من عناصرها $e^{-t}u(t)$ و $e^{2t}u(-t)$. منطقة التقارب ROC للمجموع ستكون المنطقة في المستوى s العامة لمنطقتي التقارب هي $-1 < \sigma < 2$ وبالتالي فإن:

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+1}, \quad \sigma > -1$$

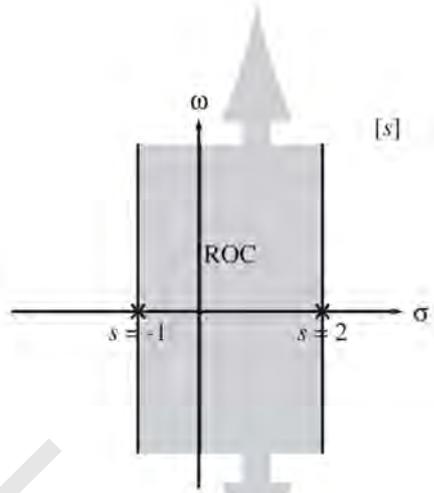
وأيضاً:

$$e^{2t}u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-2}, \quad \sigma < 2$$

في هذه الحالة، ستكون المنطقة في المستوى s العامة لمنطقتي التقارب هي $-1 < \sigma < 2$ وبالتالي فإن:

$$e^{-t}u(t) + e^{2t}u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-2}, \quad -1 < \sigma < 2$$

كما في شكل (٨.١٢)، فإن هذا التحويل له قطب عند $s=-1$ و $s=2$ وصفران عند الما لانهاية.



شكل رقم (٨.١٢) منطقة تقارب تحويل لابلاس للدالة: $e^{-t}u(t) + e^{2t}u(-t)$

مثال ٨.٢

تحويلات لابلاس العكسية

احسب تحويل لابلاس العكسي لكل من الدوال الآلية:

$$X(s) = \frac{4}{s+3} - \frac{10}{s-6}, \quad -3 < \sigma < 6 \quad (\text{أ})$$

$$X(s) = \frac{4}{s+3} - \frac{10}{s-6}, \quad \sigma > 6 \quad (\text{ب})$$

$$X(s) = \frac{4}{s+3} - \frac{10}{s-6}, \quad \sigma < -3 \quad (\text{ج})$$

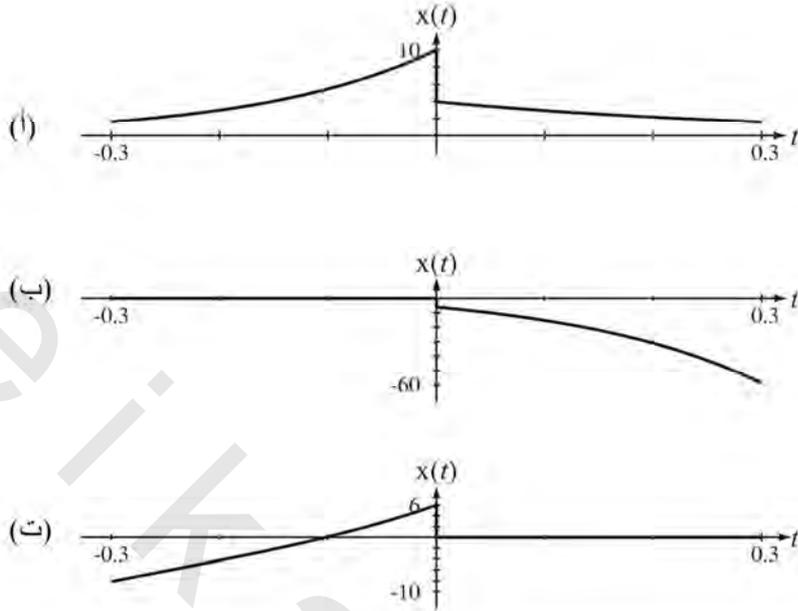
(أ) الدالة $X(s)$ هي مجموع دالتين في المستوى s وبالتالي فإن تحويل لابلاس العكسي يجب أن يكون مجموع دالتين في النطاق الزمني. الدالة $X(s)$ لها قطبان، أحدهما عند $s=-3$ والآخر عند $s=6$. نحن نعرف أن منطقة التقارب للدوال اليمينية تكون دائماً على يمين القطب وبالنسبة للدوال اليسارية تكون منطقة التقارب على يسار القطب. وعلى ذلك فإن $4/s+3$ يجب أن تنعكس إلى إشارة أو دالة يمينية و $10/s-6$ يجب أن تنعكس إلى إشارة أو دالة يسارية. وبالتالي باستخدام الأزواج التالية:

$$-e^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}, \quad \sigma < -a \quad \text{و} \quad e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}, \quad \sigma < -a$$

نحصل على:

$$x(t) = 4e^{-3t}u(t) + 10e^{6t}u(-t)$$

كما في شكل (٨.١٣). (أ).



شكل رقم (٨.١٣) تحويلات لابلاس العكسية

(ب) في هذه الحالة تكون منطقة التقارب على يمين القطبين وكل من الإشارتين في النطاق الزمني يجب أن تكونا

إشارات يمينية، وبالتالي باستخدام العلاقة: $\sigma < -\alpha$, $\frac{\mathcal{L}}{s+\alpha} \leftrightarrow e^{-\alpha t}u(t)$ نحصل على:

$$x(t) = 4e^{-3t}u(t) - 10e^{6t}u(-t)$$

كما في شكل (٨.١٣). (ب).

(ج) في هذه الحالة ستكون منطقة التقارب على يسار القطبين وبالتالي ستكون الدالتان في النطاق الزمني دالتين

يساريتين، وبالتالي باستخدام العلاقة: $\sigma < -\alpha$, $\frac{\mathcal{L}}{s+\alpha} \leftrightarrow -e^{-\alpha t}u(-t)$ نحصل على:

$$x(t) = -4e^{-3t}u(-t) - 10e^{6t}u(-t)$$

(د)

كما في شكل (٨.١٣). (ت).

(٨.٩) تحليل الكسور الجزئية

في مثال ٨.٢ كل تعبير في المستوى s كان على صورة مكونين، كل واحد منهما يمكن إيجادها مباشرة في جدول ٨.١. ولكن ماذا نعمل عندما يكون تحويل لابلاس في صورة أكثر تعقيداً؟ مثلاً، كيف نحسب تحويل فوريير العكسي للدالة:

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + 4s + 3} = \frac{s}{(s+3)(s+1)}, \quad \sigma > 1?$$

هذه الصورة غير ظاهرة في جدول ٨.١. في حالة مثل هذه، هناك طريقة تسمى مفكوك الكسور الجزئية تصبح أكثر فائدة. باستخدام هذه الطريقة يمكن كتابة $X(s)$ كما يلي:

$$X(s) = \frac{3/2}{s+3} - \frac{1/2}{s+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{s+3} - \frac{1}{s+1} \right), \quad \sigma > -1$$

وعلى ذلك فإن تحويل لابلاس العكسي سيكون:

$$x(t) = \left(\frac{1}{2} \right) (3e^{-3t} - e^{-t})u(t)$$

من أشهر أنواع المسائل في تحليل الإشارات والأنظمة باستخدام طرق لابلاس هي أن نوجد التحويل العكسي لدالة كسرية في s على الصورة:

$$G(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

حيث معاملات البسط والمقام a و b كلها ثوابت. حيث أن درجة البسط والمقام تكون اختيارية، فإن هذه الدالة لا تظهر في جداول تحويل لابلاس القياسية. ولكن باستخدام مفكوك الكسور الجزئية، يمكن التعبير عن هذه الدالة كمجموع من الدوال التي تظهر في الجداول القياسية لتحويل لابلاس. في العادة يكون من الممكن (عددياً، إذا لم يكن حسابياً) أن نفكك كثيرة الحدود التي في المقام والتعبير عن الدالة في الصورة التالية:

$$G(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_N)}$$

حيث p 's تمثل أقطاباً محددة للدالة $G(s)$. دعنا نفترض الآن الحالة البسيطة التي لا تكون فيها أقطاب محددة مكررة وأن $N > M$ ، بحيث تكون $G(s)$ على صورة كسرية مثالية في المتغير s . بمجرد تحديد الأقطاب يجب أن نكون قادرين على كتابة الدالة في صورة مجموع الكسور الجزئية التالية:

$$G(s) = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \dots + \frac{K_N}{s - p_N}$$

إذا استطعنا إيجاد القيم الصحيحة للثوابت K 's. لكي تكون هذه الصورة صحيحة فإن التعبير التالي يجب أن يكون محققاً لأي قيمة اختيارية لـ s :

المعادلة رقم (٨.٦)

$$\frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_N)} \equiv \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \dots + \frac{K_N}{s-p_N}$$

يمكن إيجاد قيم الـ K 's عن طريق وضع الجانب الأيمن في صورة كسر واحد بمقام واحد يكون مماثل للمقام على الجانب الأيسر، وبعد ذلك نساوي المعاملات لكل قوة من قوى الـ s في البسطين ونحل هذه المعادلات في الـ K 's. ولكن هناك طريقة أخرى أسهل وهي عن طريق ضرب الجانبين في المعادلة (٨.٦) في $s-p_1$:

$$(s-p_1) \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_N)} = \left[(s-p_1) \frac{k_1}{s-p_1} + (s-p_1) \frac{k_2}{s-p_2} + \dots + (s-p_1) \frac{k_N}{s-p_N} \right]$$

والتي يمكن كتابتها كما يلي:

المعادلة رقم (٨.٧)

$$\frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_N)} = k_1 + (s-p_1) \frac{k_2}{s-p_2} + \dots + (s-p_1) \frac{k_N}{s-p_N}$$

حيث أن المعادلة (٨.٧) يجب أن تكون محققة لأي قيمة اختيارية لـ s ، فإننا سنضع $s=p_1$ ، وبالتالي ستصبح كل المعاملات $(s-p_1)$ على الجانب الأيمن في المعادلة (٨.٧) أصفاراً، وتصبح هذه المعادلة كما يلي:

$$K_1 = \frac{b_M p_1^M + b_{M-1} p_1^{M-1} + \dots + b_1 p_1 + b_0}{(p_1 - p_2) \dots (p_1 - p_N)}$$

وبالتالي فقد حصلنا على قيمة K_1 بالطريقة نفسها يمكن إيجاد قيم كل الـ K 's الأخرى. وبعد ذلك باستخدام زوج تحويل لابلاس التالي:

$$-e^{-at}u(-t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha}, \quad \sigma < -\alpha \quad \text{و} \quad e^{-at}u(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha}, \quad \sigma > -\alpha$$

يمكننا إيجاد تحويل لابلاس العكسي للمعادلة الأصلية.

مثال ٨.٣

تحويل لابلاس العكسي باستخدام الكسور الجزئية

$$G(s) = \frac{10s}{(s+3)(s+1)}, \quad \sigma > -1$$

يمكننا استخدام الكسور الجزئية لنضع التعبير السابق على الصورة التالية:

$$G(s) = \frac{\left[\frac{10s}{(s+1)} \right]_{s=-3}}{s+3} + \frac{\left[\frac{10s}{(s+3)} \right]_{s=-1}}{s+1}, \quad \sigma > -1$$

$$G(s) = \frac{15}{s+3} - \frac{5}{s+1}, \quad \sigma > -1$$

وبالتالي باستخدام الزوج:

$$e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s + \alpha}, \quad \sigma > -\alpha$$

نحصل على تحويل لابلاس العكسي التالي:

$$g(t) = 5(3e^{-3t} - e^{-t})u(t)$$

الحالة الأكثر عموماً عملياً هي عندما لا يكون هناك أقطاب متكررة، ولكن دعنا نرى ماذا سيحدث إذا كان لدينا قطبان متمائلان تماماً كما في المعادلة التالية:

$$G(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s - p_1)^2 (s - p_3) \dots (s - p_N)}$$

إذا حاولنا بالطريقة نفسها إجراء الكسور الجزئية سنحصل على ما يلي:

$$G(s) = \frac{K_{11}}{s - p_1} + \frac{K_{12}}{s - p_1} + \frac{K_3}{s - p_3} + \dots + \frac{K_N}{s - p_N}$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها كما يلي:

$$G(s) = \frac{K_{11} + K_{12}}{s - p_1} + \frac{K_3}{s - p_3} + \dots + \frac{K_N}{s - p_N} = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_3}{s - p_3} + \dots + \frac{K_N}{s - p_N}$$

وكما نرى فإن مجموع أي ثابتين اختياريين $K_{11} + K_{12}$ يكون في الحقيقة ثابتاً واحداً اختيارياً. وبالتالي فإن هناك عدد $N-1$ من الـ K بدلاً من عدد N وعند تشكيل المقام الكلي لمجموع الكسور الجزئية، فإنه لن يكون مثل مقام الدالة الأصلية. وبالتالي يمكننا تغيير شكل مفكوك الكسور الجزئية إلى الصورة التالية:

$$G(s) = \frac{K_1}{(s - p_1)^2} + \frac{K_3}{s - p_3} + \dots + \frac{K_N}{s - p_N}$$

وبالتالي إذا حاولنا حل هذه المعادلة عن طريق إيجاد المقام الكلي وساوينا قوى المتغير s في الطرفين سنجد أن لدينا عدد N من المعادلات في $N-1$ من المجاهيل، وليس هناك حل وحيد. حل هذه المشكلة هو أن نضع مفكوك الكسور الجزئية على الصورة:

$$G(s) = \frac{K_{12}}{(s - p_1)^2} + \frac{K_{11}}{(s - p_1)} + \frac{K_3}{s - p_3} + \dots + \frac{K_N}{s - p_N}$$

ويمكننا إيجاد K_{12} عن طريق ضرب طرفي المعادلة التالية:

$$(٨.٨) \text{ المعادلة رقم } \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)^2 (s-p_3) \dots (s-p_N)} \equiv \frac{K_{11}}{(s-p_1)^2} + \frac{K_2}{s-p_1} + \frac{K_3}{s-p_3} + \dots + \frac{K_N}{s-p_N}$$

في $(s-p_1)^2$ تعطى :

$$\frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s-p_3) \dots (s-p_N)} = \left[k_{12} + (s-p_1)k_{11} + (s-p_1) \frac{k_{23}}{s-p_3} + \dots \right. \\ \left. + (s-p_1) \frac{k_N}{s-p_N} \right]$$

وبعد ذلك ندع $s=p_1$ فنحصل على :

$$K_{12} = \frac{b_M p_1^M + b_{M-1} p_1^{M-1} + \dots + b_1 p_1 + b_0}{(p_1-p_3) \dots (p_1-p_N)}$$

ولكن عندما نحاول إيجاد قيمة K_{11} بالطريقة العادية سنواجه مشكلة أخرى :

$$(s-p_1) \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2) \dots (s-p_N)} = \left[(s-p_1) \frac{k_{12}}{s-p_1} + (s-p_1) \frac{k_{11}}{s-p_2} \right. \\ \left. + (s-p_1) \frac{k_3}{s-p_3} + \dots + (s-p_1) \frac{k_N}{s-p_N} \right]$$

أو :

$$\frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_3) \dots (s-p_N)} = \frac{k_{12}}{s-p_1} k_{11}$$

الآن إذا وضعنا $s=p_1$ سيكون هناك قسمة على الصفر في كل من الطرفين ولن نستطيع حل المعادلة مباشرة

لإيجاد K_{11} . ولكن يمكننا تجنب هذه المشكلة بضرب المعادلة (٨.٨) في $(s-p_1)^2$ كما يلي :

$$\frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s-p_3) \dots (s-p_N)} = \left[(s-p_1)^2 \frac{k_3}{s-p_3} + \dots + (s-p_1)^2 \frac{k_N}{s-p_N} \right]$$

وبالتفاضل بالنسبة ل s نحصل على :

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s-p_3) \dots (s-p_N)} \right] = \left[k_{11} + \frac{(s-p_3)2(s-p_1)^2 - (s-p_1)^2}{(s-p_3)^2} k_3 + \dots \right. \\ \left. \frac{(s-p_N)2(s-p_1)^2 - (s-p_1)^2}{(s-p_N)^2} K_N \right]$$

وبعد ذلك نضع $s=p_1$ ونحل المعادلة للحصول على K_{11} :

$$k_{11} = \frac{d}{ds} \left[\frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s-p_3) \dots (s-p_N)} \right]_{s=p_1} = \frac{d}{ds} [(s-p_1)^2 G(s)]_{s=p_1}$$

إذا كان هناك أقطاب مكررة لدرجات أعلى مثل الدرجة الثالثة، أو الرابعة، وهكذا (وهذا غير عادي عملياً)، يمكننا حساب هذه المعاملات عن طريق مد فكرة التفاضل إلى التفاضل المتعدد. عموماً إذا كانت $H(s)$ على الصورة التالية:

$$H(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2) \dots (s-p_{N-1})(s-p_N)^m}$$

والتي تحتوي $N-1$ من الأقطاب الأحادية وعدد N من الأقطاب المتكررة من الدرجة m ، فإنه يمكننا كتابة ما يلي:

$$H(s) = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \dots + \frac{k_{N-1}}{s-p_{N-1}} + \frac{k_{N,m}}{(s-p_N)^m} + \frac{k_{N,m-1}}{(s-p_N)^{m-1}} + \dots + \frac{k_{N,1}}{s-p_N}$$

حيث الـ K 's أقطاب أحادية ويتم إيجادها بالطريقة السابقة والـ K 's للأقطاب المتكررة p_q من الدرجة m في المقام على الصورة $(s-p_q)^{m-k}$ ستكون:

$$K_{q,k} = \frac{1}{(m-k)!} \frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}} [(s-p_q)]_{s=p_q}, k = 1, 2, \dots, m$$

المعادلة رقم (٨.٩)

ومن المفهوم أن $0! = 1$.

مثال ٨.٤

تحويل لابلاس العكسي باستخدام الكسور الجزئية

احسب تحويل لابلاس العكسي للدالة:

$$G(s) = \frac{s+5}{s^2(s+2)}, \quad \sigma > 0$$

هذه الدالة لها قطب مكرر عند $s=0$. ولذلك سيكون تفكيك الدالة في صورة الكسور الجزئية كالتالي:

$$G(s) = \frac{K_{12}}{s^2} + \frac{K_{11}}{s} + \frac{K_3}{s+2}, \quad \sigma > 0$$

يمكن إيجاد K_{12} عن طريق ضرب $G(s)$ في s^2 ، ووضع $s=0$ في التعبير الباقي كما يلي:

$$K_{12} = [s^2 G(s)]_{s=0} = 5/2$$

يمكننا إيجاد K_{11} بضرب $G(s)$ في s^2 ، والتفاضل بالنسبة لـ s ووضع $s=0$ في التعبير الباقي كما يلي:

$$K_{11} = \frac{d}{ds} [s^2 G(s)]_{s=0} = \frac{d}{ds} \left[\frac{s+5}{s+2} \right]_{s=0} = \left[\frac{(s+2) - (s+5)}{(s+2)^2} \right]_{s=0} = -\frac{3}{4}$$

أما K_3 فيمكن حسابها بالطرق العادية وسنجد أنها ستكون $3/4$. وبالتالي يمكن كتابة $G(s)$ كما يلي:

$$G(s) = \frac{5}{2s^2} - \frac{3}{4s} + \frac{3}{4(s+2)}, \quad \sigma > 0$$

وبالتالي سيكون التحويل العكسي كما يلي:

$$g(t) = \left(\frac{5}{2}t - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}e^{-2t} \right) u(t) = \frac{10t - 3(1 - e^{-2t})}{4} u(t)$$

دعنا الآن نفحص تأثير مخالفة، أو انتهاك واحد من الافتراضات في الشرح الأصلي لطريقة مفكوك الكسور

الجزئية، وهو افتراض أن الدالة:

$$G(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2) \dots (s-p_N)}$$

عبارة عن كسر مثالي في المتغير s . إذا كانت $M \geq N$ فإننا لن نستطيع إجراء الكسور الجزئية لأن الكسور

الجزئية تكون على الصورة:

$$G(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \dots + \frac{K_N}{s-p_N}$$

بتجميع هذه العناصر في مقام واحد نحصل على:

$$(s) = \frac{K_1 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^{k=N} (s-p_k) + K_2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{k=N} (s-p_k) + \dots + K_N \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq N}}^{k=N} (s-p_k)}{(s-p_1)(s-p_2) \dots (s-p_N)}$$

أعلى أس في البسط هو $N-1$. ولذلك فإن أي نسبة من كثيرتي حدود في المتغير s يكون مطلوب فكها في

صورة كسور جزئية يجب أن تكون درجة البسط في s ليست أعلى من $N-1$ مما يجعل هذه النسبة نسبة مثالية في s . إن

ذلك لا يمثل عائقاً كبيراً لأنه إذا كانت النسبة غير مثالية في المتغير s ، فإنه في العادة يتم قسمة البسط على المقام حتى نصل إلى باقي قسمة تكون درجته أقل من درجة المقام. وبالتالي سيكون لدينا تعبير يتكون من مجموع من مجموعة من العناصر التي لها أس موجب صحيح بالإضافة إلى كسر مثالي في المتغير s . العناصر المكونة من أسس صحيحة للمتغير s سيكون تحويل لابلاس لها عبارة صدمات وأحاديات ذات درجات عليا.

مثال ٨.٥

تحويل لابلاس العكسي باستخدام الكسور الجزئية

$$G(s) = \frac{10s^2}{(s+1)(s+3)}, \quad \sigma > 0$$

احسب تحويل لابلاس للدالة التالية: $\sigma > 0$. هذه الدالة النسبية ليست كسراً مثالياً في المتغير s . بقسمة البسط على المقام نحصل على:

$$\frac{10s^2}{s^2 + 4s + 3} \Rightarrow \frac{10s^2}{(s+1)(s+3)} = 10 - \frac{40s+30}{s^2+4s+3}$$

ولذلك فإن:

$$G(s) = 10 - \frac{40s + 30}{(s + 1)(s + 3)}, \quad \sigma > 0$$

بإجراء الكسور الجزئية على الكسر المثالي نحصل على:

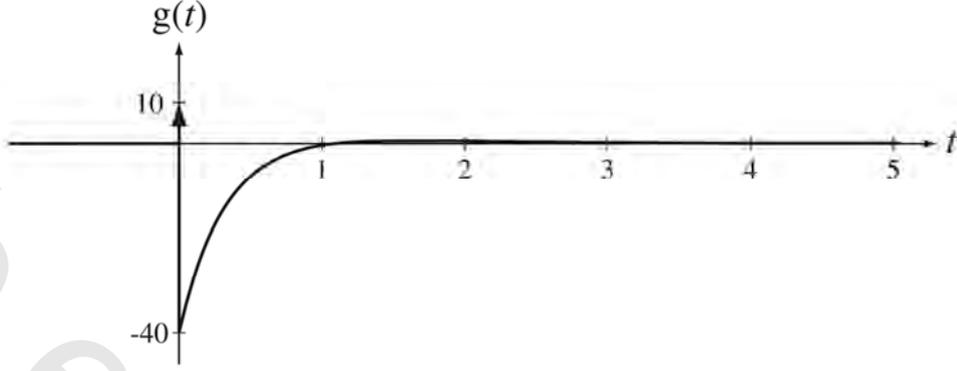
$$G(s) = 10 - 5 \left(\frac{9}{s+3} - \frac{1}{s+1} \right), \quad \sigma > 0$$

وبعد ذلك باستخدام الأزواج التحويلية التالية:

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 1 \quad \text{و} \quad e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}$$

نحصل على تحويل لابلاس العكسي كما يلي، وكما في شكل (٨.١٤):

$$g(t) = 10\delta(t) - 5(e^{-3at} - e^{-t})u(t)$$



شكل رقم (٨.١٤) تحويل لابلاس العكسي للدالة: $G(s) = \frac{10s^2}{(s+1)(s+3)}$

مثال ٨.٦

تحويل لابلاس العكسي باستخدام الكسور الجزئية

احسب تحويل لابلاس العكسي للدالة: $G(s) = \frac{s}{(s-3)(s^2-4s+5)}$, $\sigma > 2$

إذا اتبعنا الطريقة العادية في إيجاد الكسور الجزئية فإن علينا أولاً تحليل المقام على الصورة التالية:

$$G(s) = \frac{s}{(s-3)(s-2+j)(s-2-j)} , \sigma > 2$$

حيث سنجد أن هناك اثنين من الأقطاب المركبة المترافقة. طريقة التحليل بالكسور الجزئية ما زالت تعمل أيضاً في ظل هذه الأقطاب المركبة. بإجراء الكسور الجزئية نحصل على ما يلي:

$$G(s) = \frac{3/2}{s-3} - \frac{(3+j)/4}{s-2+j} - \frac{(3-j)/4}{s-2-j} , \sigma < 2$$

في وجود هذه الأقطاب المركبة يكون أمامنا خيارين:

- ١- نستمر كما لو كانت هذه الأقطاب حقيقية، حيث نوجد التعبير في النطاق الزمني ثم نبسطه.
- ٢- جمع الكسرين الأخيرين في كسر واحد بكل المعاملات الحقيقية ونوجد تحويل لابلاس العكسي له بالبحث عن هذه الصورة في الجداول القياسية.

الطريقة ١:

$$g(t) = \left(-\frac{3}{2}e^{3t} + \frac{3+j}{4}e^{(2-j)t} + \frac{3-j}{4}e^{(2+j)t} \right) u(-t)$$

وهذا تعبيراً صحيحاً للدالة $g(t)$ ولكنه ليس في الصورة المريحة. من الممكن تعديله إلى تعبير يحتوي دوال حقيقية القيمة فقط. بتوحيد المقام واستخدام بعض قوانين الدوال المثلثية:

$$g(t) = \left(-\frac{3}{2}e^{3t} + \frac{3e^{(2-j)t} + 3e^{(2+j)t} + je^{(2-j)t} - je^{(2+j)t}}{4} \right) u(-t)$$

$$g(t) = \left(-\frac{3}{2}e^{3t} + e^{2t} \frac{3(e^{-jt} + e^{jt}) + j(e^{-jt} - e^{jt})}{4} \right) u(-t)$$

$$g(t) = \left(\frac{3}{2} \right) \left\{ e^{2t} \left[\cos(t) + \left(\frac{1}{3} \right) \sin(t) \right] - e^{3t} \right\} u(-t)$$

الطريقة ٢:

$$G(s) = \frac{3/2}{s-3} - \frac{1}{4} \frac{(3+j)(s-2-j) + (3-j)(s-2+j)}{s^2 - 4s + 5}, \quad \sigma < 2$$

عند تبسيط البسط يكون لدينا كثيرة حدود من الدرجة الأولى مقسومة على كثيرة حدود من الدرجة الثانية

في المتغير s .

$$G(s) = \frac{3/2}{s-3} - \frac{1}{4} \frac{6s-10}{s^2-4s+5} = \frac{3/2}{s-3} - \frac{6}{4} \frac{s-5/3}{(s-2)^2+1}, \quad \sigma < 2$$

في جدول تحويلات لابلاس نحصل على:

$$-e^{-\alpha t} \cos(w_0 t) u(-t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + w_0^2}, \quad \sigma < -\alpha$$

وأيضاً:

$$-e^{-\alpha t} \sin(w_0 t) u(-t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{w_0}{(s+\alpha)^2 + w_0^2}, \quad \sigma < -\alpha$$

صورة المقام في الدالة التي معنا يتوافق مع صور مقامات هذه الدالة ولكن صورة البسط لا تتوافق. ولكن يمكننا إضافة وطرح مكونات لنجعل الدالتين النسبيتين يكون بسطهما متوافقاً مع الدوال التي في الجدول.

المعادلة رقم (٨.١٠)

$$G(s) = \frac{3/2}{s-3} - \frac{3}{2} \left[\frac{s-2}{(s-2)^2+1} + \left(\frac{1}{3} \right) \frac{1}{(s-2)^2+1} \right], \quad \sigma < 2$$

نستطيع الآن أن نوجد التحويل العكسي كما يلي:

$$g(t) = \left(\frac{3}{2}\right) \left\{ e^{2t} \left[\cos(t) + \left(\frac{1}{3}\right) \sin(t) \right] - e^{3t} \right\} u(-t)$$

بمعرفة أن هناك جذرين مركبين مترافقين، فإنه يمكننا تجميع العنصرين اللذين لهما جذور مركبة في عنصر واحد بمقام واحد على الصورة التالية:

$$G(s) = \frac{A}{s-3} + \frac{K_2}{s-p_2} + \frac{K_3}{s-p_3} = \frac{A}{s-3} + \frac{s(K_2 + K_3) - K_3p_2 - K_2p_3}{s^2 - 4s + 5}$$

وحيث إن كلاً من K_2 و K_3 هي ثوابت اختيارية:

$$G(s) = \frac{A}{s-3} + \frac{Bs + C}{s^2 - 4s + 5}$$

(كل من B و C سيكونان أرقاماً حقيقية لأن K_2 و K_3 مركبان مترافقان، وكذلك p_2 و p_3). وبالتالي يمكننا إيجاد مفكوك كسور جزئية في هذه الصورة. قيمة A سيتم إيجادها بالطرق العادية لتكون $3/2$. حيث إن $G(s)$ ومفكوكها في صورة الكسور الجزئية يجب أن تتساوى لأي قيمة اختيارية للمتغير s ، وبالتالي:

$$G(s) = \frac{s}{(s-3)(s^2 - 4s + 5)}$$

ويمكننا كتابة:

$$\left[\frac{s}{(s-3)(s^2 - 4s + 5)} \right]_{s=0} = \left[\frac{3/2}{s-3} + \frac{Bs + C}{s^2 - 4s + 5} \right]_{s=0}$$

أو:

$$0 = -1/2 + C/5 \rightarrow C = 5/2$$

وبالتالي:

$$\frac{s}{(s-3)(s^2 - 4s + 5)} = \frac{3/2}{s-3} + \frac{Bs + 5/2}{s^2 - 4s + 5}$$

ويمكننا إيجاد B بأن نضع s تساوي أي رقم مريح وليكن واحداً، وبالتالي سنحصل على:

$$-\frac{1}{4} = -\frac{3}{4} + \frac{B + 5/2}{2} \rightarrow B = -\frac{3}{2}$$

وبالتالي يمكن كتابة $G(s)$ كما يلي:

$$G(s) = \frac{3/2}{s-3} - \frac{3}{2} \frac{s-5/3}{s^2 - 4s + 5}$$

وهذه النتيجة مشابهة تماماً لما حصلنا عليه في المعادلة (٨.١٠) وعلى ذلك فنتيجة الحل كانت كما هي.

ماتلاب به دالة ضمنية تسمى residue يمكن استخدامها في إجراء الكسور الجزئية. الصورة العامة لهذه الدالة

هي:

$$[r,p,k]=\text{residue}(b,a)$$

حيث b هي متجه معاملات قوى المتغير s في البسط مرتبة تنازلياً تبعاً لهذه القوى، و a هي متجه معاملات قوى المتغير s في المقام مرتبة تنازلياً أيضاً، و r هي متجه المتبقيات، و p هي متجه موضع الأقطاب المحددة، و k هي متجه ما يسمى العناصر المباشرة، التي تنتج عندما تكون درجة البسط تساوي أو أكبر من درجة المقام. المتجهات a و b تحتوي دائماً كل قوى المتغير s تنازلياً حتى القوة صفر. كلمة residue أو المتبقي تأتي من نظريات التكامل على المسار أو الكونتور المغلق في المستوى المركب، وهذا الموضوع خارج نطاق هذا الكتاب. ما يهمنا هنا هو أن المتبقي أو ال residue هو البسط الناتج في مفكوك الكسور الجزئية.

مثال ٨.٧

الكسور الجزئية باستخدام الدالة residue في ماتلاب

$$H(s) = \frac{s^2+3s+1}{s^4+5s^3+2s^2+7s+3} \quad \text{أوجد مفكوك الكسور الجزئية للدالة التالية:}$$

في ماتلاب سيكون لدينا ما يلي:

»b = [1 3 1] ; a = [1 5 2 7 3] ;

»[r,p,k] = residue(b,a) ;

»r

r =

-0.0856

0.0496 - 0.2369i

0.0496 + 0.2369i

-0.0135

»p

p =

-4.8587

0.1441 + 1.1902i

0.1441 - 1.1902i

-0.4295

»k

k =

[]

»

هناك ٤ أقطاب وهي : -4.8587 و 0.1441+j1.902 و 0.1441-j1.902 و -0.4295 والمتبقيات عند هذه الأقطاب هي : -0.0856 و 0.0496-j0.2369 و 0.0496+j0.2369 و -0.0135 على التوالي. لا يوجد هناك عناصر مباشرة؛ لأن النسبة هي كسر مثالي في المتغير s. الآن يمكننا كتابة H(s) كما يلي :

$$H(s) = \frac{0.0496 - j0.2369}{s - 0.1441 - j1.902} + \frac{0.0496 + j0.2369}{s - 0.1441 + j1.902} - \frac{0.0856}{s + 4.8587} - \frac{0.0135}{s + 0.4295}$$

أو بتجميع العنصرين الذين لهما أقطاب ومتبقيات مركبة في عنصر واحد مع معاملات حقيقية كما يلي :

$$H(s) = \frac{0.0991s + 0.5495}{s^2 - 0.2883s + 1.437} - \frac{0.0856}{s + 4.8587} - \frac{0.0135}{s + 0.4295}$$

مثال ٨.٨

استجابة نظام LTI

احسب الاستجابة y(t) لنظام LTI في الأحوال التالية :

(أ) استجابة الصدمة $h(t) = 5e^{-4t}u(t)$ والإثارة هي $x(t)=u(t)$

(ب) استجابة الصدمة $h(t) = 5e^{-4t}u(t)$ والإثارة هي $x(t)=u(-t)$

(ج) استجابة الصدمة $h(t) = 5e^{4t}u(-t)$ والإثارة هي $x(t)=u(t)$

(د) استجابة الصدمة $h(t) = 5e^{4t}u(-t)$ والإثارة هي $x(t)=u(-t)$

(أ) $h(t) = 5e^{-4t}u(t) \leftrightarrow H(s) = \frac{5}{s+4}, \sigma > -4$

$x(t) = u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s}, \sigma > 0$

ولذلك :

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{5}{s(s+4)}, \sigma > 0$$

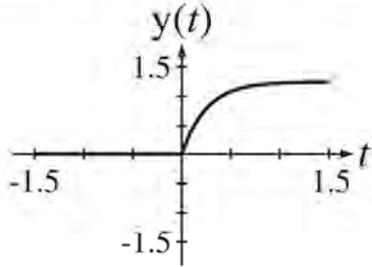
يمكن التعبير عن Y(s) باستخدام الكسور الجزئية كما يلي :

$$Y(s) = \frac{5/4}{s} - \frac{5/4}{s+4}, \sigma > 0$$

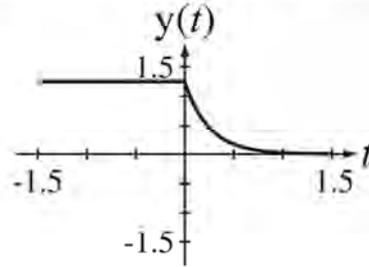
$$y(t) = \left(\frac{5}{4}\right)(1 - e^{-4t})u(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} Y(s) = \frac{5/4}{s} - \frac{5/4}{s+4}, \sigma > 0$$

كما في شكل (٨.١٥).

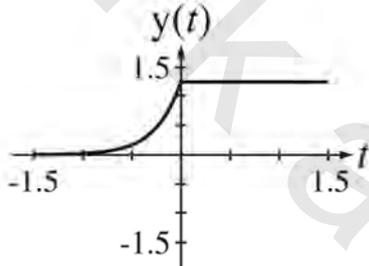
$$h(t) = 5e^{-4t} u(t), x(t) = u(t)$$



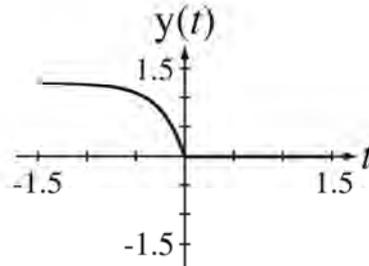
$$h(t) = 5e^{-4t} u(t), x(t) = u(-t)$$



$$h(t) = 5e^{4t} u(-t), x(t) = u(t)$$



$$h(t) = 5e^{4t} u(-t), x(t) = u(-t)$$



شكل رقم (٨.١٥) استجابة الأربعة الأنظمة

$$x(t) = u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = -\frac{1}{s}, \quad \sigma < 0 \quad (\text{ب})$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = -\frac{5}{s(s+4)}, \quad -4 < \sigma < 0$$

$$Y(s) = -\frac{5}{s} + \frac{5/4}{s+4}, \quad -4 < \sigma < 0$$

$$y(t) = \left(\frac{5}{4}\right) [e^{-4t}u(t) + u(-t)] \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = -\frac{5/4}{s} + \frac{5/4}{s+4}, \quad -4 < \sigma < 0$$

كما في شكل (٨.١٥).

$$h(t) = 5e^{4t}u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} H(s) = -\frac{5}{s-4}, \quad \sigma < 4 \quad (\text{ج})$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = -\frac{5}{s(s+4)}, \quad 0 < \sigma < 4$$

$$Y(s) = \frac{5/4}{s} - \frac{5/4}{s+4}, \quad 0 < \sigma < 4$$

$$y(t) = \left(\frac{5}{4}\right) [u(t) + e^{4t}u(-t)] \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} Y(s) = \frac{5/4}{s} - \frac{5/4}{s+4}, \quad 0 < \sigma < 4$$

كما في شكل (٨.١٥).

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{5}{s(s+4)}, \quad \sigma < 0 \quad (د)$$

$$Y(s) = -\frac{5/4}{s} + \frac{5/4}{s-4}, \quad \sigma < 0$$

$$y(t) = \left(\frac{5}{4}\right) [u(-t) - e^{4t}u(-t)] \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} Y(s) = -\frac{5/4}{s} + \frac{5/4}{s-4}, \quad \sigma < 0$$

كما في شكل (٨.١٥).

(٨.١٠) خواص تحويل فريير

افترض أن $g(t)$ و $h(t)$ لهما تحويلاً لابلاس التاليتان $G(s)$ و $H(s)$ ومنطقتا التقارب التاليتين ROC_H و ROC_G على التوالي، وبالتالي فإن الخواص المبينة في جدول ٨.٢ تكون مطبقة.

جدول رقم ٨.٢ خواص تحويل لابلاس

$\alpha g(t) + \beta h(t - t_0) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \alpha G(s) + \beta H(s), ROC \supset ROC_G \cap ROC_H$	الخطية
$g(t - t_0) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} G(s)e^{-st_0}, ROC = ROC_G$	الإزاحة الزمنية
$e^{s_0 t} g(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} G(s - s_0), ROC = ROC_G \text{ shifted by } s_0$ (s is in ROC if $s - s_0$ is in ROC_G)	الإزاحة في النطاق s
$g(at) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} (1/ a)G(s/a), ROC = ROC_G \text{ scaled by } a$ (s is in ROC if s/a is in ROC_G)	التحجيم الزمني
$\frac{d}{dt} g(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} sG(s), ROC \supset ROC_G$	التفاضل الزمني
$-t g(\tau) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{d}{ds} G(s), ROC = ROC_G$	التفاضل في النطاق s
$\int_0^t g(\tau) d\tau \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} G(s)/s, ROC \supset ROC_G \cap ROC_H \quad (\sigma > 0)$	التكامل الزمني
$g(t) * h(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} G(s)H(s), ROC \supset ROC_G \cap ROC_H$	الالتفاف الزمني
$g(0^+) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$	نظرية القيمة الابتدائية
$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$ if $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$ exists	نظرية القيمة النهائية

مثال ٨.٩

استخدام خاصية الإزاحة في النطاق s

$$X_2(s) = X_1(s - j4) + X_1(s + j4), \quad \sigma > -5 \text{ و } X_1(s) = \frac{1}{s+5}, \quad \sigma > -5$$

فأوجد $x_2(t)$.

$$e^{-5t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+5}, \quad \sigma > -5$$

باستخدام خاصية الإزاحة في النطاق s نحصل على:

$$\text{و } e^{-(5-j4)t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-j4+5}, \quad \sigma > -5$$

$$e^{-(5+j4)t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+j4+5}, \quad \sigma > -5$$

ولذلك:

$$x_2(t) = e^{-(5-j4)t}u(t) + e^{-(5+j4)t}u(t) = e^{-5t}(e^{j4t} + e^{-j4t})u(t) = 2e^{-5t} \cos(4t) u(t)$$

تأثير الإزاحة بكميات متساوية في اتجاهين متعاكسين وموازية للمحور w في النطاق s والإضافة يقابله الضرب في جيب تمام سببي في النطاق الزمني. التأثير الكلي يكون تعديلاً بموجة حاملة مقموعة وثنائي الجانب، والتي سيتم شرحها في الفصل ١٢.

مثال ٨.١٠

تحويل لابلاس لنبضتين مستطيلتين محجمتين زمنياً

$$\text{أوجد تحويل لابلاس للدالة } x(t) = u(t) - u(t-a) \text{ والدالة } x(2t) = u(2t) - u(2t-a).$$

لقد أوجدنا مسبقاً تحويل لابلاس للدالة $u(t)$ ، وكان $1/s$ حيث $\sigma > 0$. باستخدام خواص الخطية والإزاحة

الزمنية،

$$u(t) - u(t-a) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1 - e^{-as}}{s}, \quad \text{لكل } \sigma$$

والآن باستخدام خاصية التحجيم الزمني:

$$u(2t) - u(2t-a) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-\frac{as}{2}}}{s/2} = \frac{1 - e^{-\frac{as}{2}}}{s}, \quad \text{لكل } \sigma$$

هذه النتيجة يكون لها معنى عندما نفترض أن $u(2t)=u(t)$ و $u(2t-a)=u(2(t-a/2))=u(t-a/2)$

مثال ٨.١١

استخدام التفاضل في النطاق s لاستنتاج أزواج التحويل

باستخدام التفاضل في النطاق s وتحويل لابلاس الأساسي $\sigma > 0$ ، $u(t) \leftrightarrow 1/s$ ، أوجد تحويل لابلاس العكسي للدالة $1/s^2$ ، $\sigma > 0$.

$$u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 1/s, \sigma > 0$$

باستخدام الخاصية:

$$-tg(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{d}{ds}(G(s))$$

فإن:

$$-tu(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{1}{s^2}, \sigma > 0$$

ولذلك فإن:

$$\text{ramp}(t) = tu(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^2}, \sigma > 0$$

بالطريقة نفسها يمكننا أن نمدد ذلك إلى الحالة العامة التالية:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = -\frac{1}{s^2}, \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{2}{s^3}, \frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{1}{s}\right) = -\frac{6}{s^4}, \frac{d^4}{ds^4}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{24}{s^5}, \dots, \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right) = (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}}$$

أزواج التحويل المقابل لذلك ستكون:

$$t u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^2}, \sigma > 0, \quad \frac{t^2}{2} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^3}, \sigma > 0$$

$$\frac{t^3}{6} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^4}, \sigma > 0, \dots, \quad \frac{t^n}{n!} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^{n+1}}, \sigma > 0$$

مثال ٨.١٢

استخدام خاصية التكامل الزمني لاستنتاج أزواج من التحويل

في المثال ٨.١١ استخدمنا التكامل في التردد المركب لاستنتاج زوج تحويل لابلاس التالي:

$$tu(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^2}, \sigma > 0$$

استنتج الزوج نفسه $\sigma > 0$ ، $\frac{1}{s} \leftrightarrow \mathcal{L} u(t)$ مستخدماً خاصية التكامل بدلا من ذلك :

$$\int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = f(x) = \begin{cases} \int_{-0}^t d\tau = t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = tu(t)$$

ولذلك، فإن:

$$tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} x \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}, \quad \sigma > 0$$

التكامل المتتالي لـ $u(t)$ يعطي:

$$tu(t), \quad \frac{t^2}{2}u(t), \quad \frac{t^3}{6}u(t)$$

ويمكن استخدام ذلك لاستنتاج الصورة العامة التالية:

$$\frac{t^n}{n!}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^{n+1}}, \quad \sigma > 0$$

(٨.١١) تحويل لابلاس أحادي الجانب

التعريف

في المقدمة عن تحويل لابلاس كان ظاهراً أنه إذا افترضنا المدى الكامل لكل الإشارات الممكن تحويلها، فإنه أحياناً يمكن إيجاد منطقة تقارب وأحياناً لا يمكن ذلك. إذا تركنا بعض الدوال المرضية أو الباثولوجية مثل t^t و e^{t^2} التي تنمو بسرعة أكبر من الدالة الأسية (والتي لا يعرف لها فائدة هندسية) وحددنا أنفسنا للدوال التي تكون صفراً قبل أو بعد الزمن $t=0$ ، فإن تحويل لابلاس ومنطقة التقارب تكون أسهل كثيراً. إن الجودة التي جعلت الدالة $g_1(t) = Ae^{at}u(t)$ ، $a > 0$ والدالة $g_2(t) = Ae^{-at}u(-t)$ ، $a > 0$ يمكن أن نوجد لها تحويل لابلاس هو أن كل منهما كانت محدودة بدالة الخطوة لتكون صفراً على مدى شبه لانهائي.

حتى الدالة البسيطة مثل $g(t)=A$ المحدودة لكل قيم t ، تسبب مشاكل؛ لأن معامل التقارب الذي يجعل تحويل لابلاس لهذه الدالة يتقارب لكل الأزمنة لا يمكن إيجادها. ولكن الدالة $g(t)=Au(t)$ يمكن إيجاد تحويل لابلاس لها. إن وجود دالة وحدة الخطوة يسمح باختيار معامل تقارب للأزمنة الموجبة، مما يجعل تكامل تحويل لابلاس يتقارب. لهذا السبب (وأسباب أخرى)، فإن تعديل تحويل لابلاس بحيث يتجنب العديد من مشاكل التقارب يتم استخدامه عادة في التحليل العملي.

دعنا الآن نعيد تعريف تحويل لابلاس كالتالي: $G(s) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt$. لقد غيرنا فقط الحد الأدنى للتكامل. تحويل لابلاس المعروف بالعلاقة $G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st} dt$ يسمى عادة تحويل لابلاس الثنائي الجانبي. تحويل لابلاس المعروف بالدالة $G(s) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt$ يسمى عادة تحويل لابلاس أحادي الجانبي. التحويل الأحادي يكون محدوداً بمعنى أنه يستبعد سلوك الدالة في الزمن السالب. ولكن حيث إنه في التحليل العملي للأنظمة الحقيقية فإنه يمكن اختيار نقطة أصل زمنية بحيث تكون كل الإشارات تساوي صفراً قبل هذا الزمن، وهذا ليس فقط مشكلة عملية ولكنه له بعض المميزات. حيث إن الحد الأدنى للتكامل هو $t=0^-$ ، فإن أي سلوك للدالة $g(t)$ قبل الزمن $t=0$ سيكون ليس له أهمية في التحويل. إن ذلك يعني أن أي دالة أخرى يكون لها السلوك نفسه عند أو بعد الزمن $t=0$ سيكون لها التحويل نفسه. لذلك لكي يكون التحويل وحيداً لدالة واحدة في النطاق الزمني، فإنه يجب تطبيقها فقط على الدوال التي تكون صفراً قبل الزمن $t=0$.

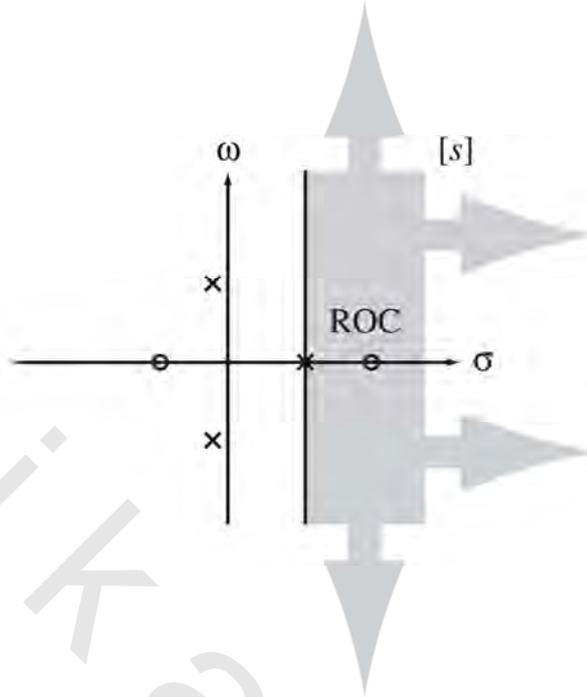
تحويل لابلاس العكسي الأحادي الجانبي سيكون هو نفسه كما استنتجنا من قبل مع تحويل لابلاس ثنائي الجانبي.

$$g(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} G(s)e^{+st} ds$$

ومن الشائع أن نرى زوج تحويل لابلاس كما في التعريف التالي:

$$\mathcal{L}(g(t)) = G(s) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt, \quad \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = g(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} G(s)e^{+st} ds$$

تحويل لابلاس الأحادي الجانبي تكون له منطقة تقارب ROC أبسط. إنها عادة تكون المنطقة في المستوى s على يمين كل الأقطاب المحددة للتحويل كما في شكل (٨.١٦).



شكل رقم (٨.١٦) منطقة التقارب ROC لتحويل لابلاس الأحادي الاتجاه.

الخواص الفريدة الخاصة بتحويل فوريير أحادي الاتجاه

معظم خواص تحويل لابلاس الأحادي الاتجاه هي نفسها خواص التحويل الثنائي الاتجاه، ولكن هناك القليل من الاختلافات. إذا كانت $g(t)=0$ لكل قيم $t < 0$ و $h(t)=0$ لقيم $t < 0$ و:

$$\mathcal{L}(h(t))=H(s) \text{ و } \mathcal{L}(g(t))=G(s)$$

فإن الخواص الموضحة في الجدول ٨.٣ لتحويل لابلاس الأحادي والمختلفة عن التحويل الثنائي الاتجاه ستكون قابلة للتطبيق.

خاصية الإزاحة الزمنية الآن أصبحت محققة للإزاحات في اتجاه اليمين (أزمنة تأخير) لأنه للإشارات المتأخرة فقط سيكون كل الجزء غير المساوي للصفر لها مازال مضموناً أن يكون ضمن حدود التكامل من 0^- حتى الما لانهاية. إذا تمت إزاحة إشارة ناحية اليسار (تقدم زمني)، فإن البعض منها قد يصبح قبل الزمن $t=0$ ولن يكون ضمن حدود تكامل تحويل لابلاس. إن ذلك قد يدمر العلاقة الفريدة بين تحويل الإشارة وتحويل الصورة المزاحة لها، مما يجعل من غير الممكن إيجاد علاقة بينهما بأي صورة عامة كما في شكل (٨.١٧).

بالطريقة نفسها، في خواص التحجيم الزمني والتردد، فإن الثابت a لا يمكن أن يكون سالباً؛ لأن ذلك قد يحول إشارة سببية إلى إشارة غير سببية، وتحويل لابلاس الأحادي يكون محققاً فقط للإشارات السببية.

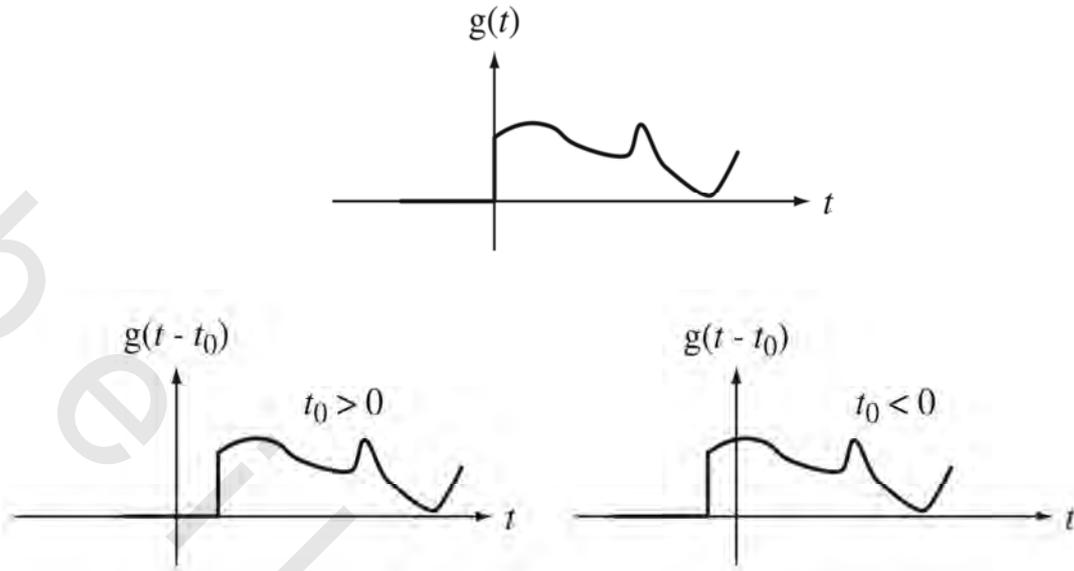
خواص التفاضل الزمني تعتبر خواص مهمة لتحويل لابلاس الأحادي. إن هذه هي الخواص التي تجعل حل المعادلات التفاضلية بالقيم الابتدائية طريقة نظامية. عند استخدام خواص التفاضل في حل المعادلات التفاضلية، فإن القيم الابتدائية يتم استدعاؤها آلياً في الصورة المناسبة كجزء ضمني في عملية التحويل. جدول ٨.٤ به العديد من تحويلات لابلاس الأحادية الشائعة الاستخدام.

جدول رقم ٨.٣ خواص تحويل لابلاس الأحادي الاتجاه المختلفة عن تحويل لابلاس الثنائي الاتجاه

$g(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} G(s)e^{-st_0}, t_0 > 0$	الإزاحة الزمنية
$g(at) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} (1/ a)G(s/a), a > 0$	التحجيم الزمني
$\frac{d}{dt}g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sG(s) - g(0^-)$	تفاضل الدرجة الأولى
$\frac{d^N}{dt^N}g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s^N G(s) - \sum_{n=1}^N s^{N-n} \left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(g(t)) \right]_{t=0^-}$	التفاضل من الدرجة N
$\int_{0^-}^t g(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} G(s)/s$	التكامل الزمني

جدول رقم ٨.٤ أزواج تحويل لابلاس الأحادي الشائعة

$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 1, \text{ All } s$
$u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 1/s, \sigma > 0$
$u_{-n}(t) = \underbrace{u(t) * \dots * u(t)}_{(n-1)\text{convolutions}} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 1/s^n, \sigma > 0$
$\text{ramp}(t) = t u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 1/s^2, \sigma > 0$
$e^{-\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+\alpha}, \sigma > -\alpha$
$t^n u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} n!/s^{n+1}, \sigma > 0$
$te^{-\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+\alpha)^2}, \sigma > -\alpha$
$t^n e^{-\alpha t} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}, \sigma > -\alpha$
$\sin(\omega_0 t) u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \sigma > 0$
$\cos(\omega_0 t) u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \sigma > -\alpha$
$e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t) u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}, \sigma > -\alpha$
$e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t) u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}, \sigma > -\alpha$



شكل رقم (٨.١٧) إزاحة الدالة السببية.

حل المعادلات التفاضلية مع القيم الابتدائية

إن قوة تحويل لابلاس تكمن في استخدامه كأداة في تحليل ديناميكيات الأنظمة الخطية. لقد ذكر ذلك في هذا الموضوع؛ لأن الأنظمة الخطية في الأنظمة المستمرة عادة ما يتم وصفها بمعادلات تفاضلية خطية، وباستخدام تحويل لابلاس يتم تمثيل التفاضل بالضرب في s . ولذلك فإن حل المعادلات التفاضلية تتحول إلى حل لمعادلة جبرية. تحويل لابلاس الأحادي بالذات يكون مناسباً في تحليل التوقيتات العابرة للأنظمة التي تبدأ إثارتها عند زمن البداية، الذي من الممكن أن يحدد عند $t=0$ للأنظمة غير المستقرة أو الأنظمة المدفوعة بدوال تكون غير محدودة مع زيادة الوقت.

مثال ٨.١٣

حل معادلة تفاضلية بقيم ابتدائية باستخدام تحويل لابلاس الأحادي

حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$x''(t) + 7x'(t) + 12x(t) = 0$$

لقيم $t > 0$ وعرضة للشروط الابتدائية التالية:

$$x(0^-) = 2 \text{ و } \frac{d}{dt}(x(t))_{t=0^-} = -4$$

بإجراء تحويل لابلاس على طرفي المعادلة نحصل على:

$$s^2 X(s) - sx(0^-) - \frac{d}{dt}(x(t))_{t=0^-} + 7[sX(s) - x(0^-)] + 12X(s) = 0$$

ومن هذه المعادلة نوجد $X(s)$ كما يلي :

$$X(s) = \frac{sx(0^-) + 7x(0^-) + \frac{d}{dt}(x(t))_{t=0^-}}{s^2 + 7s + 12}$$

ومنها :

$$X(s) = \frac{2s + 10}{s^2 + 7s + 12}$$

ويأجراء الكسور الجزئية :

$$X(s) = \frac{4}{s + 3} - \frac{2}{s + 4}$$

ومن جدول تحويلات لابلاس نعرف أن :

$$e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s + a}$$

وبالتالي فإن تحويل لابلاس العكسي سيكون :

$$x(t) = (4e^{-3t} - 2e^{-4t})u(t)$$

بالتعويض بهذه النتيجة في المعادلة التفاضلية الأصلية عندما $t \geq 0$ نحصل على :

$$\frac{d^2}{dt^2}[4e^{-3t} - 2e^{-4t}] + 7 \frac{d}{dt}[4e^{-3t} - 2e^{-4t}] + 12[4e^{-3t} - 2e^{-4t}] = 0$$

$$36e^{-3t} - 32e^{-4t} - 84e^{-3t} + 56e^{-4t} + 48e^{-3t} - 24e^{-4t} = 0$$

$$0 = 0$$

مما يثبت أن $x(t)$ التي حصلنا عليها تحل المعادلة التفاضلية فعلاً. وأيضاً :

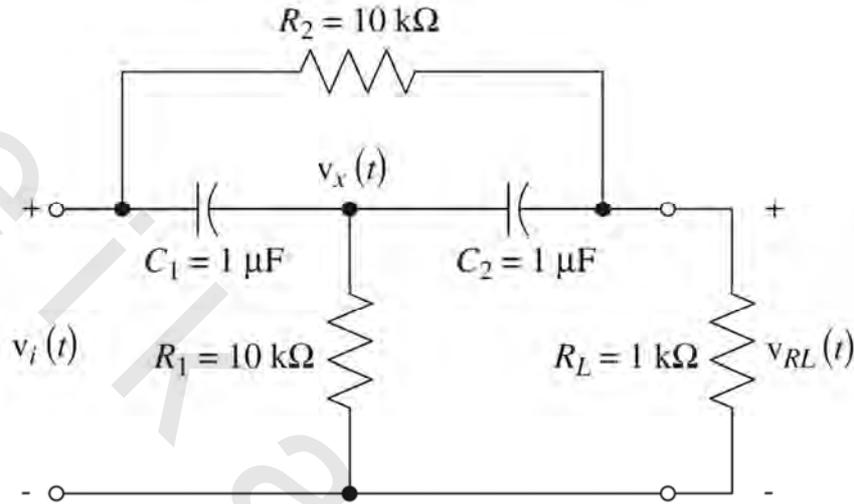
$$\frac{d}{dx}(x(t))_{t=0^-} = -12 + 8 = -4 \quad \text{و} \quad x(0^-) = 4 - 2 = 2$$

مما يثبت أن هذا الحل يحقق أيضاً الشروط الابتدائية.

مثال ٨.١٤

إستجابة الدائرة ذات الجسر

في شكل (٨.١٨) كانت الإثارة تساوي فولت $v_i(t)=10u(t)$. احسب استجابة الحالة صفر $v_{RL}(t)$.



شكل رقم (٨.١٨) الدائرة ذات الكوبري

من الدائرة يمكننا كتابة معادلات العقد كما يلي :

$$C_1 \frac{d}{dt} [v_x(t) - v_i(t)] + C_2 \frac{d}{dt} [v_x(t) - v_{RL}(t)] + C_1 v_x(t) = 0$$

$$C_2 \frac{d}{dt} [v_{RL}(t) - v_x(t)] + C_L v_{RL}(t) + C_2 [v_{RL}(t) - v_i(t)] = 0$$

حيث $G_1=1/R_1=10^{-4}S$ و $G_2=1/R_2=10^{-4}S$ و $G_L=10^{-3}S$. بإجراء تحويل لابلاس على المعادلة :

$$C_1 \{s v_x(s) - v_x(0^-) - [s v_i(s) - v_i(0^-)]\} + C_2 \{s v_x(s) - v_x(0^-) - [s v_{RL}(s) - v_{RL}(0^-)]\} + C_1 v_x(s) = 0$$

$$C_2 \{s v_{RL}(s) - v_{RL}(0^-) - [s v_x(s) - v_x(0^-)]\} + C_L v_{RL}(s) + C_2 [v_{RL}(s) - v_i(s)] = 0$$

حيث إننا نبحث أن استجابة الحالة صفر، فإن كل الشروط الابتدائية ستكون أصفارا، وبالتالي يمكن

تبسيط المعادلة كما يلي :

$$s C_1 [v_x(s) - v_i(s)] + s C_2 \frac{d}{dt} [v_x(s) - v_{RL}(s)] + C_1 v_x(s) = 0$$

$$s C_2 [v_{RL}(s) - v_x(s)] + C_L v_{RL}(s) + C_2 [v_{RL}(s) - v_i(s)] = 0$$

تحويل لابلاس للإثارة هو $V_1(s)=10/s$ ، وبالتالي فإن :

$$\begin{bmatrix} s(C_1 + C_2) + C_1 & -sC_2 \\ -sC_2 & sC_2 + (G_L + G_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x(s) \\ v_{RL}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10C_1 \\ 10C_2/s \end{bmatrix}$$

المحددة ذات الأبعاد 2x2 للمصفوفة هي :

$$\begin{aligned} \Delta &= [s(C_1 + C_2) + C_1][sC_2 + (G_L + G_2)] - s^2C_2^2 \\ &= s^2C_1C_2 + s[C_1C_2 + [(G_L + G_2)(C_1 + C_2)]] + C_1(G_L + G_2) \end{aligned}$$

وباستخدام قانون كرامر Cramer ، فإن حل استجابة تحويل لابلاس يمكن كتابتها كما يلي :

$$\begin{aligned} v_{RL}(s) &= \frac{\begin{vmatrix} s(C_1 + C_2) + C_1 & -sC_2 \\ -sC_2 & sC_2 + (G_L + G_2) \end{vmatrix}}{s^2C_1C_2 + s[C_1C_2 + [(G_L + G_2)(C_1 + C_2)]] + G_1(G_L + G_2)} \\ v_{RL}(s) &= 10 \frac{s^2C_1C_2 + sC_2 + (C_L + C_2) + C_1C_2}{s\{s^2C_1C_2 + s[C_1C_2 + [(G_L + G_2)(C_1 + C_2)]] + G_1(G_L + G_2)\}} \end{aligned}$$

وبالتالي :

$$v_{RL}(s) = 10 \frac{s^2 + sG_2(C_1 + C_2)/C_1C_2 + G_1G_2/C_1C_2}{s\{s^2 + s[G_1/C_1 + (G_L + G_2)(C_1 + C_2)/C_1C_2] + G_1(G_L + G_2)/C_1C_2\}}$$

وباستخدام القيم العددية للمكونات نحصل على :

$$v_{RL}(s) = 10 \frac{s^2 + 200s + 10,000}{s(s^2 + 2300s + 110,000)}$$

ويجاء الكسور الجزئية فنحصل على :

$$v_{RL}(s) = \frac{0.9091}{s} - \frac{0.243}{s + 48.86} + \frac{9.334}{s + 2251}$$

بإجراء تحويل لابلاس العكسي :

$$v_{RL}(t)[0.9091 - 0.243e^{-48.86t} + 9.334e^{-225t}]u(t)$$

كاختبار جزئي على صحة هذه الاستجابة ، فإن الاستجابة تقترب من 0.9091 مع اقتراب الزمن t من الما لانهاية. وهذا هو تماماً الجهد الذي سيخرج عند عمل القسمة الجهدية بين المقاومتين بافتراض أن المكثف مفتوح. وبالتالي ، فإن القيمة النهائية تبدو صحيحة. الاستجابة الابتدائية عند الزمن $t=0^+$ ستكون ١٠ فولت. في البداية يكون

المكثفات غير مشحونة، وبالتالي عند الزمن $t=0^+$ سيكون جهدا المكثفين مساويين للصفر، وسيكون جهدا الإثارة والاستجابة الشيء نفسه. وبالتالي فإن القيمة الابتدائية تبدو صحيحة أيضاً. هذان الاختبارين على الحل لا يضمنان بأن الحل سيكون صحيحاً عند كل الأزمنة، ولكنهما اختباران جيدان على معقولية الحل الناتج ويمكن استخدامهما في اكتشاف أي خطأ.

(٨.١٢) مخططات الأقطاب والأصفار والاستجابة الترددية

عملياً، فإن أكثر أنواع دوال العبور شيوعاً هي الدوال التي يمكن التعبير عنها كنسبة بين كثيرتي حدود في المتغير s كالتالي:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

هذا النوع من دوال العبور يمكن تحليله إلى الصورة التالية:

$$I(s) = A \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_M)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_M)}$$

وبالتالي يمكن كتابة الاستجابة الترددية للنظام كالتالي:

$$H(j\omega) = A \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \dots (j\omega - z_M)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_M)}$$

لكي نبين التفسير التخطيطي لهذه النتيجة بمثال، افترض أن دالة العبور ستكون:

$$H(s) = \frac{3s}{s + 3}$$

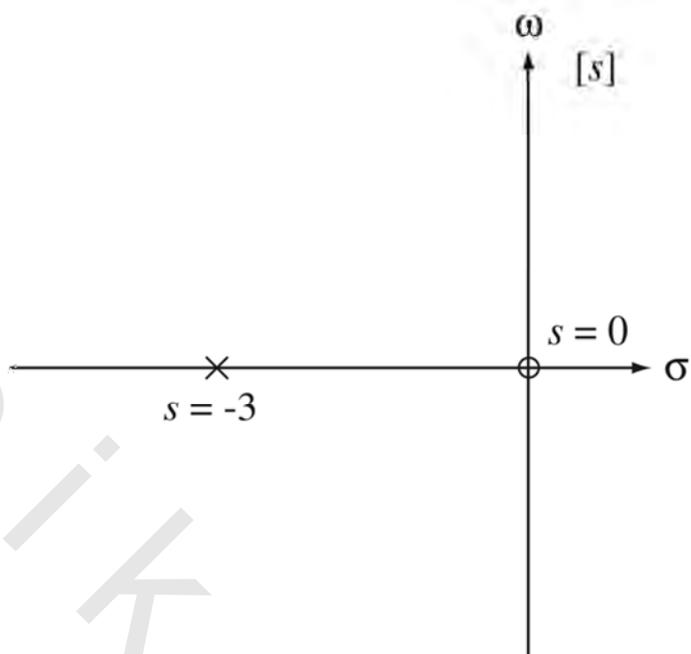
دالة العبور هذه لها صفر عند $s=0$ وقطب عند $s=-3$ كما في شكل (٨.١٩). بتحويل دالة العبور إلى استجابة

ترددية ستكون:

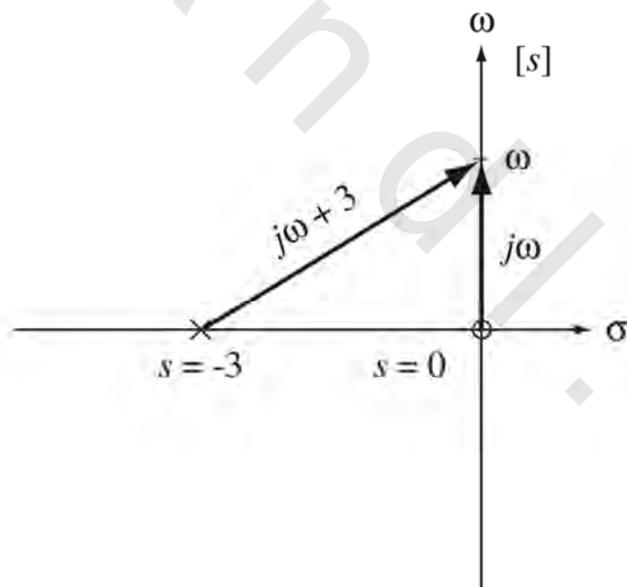
$$H(j\omega) = 3 \frac{j\omega}{j\omega + 3}$$

الاستجابة الترددية ثلاث مرات من نسبة $j\omega$ إلى $j\omega + 3$. يمكن التفكير في كل من البسط والمقام كمتجهات في

المستوى s كما في شكل (٨.٢٠) لأي قيمة اختيارية للمتغير w .



شكل رقم (٨.١٩) مخطط الأقطاب والأصفار للدالة $H(s) = 3s/(s+3)$.



شكل رقم (٨.٢٠) مخطط يوضح المتجهات $j\omega$ و $j\omega + 3$.

مع تغير التردد w ، فإن المتجهات ستتغير أيضاً. مقدار الاستجابة الترددية عند أي تردد يكون ثلاثة أمثال نسبة مقدار متجه البسط مقسوماً على مقدار متجه المقام كما يلي:

$$|H(j\omega)| = 3 \frac{|j\omega|}{|j\omega + 3|}$$

زاوية الاستجابة الترددية عند أي تردد تساوي زاوية الثابت $+3$ (وهي صفر) مجموعة مع زاوية البسط $j\omega$ (تساوي مقدار ثابت $\pi/2$ بالتقدير الدائري بالنسبة للترددات الموجبة ومقدار ثابت $-\pi/2$ للترددات السالبة)، ناقص زاوية المقام $j\omega+3$.

$$\angle H(j\omega) = \angle 3 + \angle j\omega - \angle (j\omega + 3)$$

عند الترددات التي تقترب من الصفر من الناحية الموجبة، فإن طول متجه البسط يقترب من الصفر وطول متجه المقام يقترب من قيمة صغرى تساوي 3، مما يجعل مقدار متجه الاستجابة الترددية الكلية يقترب من الصفر. في هذه الحدود نفسها تكون زاوية المتجه $j\omega$ هي $\pi/2$ بالتقدير الدائري وزاوية المتجه $j\omega+3$ تقترب من الصفر بحيث أن زاوية الاستجابة الكلية ستقترب من $\pi/2$ بالتقدير الدائري:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |H(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{|j\omega|}{|j\omega + 3|} = 0$$

وأيضاً:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle H(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle j\omega - \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle (j\omega + 3) = \frac{\pi}{2} - 0 = \pi/2$$

عندما تتقارب الترددات من الصفر من الجانب السالب، فإن طول متجه البسط يقترب من الصفر وطول متجه المقام يقترب من قيمة صغرى تساوي 3، مما يجعل مقدار الاستجابة الترددية الكلية يقترب من الصفر كما سبق. في هذه الحدود نفسها، فإن زاوية الـ $j\omega$ ستكون $-\pi/2$ بالتقدير الدائري، وزاوية الـ $j\omega+3$ تقترب من الصفر بحيث أن الزاوية الكلية للاستجابة الترددية ستقترب من $-\pi/2$ بالتقدير الدائري،

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^-} |H(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0^-} \frac{|j\omega|}{|j\omega + 3|} = 0$$

وأيضاً:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^-} \angle H(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0^-} \angle j\omega - \lim_{\omega \rightarrow 0^-} \angle (j\omega + 3) = -\frac{\pi}{2} - 0 = -\pi/2$$

مع اقتراب التردد من الما لانهاية الموجبة فإن طول كل من المتجهين يقترب من القيمة والاستجابة الترددية الكلية تقترب من 3. في نفس هذه الحدود فإن زاوية الـ $j\omega$ ستكون $\pi/2$ بالتقدير الدائري وزاوية الـ $j\omega+3$ تقترب أيضاً من $\pi/2$ بالتقدير الدائري بحيث أن الزاوية الكلية للاستجابة الترددية ستقترب من الصفر،

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} 3 \frac{|j\omega|}{|j\omega + 3|} = 3$$

وأيضاً:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle H(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle j\omega - \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle (j\omega + 3) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

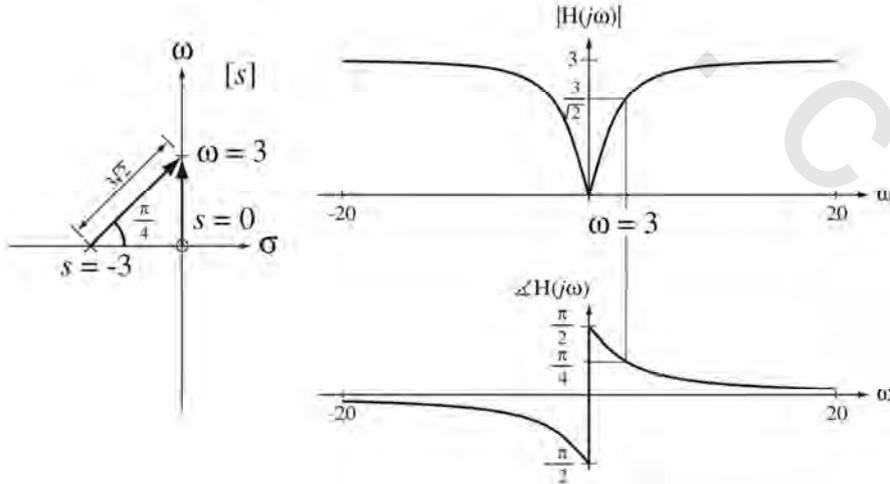
مع اقتراب التردد من ناقص ما لانهاية فإن طول المتجهين يقترب من القيمة 1 ومقدار الاستجابة الترددية الكلية نفسه الذي يقترب من الصفر، كما سبق. في النهاية نفسها، فإن زاوية الـ $j\omega$ ستكون $-\pi/2$ بالتقدير الدائري وزاوية الـ $j\omega+3$ تقترب من $-\pi/2$ بالتقدير الدائري وبالتالي، فإن زاوية الاستجابة الترددية الكلية ستكون صفراً،

$$\lim_{\omega \rightarrow -\infty} |H(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} 3 \frac{|j\omega|}{|j\omega + 3|} = 3$$

وأيضاً:

$$\lim_{\omega \rightarrow -\infty} \angle H(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \angle j\omega - \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \angle (j\omega + 3) = -\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

هذه المعاملات التي تم استنتاجها من مخطط الأقطاب والأصفار يتولد عنها مخطط لمقدار وزاوية الاستجابة الترددية كما في شكل (٨.٢١). هذا النظام يكبح الترددات المنخفضة نسبة إلى الترددات المرتفعة. إن أي نظام بهذا الشكل من الاستجابة الترددية يسمى عادة بمشرح منفذ للترددات المرتفعة؛ لأنه عامة يسمح بمرور الترددات المرتفعة ويمنع أو يكبح الترددات المنخفضة.



شكل رقم (٨.٢١) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لنظام دالة العبور له هي $H(s) = 3s/(s+3)$.

مثال ٨.١٥

الاستجابة الترددية لنظام من مخطط الأقطاب والأصفار

احسب مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لنظام دالة العبور له هي:

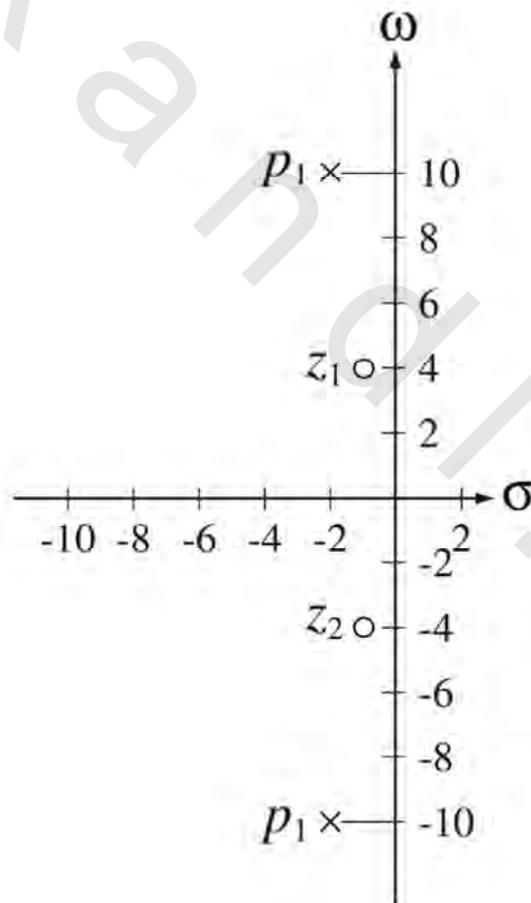
$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 17}{s^2 + 4s + 104}$$

هذه الدالة يمكن تحليلها إلى:

$$H(s) = \frac{(s + 1 - j4)(s + 1 + j4)}{(s + 2 - j10)(s + 2 + j10)}$$

وعلى ذلك فالأقطاب والأصفار لهذه الدالة هي: $z_1 = -1 + j4$ و $z_2 = -1 - j4$ و $p_1 = -2 + j10$ و $p_2 = -2 - j10$ كما هو

موضح في شكل (٨.٢٢).



شكل (٨.٢٢) مخطط الأقطاب والأصفار للدالة $H(s) = \frac{(s+1-j4)(s+1+j4)}{(s+2-j10)(s+2+j10)}$.

بتحويل دالة العبور إلى استجابة ترددية نحصل على :

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega + 1 - j4)(j\omega + 1 + j4)}{(j\omega + 2 - j10)(j\omega + 2 + j10)}$$

مقدار الاستجابة الترددية عند أي تردد يساوي حاصل ضرب مقدار متجهات البسط مقسوماً على حاصل

ضرب متجهات المقام كما يلي :

$$|H(j\omega)| = \frac{|j\omega + 1 - j4||j\omega + 1 + j4|}{|(j\omega + 2 - j10)||j\omega + 2 + j10|}$$

زاوية الاستجابة الترددية عند أي تردد تساوي مجموع زوايا متجهات البسط مطروحاً منها مجموع زوايا

متجهات المقام كما يلي :

$$\angle H(j\omega) = \angle (j\omega + 1 - j4) + \angle (j\omega + 1 + j4) - [\angle (j\omega + 2 - j10) + \angle (j\omega + 2 + j10)]$$

هذه الدالة ليس لها أصفار أو أقطاب على المحور ω . ولذلك فإن استجابتها لن تكون لا صفراً ولا ما

لانهاية عند أي تردد حقيقي. ولكن هذه الأقطاب والأصفار المحددة قريبة من المحور الحقيقي، ونتيجة لهذا القرب،

فإنها ستؤثر بقوة على الاستجابة الترددية بالقرب من هذه الأقطاب والأصفار. عندما يكون التردد ω بالقرب من p_1

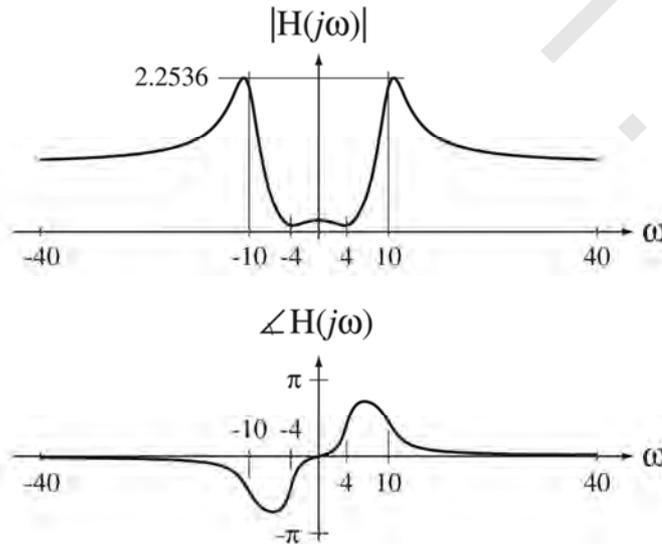
فإن المقام $j\omega + 2 - j10$ يصبح صغيراً جداً وهذا يجعل المقدار الكلي للاستجابة الترددية كبيراً جداً. وبالعكس عندما

يكون التردد ω بالقرب من الصفر z_1 فإن معامل البسط $j\omega + 1 - j4$ يصبح صغيراً جداً وهذا يجعل مقدار الاستجابة

الترددية الكلية صغيراً جداً. وبالتالي فإنه ليس فقط مقدار الاستجابة الترددية هو الذي يذهب إلى الصفر عند الصفر

وإلى الما لانهاية عند القطب، ولكنها تصبح صغيرة بالقرب من الصفر، وتصبح كبيرة بالقرب من القطب. مقدار

الاستجابة الترددية وزاويتها موضحان في شكل (٨.٢٣).

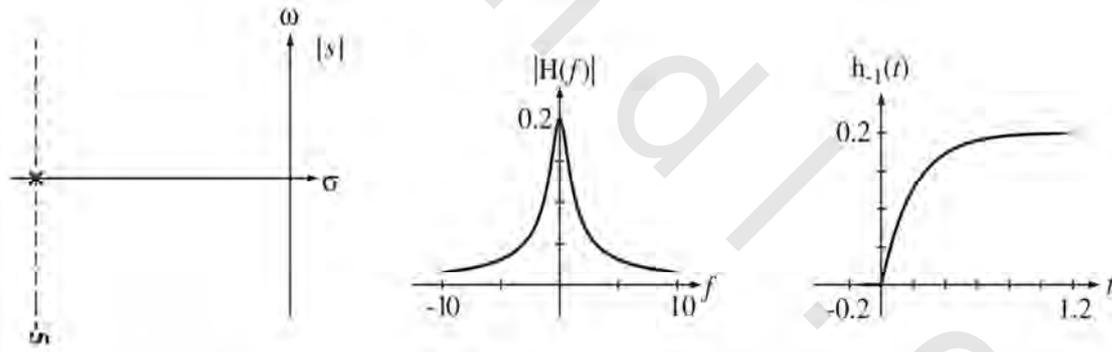


شكل (٨.٢٣) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لنظام دالة العبور له هي: $H(s) = \frac{s^2 + 2s + 17}{s^2 + 4s + 104}$

يمكن رسم الاستجابة الترددية باستخدام دالة ماتلاب الضمنية bode في صندوق أدوات التحكم ويمكن رسم مخطط الأقطاب والأصفار باستخدام الدالة pzmap.

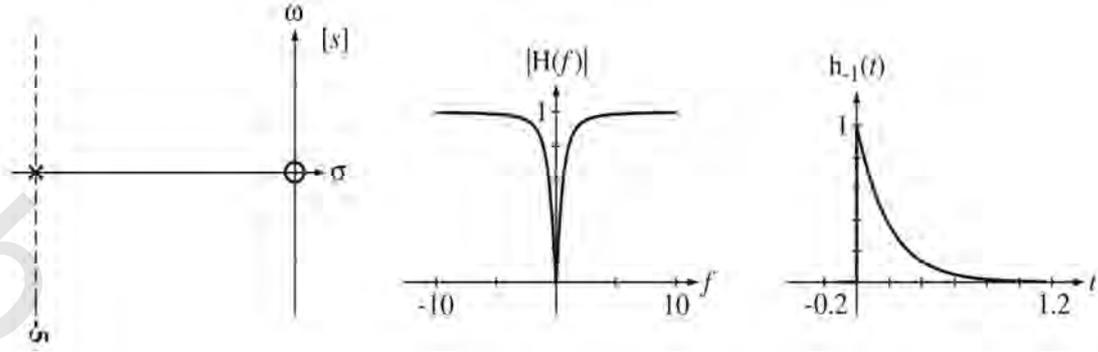
باستخدام هذه المفاهيم التخطيطية لتفسير مخطط الأقطاب والأصفار، يمكن مع التدريب، الاستنتاج التقريبي لكيف سيكون شكل الاستجابة الترددية. هناك معامل واحد في دالة العبور لم يحدد في مخطط الأقطاب والأصفار. المعامل A الذي لا يعتمد على التردد ليس له أي تأثير على شكل مخطط الأقطاب والأصفار، ولذلك لا يمكن تحديده من مجرد الملاحظة. ولكن كل السلوك الديناميكي يمكن تحديده من مخطط الأقطاب والأصفار في حدود ثابت تكبير معين.

فيما يلي سنرى تتابع من الأشكال عن كيفية تأثر كل من الاستجابة الترددية واستجابة الخطوة مع تغير عدد ومواضع الأقطاب والأصفار لأي نظام. في شكل (٨.٢٤) مخطط أقطاب وأصفار لنظام له قطب واحد بدون أصفار محددة. استجابته الترددية تؤكد أو تدعم الترددات المنخفضة بالنسبة للترددات المرتفعة مما يجعله مرشحاً منفذاً للترددات المنخفضة، واستجابة الخطوة له تعكس هذه الحقيقة حيث إنها لا تقفز بصورة منقطعة عند الزمن $t=0$ وتقترب من قيمة نهائية لا تساوي الصفر. إن استمرارية استجابة الخطوة عند الزمن $t=0$ هي نتيجة أن الترددات العالية لاستجابة الخطوة تم كبحها، ولذلك فإن الاستجابة لا يمكن أن تتغير بصورة مفاجئة، أو منقطعة.



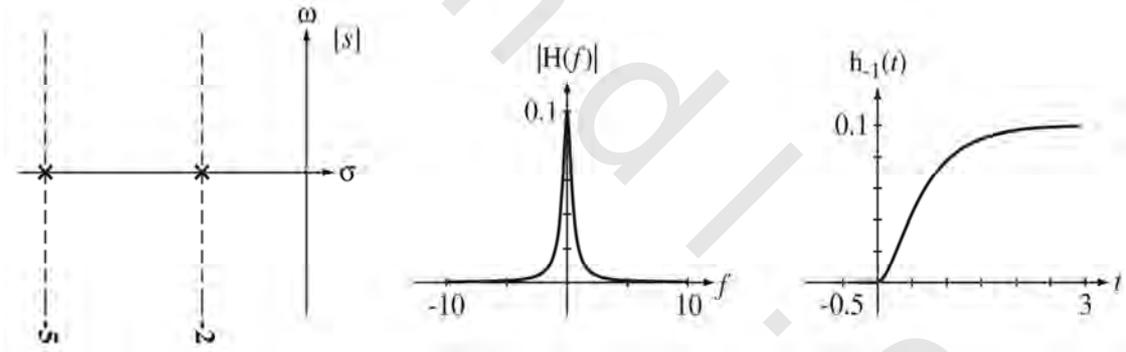
شكل رقم (٨.٢٤) مرشح منفذ للترددات المنخفضة من قطب واحد محدد.

في شكل (٨.٢٥) تمت إضافة صفر عند نقطة الأصل للنظام السابق في شكل (٨.٢٤). يغير ذلك الاستجابة الترددية إلى إستجابة مرشح منفذ للترددات المنخفضة. وهذا ينعكس في استجابة الصدمة من حقيقة أنه يقفز فجأة عند الزمن $t=0$ ويقترب من قيمة نهائية تساوي صفراً. القيمة النهائية لاستجابة الصدمة يجب أن تكون صفراً لأن المرشح يمنع تماماً التردد المساوي للصفر لإشارة الدخل. القفزة عند الزمن $t=0$ هي نتيجة أن محتويات استجابة الخطوة عند الترددات المرتفعة قد تمت إعادتها أو الاحتفاظ بها.



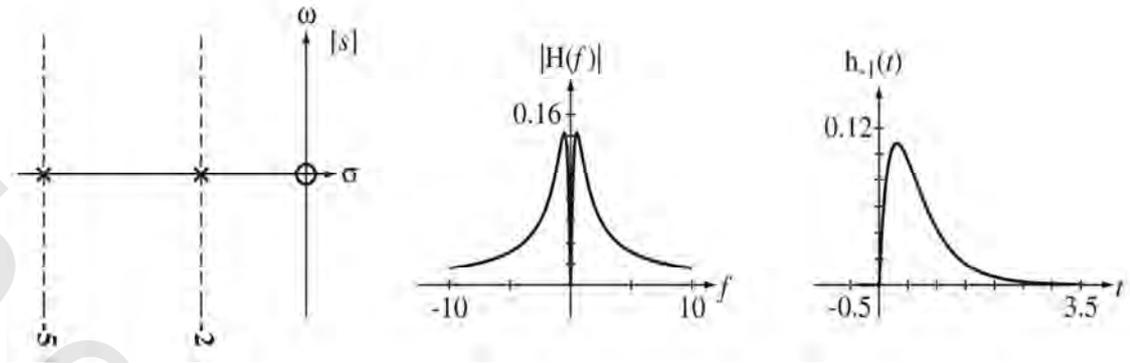
شكل رقم (٨.٢٥) مرشح منفذ للترددات المرتفعة من قطب واحد محدد وصفر واحد محدد.

شكل (٨.٢٦) يوضح مرشح منفذ للترددات المنخفضة من قطبين وبدون أصفار. استجابة الخطوة لا تقفز فجأة عند الزمن $t=0$ وتقترب من قيمة نهائية لا تساوي الصفر. الاستجابة مماثلة للاستجابة الموضحة في شكل (٨.٢٤) ولكن الكبح للترددات المرتفعة يكون أقوى في هذه الحالة، كما هو واضح من حقيقة أن الاستجابة الترددية تتناقص بمعدل أكبر مع زيادة التردد عن الحالة التي في شكل (٨.٢٤). استجابة الخطوة تختلف قليلاً أيضاً، حيث مع البدء عند الزمن $t=0$ يبدأ بميل يساوي صفر بدلاً من ميل لا يساوي الصفر في حالة الشكل (٨.٢٤).



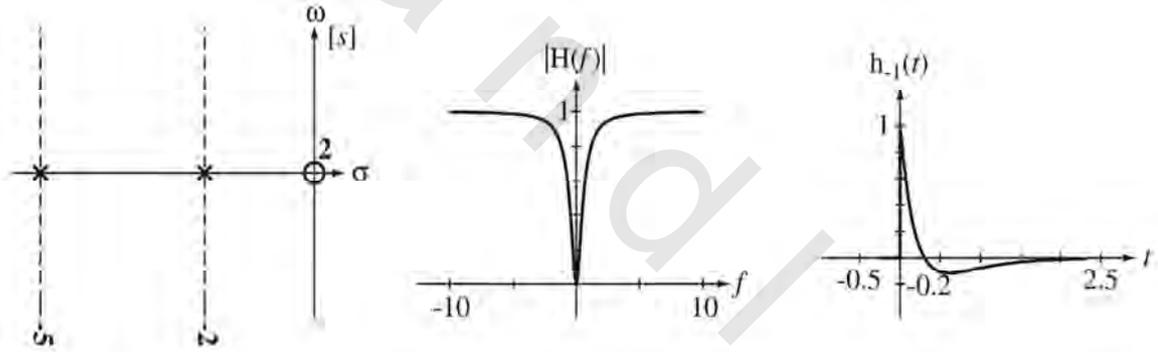
شكل رقم (٨.٢٦) نظام مكون من قطبين محددتين.

في شكل (٨.٢٧) تم إضافة صفر عند نقطة الأصل للنظام الموجود في شكل (٨.٢٦). استجابة الصدمة لا تقفز فجأة عند الزمن $t=0$ وتقترب من قيمة نهائية تساوي الصفر، لأن النظام يكبح كلاً من الترددات المرتفعة والترددات المنخفضة نسبة إلى ترددات المدى المتوسط. أي نظام بهذا الشكل من الاستجابة الترددية يسمى مرشحاً منفذاً لمدى من الترددات. كبح الترددات المرتفعة يجعل استجابة الخطوة مستمرة وكبح الترددات المنخفضة يجعل القيمة النهائية لاستجابة الخطوة تساوي صفر.



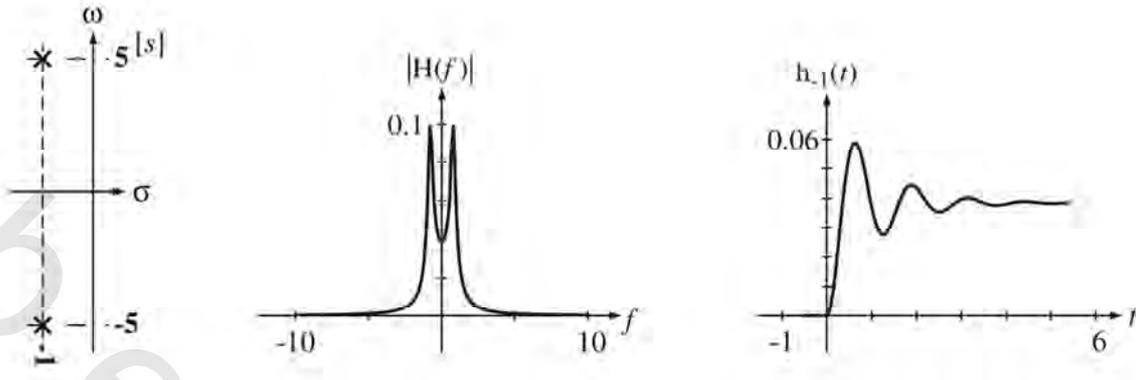
شكل رقم (٨.٢٧) مرشح منفذ لمدى من الترددات باستخدام قطبين وصفر واحد.

في شكل (٨.٢٨) تمت إضافة صفر آخر عند نقطة الأصل للمرشح الموجود في شكل (٨.٢٧) مما يجعله مرشحاً منفذاً للترددات العالية. استجابة الصدمة تقفز فجأة عند الزمن $t=0$ وتقترب الاستجابة من قيمة نهائية تساوي الصفر. الكبح عند الترددات المنخفضة أصبح أقوى من الشكل (٨.٢٥) وهذا أيضاً قد أثر على استجابة الصدمة مما يجعلها تتجاوز تحت الصفر قبل أن تستقر على الصفر.



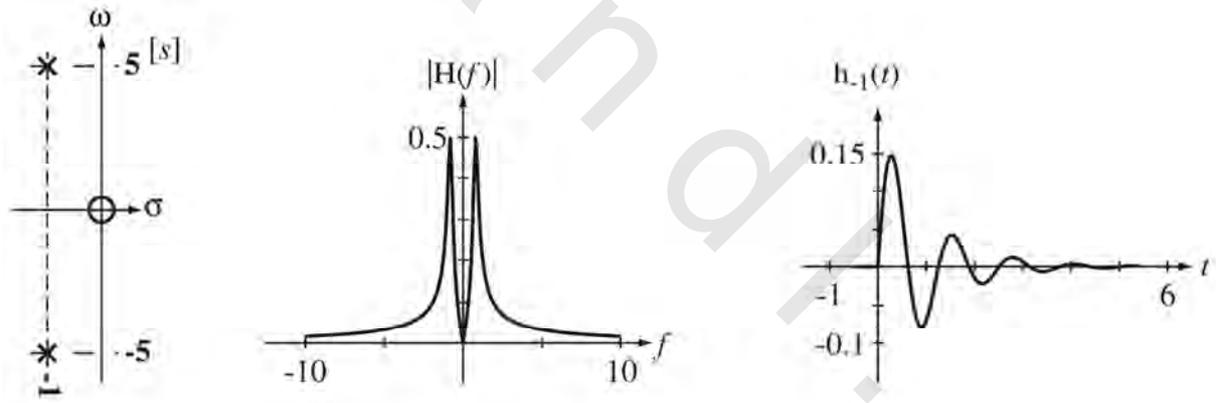
شكل رقم (٨.٢٨) مرشح منفذ للترددات العالية بقطين وصفرين محددتين.

في شكل (٨.٢٩) مرشح آخر منفذ للترددات المنخفضة، ولكن باستجابة ترددية مختلفة عن النظام الموضح في شكل (٨.٢٦) لأن الأقطاب الآن مركبة ومرافقة بدلاً من كونها حقيقية. الاستجابة الترددية تزداد وتصل إلى قمة عند ترددات قريبة من القطبين قبل أن تسقط عند الترددات العالية. أي نظام بهذا الشكل من الاستجابة الترددية يسمى نظام تحتي الكبح underdamped. في النظام تحتي الكبح، فإن استجابة الصدمة تتجاوز قيمتها النهائية overshoot، وتتردد حولها قبل أن تستقر. استجابة الخطوة ما زالت مستمرة في كل مكان ولا زالت تقترب من قيمة نهائية مختلفة عن الصفر ولكن بطريقة مختلفة عن شكل (٨.٢٦).



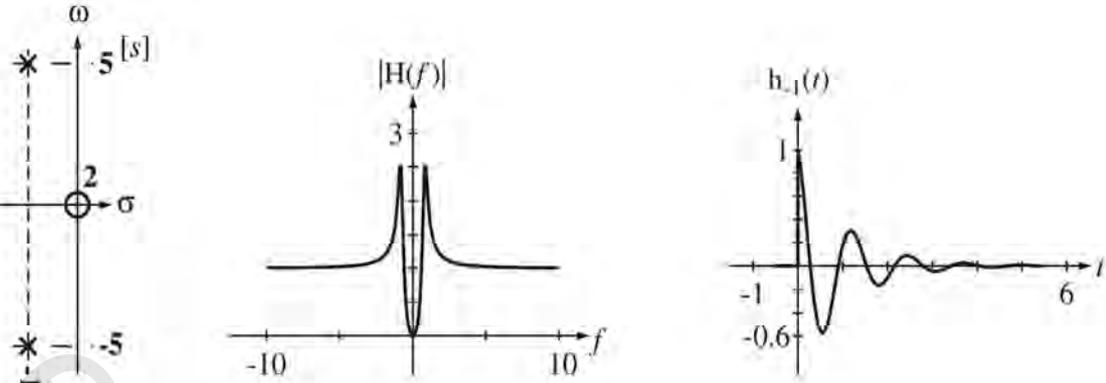
شكل رقم (٨.٢٩) مرشح منفذ للترددات المنخفضة تحتي الكبح بقطين .

في شكل (٨.٣٠) تمت إضافة صفر عند نقطة الأصل للنظام الموجود في شكل (٨.٢٩). لقد تسبب ذلك في تغيير النظام من مرشحاً منفذ للترددات المنخفضة إلى مرشحاً منفذ لمجال من الترددات، ولكن الآن نتيجة موضع القطبين المركبين المترافقين، فإن الاستجابة تكون تحتي الكبح كما هو واضح من القمم في الاستجابة الترددية والتردد في استجابة الخطوة بالمقارنة مع شكل (٨.٢٧).



شكل (٨.٣٠) مرشح منفذ لمجال من الترددات تحتي الكبح مكون من قطين محددين وصفر واحد.

في شكل (٨.٣١) تمت إضافة صفر آخر عند نقطة الأصل للنظام الموجود في شكل (٨.٣٠) مما يجعله مرشحاً منفذاً للترددات العالية. إنه مازال تحت كبحي كما هو واضح من القمم في الاستجابة الترددية والتردد في استجابة الخطوة.



شكل رقم (٨.٣١) مرشح منفذ للترددات المرتفعة تحت الكبح بقطبين وصفرين محددين.

لقد رأينا في هذه الأمثلة أن تحريك القطب ليقترّب من المحور ω يقلل من الكبح، ويجعل استجابة الخطوة تتردد لزمّن أطول ويجعل قمة الاستجابة الترددية ترتفع لقيمة أعلى. ماذا سيحدث إذا كانت الأقطاب ستكون على المحور ω ؟ في وجود قطبين محددين على المحور ω (وعدم وجود أصفار) يعني أن هناك أقطاباً عند $s = \pm j\omega_0$ وستكون دالة العبور على الصورة $H(s) = \frac{K\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$ وستكون استجابة الصدمة على الصورة التالية: $h(t) = K\sin(\omega_0 t)u(t)$. الاستجابة لأي صدمة تساوي دالة جيبية بعد الزمن $t=0$ وتتردد بمقدار ثابت وإلى ما لانهاية. الاستجابة الترددية ستكون: $H(j\omega) = \frac{K\omega_0}{(j\omega)^2 - \omega_0^2}$. ولذلك فإذا تمت إثارة النظام بدالة جيبية $x(t) = A\sin(\omega_0 t)$ ، فإن الاستجابة لن تكون محدودة ولا محددة لهذه الإثارة المحددة. إذا تمت إثارة النظام بدالة جيبية عند الزمن $t=0$ ، فإن $x(t) = A\sin(\omega_0 t)u(t)$ ، فإن الاستجابة ستكون:

$$y(t) = \frac{KA}{2} \left[\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} - t \cos(\omega_0 t) \right] u(t)$$

وهذه تحتوي دالة جيبية تبدأ عند الزمن $t=0$ وينمو مقدارها خطياً إلى المالا نهاية في الزمن الموجب. مرة ثانية فإن هذه الاستجابة تكون غير محدودة لأي إثارة محدودة مما يبين أن النظام يكون غير مستقر. الاستجابة غير المكبحة لا يمكن الوصول إليها في الحقيقية في الأنظمة غير الفعالة، ولكنها يمكن الوصول إليها في أي نظام باستخدام المكونات الفعالة التي يمكنها تعويض الفقد في الطاقة وتدفع نسبة الكبح لأن تساوي الصفر.

(٨.١٣) أهداف نظام ماتلاب

صندوق أدوات ماتلاب الخاص بالتحكم يحتوي العديد من الأوامر المفيدة في تحليل الأنظمة. إنها تعتمد على فكرة هدف النظام، وهو نوع خاص من المتغيرات في ماتلاب لوصف الأنظمة. أحد الطرق لتوليد وصف

للنظام في ماتلاب تكون من خلال الأمر tf، أو بمعنى transfer function أو دالة العبور. الصورة العامة لتوليد هدف نظام باستخدام الدالة tf هي:

$$\text{sys} = \text{tf}(\text{num}, \text{den}).$$

هذه الدالة تولد هدف نظام sys من متجهين هما num و den. المتجهان يكونان كليهما معاملات للمتغير s (بما في ذلك أي أصفار)، في ترتيب تنازلي في البسط والمقام في دالة العبور. فمثلاً، دعنا نفترض أن دالة العبور ستكون على الصورة:

$$H_1(s) = \frac{s^2 + 4}{s^5 + 4s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 31s + 75}$$

يمكننا تكوين $H_1(s)$ في ماتلاب كما يلي:

```
»num = [1 0 4];
»den = [1 4 7 15 31 75];
»H1 = tf(num,den);
»H1
Transfer function:
```

$$\frac{s^2+4}{s^5+4s^4+7s^3+15s^2+31s+75}$$

بدلاً من ذلك يمكننا تكوين وصف للنظام عن طريق استخدام الأصفار المحددة والأقطاب، وثابت التكبير لأي نظام باستخدام الدالة الضمنية zpk والتي صورتها العامة كما يلي:

$$\text{sys} = \text{zpk}(z,p,k)$$

حيث z هو متجه الأصفار للنظام، و p هو متجه الأقطاب، و k هو ثابت معامل التكبير. فمثلاً دعنا نفترض أن نظاماً له دالة العبور التالية:

$$H_2(s) = 20 \frac{s + 4}{(s + 3)(s + 10)}$$

يمكننا تكوين وصف النظام كما يلي:

```
»z = [-4];
»p = [-3 -10];
»k = 20;
»H2 = zpk(z,p,k);
»H2
Zero/pole/gain:
```

$$\frac{20 (s+4)}{(s+3) (s+10)}$$

طريقة أخرى لتكوين وصف النظام في ماتلاب هي عن طريق تعريف s كمتغير مستقل لتحويل لابلاس

بالأمر:

»s = tf('s');

وبالتالي يمكننا كتابة أي دالة عبور مثل $H_3(s) = \frac{s(s+3)}{s^2+2s+8}$ بالطريقة نفسها التي نستخدمها في الكتابة على الورق كما

يلي:

»H3 = s*(s+3)/(s^2+2*s+8)

Transfer function:

$$\frac{s^2 + 3s}{s^2 + 2s + 8}$$

يمكننا تغيير نوع من وصف الأنظمة إلى نوع آخر كالتالي:

»tf(H2)

Transfer function:

$$\frac{20 s + 80}{s^2 + 13s + 30}$$

»zpk(H1)

Zero/pole/gain:

$$(s^2 + 4)$$

$$(s + 3.081) (s^2 + 2.901s + 5.45) (s^2 - 1.982s + 4.467)$$

يمكننا الحصول على معلومات عن الأنظمة من وصفها باستخدام الأمرين tfdata و zpkdata ، كما يلي:

»[num,den] = tfdata(H2,'v');

»num

num =

0 20 80

»den

den =

1 13 30

»[z,p,k] = zpkdata(H1,'v');

»z

z =

0 + 2.0000i

0 - 2.0000i

»p

p =

-3.0807

-1.4505 + 1.8291i

-1.4505 - 1.8291i

0.9909 + 1.8669i

0.9909 - 1.8669i

k =

1

(المعامل 'v' في الأوامر السابقة يعني أن الإجابة يجب أن تكون في صورة متجه). هذه الإجابة الأخيرة توضح أن دالة العبور $H_1(s)$ لها أصفار عند $\pm j2$ وأقطاب عند -3.0807 و $-1.4505 \pm j1.829$ و $0.9909 \pm j1.8669$. ماتلاب به بعض الدوال المساعدة لإجراء تحليل الاستجابة الترددية في صندوق أدوات التحكم. مثل الأمر:

$$H = \text{freq}(\text{num}, \text{den}, \omega)$$

الذي يقبل متجهين num و den ونفسرها على أنها معاملات قوى المتغير s في البسط والمقام لدالة العبور $H(s)$ ، بدءاً بأعلى قوة حتى القوة صفر، بدون إهمال أي قوة. إنها ترجع في H الاستجابة الترددية المركبة بالترددات الزاوية في المتجه ω .

(٨.١٤) ملخص النقاط المهمة

- ١- يمكن استخدام تحويل لابلاس لتحديد دالة العبور لأي نظام LTI، ودالة العبور يمكن استخدامها في إيجاد استجابة هذا النظام لأي إثارة اختيارية.
- ٢- يوجد تحويل لابلاس للإشارات التي لا يتنامى مقدارها أسرع من الإشارات الأسية في كل من الزمن الموجب أو السالب.
- ٣- تعتمد منطقة التقارب لتحويل لابلاس لأي إشارة على كون هذه الإشارة يمينية أو يسارية الجانب.
- ٤- الأنظمة الموصوفة بمعادلات تفاضلية خطية، ذات معاملات ثابتة لها دوال عبور على صورة نسبة من كثيرتي حدود في المتغير s.
- ٥- مخطط الأقطاب والأصفار لدالة عبور أي نظام تجمع معظم خواص هذا النظام ويمكن استخدامها لإيجاد الاستجابة الترددية لهذا النظام في حدود ثابت التكبير.
- ٦- توجد دالة هدف في ماتلاب محددة للتعبير عن دالة العبور لأي نظام والعديد من الدوال التي تعمل على هذه الأهداف من هذا النوع.
- ٧- يمكن إيجاد زوج تحويل لابلاس وخواص تحويل لابلاس الأمامية والعكسية للعديد من الإشارات التي لها أهمية هندسية.
- ٨- تحويل لابلاس الأحادي يتم استخدامه عادة في حل المشاكل العملية؛ لأنه لا يتطلب أي افتراض لمنطقة التقارب ولذلك فإنه يستخدم ببساطة عن التحويل الثنائي الاتجاه.

تمارين مع الإجابة

(في كل تمرين، تم ترتيب الإجابات بطريقة عشوائية)

تعريف تحويل لابلاس

١- بدءاً من تحويل لابلاس المعروف كالتالي:

$$\mathcal{L}(g(t)) = G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st} dt$$

وبدون استخدام الجداول، أوجد تحويل لابلاس لهذه الإشارات:

$$x(t) = e^t u(t) \quad (\text{أ})$$

$$x(t) = e^{2t} \cos(200\pi t) u(-t) \quad (\text{ب})$$

$$x(t) = \text{ramp}(t) \quad (\text{ج})$$

$$x(t) = te^t u(t) \quad (\text{د})$$

$$\text{الإجابة: } \frac{1}{s-1}, \sigma > 1, \frac{1}{s^2}, \sigma > 0, \frac{s-2}{(s-2)^2 + (200\pi)^2}, \sigma < 2, \frac{1}{(s-1)^2}, \sigma > 1$$

وجود تحويل لابلاس

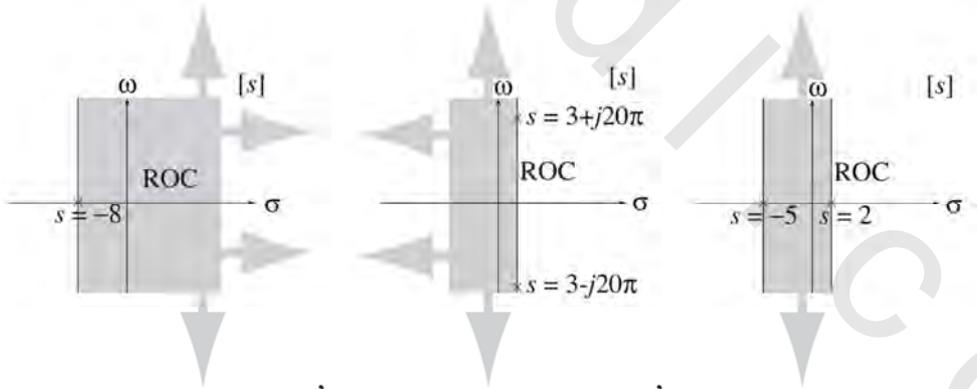
٢- ارسم مخطط الأقطاب والأصفار ومنطقة التقارب (إذا كانت موجودة) للإشارات التالية:

$$x(t) = e^{-8t} u(t) \quad (\text{أ})$$

$$x(t) = e^{3t} \cos(20\pi t) u(-t) \quad (\text{ب})$$

$$\text{؟ } x(t) = e^{2t} u(-t) - e^{-5t} u(t) \quad (\text{ج})$$

الإجابة:



شكل رقم (ج.ت-٢)

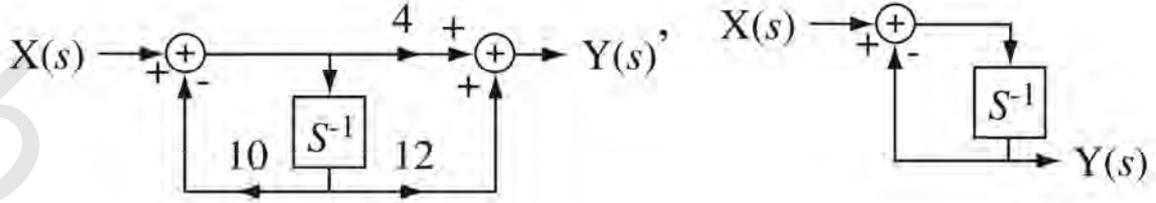
الصورة المباشرة II لتحقيق النظام

٣- ارسم مخططات الأنظمة بالطريقة المباشرة II للأنظمة التي دوال عبورها كما يلي:

$$H(s) = \frac{1}{s+1} \quad (\text{أ})$$

$$\text{؟ } H(s) = 4 \frac{s+3}{s+10} \quad (\text{ب})$$

الإجابة:



شكل رقم (ج.ت-٣)

تحويل لابلاس الأمامي والعكسي

٤- باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية، أوجد تحويل لابلاس للإشارات التالية:

$$x(t) = u(t) - u(t-1) \quad (\text{أ})$$

$$x(t) = 3e^{-3(t+2)}u(t+2) \quad (\text{ب})$$

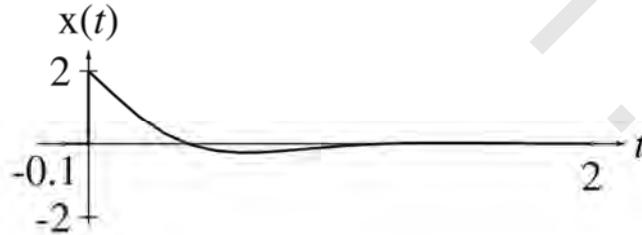
$$x(t) = 3e^{-3t}u(t-2) \quad (\text{ج})$$

$$x(t) = 5 \sin(\pi(t-1))u(t-1) \quad (\text{د})$$

$$\text{الإجابة: } \frac{3e^{-2s-6}}{s+3}, \frac{1-e^{-s}}{s}, \frac{5\pi e^{-s}}{s^2+\pi^2}, \frac{3e^{2s}}{s+3}$$

٥- باستخدام خاصية الإزاحة الترددية المركبة، أوجد وارسم تحويل لابلاس للدالة:

$$X(s) = \frac{1}{(s+j4)+3} + \frac{1}{(s-j4)+3}, \quad \sigma > -3$$



شكل رقم (ج.ت-٥)

٦- باستخدام خاصية التحجيم الزمني، أوجد تحويل لابلاس لهذه الإشارات:

$$x(t) = \delta(4t) \quad (\text{أ})$$

$$\int x(t) = u(4t) \quad (\text{ب})$$

الإجابة: $\sigma > 0$, $1/s$, و $1/4$, كل قيم s .

٧- باستخدام خاصية التفاضل الزمني، أوجد تحويل لابلاس للإشارات التالية:

$$x(t) = \frac{d}{dt}(u(t)) \quad (\text{أ})$$

$$x(t) = \frac{d}{dt}(e^{-10t}u(t)) \quad (\text{ب})$$

$$x(t) = \frac{d}{dt}(4\sin(10\pi t)u(t)) \quad (\text{ج})$$

$$\text{د) } x(t) = \frac{d}{dt}(10\cos(15\pi t)u(t))$$

الإجابة:

$$\frac{40\pi s}{s^2 + (10\pi)^2}, \text{Re}(s) > 0, \frac{10s^2}{s^2 + (15\pi)^2}, \text{Re}(s) > 0, 1, \text{all } s, \frac{s}{s+10}, \text{Re}(s) > -10$$

٨- باستخدام خاصية الالتفاف الزمني، احسب تحويلات لابلاس للإشارات التالية وارسم هذه الإشارات

مع الزمن:

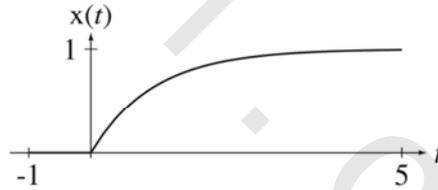
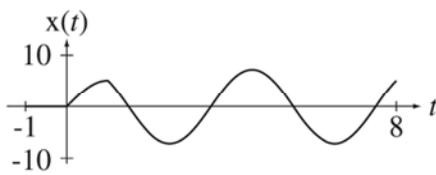
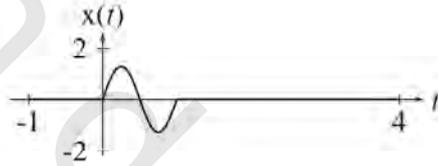
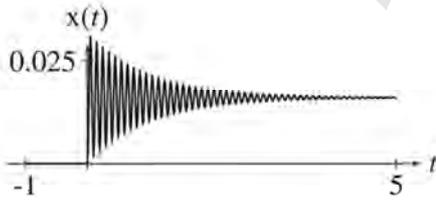
$$x(t) = e^{-t}u(t) * u(t) \quad (\text{أ})$$

$$x(t) = e^{-t}\sin(20\pi t)u(t) * u(-t) \quad (\text{ب})$$

$$x(t) = 8 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)u(t) * [u(t) - u(t-1)] \quad (\text{ج})$$

$$x(t) = 8 \cos(2\pi t)u(t) * [u(t) - u(t-1)] \quad (\text{د})$$

الإجابة:



شكل رقم (ج.ت-٨)

٩- باستخدام نظريات القيمة الابتدائية والنهائية، احسب القيم الابتدائية والنهائية (إذا أمكن) للإشارات

التي تحويل لابلاس لها ممثل في الدوال التالية:

$$X(s) = \frac{10}{s+8}, \sigma > -8 \quad (\text{أ})$$

$$X(s) = \frac{s+3}{(s+3)^2+4}, \sigma > -3 \quad (\text{ب})$$

$$X(s) = \frac{s}{s^2+4}, \sigma > 0 \quad (\text{ج})$$

$$X(s) = \frac{10s}{s^2+10s+300}, \sigma < -5 \quad (\text{د})$$

$$X(s) = \frac{8}{s(s+20)}, \sigma > 0 \quad (هـ)$$

$$? X(s) = \frac{8}{s^2(s+20)}, \sigma > 0 \quad (و)$$

الإجابة: 10، لا يمكن التطبيق، 0، 1، لا يمكن التطبيق، 2/5، 1، لا يمكن التطبيق، 0، لا يمكن التطبيق.

١٠- احسب تحويل لابلاس العكسي للدوال التالية:

$$X(s) = \frac{24}{s(s+8)}, \sigma > 0 \quad (أ)$$

$$X(s) = \frac{20}{s^2+4s+3}, \sigma < -3 \quad (ب)$$

$$X(s) = \frac{5}{s^2+6s+73}, \sigma > -3 \quad (ج)$$

$$X(s) = \frac{10}{s(s^2+6s+73)}, \sigma > 0 \quad (د)$$

$$X(s) = \frac{4}{s(s^2+6s+73)}, \sigma > 0 \quad (هـ)$$

$$X(s) = \frac{2s}{s^2+2s+13}, \sigma < -1 \quad (و)$$

$$X(s) = \frac{s}{(s+3)}, \sigma > -3 \quad (ز)$$

$$X(s) = \frac{s}{s^4+4s+4}, \sigma > -2 \quad (ح)$$

$$X(s) = \frac{s^2}{s^4-4s+4}, \sigma < 2 \quad (ط)$$

$$? X(s) = \frac{10s}{s^4+4s^2+4}, \sigma > -2 \quad (ي)$$

الإجابة:

$$2e^{-t}[(1/\sqrt{12})\sin(\sqrt{12}t) - \cos(\sqrt{12}t)]u(t), 10(e^{-3t} - e^{-t})u(-t)$$

$$e^{-2t}(1 - 2t)u(t), \frac{10}{73}[1 - \sqrt{73/64}e^{-3t} \cos(8t - 0.3588)]u(t), \delta(t) - 4e^{2t}(t + 1)u(-t)$$

$$\frac{A}{(73)^2}[292t - 24 + 24e^{-3t}(\cos(8t) - (55/48)\sin(8t))]u(t), (5/8)e^{-3t} \sin(8t)u(t)$$

$$\delta(t) - 3e^{-3t}u(t), 3(1 - e^{-3t})u(t), (5/\sqrt{2})t \sin(\sqrt{2}t)u(t)$$

١١- افترض الدالة $x(t)$ معرفة كما يلي: $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s(s+5)}{s^2+16}, \sigma > 0$ ، وأن $x(t)$ يمكن كتابتها كمجموع ثلاث

دوال، اثنتان منها دوال جيبيية سببية.

(أ) ما هي الدالة الثالثة؟

(ب) ما هو التردد الدوري للدالة الجيبيية السببية؟

الإجابة: دالة صدمة، 0.637Hz

تحويل لابلاس الأحادي

١٢- بدءا بتعريف تحويل لابلاس الأحادي التالي:

$$\mathcal{L}(g(t)) = G(s) = \int_{0^-}^{\infty} g(t)e^{-st} dt$$

وبدون استخدام الجداول، احسب تحويل لابلاس الأحادي للدوال التالية:

$$x(t) = e^{-t}u(t) \quad (\text{أ})$$

$$x(t) = e^{2t}\cos(200\pi t)u(t) \quad (\text{ب})$$

$$x(t) = u(t+4) \quad (\text{ج})$$

$$x(t) = u(t-4) \quad (\text{د})$$

الإجابة:

$$\frac{1}{s+1}, \sigma > 0, \frac{s-2}{(s-2)^2(200\pi)^2} \sigma > 2, \frac{e^{-4s}}{s}, \sigma > 0$$

حل المعادلات التفاضلية

١٣- باستخدام تحويل لابلاس الأحادي، حل المعادلات التفاضلية التالية عندما $t \geq 0$:

$$x'(t) + 10x(t) = u(t) \quad \text{حيث } x(0) = 1 \quad (\text{أ})$$

$$x''(t) - 2x'(t) + 4x(t) = u(t) \quad \text{حيث } x(0) = 0 \text{ و } \left[\frac{d}{dt} x(t) \right]_{t=0^-} = 4 \quad (\text{ب})$$

$$x'(t) + 2x(t) = \sin(2\pi t)u(t) \quad \text{حيث } x(0) = -4 \quad (\text{ج})$$

الإجابة:

$$(1/4) \left(1 - e^t \cos(\sqrt{3}t) + (17/\sqrt{3})e^t \sin(\sqrt{3}t) \right) u(t), \frac{1 + 9e^{-10t}}{10} u(t)$$

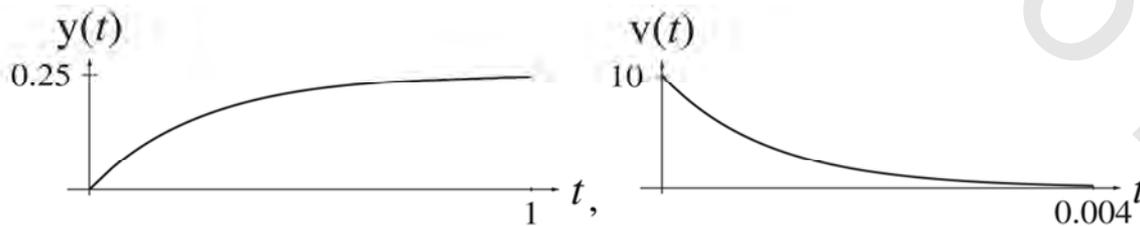
$$x(t) = \left[\frac{2\pi e^{-2t} - 2\pi \cos(2\pi t) + 2\sin(2\pi t)}{4 + (2\pi t)^2} - 4e^{-2t} \right] u(t)$$

١٤- أكتب المعادلات التفاضلية التي تصف الأنظمة الموضحة في شكل (ت-١٤) واحسب وارسم

الاستجابات الموضحة:

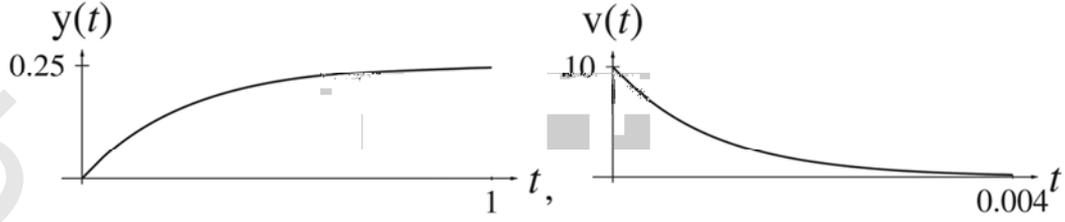
$$y(t) = u(t) \quad \text{و } y(0) = 0 \quad \text{هي الاستجابة و } (\text{أ})$$

$$v(t) = 10 \quad \text{و } v(0) = 10 \quad \text{هي الاستجابة.} \quad (\text{ب})$$



شكل رقم (ت-١٤).

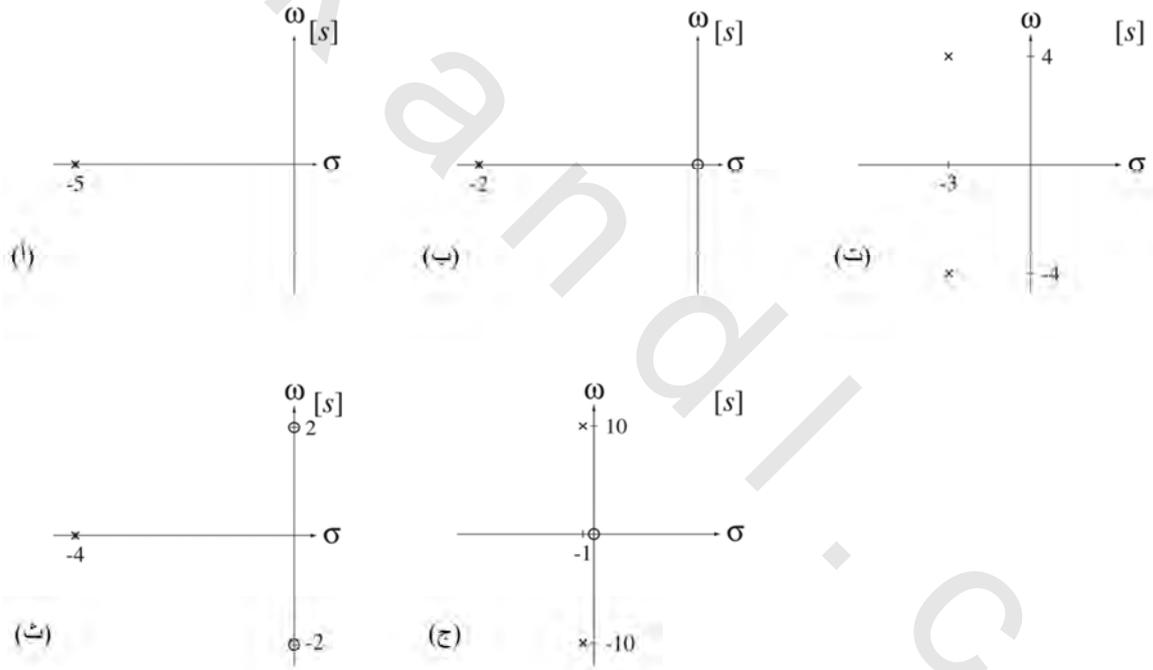
الإجابة:



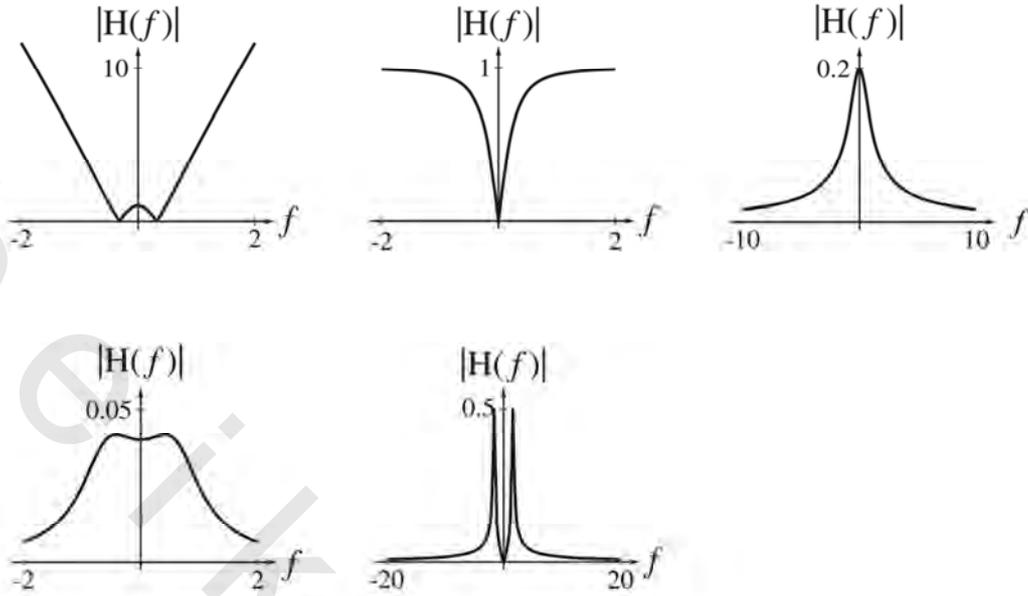
شكل رقم (ج.ت-١٤)

مخططات الأقطاب والأصفار والاستجابة الترددية

١٥- لكل مخطط للأقطاب والأصفار موضح في شكل (ت-١٥) ارسم بالتقريب مقدار الاستجابة الترددية:



شكل رقم (ت-١٥)



شكل رقم (ج.ت-١٥)

تمارين بدون إجابات

تعريف تحويل لابلاس

١٦ - باستخدام التعريف التكاملية احسب تحويل لابلاس للدوال الزمنية التالية:

(أ) $g(t) = e^{-at}u(t)$

(ب) $g(t) = e^{-a(t-\tau)}u(t-\tau)$

(ج) $g(t) = \sin(\omega_0 t)u(t)$

(د) $g(t) = \text{rect}(t)$

(هـ) $g(t) = \text{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)$

وجود تحويل لابلاس

١٧ - ارسم مخطط الأصفار والأقطاب ومنطقة التقارب (إذا كانت موجودة) للإشارات التالية:

(أ) $x(t) = e^{-t}u(-t) - e^{-4t}u(t)$

(ب) $x(t) = e^{-2t}u(-t) - e^t u(t)$

بناء الأنظمة بالصورة المباشرة II

١٨ - ارسم مخطط تنفيذ النظام بالطريقة المباشرة II للأنظمة التي لها دوال العبور التالية:

(أ) $H(s) = 10 \frac{s^2+8}{s^3+3s^2+7s+22}$

(ب) $H(s) = 10 \frac{s+20}{(s+4)(s+8)(s+14)}$

تحويل لابلاس الأمامي والعكسي

١٩ - باستخدام جدول تحويلات لابلاس وخواصه أوجد تحويل لابلاس لكل من الدوال التالية:

$$g(t)=5\sin(2\pi(t-1))u(t-1) \quad (\text{أ})$$

$$g(t)=5\sin(2\pi t)u(t-1) \quad (\text{ب})$$

$$g(t)=2\cos(10\pi t)\cos(100\pi t)u(t) \quad (\text{ج})$$

$$g(t) = \frac{d}{dt}(u(t-2)) \quad (\text{د})$$

$$g(t) = \int_{0+}^t u(\tau) d\tau \quad (\text{هـ})$$

$$g(t) = \frac{d}{dt}(5e^{-(t-\tau)/2}u(t-\tau)), \quad \tau > 0 \quad (\text{و})$$

$$g(t) = 2e^{-5t} \cos(10\pi t) u(t) \quad (\text{ز})$$

$$x(t)=5\sin(\pi t-\pi/8)u(-t) \quad (\text{ح})$$

-٢٠ بفرض زوج التحويل التالي :

$$g(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{s+1}{s(s+4)}, \quad \sigma > 1$$

أوجد تحويل لابلاس لما يأتي :

$$g(2t) \quad (\text{أ})$$

$$\frac{d}{dt}(g(t)) \quad (\text{ب})$$

$$g(t-4) \quad (\text{ج})$$

$$g(t) * g(t) \quad (\text{د})$$

-٢١ أوجد دوال النطاق الزمني التي تمثل تحويل لابلاس العكسي للدوال التالية. بعد ذلك باستخدام نظرية

القيمة الابتدائية والنهائية، اثبت أنها تتوافق مع دوال النطاق الزمني.

$$G(s) = \frac{4s}{(s+3)(s+8)}, \quad \sigma > -3 \quad (\text{أ})$$

$$G(s) = \frac{4}{(s+3)(s+8)}, \quad \sigma > -3 \quad (\text{ب})$$

$$G(s) = \frac{s}{s^2+2s+2}, \quad \sigma > -1 \quad (\text{ج})$$

$$G(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2+2s+2}, \quad \sigma > -1 \quad (\text{د})$$

-٢٢ بفرض زوج التحويل التالي :

$$e^{4t}u(-t) \stackrel{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} G(s)$$

أوجد تحويل لابلاس العكسي لما يأتي :

$$G(s/3), \quad \sigma < 4 \quad (\text{أ})$$

$$G(s-2)+G(s+2), \quad \sigma < 4 \quad (\text{ب})$$

$$G(s)/s, \quad \sigma < 4 \quad (\text{ج})$$

-٢٣ أوجد القيم العددية للثوابت التالية K_0 و K_1 و K_2 و p_1 و p_2 :

$$\frac{s^2+3}{3s^2+s+9} = K_0 + \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2}$$

-٢٤ نظام له دالة العبور التالية : $H(s) = \frac{s(s-1)}{(s+2)(s+a)}$ ، والتي يمكن حلها بالكسور الجزئية على

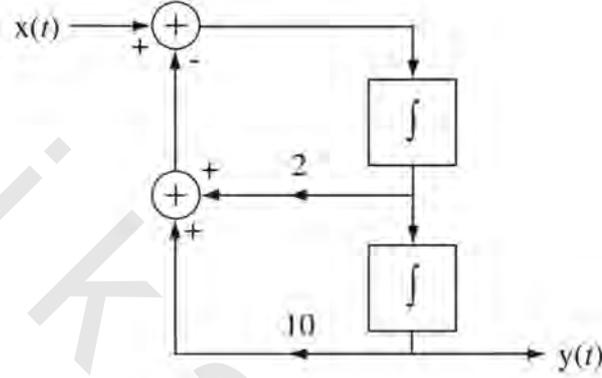
الصورة : $H(s) = A + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-a}$ ، فإذا كانت $a \neq 2$ و $B=3/2$ ، فأوجد القيم العددية للثوابت A و C .

حل المعادلات التفاضلية

٢٥- اكتب المعادلات التفاضلية التي تصف الأنظمة الموضحة في شكل (ت- ٢٥) وأوجد وارسم

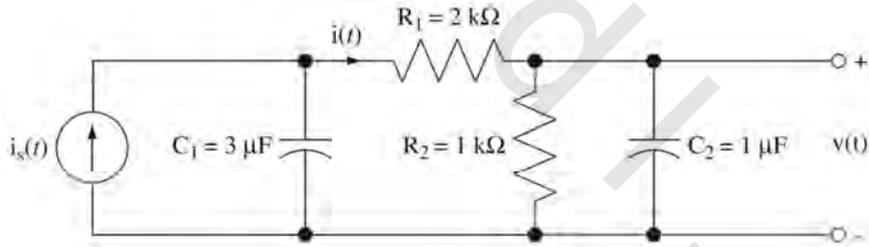
الاستجابات المبينة:

$$y(0^+) = -5, \left[\frac{d}{dt}(y(t)) \right]_{t=0^-} = 10 \text{ و } x(t)=u(t) \text{ والاستجابة هي } y(t) \text{ (أ)}$$



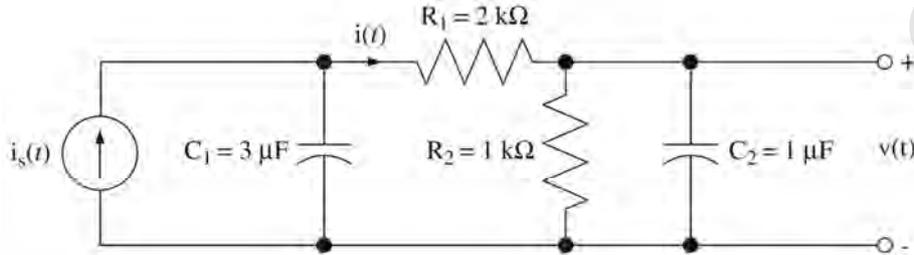
شكل رقم (ت-١٢٥).

(ب) $i_s(t)=u(t)$ و $v(t)$ هي الاستجابة، لا توجد طاقة ابتدائية مخزنة.



شكل رقم (ت-٢٥ب).

(ج) $i_s(t)=\cos(2000\pi t)u(t)$ و $v(t)$ هي الاستجابة، لا يوجد طاقة ابتدائية مخزنة



شكل رقم (ت-٢٥ج)

مخططات الأقطاب والأصفار والاستجابة الترددية

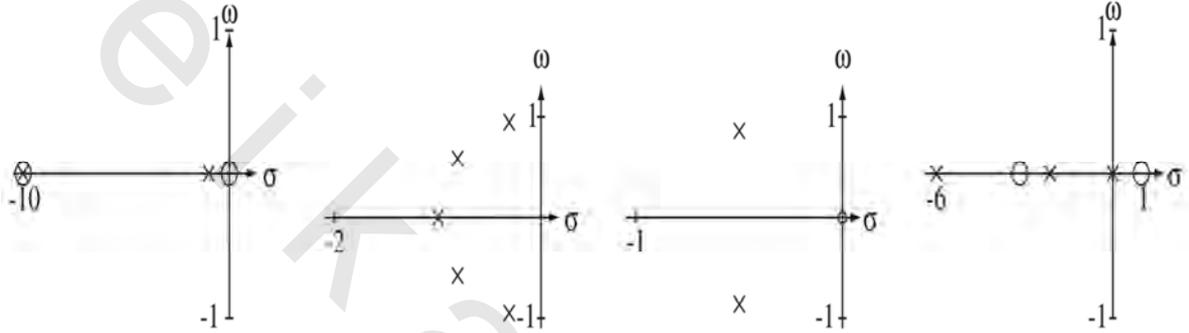
٢٦- ارسم مخططات الأقطاب والأصفار لدوال العبور التالية :

$$H(s) = \frac{(s+3)(s-1)}{s(s+2)(s+6)} \quad (\text{أ})$$

$$H(s) = \frac{s}{s^2+s+1} \quad (\text{ب})$$

$$H(s) = \frac{s(s+10)}{s^2+11s+10} \quad (\text{ج})$$

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1.618s+1)(s^2+0.618s+1)} \quad (\text{د})$$

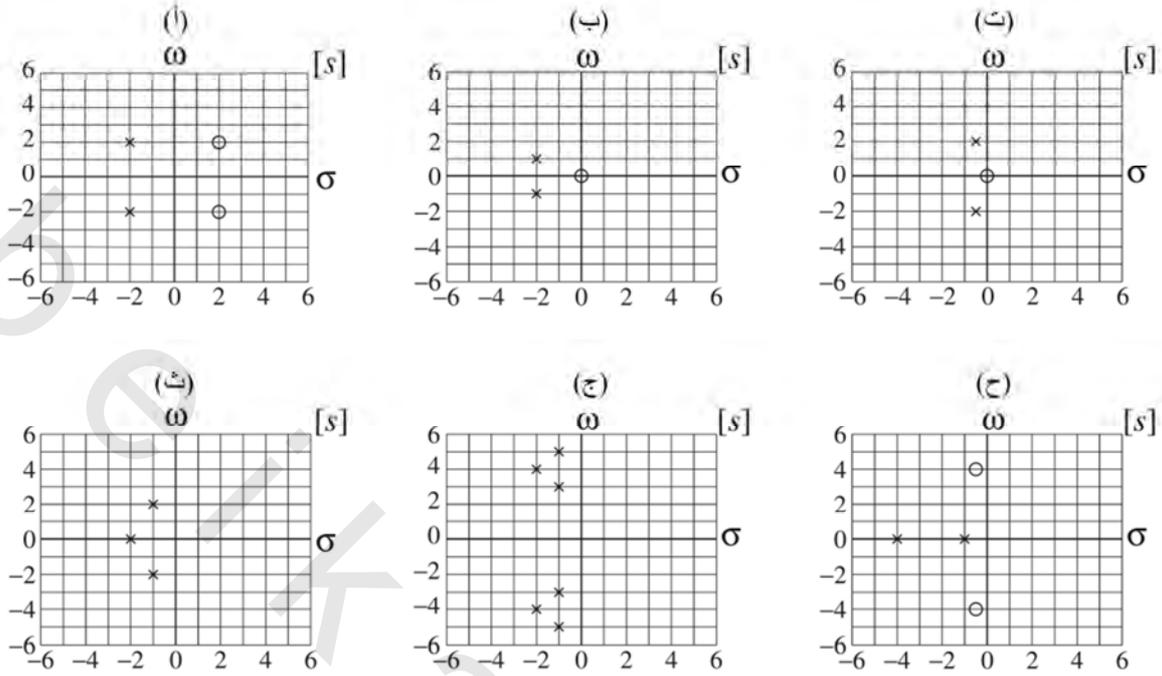


شكل رقم (ج.ت-٢٦)

٢٧- شكل (ت- ٢٧) يبين مخطط الأقطاب والأصفار لبعض دوال العبور لأنظمة على الصورة العامة

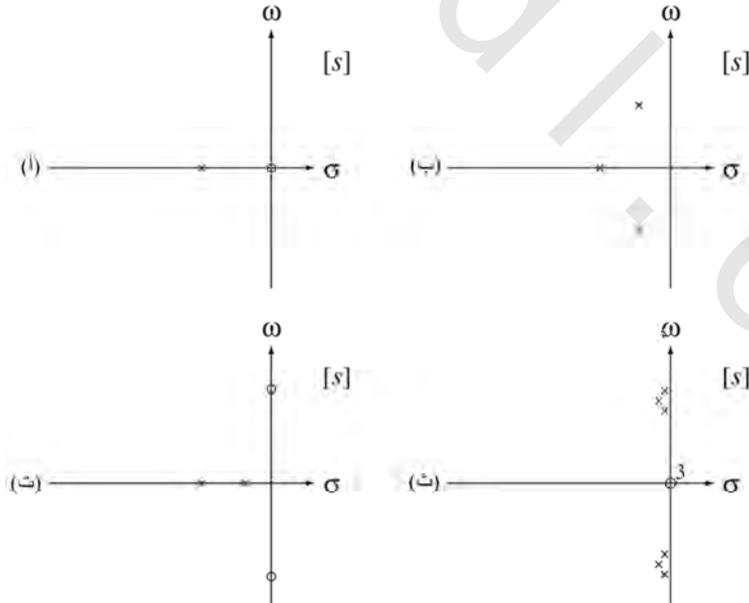
التالية : $H(s) = A \frac{(s-z_1) \dots (s-z_N)}{(s-p_1) \dots (s-p_N)}$ والتي بها $A=1$ وال z 's هي الأصفار وال p 's هي الأقطاب. أجب على هذه الأسئلة :

- (أ) أي هذه المخططات يكون لها مقدار استجابة ترددية مختلف عن الصفر عند $\omega=0$ ؟
- (ب) أي هذه المخططات يكون لها مقدار استجابة ترددية مختلف عن الصفر عند $\omega=\infty$ ؟
- (ج) هناك مخططان لهما استجابة ترددية منفذة لمجال من الترددات (تساوي صفرًا عند الصفر وتساوي الصفر عند الما لانهاية) ، أي واحد فيها تحت كبحي underdamped أكثر من الآخر ؟
- (د) أي واحد فيها يكون له مقدار استجابة ترددية شكله أقرب ما يمكن لأن يكون مرشحاً مانعاً لمجال معين من الترددات ؟
- (هـ) أي واحد من هذه المخططات يكون له مقدار استجابة ترددية تقترب K/ω^6 عند الترددات العالية جداً (K ثابت) ؟
- (و) أي واحد من هذه المخططات يكون له مقدار استجابة ترددية ثابت ؟
- (ز) أي واحد من هذه المخططات يكون له مقدار استجابة ترددية لها شكل أقرب ما يمكن لمرشح منفذ للترددات المنخفضة ؟
- (ح) أي واحد من هذه المخططات يكون له زاوية استجابة ترددية تكون غير متصلة عند $\omega=0$ ؟



شكل رقم (ت-٢٧)

٢٨- لكل واحد من مخططات الأقطاب والأصفار الموضحة في شكل (ت- ٢٨)، حدد إذا كانت الاستجابة الترددية تمثل مرشحاً فعلياً منفذاً للترددات المنخفضة، أم منفذاً لمجال معين من الترددات، أم منفذاً للترددات المرتفعة، أم كاجماً لمجال معين من الترددات؟



شكل رقم (ت-٢٨)