تحويل زد z

(٩,١) المقدمة والأهداف

كل طريقة من طرق التحليل المستخدمة في الأزمنة المستمرة لها طريقة مقابلة في الأزمنة المتقطعة. المقابل لتحويل لابلاس في الزمن المستمر هو تحويل زد z في الأزمنة المتقطعة، والذي يمثل الإشارات كمجموع خطي من الأسس المركبة المتقطعة زمنياً. على الرغم من أن طرق التحويل في الزمن المتقطع تكون مماثلة لنظيراتها المستخدمة في الأزمنة المستمرة، إلا أنه هناك بعض الفروق المهمة القليلة.

هذا الشرح مهم؛ لأنه في تصميمات الأنظمة الحديثة يتم استخدام المعالجة الرقمية للإشارات أكثر وأكثر. نحتاج لفهم هذه المفاهيم المتقطعة زمنياً لنستوعب تحليل وتصميم الأنظمة التي تعالج الإشارات في كل من الأزمنة المستمرة والمتقطعة والتحويل والتحويل العكسي بينهما عن طريق أخذ العينات أو العيننة sampling والاستيفاء interpolation.

أهداف الفصل

أهداف هذا الفصل تتوازى مع أهداف الفصل ٨ ولكن مع التطبيق على الإشارات والأنظمة المتقطعة.

١- لاستنتاج تحويل زد كطريقة تحليل أكثر عمومية للأنظمة عن تحويل فورير المتقطع DTFT وكنتيجة طبيعية لعملية الالتفاف عند إثارة الأنظمة المتقطعة زمنياً بالدوال المميزة.

٢- لتعريف تحليل زد ومعكوسه وتحديد الإشارات التي سيوجد لها هذا التحويل.

٣- لتعريف دالة العبور للأنظمة المتقطعة زمنياً وتعلُّم طريقة لبناء النظم المتقطعة زمنياً مباشرة من دالة العبور.

٤- لوضع جداول لأزواج تحويل زد وخواصه ونتعلم كيفية استخدامهما مع مفكوك الكسور الجزيئية لإيجاد تحويل زد العكسي.

٥- لتعريف تحويل زد الأحادي الاتجاه.

٦- لحل المعادلات الفرقية في وجود القيم الابتدائية باستخدام تحويل زد الأحادي.

٧- لإيجاد علاقة مباشرة بين مواضع الأقطاب والأصفار لدالة العبور لنظام معين مع الاستجابة الترددية للنظام.

٨- لنتعلم كيفية استخدام ماتلاب للتعبير عن دوال العبور للأنظمة.

٩- لمقارنة فائدة وكفاءة طرق التحويل المختلفة في بعض الأنظمة الحقيقية.

(٩,٢) تعميم تحويل فورير في الزمن المتقطع

يعتبر تحويل لابلاس تعميماً لتحويل فورير في الزمن المستمر CTFT، والذي يسمح بالأخذ في الاعتبار الإشارات والاستجابات الصدمية التي ليس لها CTFT. لقد رأينا في الفصل ٨ كيف سمح هذا التعميم بتحليل الإشارات والأنظمة التي لم يمكن تحليلها باستخدام تحويل فورير وأيضا التبصير بأداء الأنظمة من خلال تحليل مواضع الأقطاب والأصفار لدالة العبور في النطاق s. تحليل زد يعتبر تعميماً للـ DTFT مع المميزات المماثلة لذلك. إن تحويل زد لتحليل الإشارات والأنظمة في الزمن المتقطع هو بمثابة تحويل لابلاس لتحليل الإشارات والأنظمة في الزمن المستمر.

هناك طريقتان لاستنتاج تحويل زد، متكافئتان مع الطريقتين اللتين تم اتباعهما في تحويل لابلاس وهما، تعميم DTFT، واستكشاف الخواص الفريدة للأسس المركبة كدوال مميزة للأنظمة LTI.

لقد تم تعريف الـ DTFT بزوج التحويل التالي:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}\, d\Omega \;\leftrightarrow\; X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

وأيضا:

$$x[n] = \int_{1} X(F)e^{j2\pi Fn}\, dF \;\leftrightarrow\; X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi Fn}$$

إن تحويل لابلاس يعمِّم تحويل فورير في الزمن المستمر CTFT عن طريق تغيير الجيوب المركبة التي على الصورة $e^{j\omega t}$ حيث ω تمثل متغيراً حقيقياً، إلى الأسس المركبة على الصورة e^{st} حيث s تمثل متغيراً مركباً. المتغير المستقل في DTFT هي التردد الزاوي المتقطع زمنياً Ω. تظهر الدالة الأسية $e^{j\Omega n}$ في كل من التحويلات الأمامية والعكسية (مثل $e^{-j\Omega n}=1/e^{j\Omega n}$ في التحويل الأمامي). عندما تكون Ω حقيقية، فإن $e^{j\Omega n}$ تكون جيباً مركباً في الزمن المتقطع ولها مقدار يساوي واحداً لأي قيمة لمتغير الزمن المتقطع n الذي يكون بدوره حقيقي. بالتناظر مع تحويل

لابلاس، يمكننا أن نعمم DTFT باستبدال المتغير الحقيقي Ω بالمتغير المركب s وبالتالي استبدال $e^{j\Omega n}$ إلى e^{Sn}، الذي يمثل أس مركب. عندما تكون S مركبة، فإن e^{Sn} يمكن أن تقع في أي مكان في المستوى المركب. يمكننا تبسيط عملية الترميز بوضع $z=e^{S}$ والتعبير عن الإشارات المتقطعة زمنياً كمجموع خطي من ال z^n بدلا من e^{Sn}. إن استبدال $e^{j\Omega n}$ مع z^n في DTFT يؤدي مباشرة إلى تعريف تحويل زد الأمامي الشائع كالتالي:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \qquad (٩,١)$$

ويصبح كل من $x[n]$ و $X(z)$ يكونان ما يسمى بزوج تحويل زد المعرف كالتالي:

$$x[n] \leftrightarrow X(z)$$

إن حقيقة أن z يمكن أن تقع في أي مكان في المستوى المركب تعني أننا يمكننا استخدام الأسس المركبة المقطعة زمنياً بدلا من استخدام الجيوب المركبة فقط في التعبير عن الإشارات في الزمن المتقطع. بعض الإشارات لا يمكن التعبير عنها عن طريق المجموع المركب من الجيوب ولكن يمكن التعبير عنها عن طريق مجموع من الأسس المركبة.

(٩,٣) الإثارة الأسية المركبة والاستجابة

إفترض أن الإثارة لنظام LTI متقطع زمنياً هي أس مركب على الصورة Kz^n حيث z تكون مركبة على العموم، و K ثابت. باستخدام الالتفاف، فإن الاستجابة $y[n]$ لهذا النظام LTI الذي له استجابة صدمة هي $h[n]$ لإثارة أسية مركبة على الصورة $x[n]=Kz^n$ ستكون:

$$y[n] = h[n] * k_{z^n} = K \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\, z^{n-m} = \underbrace{k_{z^n}}_{=x[n]} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\, z^{-m}$$

وعلى ذلك، فإن الاستجابة للأس المركب هي الأس المركب نفسه ، مضروباً في $\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-m}$ إذا كان هذا المجموع سيتقارب، وهذا يماثل تماما للمعادلة (٩,١).

(٩,٤) دالة العبور

إذا تمت إثارة نظام LTI له استجابة صدمة $h[n]$ بالإشارة $x[n]$، فإن تحويل زد $Y(z)$ للاستجابة $y[n]$ سيكون كما يلي:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (h[n] * x[n])z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]z^{-n}$$

بفصل المجموعين نحصل على:

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-m] z^{-n}$$

لنفترض q=n-m ، إذن يمكننا كتابة :

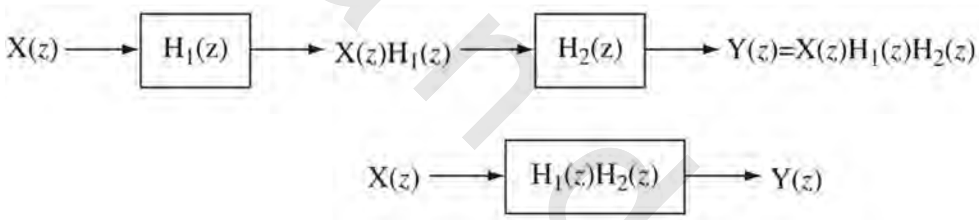
$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \sum_{q=-\infty}^{\infty} x[q] z^{-(q+m)} = \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\, z^{-m}}_{=H(z)} \underbrace{\sum_{q=-\infty}^{\infty} x[q] z^{-q}}_{=X(z)}$$

وبالتالي، فإن الطريقة مشابهة تماماً لطريقة تحويل لابلاس، Y(z)=H(z)X(z) ، و H(z) تسمى دالة العبور للنظام المتقطع زمنياً، تماماً كما ذكرنا في الفصل ٥.

(٩,٥) الأنظمة الموصلة على التوالي

دالة العبور لمكونات موصلة على التوالي من الأنظمة المتقطعة زمنياً يتم جمعها بنفس الطريقة مثل الأنظمة المستمرة زمنياً كما في شكل (٩,١).

دالة العبور الكلية لنظامين موصلين على التوالي تساوي حاصل ضرب دالتي العبور للنظامين.



شكل رقم (٩,١) التوصيل على التوالي للأنظمة

(٩,٦) تحقيق الأنظمة بالطريقة المباشرة II

في الممارسات الهندسية تكون الطريقة الأكثر شيوعاً لوصف الأنظمة المتقطعة زمنياً هي المعادلات الفرقية للنظام. لقد أوضحنا في الفصل ٥ أنه لأي نظام متقطع زمنياً وموصوف بالمعادلة الفرقية التي على الصورة:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad \text{المعادلة رقم (٩,٢)}$$

فإن دالة العبور ستكون:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_0+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}+\cdots+b_M z^{-M}}{a_0+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}+\cdots+a_N z^{-N}} \qquad \text{المعادلة رقم (٩,٣)}$$

أو بالتبادل:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = z^{N-M} \frac{b_0 z^{M}+b_1 z^{M-1}+\cdots+b_{M-1} z+b_M}{a_0 z^{N}+a_1 z^{N-1}+\cdots+a_{n-1} z+a_N} \qquad \text{المعادلة رقم (٩,٤)}$$

الطريقة المباشرة II ، أي البناء الأمثل للأنظمة المتقطعة زمنياً ، تكون مكافئة تماماً للطريقة المباشرة II في الزمن المستمر. دالة العبور التالية :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \cdots + b_N}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N}$$

يمكن فصلها في صورة دالتي عبور لنظامين جانبيين على التوالي كما يلي :

$$H_1(z) = \frac{Y_1(z)}{X(z)} = \frac{1}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \cdots + a_N}$$ المعادلة رقم (٩,٥)

و :

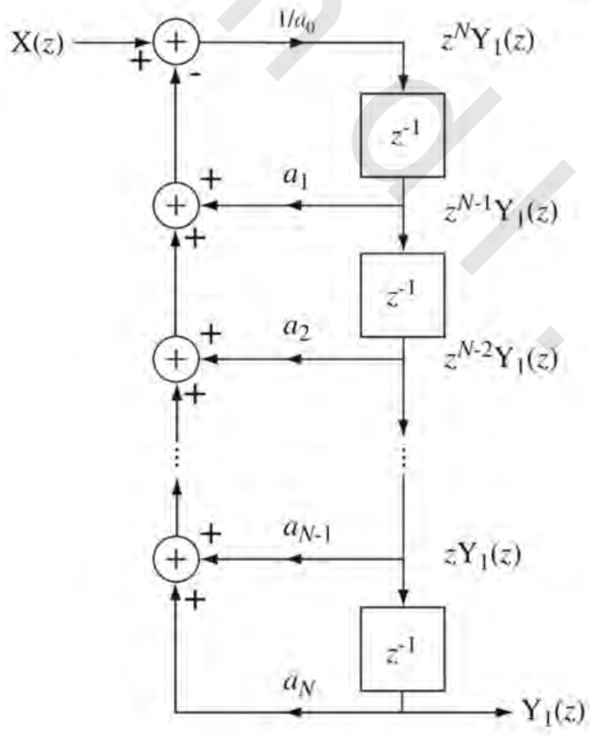
$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{Y_1(z)} = b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \cdots + b_N$$

(هنا تم تمثيل درجة كل من البسط والمقام بالمتغير N. إذا كانت درجة البسط أقل من N فعلا ، فإن بعض الثوابت b ستكون أصفاراً ، ولكن a_0 يجب ألا تكون صفراً). من المعادلة (٩,٥) يمكن كتابة :

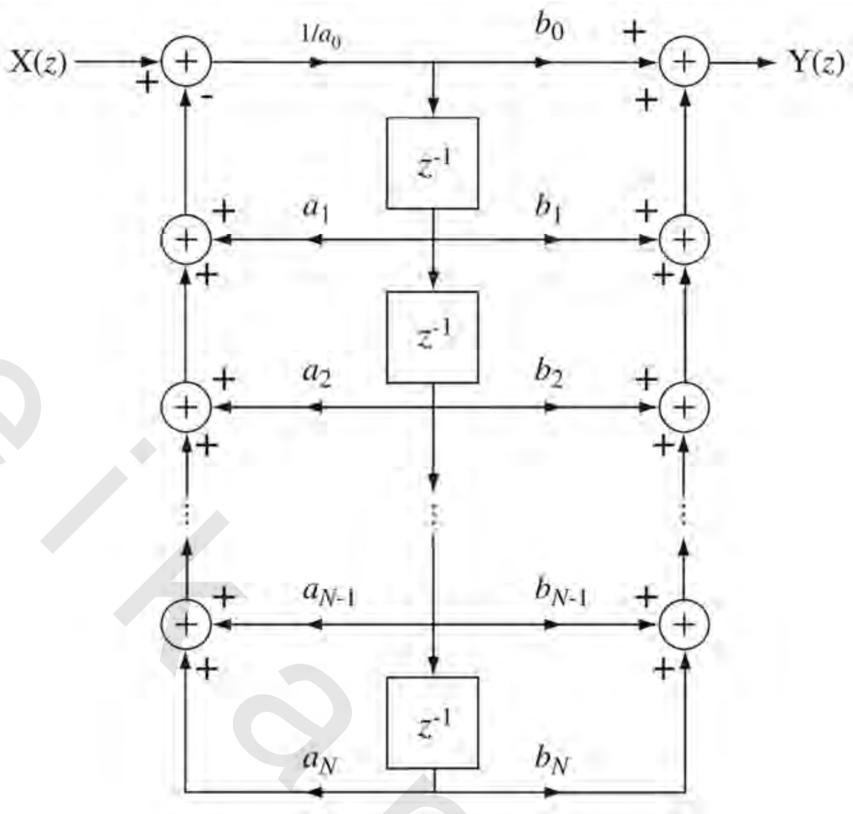
$$z^N Y_1(z) = \frac{1}{a_0}\{X(z) - [a_1 z^{N-1} Y_1(z) + \cdots + a_N s Y_1(z) +]\}$$

انظر شكل (٩,٢).

كل العناصر التي على الصورة $z^k Y_1(z)$ التي سنحتاجها لتكوين $H_2(z)$ موجودة في بناء $H_1(z)$. بتجميعهما في مجموع خطي باستخدام المعاملات b نحصل على البناء بالطريقة المباشرة II للنظام الكلي كما في شكل (٩,٣).



شكل رقم (٩,٢) الطريقة المباشرة II، البناء الأمثل لـ H1(z)



شكل رقم (٩,٣) بناء النظام الكلي بالطريقة المباشرة II.

(٩,٧) تحويل زد العكسي

التحويل من H(z) إلى h[n] هي تحويل زد العكسي ويمكن إجراؤه بالطريقة المباشرة التالية :

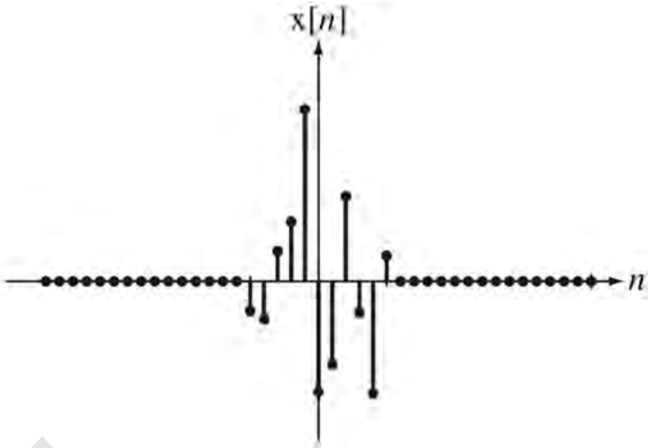
$$h[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint_C H(z) z^{n-1}\, dz$$

وهذا تكامل حلقي حول دائرة في المستوى z المركب وهو خارج هدف هذا الكتاب. معظم تحويلات زد العكسي العملية يتم إجراؤها باستخدام جدول لأزواج تحويلات زد وخواصة.

(٩,٨) وجود تحويل زد

الإشارات المحدودة زمنياً

شروط وجود تحويل زد تكافيء شروط تواجد تحويل لابلاس. إذا كانت إشارة مقطعة زمنياً محدودة زمنياً ومحددة، فإن مجموع تحويل زد يكون محدوداً وتحويل زد سيكون موجوداً لأي قيمة محددة لا تساوي الصفر للمتغير زد، كما في شكل (٩,٤).



شكل (٩,٤) إشارة متقطعة ومحددة زمنياً

إشارة وحدة الصدمة δ[n] تعتبر إشارة بسيطة جداً، محدودة زمنياً، وتحويل زد لها سيكون كالتالي:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1$$

هذا التحويل ليس له أصفار، ولا أقطاب. لأي قيمة لا تساوي الصفر للمتغير z، فإن تحويل زد لهذه الصدمة يكون موجوداً. إذا أزحنا هذه النبضة في النطاق الزمني، فإننا سنحصل على نتيجة مختلفة قليلا:

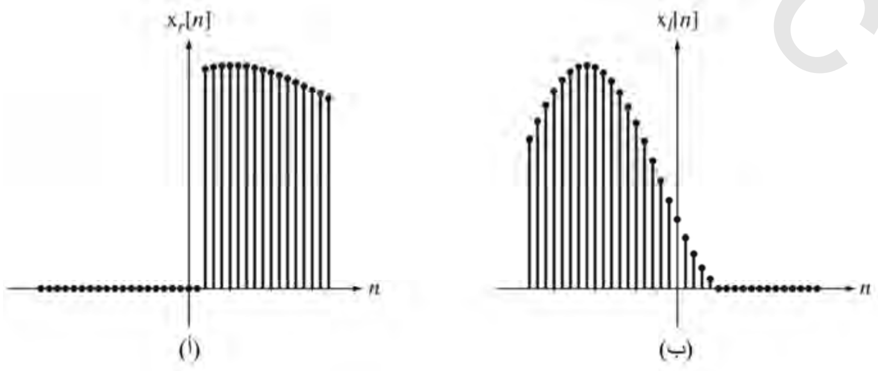
$\delta[n-1] \leftrightarrow z^{-1} \rightarrow$ قطب عند الصفر

$\delta[n+1] \leftrightarrow z \rightarrow$ قطب عند المالانهاية

وبالتالي فإن تحويل زد للصدمة δ[n-1] يوجد لكل قيمة لا تساوي الصفر للمتغير z، وتحويل زد للصدمة δ[n+1] يتواجد لكل قيمة محددة للمتغير z.

الإشارات يمينية ويسارية الجانب

أي إشارة يمينية الجانب $x_r[n]$ هي الإشارة التي تساوي صفر لأي $n<n_0$، والإشارة اليسارية $x_l[n]$ هي الإشارة التي تساوي صفراً لأي $n>n_0$ كما في شكل (٩،٥).



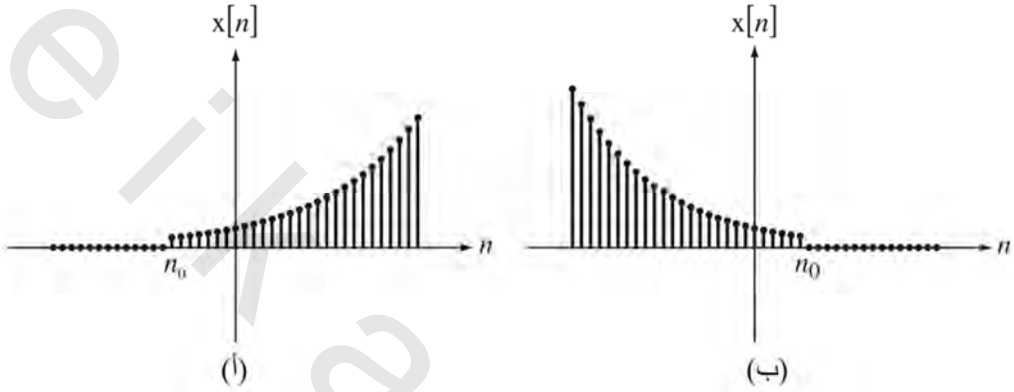
شكل (٩,٥) (أ) إشارة متقطعة زمنياً ويمينية (ب) إشارة متقطعة زمنياً ويسارية

افترض الإشارة اليمينية التالية : $x[n]=\alpha^n u[n-n_0]$ و $\alpha \in C$ كما في شكل (٩,٦).

تحويل زد لهذه الإشارة سيكون كما يلي :

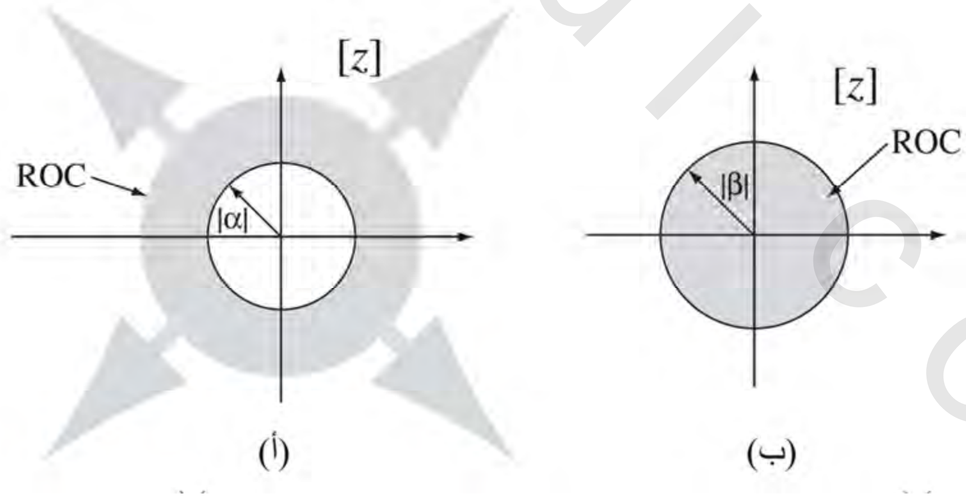
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^2 u[n-n_0] z^{-n} = \sum_{n=n_0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

إذا حدث تقارب للمجموع ، وهذا المجموع سيتقارب إذا كان $|\alpha/z|<1$ أو $|z|>|\alpha|$. هذه المنطقة من المستوى z تسمى منطقة التقارب region of convergence, ROC كما في شكل (٩,٧أ).



شكل رقم (٩,٦)

(أ) $x[n]=\alpha^n u[n-n_0]$ و $\alpha \in C$ (ب) $x[n]=\beta^n u[n_0-n]$ و $\beta \in C$



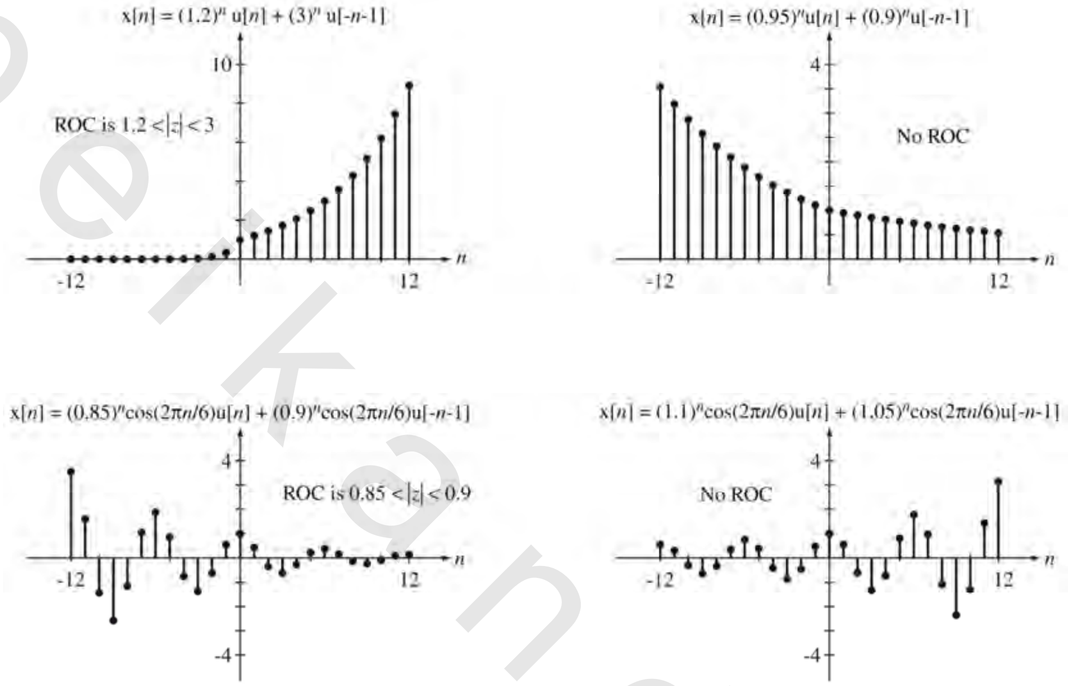
شكل رقم (٩,٧) منطقة التقارب لـ (أ) الإشارة اليمينية $x[n]=\alpha^n u[n-n_0]$ و $\alpha \in C$ ،

(ب) الإشارة اليسارية $x[n]=\beta^n u[n_0-n]$ و $\beta \in C$

إذا كانت $x[n]=0$ عندما $n>n_0$، فإن هذه الإشارة تسمى إشارة يسارية كما في شكل (٩،٦ب). إذا كانت $x[n]=\beta^n u[n_0-n]$ و $\beta\in C$، فإن:

وهذا المجموع سيتقارب عندما $|\beta^{-1}z|<1$ أو $|z|<|\beta|$ كما في شكل (٩،٧ب).

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta^n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{n_0} (\beta z^{-1})^n = \sum_{n=n_0}^{\infty} (\beta z^{-1})^n$$



شكل رقم (٩،٨). بعض الإشارات غير السببية ومناطق التقارب لها (إذا كانت موجودة).

كما هو الحال في الإشارات المستمرة زمنياً، فإن أي إشارة متقطعة زمنياً يمكن التعبير عنها كمجموع من إشارة يمينية وأخرى يسارية. إذا كانت $x[n]=x_r[n]+x_l[n]$ وكانت $|x_r[n]|<|K_r\alpha^n|$ و $|x_l[n]|<|K_l\beta^n|$ (حيث K_r و K_l ثوابت)، فإن المجموع يتقارب وتحويل زد يكون موجوداً عندما $|\alpha|<z<|\beta|$. إن ذلك يعني أنه إذا كانت $|\alpha|<|\beta|$، فإن تحويل زد يتواجد وتكون منطقة التقارب في المستوى z هي $|\alpha|<z<|\beta|$. إذا كانت $|\alpha|>|\beta|$ فإن التحويل لن يكون موجودا كما في شكل (٩،٨).

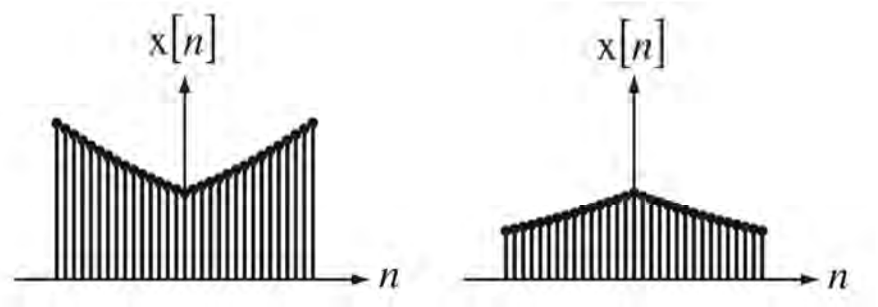
مثال ٩،١

تحويل زد للإشارات غير السببية

احسب تحويل زد للإشارة $x[n]=K\alpha^{|n|}$ حيث $\alpha\in R$.

تغير هذه الدالة مع n يعتمد على قيمة α كما في شكل (٩،٩). يمكن كتابة هذه المعادلة كما يلي:

$$x[n] = K(\alpha^n u[n] + \alpha^{-n} u[-n] - 1)$$



شكل رقم (٩,٩) (أ) $x[n]=K\alpha^{|n|}$ و $\alpha>1$ (ب) $x[n]=K\alpha^{|n|}$ و $\alpha<1$

إذا كانت $|\alpha|\geq 1$ فإن $|\alpha|\geq|\alpha^{-1}|$ ، لن توجد منطقة تقارب ولن يكون هناك تحويل زد. إذا كانت $|\alpha|<1$ فإن $|\alpha|<|\alpha^{-1}|$ ، فإن منطقة التقارب ستكون $|\alpha|<z<|\alpha^{-1}|$ وتحويل زد سيكون :

$$K\alpha^{|n|} \overset{z}{\leftrightarrow} K\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha^{|n|}z^{-n} = K\left[\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha z^{-1})^n + \sum_{n=-\infty}^{0}(\alpha^{-1}z^{-1})^n - 1\right], |\alpha| < z|\alpha^{-1}|$$

$$K\alpha^{|n|} \overset{z}{\leftrightarrow} K\left[\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha z^{-1})^n + \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha^{-1}z)^n - 1\right], |\alpha| < z|\alpha^{-1}|$$

وهذا يتكون من مجموعين وثابت. كل مجموع هي متوالية هندسية على الصورة $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ وهذه المتوالية ستتقارب إلى $1/(1-r)$ إذا كانت $|r|<1$.

$$K\alpha^{|n|} \overset{z}{\leftrightarrow} K\left(\frac{1}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{1}{1-\alpha z} - 1\right) = K\left(\frac{z}{z-\alpha} - \frac{z}{z-\alpha^{-1}}\right), |\alpha| < z|\alpha^{-1}|$$

(٩,٩) أزواج تحويل زد

يمكننا أن نبدأ جدول لتحويلات زد بالصدمة $\delta[n]$ ودالة جيب التمام المكبوحة $\alpha^n\cos(\Omega_0 n)u[n]$. كما رأينا مسبقاً فإن $\delta[n] \overset{z}{\leftrightarrow} 1$. تحويل زد لدالة جيب التمام المكبوحة سيكون :

$$\alpha^n\cos(\Omega_0 n)\,u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha^n\cos(\Omega_0 n)\,u[n]]z^{-n}$$

$$\alpha^n\cos(\Omega_0 n)\,u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha^n\frac{e^{j\Omega_0 n}+e^{-j\Omega_0 n}}{2}z^{-n}$$

$$\alpha^n\cos(\Omega_0 n)\,u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} (1/2)\sum_{n=0}^{\infty}[(\alpha e^{j\Omega_0 n}z^{-1})^n + (\alpha e^{-j\Omega_0 n}z^{-1})^n]$$

لكي يكون هناك تقارب لتحويل z فإن |z|>|α| وأيضاً :

$$\alpha^n \cos(\Omega_0 n)\, u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} (1/2)\left[\frac{1}{1-\alpha e^{j\Omega_0 n} z^{-1}}+\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega_0 n} z^{-1}}\right], |z|>|\alpha|$$

يمكن تبسيط ذلك إلى واحدة من الصورتين البديلتين التاليتين :

$$\alpha^n \cos(\Omega_0 n)\, u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1-\alpha\cos(\Omega_0)\, z^{-1}}{1-2\alpha\cos(\Omega_0)\, z^{-1}+\alpha^2 z^{-2}}, |z|>|\alpha|$$

أو :

$$\alpha^n \cos(\Omega_0 n)\, u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z[1-\alpha\cos(\Omega_0)]}{z^2-2\alpha\cos(\Omega_0)\, z+\alpha^2}, |z|>|\alpha|$$

إذا كانت $\alpha=1$ ، فإن :

$$\cos(\Omega_0 n)\, u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z[1-\cos(\Omega_0)]}{z^2-2\cos(\Omega_0)\, z+1}=\frac{1-\cos(\Omega_0)\, z^{-1}}{1-2\cos(\Omega_0)\, z^{-1}+z^{-2}}, |z|>1$$

إذا كانت $\Omega_0=0$ ، فإن :

$$\alpha^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, |z|>|\alpha|$$

إذا كانت $\alpha=1$ و $\Omega_0=0$ ، فإن :

$$u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-1}=\frac{1}{1-z^{-1}}, |z|>1$$

جدول ٩،١ يبين أزواج من تحويل زد للعديد من الدوال الشائعة الاستخدام.

جدول (٩،١). بعض أزواج تحويل زد.

$\delta[n] \overset{z}{\leftrightarrow} 1, All\ \ z$	
$u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-1}=\frac{z}{1-z^{-1}},\ \|z\|>1$	$-u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-1},\ \|z\|<1$
$\alpha^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}},\ \|z\|>\|\alpha\|$	$-\alpha^n u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}},\ \|z\|<\|\alpha\|$
$nu[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{(z-1)^2}=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2},\ \|z\|>1$	$-nu[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{(z-1)^2}=\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2},\ \|z\|<1$
$n^2u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}=\frac{1+z^{-1}}{z(1-z^{-1})^3},\ \|z\|>1$	$-n^2u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}=\frac{1+z^{-1}}{z(1-z^{-1})^3},\ \|z\|<1$
$n\alpha^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2}=\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2},\ \|z\|>\|\alpha\|$	$-n\alpha^n u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2}=\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2},\ \|z\|<\|\alpha\|$
$sin(\Omega_0 n)u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{zsin(\Omega_0 n)}{z^2-2cos(\Omega_0)+1},\ \|z\|>1$	$-sin(\Omega_0 n)u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{zsin(\Omega_0 n)}{z^2-2cos(\Omega_0)+1},\ \|z\|<1$
$cos(\Omega_0 n)u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z[z-cos(\Omega_0)]}{z^2-2cos(\Omega_0)+1},\ \|z\|>1$	$-cos(\Omega_0 n)u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z[z-cos(\Omega_0)]}{z^2-2cos(\Omega_0)+1},\ \|z\|<1$
$\alpha^n sin(\Omega_0 n)u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z\alpha sin(\Omega_0)}{z^2-2\alpha cos(\Omega_0)+\alpha^2},\ \|z\|>\|\alpha\|$	$-\alpha^n sin(\Omega_0 n)u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z\alpha sin(\Omega_0)}{z^2-2\alpha cos(\Omega_0)+\alpha^2},\quad \|z\|<\|\alpha\|$
$\alpha^n cos(\Omega_0 n)u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z[z-\alpha cos(\Omega_0)]}{z^2-2\alpha cos(\Omega_0)+\alpha^2},\ \|z\|>\|\alpha\|$	$-\alpha^n cos(\Omega_0 n)u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z[z-\alpha cos(\Omega_0)]}{z^2-2\alpha cos(\Omega_0)+\alpha^2},\ \|z\|<\|\alpha\|$
$\alpha^{\|n\|} \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha}-\frac{z}{z-\alpha^{-1}}, \|\alpha\|<\|z\|<\|\alpha^{-1}\|$	
$u[n-n_0]-u[n-n_1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-1}(z^{-n_0}-z^{-n_1})=\frac{z^{-n_0-1}+z^{-n_0-2}+\cdots+z+1}{z^{n_1-1}}, \|z\|>0$	

مثال ٩,٢

تحويل زد العكسي

أوجد تحويل زد العكسي لكل مما يأتي :

(أ) $X(z) = \frac{z}{z-0.5} - \frac{z}{z+2}$, $0.5 < z < 2$

(ب) $X(z) = \frac{z}{z-0.5} - \frac{z}{z+2}$, $|z| > 2$

(ج) $X(z) = \frac{z}{z-0.5} - \frac{z}{z+2}$, $|z| < 0.5$

(أ) الإشارات اليمينية الجانب تكون لها منطقة تقارب خارج دائرة ، والإشارات اليسارية الجانب تكون لها منطقة تقارب داخل دائرة. ولذلك باستخدام الزوج التالي :

$$\alpha^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, |z| > |\alpha|$$

وأيضاً :

$$-\alpha^n u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, |z| > |\alpha|$$

نحصل على :

$$(0.5)^n u[n] - (-(-2)^n) u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z) = \frac{z}{z-0.5} - \frac{z}{z-2}, 0.5 < |z| < 2$$

أو :

$$(0.5)^n u[n] + (-2)^n\, u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z) = \frac{z}{z-0.5} - \frac{z}{z+2}, 0.5 < |z| < 2$$

(ب) في هذه الحالة كل من الإشارتين يمينية الجانب :

(ج)

$$(0.5)^n - (-2)^n\, u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z) = \frac{z}{z-0.5} - \frac{z}{z+2}, |z| > 2$$

(د) في هذه الحالة كل من الإشارتين يسارية الجانب :

(ه)

$$-[(0.5)^n - (-2)^n]\, u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z) = \frac{z}{z-0.5} - \frac{z}{z+2}, |z| < 0.5$$

(٩,١٠) خواص تحويل زد

بفرض زوج التحويل التالي $g[n] \leftrightarrow G(z)$ و $h[n] \leftrightarrow H(z)$ وكل منهما له منطقة التقارب ROC_S و ROC_G و ROC_H على التوالي ، فإن خواص تحول زد ستكون مدونة في جدول ٩,٢.

جدول (٩,٢) خواص تحويل زد

$\alpha\, g[n]+\beta\, h[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \alpha\, G(z)+\beta\, H(z),\ ROC=ROC_G\ \cap ROC_H$	الخطية
$g[n-n_0] \overset{z}{\leftrightarrow} z^{-n_0}G(z),\ ROC=ROC_G\ \ expect\ perhaps\ z=0\ or\ z\to\infty$	الإزاحة الزمنية
$\alpha^n g[n] \overset{z}{\leftrightarrow} G(z/\alpha),\ ROC=\lvert\alpha\rvert ROC_G$	تغيير التحجيم في المجال z
$g[-n] \overset{z}{\leftrightarrow} G(z^{-1}),\ ROC=1/ROC_G$	الانعكاس الزمني
$\begin{cases} g[n/k], n/k & \text{رقم صحيح} \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases} \overset{z}{\leftrightarrow} G(z^k),\ ROC=(ROC_G)^{1/k}$	الامتداد الزمني
$g^*[n] \overset{z}{\leftrightarrow} G^*(z^*),\ ROC=ROC_G$	الترافق
$-ng[n] \overset{z}{\leftrightarrow} z\frac{d}{dz}G(z),\ ROC=ROC_G$	التفاضل في المجال z
$g[n] * h[n] \overset{z}{\leftrightarrow} H(z)\,G(z)$	الالتفاف
$g[n]-g[n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} (1-z^{-1})G(z),\ ROC\supseteq ROC_G\ \cap\ \lvert z\rvert>0$	الفرق العكسي من الدرجة الأولى
$\sum_{m=-\infty}^{n} g[m] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-1}G(z),\ ROC\supseteq ROC_G\ \cap\ \lvert z\rvert>0$	التراكم
$If\ g[n]=0, n<0\ then\ g[0]=\lim_{z\to\infty} G(z)$	نظرية القيمة الابتدائية
$If\ g[n]=0, n<0,\ \lim_{n\to\infty} g[n]=\lim_{z\to 1}(z-1)G(z)\ if\ \lim_{n\to\infty} g[n]\ exists$	نظرية القيمة النهائية

(٩,١١) طرق تحويل زد العكسي

القسمة المركبة(المطولة)

بالنسبة للدوال النسبية في z التي على الصورة التالية :

$$H(z)=\frac{b_M z^M+b_{M-1}z^{M-1}+\cdots+b_1 z+b_0}{a_N z^N+a_{N-1}z^{N-1}+\cdots+a_1 z+a_0}$$

يمكن دائماً استخدام القسمة المطولة للبسط على المقام لنحصل على تتابع من قوى الـ z. فمثلاً إذا كانت لدينا الدالة على الصورة :

$$H(z)=\frac{(z-1.2)(z+0.7)(z+0.4)}{(z-0.2)(z-0.8)(z+0.5)},\qquad \lvert z\rvert>0.8$$

أو الصورة :

$$H(z)=\frac{z^3-0.1z^2-1.04z-0.336}{z^3-0.5z^2-0.34z+0.08},\qquad \lvert z\rvert>0.8$$

فإن القسمة المطولة تعطي :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+0.4z^{-1}+0.5z^{-2}\cdots \\
\hline
z^3-0.5z^2-0.34z+0.08 & z^3-0.1z^2-1.04z-0.336 \\
 & \underline{z^3-0.5z^2-0.34z+0.08} \\
 & \quad 0.4z^2-\ 0.7z-\ 0.256 \\
 & \quad \underline{0.4z^2\ -0.2z-\ 0.136-0.032z^{-1}} \\
 & \qquad\quad 0.5z-\ 0.12+0.032z^{-1} \\
 & \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

وبالتالي فإن تحويل زد الكسي سيكون :

$h[n]=\delta[n]+0.4\delta[n-1]+0.5\delta[n-2]+\ \ldots..$

هناك صورة أخرى للقسمة المطولة كالتالي :

$$
\begin{array}{r|l}
 & -4.2-30.85z-158.613z^2\cdots \\
\hline
0.08-0.34z-0.5z^2+z^3 & -0.336-1.04z-0.1z^2+z^3 \\
 & \underline{-0.336+1.428z\ +2.1z^2-\ 4.2z^3} \\
 & \quad -2.468z\ -\ 2.2z^2+5.2z^3 \\
 & \quad \underline{-2.468z\ +10.489z^2+15.425z^3-30.85z^4} \\
 & \qquad -12.689z^2-10.225z^3+30.85z^4 \\
 & \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

ومن هذه النتيجة يمكننا أن نستنتج أن تحويل زد العكسي سيكون على الصورة :

$-4.2\delta[n]-30.85\delta[n+1]-158.61\delta[n+2]\ \ldots\ldots$

من الطبيعي عند هذه النقطة أن نتعجب لماذا هاتان النتيجتان السابقتان مختلفتان وأيهما هي الصحيحة. المفتاح لنعرف أيهما تكون صحيحة هو منطقة التقارب، $|z|>0.8$. إن ذلك يوحي أن النظام يميني الجانب ونتيجة القسمة المطولة الأولى ستكون هي الصورة المطلوبة. هذه المتوالية تتقارب عندما تكون $|z|>0.8$. المتوالية الثانية تتقارب عندما $|z|<0.2$ وكان من الممكن أن تكون هي الإجابة الصحيحة إذا كانت منطقة التقارب هي $|z|>0.2$.

تستعمل القسمة المطولة عادة مع الدوال النسبية ولكن النتيجة تكون عادة في صورة متوالية لا نهائية. في معظم التحليلات العملية يكون أي صورة مغلقة هي الصورة المطلوبة.

تحليل الكسور الجزيئية

طريقة تحليل الكسور الجزيئية لإيجاد تحويل زد العكسي تكافيء جبرياً الطريقة المستخدمة نفسها لإيجاد تحويل لابلاس العكسي مع استبدال المتغير s بالمتغير z هنا. ولكن هناك موقف في تحويلات زد العكسية التي تستحق منا الذكر. من الشائع جداً أن يكون لدينا دوال في النطاق z التي تكون فيها الإصفار المحددة تساوي عدد الأقطاب المحددة (مما يجعل التعبير غير طبيعي)، مع صفر واحد على الأقل عند z=0.

$$H(z)=\frac{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_N)},\qquad N>M$$

نحن لا نستطيع مباشرة تحليل H(z) في صورة كسور جزيئية ؛ لأنها في صورة نسبة غير مثالية في المتغير z. في حالة مثل هذه من المفضل أن نقسم طرفي المعادلة على z فتصبح كما يلي :

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{z^{N-M-1}(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_N)}$$

الكمية H(z)/z نسبة مثالية في المتغير z ويمكن تحليلها في صورة كسور جزيئية كما يلي :

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{K_1}{z-p_1}+\frac{K_2}{z-p_2}+\cdots+\frac{K_N}{z-p_N}$$

بعد ذلك يمكن ضرب الطرفين في z ويمكن إيجاد تحويل زد العكسي كما يلي :

$$H(z)=\frac{zK_1}{z-p_1}+\frac{zK_2}{z-p_2}+\cdots+\frac{zK_N}{z-p_N}$$

$$h[n]=K_1p_1^nu[n]+K_2p_2^nu[n]+\cdots+K_Np_N^nu[n]$$

تماماً كما فعلنا عند إيجاد تحويل لابلاس العكسي، كان يمكننا حل هذه المشكلة بالقسمة المطولة للحصول على نسبة مثالية، ولكن هذه الطريقة الجديدة تكون أبسط في العادة.

أمثلة على تحويل زد الأمامي والعكسي

إن خاصية الإزاحة الزمنية تكون مهمة جداً في تحويل تعبيرات دوال العبور من المجال زد إلى أنظمة حقيقية، وهي مع خاصية الخطية تكون من أكثر الخواص استخداماً في تحويل زد.

مثال ٩,٣

المخطط الصندوقي للأنظمة من دالة العبور باستخدام خاصية إزاحة الزمن

نظام له دالة العبور التالية :

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z-1/2}{z^2-z+2/9},|z|>2/3$$

إرسم المخطط الصندوقي مستخدماً التأخير الزمني، والمكبرات ووصلات التجميع.

يمكن إعادة ترتيب معادلة دالة العبور لتصبح على الصمرة التالية :

$$Y(z)(z^2-z+2/9)=X(z)(z-1/2)$$

$$z^2Y(z) = zX(z) - (1/2)X(z) + zY(z) - (2/9)Y(z)$$

بضرب هذه المعادلة في z^{-2} نحصل على:

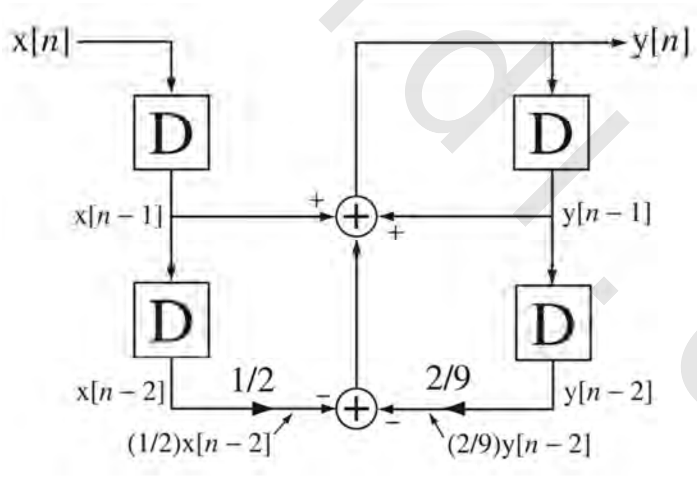
$$Y(z) = z^{-1}X(z) - (1/2)z^{-2}X(z) + z^{-1}Y(z) - (2/9)z^{-2}Y(z)$$

الآن باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية، بحيث إذا كان $x[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z)$ و $y[n] \overset{z}{\leftrightarrow} Y(z)$ فإن تحويل فورير العكسي سيكون كما يلي:

$$y[n] = x[n-1] - (1/2)x[n-2] + y[n-1] - (2/9)y[n-2]$$

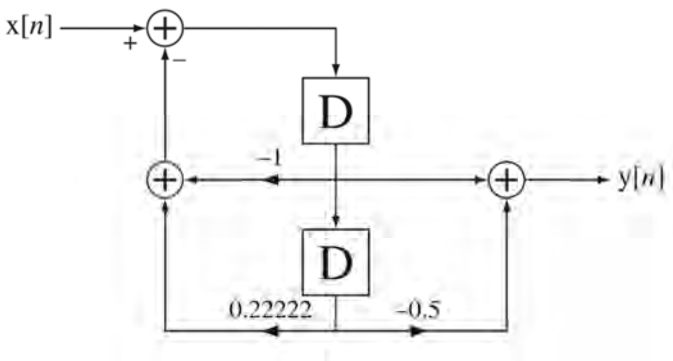
وهذه تسمى علاقة تكرارية بين x[n] و y[n] وهي تعبر عن y[n] عند الأزمنة المتقطعة n كمجموع خطي من قيم كل من x[n] و y[n] عند الأزمنة المتقطعة n و n-1 و n-2 و.... ومن هذه المعادلة يمكننا مباشرة استنتاج المخطط الصندوقي للنظام كما هو مبين في شكل (٩.١٠).

هذا البناء للنظام استخدم أربعة من أزمنة التأخير، ووصلتين للتجميع ومكبرين. هذه المخطط تم رسمه بطريقة طبيعية عن طريق البناء المباشر للعلاقة التكرارية في المخطط. بناء هذا النظام بالطريقة المباشرة II، استخدم اثنين من أزمنة التأخير، وثلاثة مكبرات، وثلاث نقاط تجميع كما في شكل (٩.١١). هناك طرق أخرى عديدة لبناء مثل هذا النظام (انظر فصل ١٤).



شكل رقم (٩,١٠) مخطط صندوقي في النطاق الزمني للنظام الذي له دالة العبور التالية:

$$\mathbf{H(z)} = \frac{z-1/2}{z^2-z+2/9}$$



شكل رقم (٩,١١) البناء بالطريقة المباشرة II لدالة العبور التالية:

$$\mathbf{H(z)} = \frac{\mathbf{z-1/2}}{\mathbf{z^2-z+2/9}}$$

كحالة خاصة لخاصية التحجيم في المجال زد، سنفترض أن:

$$\alpha^n g[n] \overset{z}{\leftrightarrow} G(z/\alpha)$$

لها أهمية خاصة، وسنفترض أن الثابت α هو $e^{j\Omega_0}$ حيث Ω_0 حقيقية وبالتالي يمكننا كتابة:

$$e^{j\Omega_0 n} g[n] \overset{z}{\leftrightarrow} G(ze^{j\Omega_0})$$

كل قيمة للمتغير z تغيرت إلى $ze^{-j\Omega_0}$. وهذا يحقق دوران عكس عقارب الساعة للتحويل G(z) في المستوى z بزاوية مقدارها Ω_0؛ لأن الكمية $e^{-j\Omega_0}$ لها مقدار يساوي واحداً وزاوية مقدارها Ω_0-. هذا التأثير من الصعب رؤيته بهذه الصورة المجردة، ولكن من المفضل أن نوضح ذلك بمثال. إفترض الدالة:

$$G(z) = \frac{z-1}{(z-0.8e^{-j\pi/4})(z-0.8e^{+j\pi/4})}$$

وافترض أن $\Omega_0=\pi/2$، وبالتالي يمكننا كتابة:

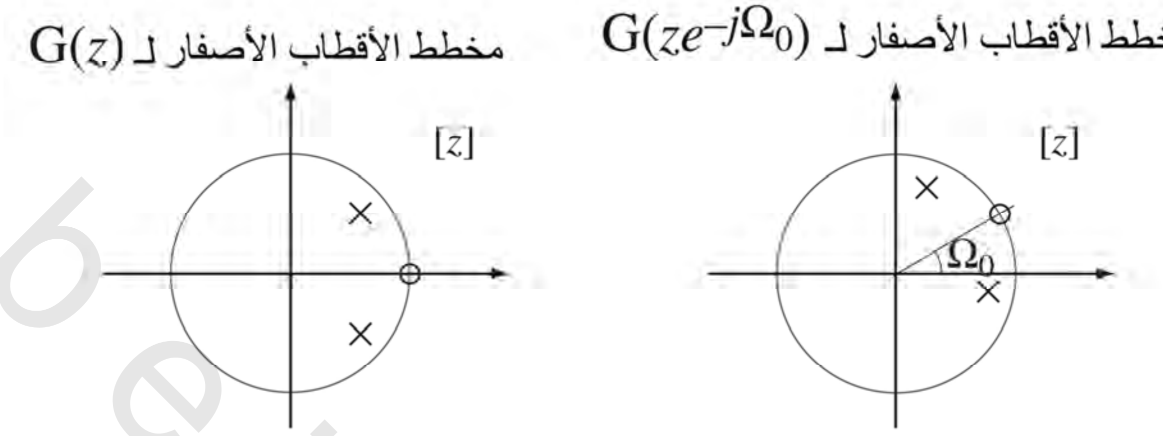
$$G(ze^{-j\Omega_0}) = G\left(ze^{-j\pi/8}\right) = \frac{ze^{-j\pi/8} - 1}{(ze^{-j\pi/8} - 0.8e^{-j\pi/4})(ze^{-j\pi/8} - 0.8e^{+j\pi/4})}$$

أو:

$$G\left(ze^{-j\pi/8}\right) = \frac{e^{-j\pi/8}(z-1)}{e^{-j\pi/8}(z-0.8e^{-j\pi/8})e^{-j\pi/8}(z-0.8e^{+j3\pi/8})}$$

$$= e^{-j\pi/8}\frac{z - e^{j\pi/8}}{(z-0.8e^{-j\pi/8})(z-0.8e^{+j3\pi/8})}$$

الدالة الأصلية كان لها قطب محدد عند $z = 0.8e^{\pm j\pi/4}$ وصفر z=1. الدالة المحولة $G(ze^{-j\pi/8})$ أصبحت لها قطب محدد عند $z = 0.8e^{-j\pi/8}$ و $z = 0.8e^{+j3\pi/8}$ وصفر عند $z = e^{j\pi/8}$. وبالتالي، فإن مواضع الصفر والأقطاب المحددة قد دارت عكس عقارب الساعة بمقدار π/8 راديان كما في شكل (٩,١٢).



شكل رقم (٩,١٢) توضيح لخاصية التحجيم الزمني لتحويل زد للحالة الخاصة التي يكون فيها التحجيم يساوي $e^{j\Omega_0}$

الضرب في الجيب المركب الذي على الصورة $z = e^{j\Omega_0 n}$ في النطاق الزمني يقابل دوران لتحويل زد.

مثال ٩,٤

تحويل زد لأس سببي ودالة جيبية مكبحة بأس سببي

أوجد تحويل لابلاس للدالة $x[n] = e^{-n/40}u[n]$ والدالة $x_m[n] = e^{-n/40}\sin\left(\frac{2\pi n}{8}\right)u[n]$ وارسم **مخطط** الأقطاب والأصفار لكل من $X(z)$ و $X_m(z)$. باستخدام الزوج :

$$\alpha^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-\alpha} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > |\alpha|$$

نحصل على :

$$e^{-n/40}u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-e^{-1/40}}, \quad |z| > |e^{-1/40}|$$

ولذلك فإن :

$$X(z) = \frac{z}{z-e^{-1/40}}, \quad |z| > |e^{-1/40}|$$

يمكننا إعادة كتابة $x_m[n]$ كما يلي :

$$x_m[n] = e^{-n/40}\frac{e^{j2\pi n/8} - e^{-j2\pi n/8}}{j2}u[n]$$

أو :

$$x_m[n] = \frac{j}{2}\left[e^{-n/40}e^{j2\pi n/8} - e^{-n/40}e^{-j2\pi n/8}\right]u[n]$$

بعد ذلك ، نبدأ بالزوج التالي :

$$e^{-n/40}u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-e^{-1/40}}, \quad |z| > |e^{-1/40}|$$

وباستخدام خاصية التحجيم $\alpha^n g[n] \overset{z}{\leftrightarrow} G(z/\alpha)$ ، نحصل على :

$$e^{j2\pi n/8}e^{-n/40}u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{ze^{-j2\pi n/8}}{ze^{-j2\pi n/8} - e^{-1/40}}, \quad |z| > |e^{-1/40}|$$

وأيضاً:

$$e^{j2\pi n/8}e^{-n/40}u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{ze^{j2\pi n/8}}{ze^{j2\pi n/8}-e^{-1/40}}, \quad |z| > \left|e^{-1/40}\right|$$

وأيضاً:

$$-\frac{j}{2}\left[e^{-\frac{n}{40}}e^{\frac{j2\pi n}{8}}-e^{-\frac{n}{40}}e^{-\frac{j2\pi n}{8}}\right]u[n] \overset{z}{\leftrightarrow}$$
$$-\frac{j}{2}\left[\frac{ze^{-j2\pi n/8}}{ze^{-j2\pi n/8}-e^{-1/40}}-\frac{ze^{j2\pi n/8}}{ze^{j2\pi n/8}-e^{-1/40}}\right], \quad |z| > \left|e^{-1/40}\right|$$

وأيضاً:

$$X_{\mathrm{m}}(\mathrm{z}) = -\frac{j}{2}\left[\frac{ze^{-j2\pi n/8}}{ze^{-j2\pi n/8}-e^{-1/40}}-\frac{ze^{j2\pi n/8}}{ze^{j2\pi n/8}-e^{-1/40}}\right]$$

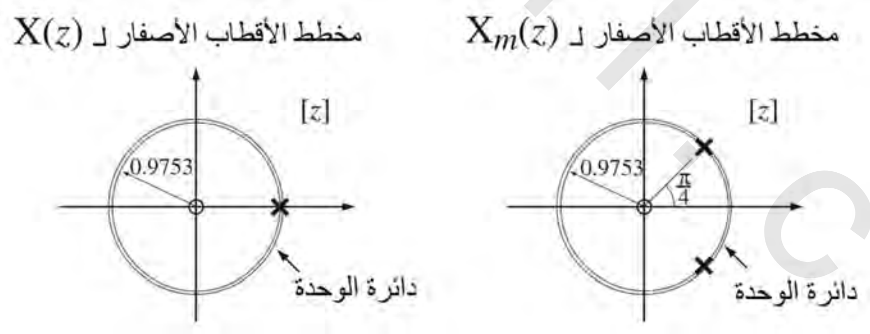
$$= \frac{ze^{-1/40}sin(2\pi/8)}{z^2-2ze^{-1/40}cos(2\pi/8)+e^{-1/20}}, \quad |z| > \left|e^{-1/40}\right|$$

أو:

$$X_{\mathrm{m}}(\mathrm{z}) = \frac{0.6896z}{z^2-1.3793z+0.9512}$$

$$= \frac{0.6896z}{(z-0.6896-j0.6896)\,(z-2.6896+j0.6896)}, \quad |z| > \left|e^{-1/40}\right|$$

انظر شكل (٩.١٣).



شكل رقم (٩,١٣) مخطط الأقطاب والأصفار للدالة X(z) و Xm(z)

مثال ٩,٥

تحويل زد باستخدام خاصية التفاضل

باستخدام خاصية التفاضل في النطاق زد، وضح أن تحويل زد للدالة nu[n] سيكون $|z| > 1$,$\frac{z}{(z-1)^2}$.

سنبدأ بالزوج التالي:

$$\mathrm{u[n]} \overset{\mathrm{z}}{\leftrightarrow} \frac{z}{\mathrm{z}-1}, \qquad |z|>1$$

ثم باستخدام خاصية التفاضل في النطاق z نحصل على :

$$-\mathrm{nu[n]} \overset{\mathrm{z}}{\leftrightarrow} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\left(\frac{z}{\mathrm{z}-1}\right) = -\frac{z}{(z-1)^2}, \qquad |z|>1$$

$$n\mathrm{u[n]} \overset{\mathrm{z}}{\leftrightarrow} \frac{z}{(z-1)^2}, \qquad |z|>1$$

مثال ٩,٦

تحويل زد باستخدام خاصية التراكم

باستخدام خاصية التراكم، وضح أن تحويل زد للدالة nu[n] هو $|z|>1$ ، $\frac{z}{(z-1)^2}$.

سنبدأ أولاً بالتعبير عن nu[n] في الصورة التراكمية كما يلي :

$$n\mathrm{u[n]} = \sum_{m=0}^{n} u[m-1]$$

ثم باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية، نوجد تحويل لابلاس لـ u[n-1] كما يلي :

$$u[n-1] \overset{\mathrm{z}}{\leftrightarrow} \mathrm{z}^{-1}\frac{z}{\mathrm{z}-1} = \frac{1}{\mathrm{z}-1}, \qquad |z|>1$$

بعد ذلك نطبق خاصية التراكم :

$$n\mathrm{u[n]} = \sum_{m=0}^{n} u[m-1] \overset{\mathrm{z}}{\leftrightarrow} \left(\frac{z}{\mathrm{z}-1}\right)\frac{1}{\mathrm{z}-1} = \frac{z}{(z-1)^2}, \qquad |z|>1$$

كما كان الأمر حقيقياً بالنسبة لتحويل لابلاس، فإن نظرية القيمة النهائية يمكن تطبيقها إذا كانت النهاية : $\lim_{n\to\infty} g[n]$ موجودة. فمثلاً إذا كان لدينا :

$$X(z) = \frac{z}{z-2}, \qquad |z|>2$$

فإن :

$$\lim_{z\to1}(\mathrm{z}-1)X(z) = \lim_{z\to1}(\mathrm{z}-1)\frac{z}{z-2} = 0$$

ولكن إذا كانت $x[n]=2^n u[n]$ والنهاية $\lim_{n\to\infty} x[n]$ غير موجودة. لذلك فإن الخلاصة هي أن القيمة النهائية تساوي صفراً يعتبر خطأ.

بطريقة مكافئة للإثبات في تحويل لابلاس يمكننا أن نوضح التالي :

لكي يتم تطبيق نظرية القيمة النهائية على الدالة G(z)، فإن جميع الأقطاب المحددة للدالة (z-1) G (z) يجب أن تقع في داخل دائرة الوحدة في المستوى z.

مثال ٩,٧

تحويل زد لدالة عكسية السببية

أوجد تحويل زد للدالة $x[n]=4(-0.3)^{-n}u[-n]$.

باستخدام الزوج :

$$-\alpha^{n}\, u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{z-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, \quad |z| < |\alpha|$$

بوضع α تساوي -0.3^{-1} نحصل على :

$$-(-0.3^{-1})^{n}\, u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{z+0.3^{-1}}, \quad |z| < |-0.3^{-1}|$$

$$-(-10/3)^{n}\, u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{z+10/3}, \quad |z| < |10/3|$$

باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية :

$$-(-10/3)^{n-1}\, u[-(n-1)-1] \overset{z}{\leftrightarrow} z^{-1}\frac{z}{z+10/3} = \frac{1}{z+10/3}, \quad |z| < |10/3|$$

$$-(-3/10)(-10/3)^{n}\, u[-n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{z+10/3}, \quad |z| < |10/3|$$

$$(3/10)(-10/3)^{n}\, u[-n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{z+10/3}, \quad |z| < |10/3|$$

باستخدام خاصية الخطية وضرب الطرفين في 4/(3/10) أو 40/3 نحصل على :

$$4(-0.3)^{n}\, u[-n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{40/3}{z+10/3} = \frac{40}{3z+3}, \quad |z| < |10/3|$$

(٩,١٢) تحويل زد الأحادي الاتجاه

لقد ثبت أن تحويل لابلاس الأحادي كان أكثر راحة في التطبيق بالنسبة للدوال المستمرة زمنياً، وتحويل زد الأحادي سيكون أكثر راحة، أو مناسبة بالنسبة للدوال المتقطعة زمنياً الأسباب لنفسها. يمكننا أن نحدد تحويل زد الأحادي، والذي يكون محققا فقط للدوال التي تكون أصفارا قبل الزمن المتقطع n=0 وسنتجنب في معظم المشاكل الشائعة أي افتراضات تعقيدية لمنطقة التقارب.

يتم تعريف تحويل زد الأحادي كما يلي :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \qquad \text{المعادلة رقم (٩,٦)}$$

منطقة التقارب لتحويل زد الأحادي تكون دائماً خارج دائرة، مركزها عند نقطة الأصل في المستوى z ونصف قطرها يكون مقدار أكبر قطب.

خواص فريدة لتحويل زد الأحادي

خواص تحويل زد الأحادي الاتجاه تشبه جداً خواص زد الثنائي، ولكن خاصية الإزاحة الزمنية تختلف قليلاً. سنفترض g[n]=0 عندما n<0 ، وبالتالي فإن تحويل زد الأحادي سيكون:

$$g[n-n_0] \overset{z}{\leftrightarrow} \begin{cases} z^{-n_0}G(z), & n_0 \geq 0 \\ z^{-n_0}\left\{G(z) - \sum_{m=0}^{-(n_0+1)} g[m]z^{-m}\right\}, & n_0 < 0 \end{cases}$$

هذه الخاصية يجب أنتكون مختلفة عند الإزاحة ناحية اليسار، لأنه عند إزاحة دالة سببية ناحية اليسار فإن بعض القيم المختلفة عن الصفر لن تقع في مدى المجموع لتحويل زد الأحادي الاتجاه، الذي يبدأ عند n=0. لذلك فإن الكميات التالية يجب أخذها في الاعتبار لأي قيم للدالة يتم إزاحتها إلى المدى n<0:

$$-\sum_{m=0}^{-(n_0+1)} g[m]z^{-m}$$

خاصية التراكم بالنسبة لتحويل زد الأحادي ستكون:

$$\sum_{m=0}^{n} g[m] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-1}G(z)$$

لقد تغير فقط حد المجموع الأسفل. بالنسبة للتحويل الثنائي لدينا:

$$\sum_{m=-\infty}^{n} g[m] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z}{z-1}G(z)$$

والذي ما زال يعمل لأنه بالنسبة لأي إشارة سببية يمكننا أن نكتب:

$$\sum_{m=-\infty}^{n} g[m] = \sum_{m=0}^{n} g[m]$$

تحويل زد الأحادي لأي إشارة سببية يكون هو نفسه تماماً مثل تحويل زد الثنائي للإشارة نفسها. ولذلك فإن جدول تحويل زد الثنائي يمكن استخدامه مع تحويل زد الأحادي.

حل المعادلات الفرقية

إحدى الطرق للنظر إلى تحويل زد هي أنه يحمل علاقة مع المعادلات الفرقية مثل العلاقة بين تحويل لابلاس والمعادلات التفاضلية. أي معادلة فرقية خطية بشروط ابتدائية يمكن تحويلها عن طريق تحويل زد إلى معادلة جبرية. بعد ذلك نحل هذه المعادلة الجبرية والحل في النطاق الزمني يكون هو تحويل زد العكسي لهذا الحل.

مثال ٩,٨

حل معادلة فرقية بشروط ابتدائية باستخدام تحويل زد

حل المعادلة الفرقية التالية :

$$y[n+2]-(3/2)y[n+1]+(1/2)y[n]=(1/4)^n, \qquad for\ n\geq 0$$

مع الشروط الابتدائية $y[0]=10$ و $y[1]=4$.

الشروط الابتدائية للمعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية تتكون عادة من تحديد للقيمة الابتدائية للدالة وتفاضلها الأول. الشروط الابتدائية للدالة الفرقية من الدرجة الثانية تتكون عادة من تحديد لأول قيمتين ابتدائيتين للدالة (في حالتنا هذه $y[0]$ و $y[1]$).

بإجراء تحويل زد على طرفي المعادلة الفرقية (باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية) نحصل على :

$$z^2\,(Y(z)-y[0]-z^{-1}y[1])-(3/2)z(Y(z)-y[0])+(1/2)Y(Z)=\frac{Z}{Z-1/4}$$

بالحل لإيجاد قيمة $Y(z)$:

$$Y(z)\ =\frac{\frac{z}{z-1/4}+z^2y[0]+z[1]-(3/2)zy[0]}{z^2-(3/2)z+1/2}$$

$$Y(z)\ =\frac{z^2y[0]+z(7y[0]/4-y[1])-y[1]/4+3\,y[0]/8+1}{(z-1/4)(z^2-(3/2)z+1/2)}$$

بالتعويض عن القيم العددية للشروط الابتدائية نحصل على :

$$Y(z)\ =z\frac{10z^2-(27/4)z+1/2}{(z-1/4)(z-1/2)(z-1)}$$

بقسمة الطرفين على z نحصل على :

$$\frac{Y(z)}{z}=z\frac{10z^2-(27/4)z+15/4}{(z-1/4)(z-1/2)(z-1)}$$

وهذا كسر مثالي في المتغير z ولذلك يمكن تحليله بالكسور الجزيئية لنحصل على :

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{16/3}{z-1/4}+\frac{4}{z-1/2}+\frac{2/3}{z-1}\Rightarrow Y(z)\ =\frac{z16/3}{z-1/4}+\frac{4z}{z-1/2}+\frac{2z/3}{z-1}$$

باستخدام الزوج :

$$\alpha^n u[n]\overset{z}{\leftrightarrow}\frac{z}{z-\alpha}$$

وبإجراء تحويل لابلاس العكسي نحصل على :

$$y[n]=[5.333(0.25)^n+4(0.5)^n+0.667]u[n]$$

بالتحقق من هذه المعادلة عند n=0 و n=1 نحصل على :

$$y[0]=5.333(0.25)^0+4(0.5)^0+0.667=10$$

$$y[1]=5.333(0.25)^1+4(0.5)^1+0.667=1.333+2+0.667=4$$

وهذا يتوافق مع الشروط الابتدائية. بالتعويض بهذا الحل في المعادلة الفرقية نحصل على:

$$\begin{Bmatrix} 5.333(0.25)^{n+2} + 4(0.5)^{n+2} + 0.667 \\ -1.5[5.333(0.25)^{n+1} + 4(0.5)^{n+1} + 0.667] \\ +0.5[5.333(0.25)^{n} + 4(0.5)^{n} + 0.667] \end{Bmatrix} = (0.25)^n, for\ n \geq 0$$

أو:

$$0.333(0.25)^n + (0.5)^n + 0.667 - 2(0.25)^n - 3(0.5)^n - 1 + 2.667(0.25)^n$$
$$+2 + 0.33 = (0.25)^n, for\ n \geq 0$$

أو:

$$(0.25)^n = (0.25)^n, for\ n \geq 0$$

مما يعني أن هذا الحل يمثل فعلاً حلاً للمعادلة الفرقية.

(٩,١٣) مخطط الأقطاب والأصفار والاستجابة الترددية

لكي نفحص الاستجابة الترددية للأنظمة المتقطعة زمنياً فإنه يمكننا أن نخصص تحويل زد إلى ال DTFT من خلال التعويض $z \rightarrow e^{j\Omega}$ حيث Ω تعتبر متغيراً حقيقياً يمثل التردد الزاوي المتقطع زمنياً. حقيقة أن Ω حقيقية تعني أنه عند تحديد الاستجابة الترددية فإن قيم z التي نفترضها الآن هي فقط التي على دائرة الوحدة في المستوى z لأن $|e^{j\Omega}|=1$ لأي قيمة حقيقية لـ Ω. إن هذا يكافيء تماما تحديد الاستجابة الترددية للأنظمة المستمرة زمنياً عن طريق فحص دالة العبور الخاصة بها في المجال s مع تحرك s على طول المحور w في المستوى s، ويمكن استخدام طرق تخطيطية مشابهة لذلك.

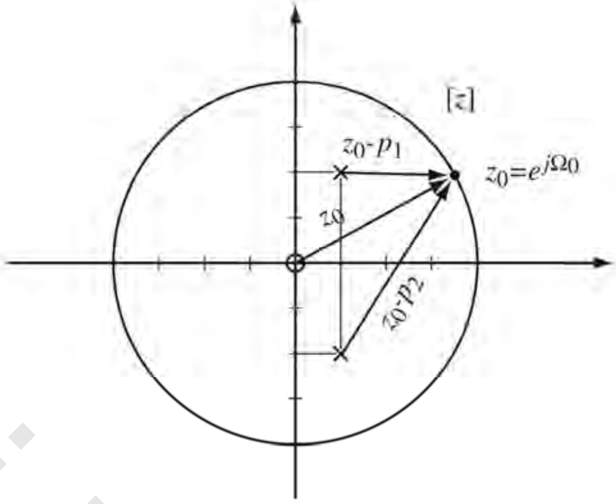
إفترض أن دالة العبور لنظام معين هي:

$$H(z) = \frac{z}{z^2 - z/2 + 5/16} = \frac{z}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

حيث:

$$p_2 = \frac{1-2j}{4} \quad و \quad p_1 = \frac{1+2j}{4}$$

هذه الدالة لها صفر عند نقطة الأصل، وقطبان مترافقان كما في شكل (٩.١٤).



شكل رقم (٩,١٤). مخطط الأقطاب والأصفار في النطاق z لدالة عبور أحد الأنظمة.

الاستجابة الترددية عند أي تردد زاوي معين Ω_0 يتم تحديدها (في حدود كمية ثابتة) عن طريق المتجهات من الأقطاب والأصفار لدالة العبور إلى النقطة $z_0 = e^{j\Omega_0}$. مقدار الاستجابة الترددية يساوي حاصل ضرب مقادير متجهات الأصفار مقسوما على حاصل ضرب مقادير متجهات الأقطاب. في هذه الحالة سيكون :

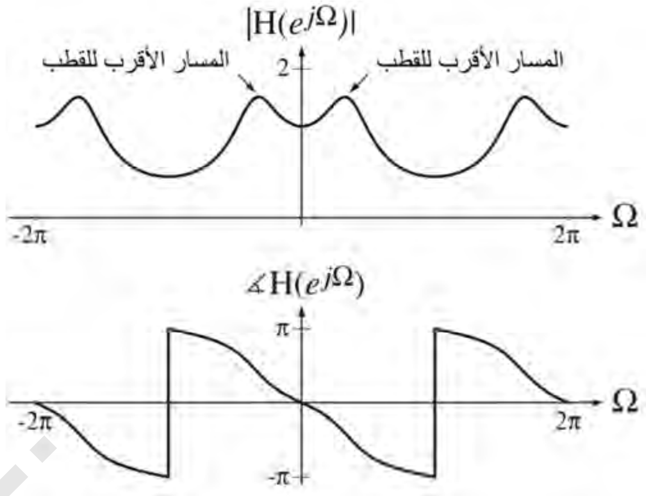
$$\left|H(e^{j\Omega})\right| = \frac{|e^{j\Omega}|}{|e^{j\Omega}-p_1||e^{j\Omega}-p_2|}$$ المعادلة رقم (٩,٧)

من الواضح أنه مع اقتراب $e^{j\Omega}$ من القطب P_1 مثلاً ، فإن مقدار الفرق $e^{j\Omega}$-p_1 يصبح صغيراً ، مما يجعل مقدار المقام صغيراً وبالتالي يجعل مقدار دالة العبور أكبر. التأثير العكسي لذلك يحدث مع اقتراب $e^{j\Omega}$ من أي صفر.

زاوية الاستجابة الترددية هي مجموع زوايا متجهات الأصفار ناقص مجموع زوايا متجهات الأقطاب. في هذه الحالة ، $\measuredangle H(e^{j\Omega}) = \measuredangle e^{j\Omega} - \measuredangle (e^{j\Omega} - p_1) - \measuredangle (e^{j\Omega} - p_2)$ كما في شكل (٩.١٥).

القيمة العظمى للاستجابة الترددية تحدث تقريباً عند $z = e^{\pm j1.11}$ وهما نقطتان على دائرة الوحدة عند الزاوية نفسها مثل القطبين في دالة العبور ، ولذلك ، فإن هذه النقط على دائرة الوحدة هي النقط التي يصل عندها معامل المقام $e^{j\Omega_0} - p_1$ و $e^{j\Omega_0} - p_2$ في المعادلة (٩.٧) إلى أقل مقدار.

فرق جوهري بين الاستجابة الترددية للأنظمة المستمرة والأنظمة المتقطعة هي أنه بالنسبة للأنظمة المتقطعة فإن الاستجابة الترددية تكون عادة دورية بدورة مقدارها 2π في Ω. هذا الفرق يمكن رؤيته مباشرة في هذه الطريقة البيانية لأنه مع تحرك Ω من الصفر في الاتجاه الموجب ، فإنها تعبر كل دائرة الوحدة في اتجاه عكس عقارب الساعة ، وبعد ذلك في الدورة الثانية على دائرة الوحدة ، فإنها تمر بمواضعها السابقة ، مكررة الاستجابة الترددية نفسها الموجودة في الدورة الأولى.



شكل رقم (٩,١٥) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية للنظام الذي دالة عبوره هي: $\mathbf{H(z)=\frac{z}{z^2-\frac{z}{2}-\frac{5}{16}}}$

مثال ٩,٩

مخطط الأقطاب والأصفار والاستجابة الترددية من دالة العبور1

ارسم مخطط الأقطاب والأصفار وارسم الاستجابة الترددية للنظام الذي دالة عبوره كما يلي:

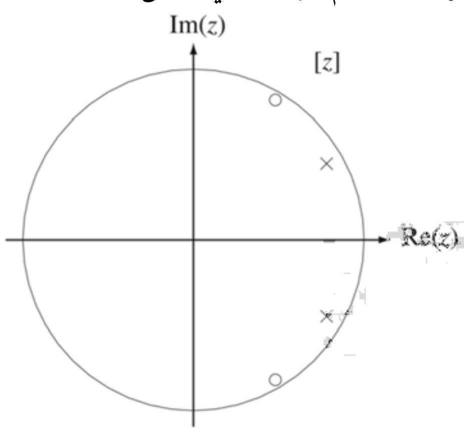
$$H(z)=\frac{z^2-0.96z+0.9028}{z^2-1.56z+0.8109}$$

يمكن تحليل دالة العبور ووضعها على الصورة التالية:

$$H(z)=\frac{(z-0.48+j0.82)\,(z-0.48-j0.82)}{(z-0.78+j0.45)\,(z-0.78-j0.45)}$$

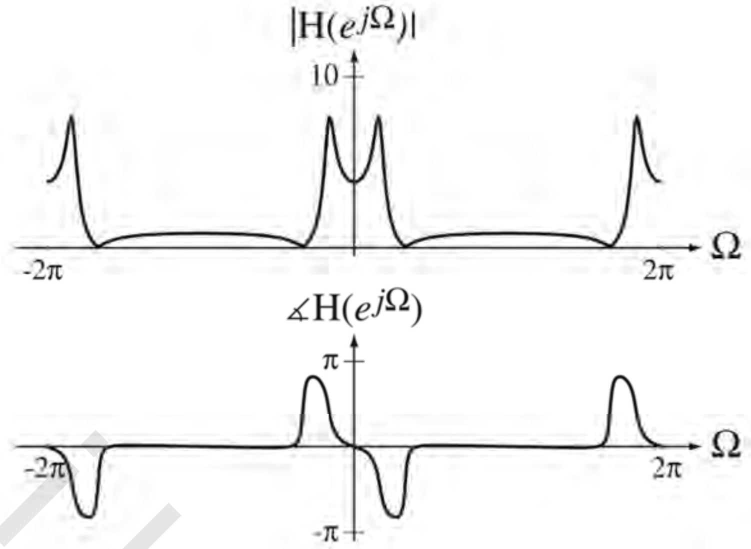
مخطط الأقطاب والأصفار موضح في شكل (٩.١٦).

مقدار وزاوية الاستجابة الترددية للنظام موضحة في شكل (٩.١٧).



شكل رقم (٩,١٦) مخطط الأقطاب والأصفار لدالة العبور التالية:

$\mathbf{H(z)=\frac{z^2-0.96z+0.9028}{z^2-1.56z+0.8109}}$



شكل رقم (٩,١٧) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية للنظام الذي استجابته الترددية هي:

$$\mathbf{H(z)} = \frac{\mathbf{z^2-0.96z+0.9028}}{\mathbf{z^2-1.56z+0.8109}}$$

مثال ٩,١٠

مخطط الأقطاب والأصفار والاستجابة الترددية من دالة العبور ٢

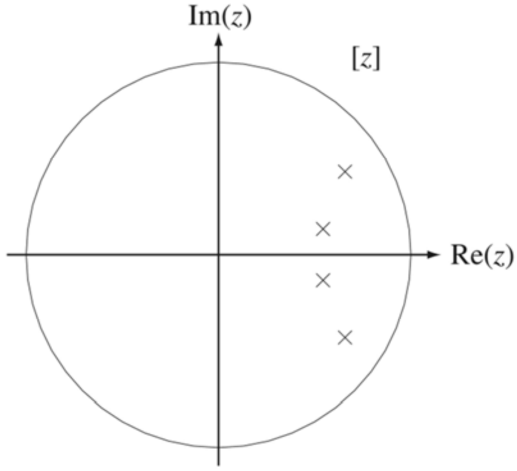
ارسم مخطط الأقطاب والأصفار وارسم الاستجابة الترددية للنظام الذي استجابته الترددية هي :

$$H(z) = \frac{0.0686}{(z^2 - 1.087z + 0.3132)(z^2 - 1.315z + 0.6182)}$$

يمكن تحليل هذه الدالة ووضعها على الصورة :

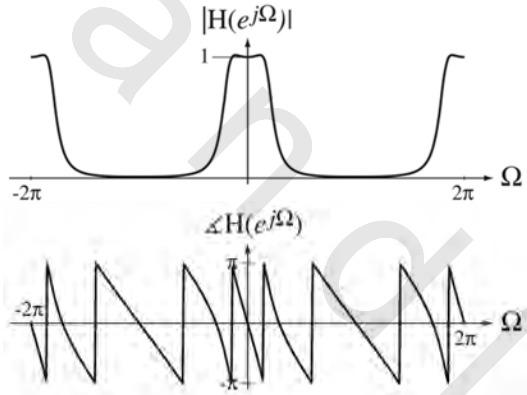
$$H(z) = \frac{0.0686}{(z - 0.5435 + j0.1333)(z - 0.5435 - j0.1333)(z - 0.6575 + j0.4312)(z - 0.6575 - j0.4312)}$$

مخطط الأقطاب والأصفار موضح في شكل (٩,١٨). مقدار وزاوية الاستجابة الترددية للنظام موضحة في شكل (٩,١٩).



شكل رقم (٩,١٨) مخطط الأقطاب والأصفار لدالة العبور التالية:

$$\mathbf{H(z)} = \frac{\mathbf{0.0686}}{\mathbf{(z^2-1.087z+0.3132)(z^2-1.315z+0.6182)}}$$



شكل(٩,١٩) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية للنظام الذي دالة العبور له هي:

$$\mathbf{H(z)} = \frac{\mathbf{0.0686}}{\mathbf{(z^2-1.087z+0.3132)(z^2-1.315z+0.6182)}}$$

(٩,١٤) كائنات نظام ماتلاب

يمكن كائنات في الزمن المتقطع واستخدامها بالطريقة نفسها مثل كائنات الأنظمة المستمرة. الصورة العامة للحصول على كائن مع الدالة tf هي نفسها تقريباً :

```
sys=tf(num, den, Ts)
```

ولكن في هذه المرة بإضافة المعامل Ts ، وهو الزمن بين العينات ، بفرض أن الإشارات المتقطعة زمنياً قد تم الحصول عليها عن طريق أخذ عينات من الإشارة المستمرة. مثلاً سنفترض أن دالة العبور لنظام هي :

$$H_1(z) = \frac{z^2(z-0.8)}{(z^2-0.3)(z^2-1.4z+0.2)} = \frac{z^3-0.8z^2}{z^3-1.1z^2-0.22z+0.06}$$

في ماتلاب ستكون :

```
»num = [1 -0.8 0 0] ;
»den = [1 -1.1 -0.22 0.06] ;
»Ts = 0.008 ;
»H1 = tf(num,den,Ts) ;
»H1
Transfer function:
z^3 - 0.8 z^2
-----------------------------
z^3 - 1.1 z^2 - 0.22 z + 0.06
```

الزمن بين العينات = 0.008.

يمكننا أيضاً استخدام الدالة zpk كما يلي :

```
»z = [0.4] ;
»p = [0.7 -0.6] ;
»k = 3 ;
»H2 = zpk(z,p,k,Ts) ;
»H2
Zero/pole/gain:
3 (z-0.4)
---------------
(z-0.7) (z+0.6)
Sampling time: 0.008
```

يمكننا أيضاً تحديد z كمتغير مستقل في تحويل زد كما يلي :

```
»z = tf('z',Ts) ;
»H3 = 7*z/(z^2+0.2*z+0.8) ;
»H3
Transfer function:

7 z
-----------------
z^2 + 0.2 z + 0.8
Sampling time: 0.008
```

لسنا هنا مطالبين بذكر الزمن بين العينات :

```
>> z = tf('z');
>> H3 = 7*z/(z^2+0.2*z+0.8);
>> H3
Transfer function:
7 z
-----------------
z^2 + 0.2 z + 0.8
Sampling time: unspecified
```

الأمر التالي :

H=freqz(num, den, W) ;

يقبل متجهيا البسط والمقام ويفسرهما على أنهما قوي المتغير z في البسط والمقام لدالة العبور H(z). إنها تعطي الاستجابة الترددية المركبة H بدلالة متغير التردد الزاوي المركب في المتجه W.

(٩,١٥) مقارنات بين طرق التحويل المختلفة

كل نوع من التحويلات السابقة له استخداماته التي يكون فيها مناسبا في تحليل الإشارات والأنظمة. إذا كنا نريد إيجاد الاستجابة الكلية للأنظمة المتقطعة زمنياً لإثارة سببية أو غير سببية، فإنه يمكننا غالباً استخدام تحويل زد. إذا كنا نحتاج الاستجابة الترددية للنظام، فإن DTFT يكون هو المناسب. إذا كنا نريد إيجاد استجابة أي نظام لأي إثارة دورية، فإنه يمكننا غالباً استخدام DTFT، أو DFT اعتماداً على نوع التحليل المطلوب والصورة المعروض بها هذا الدخل (هل هي صورة تحليلية، أم عددية).

مثال ٩,١١

استجابة النظام الكلية باستخدام تحويل زد z و DTFT

نظام له دالة العبور التالية:

$$H(z) = \frac{z}{(z-0.3)(z+0.8)}, \qquad |z| > 0.8$$

تمت إثارته باستخدام تتابع الوحدة. إحسب الاستجابة الكلية لهذا النظام.

تحويل زد للاستجابة سيكون:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{z}{(z-0.3)(z+0.8)} \times \frac{z}{z-1}, \qquad |z| > 1$$

باستخدام تحليل الكسور الجزيئية نحصل على:

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-0.3)(z+0.8)(z-1)} = -\frac{0.1169}{\mathrm{z}-0.3} + \frac{0.3232}{\mathrm{z}+0.8} + \frac{0.7937}{\mathrm{z}-1}, \qquad |z| > 1$$

وبالتالي فإن الاستجابة الكلية ستكون:

$$y[n] = [-0.1169(0.3)^{n-1} + 0.3232(-0.8)^{n-1} + 0.7937]u[n-1]$$

يمكن أيضاً تحليل هذه المسألة باستخدام DTFT ولكن الترميز سيكون غير ملائم لأن DTFT لتتابع الوحدة يكون أساساً كما يلي:

$$\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\delta_{2\pi}(\Omega)$$

وستكون استجابة النظام الترددية هي:

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}}{(e^{j\Omega}-0.3)(e^{j\Omega}+0.8)}$$

DTFT لاستجابة النظام ستكون:

$$Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})X(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}}{(e^{j\Omega}-0.3)(e^{j\Omega}+0.8)} \times \left(\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\delta_{2\pi}(\Omega)\right)$$

أو :

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j2\Omega}}{(e^{j\Omega}-0.3)(e^{j\Omega}+0.8)(e^{j\Omega}-1)} + \pi\frac{e^{j\Omega}}{(e^{j\Omega}-0.3)(e^{j\Omega}+0.8)}\pi\delta_{2\pi}(\Omega)$$

وباستخدام الكسور الجزيئية نحصل على :

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{-0.1169}{e^{j\Omega}-0.3} + \frac{0.3232}{e^{j\Omega}+0.8} + \frac{0.7937}{e^{j\Omega}-1} + \frac{\pi}{(1-0.3)(1+0.8)}\delta_{2\pi}(\Omega)$$

باستخدام خاصية التكافوء في الصدمة ودورية كل $\delta_{2\pi}(\Omega)$ و $e^{j\Omega}$ نحصل على :

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{-0.1169e^{-j\Omega}}{1-0.3e^{-j\Omega}} + \frac{0.3232e^{-j\Omega}}{1+0.8e^{-j\Omega}} + \frac{0.7937e^{-j\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} + 2.4933\delta_{2\pi}(\Omega)$$

بعد ذلك بوضع هذه المعادلة في صورة يكون فيها تحويل DTFT العكسي مباشرا :

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{-0.1169e^{-j\Omega}}{1-0.3e^{-j\Omega}} + \frac{0.3232e^{-j\Omega}}{1+0.8e^{-j\Omega}} + 0.7937\left(\frac{e^{-j\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\delta_{2\pi}(\Omega)\right)$$

$$\underbrace{-0.7937\pi\delta_{2\pi}(\Omega) + 2.4933\delta_{2\pi}(\Omega)}_{=0}$$

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{-0.1169e^{-j\Omega}}{1-0.3e^{-j\Omega}} + \frac{0.3232e^{-j\Omega}}{1+0.8e^{-j\Omega}} + 0.7937\left(\frac{e^{-j\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\delta_{2\pi}(\Omega)\right)$$

وفي النهاية بإجراء تحويل DTFT العكسي نحصل على :

$$y[n] = [-0.1169(0.3)^{n-1} + 0.3232(-0.8)^{n-1} + 0.7937]u[n-1]$$

وهي النتيجة السابقة نفسها ولكن بمجهود أكبر واحتمال للخطأ أكبر كذلك.

مثال ٩,١٢

استجابة النظام لدالة جيبية

نظام له دالة العبور التالية :

$$(z) = \frac{z}{Z-0.9}, \qquad |z| > 0.9$$

وتمت إثارته بالدالة الجيبية x[n]=cos(2πn/12) أوجد استجابة هذا النظام.

الإثارة هي دالة جيبية حقيقية x[n]=cos(2πn/12) ، وليست دالة جيبية سببية x[n]=cos(2πn/12)u[n]. الدوال الجيبية النقية لا تظهر في جدول تحويلات زد. حيث إن الإثارة هي دالة جيبية نقية ، فإننا سنحسب استجابة مدفوعة للنظام ويمكننا استخدام زوج DTFT التالي :

$$cos(\Omega_0 n) \overset{f}{\leftrightarrow} \pi[\delta_{2\pi}(\Omega-\Omega_0) + \delta_{2\pi}(\Omega+\Omega_0)]$$

وأيضاً :

$$\delta_{N_0}[n] \overset{f}{\leftrightarrow} (2\pi/N_0)\delta_{2\pi/N_0}(\Omega)$$

وباستخدام التبادلية بين الضرب والالتفاف :

$$x[n] * y[n] \overset{f}{\leftrightarrow} X(e^{j\Omega})Y(e^{j\Omega})$$

وبالتالي ، فإن DTFT لاستجابة النظام ستكون :

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - 0.9} \times \pi\pi[\delta_{2\pi}(\Omega - \pi/6) + \delta_{2\pi}(\Omega + \pi/6)]$$

$$Y(e^{j\Omega}) = \pi\left[e^{j\Omega}\frac{\delta_{2\pi}(\Omega - \pi/6)}{e^{j\Omega} - 0.9} + e^{j\Omega}\frac{\delta_{2\pi}(\Omega + \pi/6)}{e^{j\Omega} - 0.9}\right]$$

باستخدام خاصية التكافؤ للصدمة ، وحقيقة أن كلاً من $e^{j\Omega}$ و $\delta_{2\pi}(\Omega)$ لهما دورة أساسية مقدارها 2π ، فإن :

$$Y(e^{j\Omega}) = \pi\left[e^{j\pi/6}\frac{\delta_{2\pi}(\Omega - \pi/6)}{e^{j\pi/6} - 0.9} + e^{-j\pi/6}\frac{\delta_{2\pi}(\Omega + \pi/6)}{e^{-j\pi/6} - 0.9}\right]$$

بإيجاد المقام المشترك في المعادلة السابقة والتبسيط :

$$Y(e^{j\Omega}) = \pi\frac{\delta_{2\pi}(\Omega - \pi/6)\left(1 - 0.9e^{j\pi/6}\right) + \delta_{2\pi}(\Omega + \pi/6)\left(1 - 0.9e^{-j\pi/6}\right)}{1.81 - 1.8(\pi/6)}$$

$$Y(e^{j\Omega}) = \pi\frac{0.2206[\delta_{2\pi}(\Omega - \pi/6) + \delta_{2\pi}(\Omega + \pi/6)] + j0.45[\delta_{2\pi}(\Omega + \pi/6) - \delta_{2\pi}(\Omega - \pi/6)]}{0.2512}$$

$$Y(e^{j\Omega}) = 2.7589[\delta_{2\pi}(\Omega - \pi/6) + \delta_{2\pi}(\Omega + \pi/6)] + j5.6278[\delta_{2\pi}(\Omega + \pi/6) - \delta_{2\pi}(\Omega - \pi/6)]$$

باستخدام DTFT لدالة الجيب وجيب التمام :

$$y[n] = 0.8782cos(2\pi n/12) + 1.7917sin(2\pi n/12)$$

باستخدام :

$$A\,cos(x) + B\,sin(x) = \sqrt{A^2 + B^2}\,cos\left(x + tan^{-1}(B/A)\right)$$

نحصل على ما يلي :

$$y[n] = 1.995\,cos(2\pi n/12 - 1.115)$$

نحن لم نستخدم تحويل زد ؛ لأنه لا يوجد في جدول أزواج تحويلات زد تحويلا للدالة الجيبية. ولكن هناك تحويلاً للدالة الجيبية المضروبة في تتابع الوحدة كالتالي :

$$cos(\Omega_0 n)u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z\,[z - cos(\Omega_0)]}{z^2 - 2z\,cos(\Omega_0) + 1}, |z| > 1$$

من الممكن أن نوجد استجابة النظام لهذه الإثارة المختلفة ، ولكنها مشابهة للإثارة التي معنا. دالة العبور ستكون

كما يلي :

$$H(z) = \frac{z}{z - 0.9}, |z| > 0.9$$

وبالتالي سيكون تحويل زد للاستجابة هو :

$$Y(z) = \frac{z}{z - 0.9} \times \frac{z\,[z - cos(\pi/6)]}{z^2 - 2z\,cos(\pi/6) + 1}, |z| > 1$$

وباستخدام الكسور الجزيئية:

$$Y(z) = \frac{0.1217z}{z-0.9} + \frac{0.8783z^2 + 0.1353z}{z^2 - 1.732z + 1}, |z| > 1$$

لإيجاد تحويل زد العكسي، فإننا سنحتاج لتعديل المعادلة السابقة لتكون في صورة مشابهة للصور الموجودة في الجدول. الكسر الأول يظهر مباشرة في الجدول. الكسر الثاني له مقام، كما له الشكل نفسه الموجود في تحويل زد للدالة $\cos(\Omega_0 n)u[n]$ والدالة $\sin(\Omega_0 n)u[n]$، ولكن البسط ليس في الصورة المكافئة. ولكن بإضافة وطرح كميات مناسبة للبسط يمكننا التعبير عن Y(z) كما يلي:

$$Y(z) = \frac{0.1217}{z-0.9} + 0.8783\left[\frac{z\,(z-0.866)}{z^2 - 1.732z + 1} + 2.04\frac{0.5z}{z^2 - 1.732z + 1}\right], |z| > 1$$

$$y[n] = 0.1217(0.9)^n u[n] + 0.8783cos(2\pi n/12) + 2.04sin(2\pi n/12)u[n]$$

$$y[n] = 0.1217(0.9)^n u[n] + 1.995cos(2\pi n/12 - 1.115)u[n]$$

لاحظ أن الاستجابة تتكون من جزأين، استجابة عابرة، وهي:

$$0.1217(0.9)^n u[n]$$

واستجابة مدفوعة، وهي:

$$1.995cos(2\pi n/12 - 1.115)u[n]$$

وهي الاستجابة المدفوعة نفسها التي حصلنا عليها باستخدام DTFT فيما عدا معامل تتابع الوحدة. وعلى ذلك فبالرغم من أننا لا نعرف تحويل زد للدالة الجيبية في جدول التحويلات، إلا أننا يمكننا استخدام تحويل زد للدالة $\cos(\Omega_0 n)u[n]$ والدالة $\sin(\Omega_0 n)u[n]$ لإيجاد الاستجابة المدفوعة للدالة الجيبية.

في التحليل الموجود في نظام المثال ٩.١٢ كانت الإثارة دالة جيبية، وهي شائعة في أنواع مختلفة من تحليلات الإشارات والأنظمة، ومن المهم أن نعمم هذه العملية. إذا كانت دالة العبور للنظام على الصورة:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

فإن استجابة النظام للدالة $\cos(\Omega_0 n)u[n]$ ستكون:

$$Y(z) = \frac{N(z)}{D(z)}\frac{z\,[z - cos(\Omega_0)]}{z^2 - 2z\,cos(\Omega_0) + 1}$$

أقطاب هذه الاستجابة هي أقطاب دالة العبور زائد جذور المعادلة:

$$z^2 - 2z\,cos(\Omega_0) + 1 = 0$$

التي تكون زوجاً مركباً ومترافقاً على الصورة $p_1 = e^{j\Omega_0}$ و $p_2 = e^{-j\Omega_0}$. ولذلك فإن $p_1 = p_2^*$ و $p_1 + p_2 = 2\cos(\Omega_0)$، و $p_1 - p_2 = j2\sin(\Omega_0)$ و $p_1 p_2 = 1$. ولذلك فإذا كانت $\Omega_0 \neq m\pi$ حيث m ثابت صحيح، بمعنى إذا لم يكن هناك إلغاء للأقطاب والأصفار، فإن هذه الأقطاب ستكون منفردة، ويمكن كتابة الاستجابة في صورة الكسور الجزيئية كالتالي:

$$Y(z)=z\left[\frac{N_1(z)}{D(z)}+\frac{1}{p_1-p_2}\frac{H(p_1)\big(p_1-cos(\Omega_0)\big)}{z-p_1}+\frac{1}{p_2-p_1}\frac{H(p_2)\big(p_2-cos(\Omega_0)\big)}{z-p_2}\right]$$

ويمكن تبسيط ذلك كما يلي :

$$Y(z)=z\left[\left\{\frac{N_1(z)}{D(z)}+\left[\frac{H_r(p_1)(z-p_{1r})-H_i(p_1)p_{1i}}{z^2-z(p_{1r})+1}\right]\right\}\right]$$

حيث $p_1=p_{lr}+jp_{li}$ و $H(p_1)=H_r(p_1)+jH_i(p_1)$. ويمكن كتابة ذلك بدلالة المعاملات الأساسية كما يلي :

$$Y(z)=\left\{z\frac{N_1(z)}{D(z)}+\begin{bmatrix}Re\Big(H\big(cos(\Omega_0)+j\,sin(\Omega_0)\big)\Big)\dfrac{z\,sin(\Omega_0)}{z^2-2z\,cos(\Omega_0)+1}\\-Im\Big(H\big(cos(\Omega_0)+j\,sin(\Omega_0)\big)\Big)\dfrac{z\,sin(\Omega_0)}{z^2-2z\,cos(\Omega_0)+1}\end{bmatrix}\right\}$$

وبالتالي سيكون تحويل زد العكسي هو :

$$y[n]=z^{-1}\left(\frac{N_1(z)}{D(z)}\right)+\begin{bmatrix}Re\Big(H\big(cos(\Omega_0)+j\,sin(\Omega_0)\big)\Big)cos(\Omega_0 n)\\-Im\Big(H\big(cos(\Omega_0)+j\,sin(\Omega_0)\big)\Big)sin(\Omega_0 n)\end{bmatrix}u[n]$$

أو باستخدام :

$$Re(A)cos(\Omega_0 n)-Im(A)sin(\Omega_0 n)=|A|cos(\Omega_0 n+\measuredangle A)$$

$$y[n]=z^{-1}\left(\frac{N_1(z)}{D(z)}\right)+\big|H\big(cos(\Omega_0)+j\,sin(\Omega_0)\big)\big|cos\Big(\Omega_0 n+\measuredangle H\big(cos(\Omega_0)+j\,sin(\Omega_0)\big)\Big)u[n]$$

أو في النهاية :

$$y[n]=z^{-1}\left(\frac{N_1(z)}{D(z)}\right)+|H(p_1)|cos\big(\Omega_0 n+\measuredangle H(p_1)\big)u[n]$$ المعادلة رقم (٩.٨)

إذا كان النظام مستقراً ، فإن الكمية :

$$z^{-1}\left(\frac{N_1(z)}{D(z)}\right)$$

(وهو الاستجابة الطبيعية أو الوقتية) تتناقص إلى الصفر مع زيادة الزمن المتقطع والكمية :

$$|H(p_1)|cos\big(\Omega_0 n+\measuredangle H(p_1)\big)u[n]$$

ستساوي دالة جيبية بعد الزمن $n=0$ وستظل كذلك دائماً.

باستخدام هذه النتيجة ، يمكننا الآن حل المشكلة في المثال ٩.١٢ بسرعة أكثر. وستكون الاستجابة للإشارة $x[n]=cos(2\pi n/12)u[n]$ هي :

$$y[n]=z^{-1}\left(z\frac{N_1(z)}{D(z)}\right)+|H(p_1)|cos\big(\Omega_0 n+\measuredangle H(p_1)\big)u[n]$$

والاستجابة للإشارة $x[n]=cos(2\pi n/12)$ ستكون :

$$y_f[n]=|H(p_1)|cos\big(\Omega_0 n+\measuredangle H(p_1)\big)u[n]$$

حيث $H(z)=\frac{z}{z-0.9}$ و $p_1=e^{j\pi/6}$، ولذلك فإن:

$$H(e^{j\pi/6})=\frac{e^{j\pi/6}}{e^{j\pi/6}-0.9}=0.8783-j1.7917=1.955\measuredangle-1.115$$

وبالتالي:

$$y_f[n]=1.995cos(\Omega_0 n-0.115)$$

(٩,١٦) ملخص للنقاط المهمة

١- يمكن استخدام تحويل زد لتحديد دالة العبور لأي نظام LTI متقطع زمنياً، ويمكن استخدام دالة العبور لإيجاد استجابة النظام لأي إثارة اختيارية.

٢- تحويل زد يكون موجودا للإشارات المتقطعة زمنياً التي يزداد مقدارها أسرع من دالة أسية في الزمن الموجب، أو السالب.

٣- منطقة تقارب تحويل زد لأي إشارة تعتمد على كون الإشارة يمينية، أو يسارية الجانب.

٤- الأنظمة الموصوفة بمعادلات فرقية خطية ثابتة المعاملات لها دوال عبور في صورة نسبة بين كثيرتي حدود في المتغير z ويمكن بناء هذه الأنظمة مباشرة من دالة العبور.

٥- باستخدام جدول أزواج تحويلات زد وجدول الخواص يمكن إيجاد التحويلات الأمامية والعكسية لأي إشارة ذات أهمية هندسية.

٦- يستخدم تحويل زد الأحادي في حل المشاكل العملية؛ لأنه لا يتطلب أي اعتبارات لمنطقة التقارب وبالتالي فإنه يكون أبسط من التحويل الثنائي.

٧- مخطط الأقطاب والأصفار لدالة عبور أي نظام يحتوي على العديد من خواص هذا النظام ويمكن استخدامه لتحديد الاستجابة الترددية.

٨- يحتوي ماتلاب على هدف محدد للتعبير عن دالة عبور النظام المتقطع زمنياً والعديد من الدوال التي تعمل على الهدف من هذا النوع.

تمارين وإجاباتها

(في كل تمرين تكون الإجابات مرتبة بطريقة عشوائية)

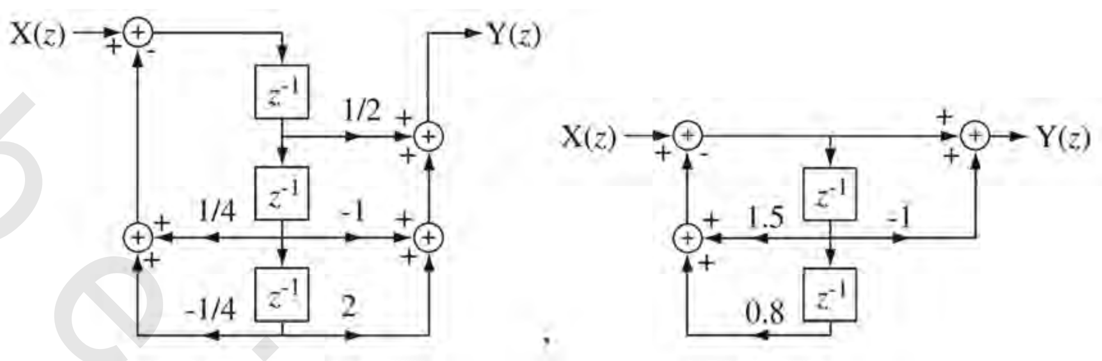
بناء الأنظمة باستخدام الطريقة المباشرة II

١- ارسم المخطط الصندوقي للطريقة المباشرة II لدوال عبور الأنظمة الآتية:

$$H(z)=\frac{z^2-2z+4}{(z-1/2)(2z^2+z+1)}$$

$$H(z) = \frac{z(z-1)}{z^2+1.5z+0.8}$$

الإجابة:



شكل رقم (ج.ت-١)

وجود تحويل زد z

٢- أوجد منطقة التقارب (إن وجدت) لتحويل زد للإشارات التالية:

(أ) x[n]=u[n]+u[-n]

(ب) x[n]=u[n]-u[n-10]

الإجابة: لا توجد، |z|>1

تحويل زد الأمامي والعكسي

٣- باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية، أوجد تحويل زد الثنائي للإشارات التالية:

(أ) x[n]=u[n-5]

(ب) x[n]=u[n+2]

(ج) $x[n]=(2/3)^n u[n+2]$

الإجابة:

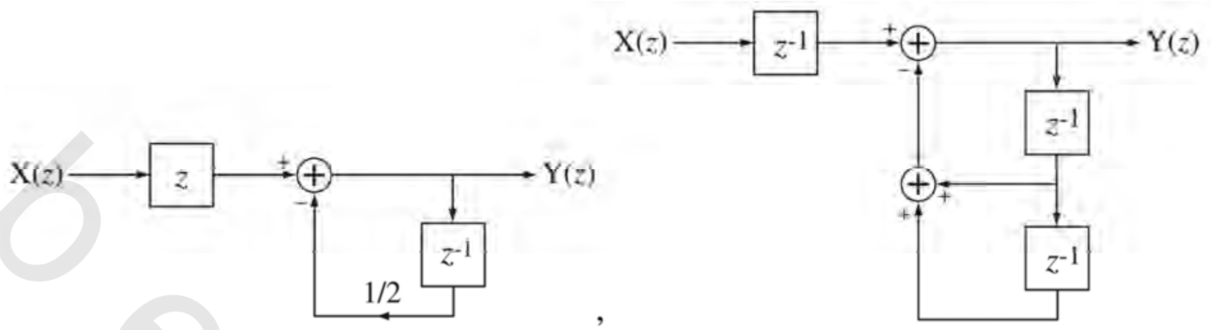
$\frac{z^{-4}}{z-1},\ |z|>1;\ \frac{z^3}{z-1}, |z|>1\ ;\ \frac{z}{z-2/3},\ |z|>2/3$

٤- ارسم مخططات الأنظمة التالية لدوال العبور التالية باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية:

(أ) $H(z) = \frac{z^2}{z+2/3}$

(ب) $H(z) = \frac{z}{z^2+z+1}$

الإجابة:



شكل رقم (ج.ت–٤)

٥- باستخدام خاصية التحجيم، أوجد تحويل زد للإشارة التالية:

$$x[n] = sin(2\pi n/8)cos(2\pi n/8)u[n]$$

الإجابة:

$$z\frac{0.1379z^2-0.3827z+0.1379}{z^4-2.7741z^3+3.8478z^2-2.7741z+1}$$

٦- باستخدام خاصية التفاضل في النطاق z، أوجد تحويل زد للإشارة التالية:

$$x[n] = \mathrm{n}(5/8)^{\mathrm{n}}u[n]$$

الإجابة:

$$\frac{5\mathrm{z}/8}{(\mathrm{z}-5/8)^2},\ \ |z| > 5/8$$

٧- باستخدام خاصية الالتفاف، أوجد تحويل زد للإشارات التالية:

(أ) $x[n] = (0.9)^{\mathrm{n}}u[n] * u[n]$

(ب) $x[n] = (0.9)^{\mathrm{n}}u[n] * (0.6)^{\mathrm{n}}u[n]$

الإجابة:

$$\frac{\mathrm{z}^2}{\mathrm{z}^2-1.9z+0.9},\ \ |z| > 1,\ \frac{\mathrm{z}^2}{\mathrm{z}^2-1.5z+0.54},\ \ |z| > 0.9$$

٨- باستخدام خاصية الفرق وتحويل زد لتتابع الوحدة، أوجد تحويل زد لوحدة الصدمة وتحقق من إجابتك بالرجوع إلى جدول تحويلات زد z.

٩- أوجد تحويل زد للدالة التالية:

$$x[n] = u[n] - u[n-10]$$

وباستخدام هذه النتيجة وخاصية الفرق، أوجد تحويل زد للدالة التالية:

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-10]$$

قارن هذه النتيجة مع تحويل زد المحسوب مباشرة بتطبيق خاصية الإزاحة الزمنية على وحدة الصدمة.

١٠- باستخدام خاصية التراكم أوجد تحويل زد للإشارات التالية:

(أ) $x[n] = ramp[n]$

(ب) $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} u[m+5] - u[m]$

الإجابة:

$\frac{z}{(z-1)^2},\ |z| > 1,\ \frac{z^2(z^5-1)}{(z-1)^2},\ |z| > 1$

١١- باستخدام خاصية القيمة النهائية، أوجد القيمة النهائية للدوال التي هي تحويل زد العكسي للدوال التالية (إذا كانت النظرية مطبقة):

(أ) $x(z) = \frac{2z-7/4}{z^2-7/4z+3/4},\ |z| > 1$

(ب) $x(z) = \frac{z}{z-1},\quad |z| > 1$

الإجابة: $1, 1$

١٢- أوجد تحويل زد العكسي للدوال التالية في صورة تتابع باستخدام القسمة المطولة:

(أ) $X(z) = \frac{z-1}{z^2-2z+1},\ |z| > 1$

(ب) $X(z) = \frac{z}{z-1/2},\quad |z| > 1/2$

(ج) $X(z) = \frac{z+2}{4z^2-2z+3},\ |z| > \sqrt{3}/2$

(د) $X(z) = \frac{z}{z-1/2},\quad |z| > 1/2$

الإجابة:

$$\delta[n-1] + \delta[n-2] + \cdots + \delta[n-k] + \cdots,$$

$$-2\delta[n+1] - 4\delta[n+2] - 8\delta[n+3] - \cdots - 2^k\delta[n+k] - \cdots,$$

$$0.667\delta[n] + 0.778\delta[n+1] - 0.3704\delta[n+2] + \cdots,$$

$$\delta[n] + (1/2)\delta[n-1] + \cdots + (1/2^k)\delta[n-k] + \cdots,$$

١٣- أوجد تحويل زد العكسي لهذه الدوال في صورة مغلقة باستخدام الكسور الجزيئية، وجدول تحويلات زد وجدول خواصه:

(أ) $X(z) = \frac{1}{z(z-1/2)},\ |z| > 1/2$

(ب) $X(z) = \frac{z^2}{(z-1/2)(z-3/4)},\quad |z| < 1/2$

(ج) $X(z) = \frac{z^2}{z^2+1.8z+0.82},\ |z| > 0.9055$

(د) $X(z) = \frac{z^2}{3z^2-2z+2},\quad |z| < 0.8165$

الإجابة:

$$(1/2)^{n-2}[n-2],$$

$$(0.9055)^n[cos(3.031\,n) - 9.03sin(3.031\,n)]u[n]$$

$$[2(1/2)^n - 3(3/4)^n]u[-n-1],$$

$$0.4472(0.8165)^n\left[1.2247sin(1.1503(n-1)\,)u[-n-1] - sin(1.1503\,n)u[-n-1]\right]$$

١٤- إذا كانت:

$$H(z) = \frac{z^2}{(z-1/2)(z+3/4)},\quad |z| > 1/2$$

فبإيجاد الكسور الجزيئية لهذه النسبة غير المثالية بطريقتين مختلفتين، فإن تحويل زد العكسي h[n] يمكن كتابته بصورتين مختلفتين كما يلي:

$$h[n] = [A(1/2)^n + B(-1/3)^n]u[n]$$

و

$$h[n] = \delta[n] + [C(1/2)^{n-1} + D(-1/3)^{n-1}]u[n-1]$$

فأوجد A و B و C و D.

الإجابة: ....0.1333- و 0.6 و 0.4 و 0.3

خواص تحويل زد الأحادي

١٥- باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية، أوجد تحويل زد الأحادي لهذه الإشارات:

(أ) x[n]=u[n-5]

(ب) x[n]=u[n+2]

(ج) $x[n]=(2/3)^n u[n+2]$

الإجابة:

$$\frac{z^{-4}}{z-1}, |z| > 1;\ \frac{z}{z-1}, |z| > 1;\ \frac{z}{z-2/3}, |z| > 2/3$$

١٦- إذا كان تحويل زد الأحادي للدالة x[n] هو X(z)=z/(z-1) فما هي تحويلات زد الأحادية لكل من x[n-1] و x[n+1]:

الإجابة: 1/(z-1) و z/(z-1)

حل المعادلات الفرقية

١٧- باستخدام تحويل زد، أوجد الحل الكلي للمعادلات الفرقية التالية مع الشروط الابتدائية المبينة للزمن المتقطع n≥0

(أ) $2y[n+1] - y[n] = \sin(2\pi n/16)u[n],\ y[0] = 1$

(ب) $5y[n+2] - 3y[n+1] + y[n] = (0.8)^n u[n],\ y[0] = -1, y[1] = 10$

الإجابة:

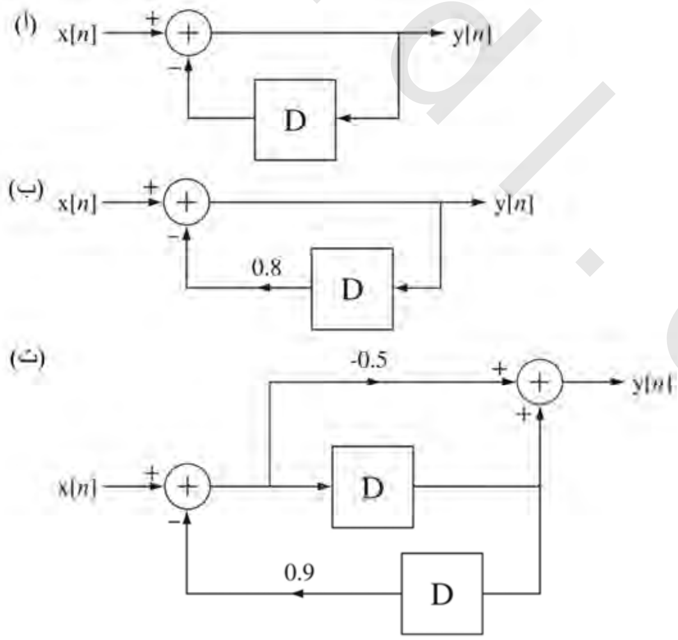
$$0.2934\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n]$$

$$-0.2934\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}(n-1)\right) - 2.812\,\sin\left(\frac{\pi}{8}(n-1)\right)\right] u[n-1]$$

$$y[n] = 0.4444(0.8)^n u[n]$$

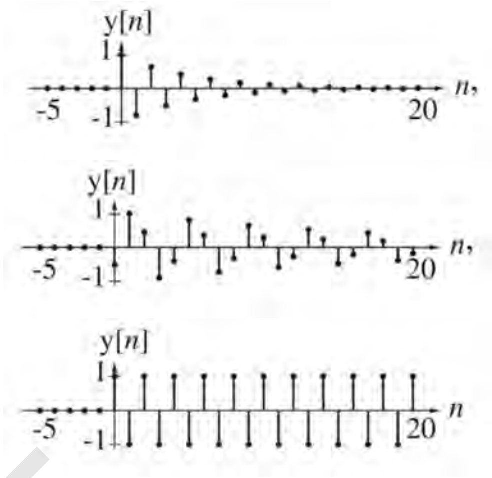
$$-\left\{\delta[n] - 9.5556(0.4472)^{n-1}\begin{bmatrix}\cos(0.8355(n-1)) \\ +0.9325\sin(0.8355(n-1))\end{bmatrix} u[n-1]\right\}$$

١٨- لكل مخطط صندوقي في شكل (ت- ١٨) أكتب المعادلة الفرقية وأوجد وارسم الاستجابة y[n] لكل نظام للزمن المتقطع n≥0 بفرض عدم وجود طاقة ابتدائية مخزنة في النظم والإثارة الصدمية x[n]=δ[n].



شكل رقم (ت–١٨)

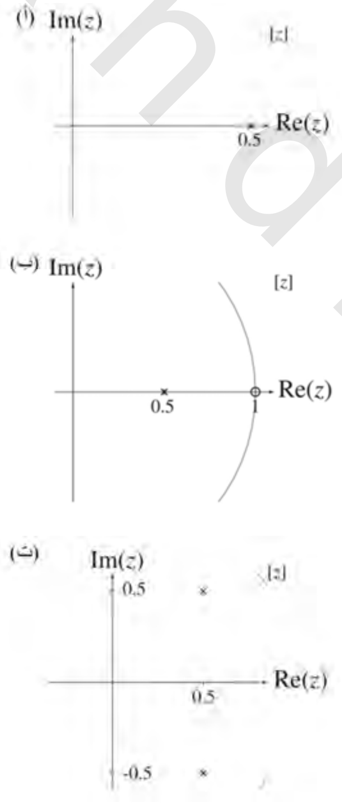
الإجابة :



شكل رقم (ج.ت–١٨)

مخطط الأقطاب والأصفار والاستجابة الترددية

١٩- ارسم مخطط مقدار الاستجابة الترددية للأنظمة الموضحة في شكل (ت- ١٩) من مخططات الأقطاب والأصفار لها :



شكل رقم (ت–١٩)

تمارين بدون إجابات

بناء الأنظمة باستخدام الطريقة المباشرة II

٢٠- ارسم بالطريقة المباشرة II رسماً صندوقياً لكل دالة عبور للأنظمة التالية :

(أ) $H(z) = \frac{z^2}{2z^4+1.2z^3-1.06z^2+0.08Z-0.02}$

(ب) $H(z) = \frac{z^2(z^2+0.8Z+0.2)}{(2z^2+2Z+1)(z^2+1.2Z+0.5)}$

تواجد تحويل زد

٢١- أوجد منطقة التقارب في المستوى z (إذا كان موجوداً) لتحويل زد للإشارات التالية :

(أ) $x[n] = (1/2)^n u[n]$

(ب) $x[n] = (5/4)^n u[n] + (10/7)^n u[-n]$

تحويل زد الأمامي والعكسي

٢٢- باستخدام خاصية الإزاحة الزمنية أوجد تحويل زد للإشارات التالية :

(أ) $x[n] = (2/3)^{n-1}\, u[n-1]$

(ب) $x[n] = (2/3)^n\, u[n-1]$

(ج) $x[n] = \sin\left(\frac{2\pi(n-1)}{4}\right) u[n-1]$

٢٣- إذا كان تحويل زد للإشارة x[n] هو $X(z)=1/(z-3/4),\ |z|>3/4$ و

$$Y(z) = j\left[X\left(e^{j\pi/6}z\right) - X\left(e^{-j\pi/6}z\right)\right]$$

فما هي y[n]؟

٢٤- باستخدام خاصية الالتفاف أوجد تحويل زد للإشارات التالية :

(أ) $x[n] = \sin(2\pi n/8)\, u[n] * u[n]$

(ب) $x[n] = \sin(2\pi n/8)\, u[n] * (u[n] - u[n-8])$

٢٥- مرشح رقمي له استجابة الصدمة التالية :

$$h[n] = \frac{\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]}{10}$$

(أ) كم عدد الأقطاب والأصفار الموجودة في دالة العبور هذه وما هي المواضع الرقمية لها ؟

(ب) إذا كانت الإثارة لهذا النظام هي وحدة صدمة فما هي القيمة النهائية للاستجابة $\lim_{n\to\infty} y[n]$ ؟

٢٦- تحويل زد الأمامي للدالة $h[n]=(4/5)^n u[n]*u*[n]$ يمكن التعبير عنه في الصورة التالية :

$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}$$

فأوجد القيم العددية لكل من b_0 و b_1 و b_2 و a_0 و a_1 و a_2.

٢٧- أوجد تحويل زد العكسي للدوال التالية في صورة مغلقة باستخدام الكسور الجزيئية وجدول تحويلات زد وخواصه.

(أ) $X(z) = \frac{z-1}{z^2+1.8z+0.82},\ |z| > 0.9055$

(ب) $X(z) = \frac{z-1}{z(z^2+1.8z+0.82)},\ |z| > 0.9055$

(ث) $X(z) = \frac{z^2}{z^2-z+1/4},\ |z| < 0.5$

(ج) $X(z) = \frac{z+0.3}{z^2+0.8z+0.16},\quad |z| > 0.4$

(ح) $X(z) = \frac{z^2+0.8z+0.16}{z^3},\quad |z| > 0$

٢٨- إشارة $y[n]$ تتعلق بإشارة $x[n]$ بالعلاقة التالية :

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$$

فإذا كانت :

$$y[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{(z-1)^2},\ |z| > 1$$

فما هي القيم العددية لكل من $x[-1]$ و $x[0]$ و $x[1]$ و $x[2]$ ؟

٢٩- إذاكان تحويل زد للإشارة $x[n]$ هو :

$$X(z) = \frac{z^{-4}}{z^4+z^2+1},\quad |z| < 1$$

فما هي القيمة العددية لكل من : $x[-2]$ و $x[-1]$ و $x[0]$ و $x[1]$ و $x[2]$ و $x[3]$ و $x[4]$.

مخطط الأقطاب الأصفار والاستجابة الترددية

٣٠- مرشح له استجابة الصدمة التالية :

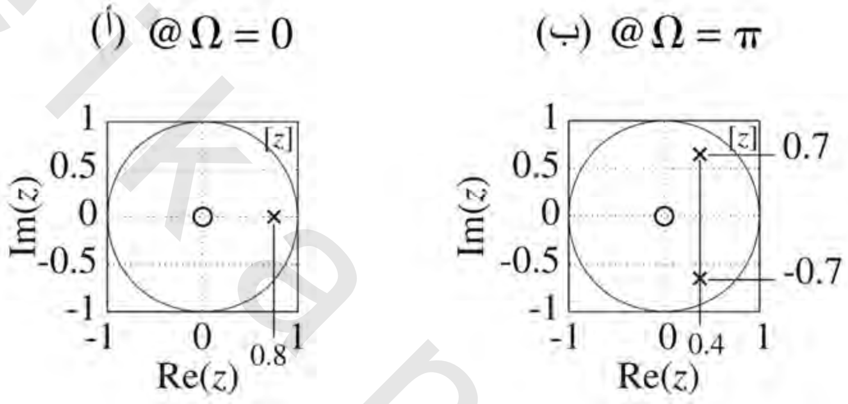
$$h[n] = \frac{\delta[n]+\delta[n-1]}{2}$$

لقد تم توليد إشارة جيبية x[n] عن طريق أخذ عينات بتردد fs=10Hz لدالة جيبية مستمرة بتردد دوري f_0.
ما هي أقل قيمة عددية موجبة لـ f_0 التي ستكون عندها استجابة المرشح المدفوعة تساوي صفراً ؟

٣١- أوجد مقدار دالة العبور للأنظمة التي مخطط الأقطاب والأصفار لها موضحة في شكل (ت- ٣١).
(افترض في كل حالة أن دالة العبور تكون في الصورة العامة التالية:

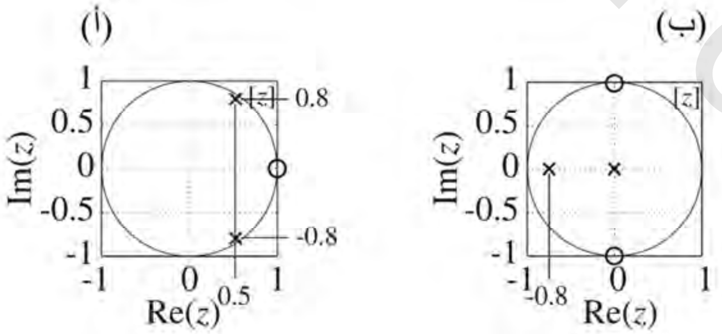
$$H(z) = K\frac{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_N)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_D)}$$

حيث الـ z's هي الأصفار، والـ p's هي الأقطاب وافترض أن K=1).



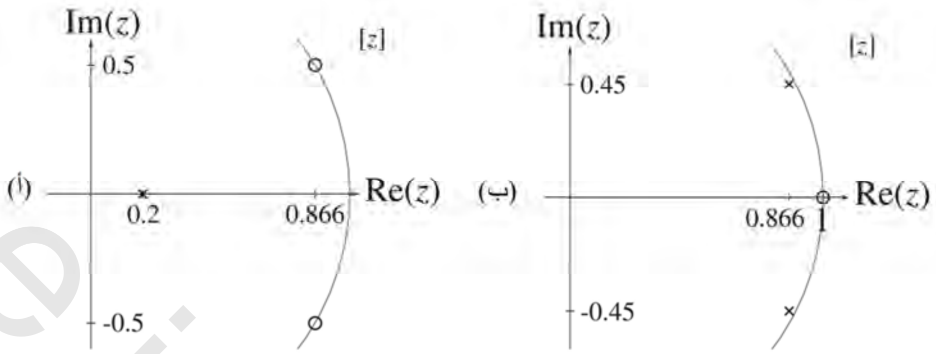
شكل رقم (ت-٣١).

٣٢- لكل واحد من الأنظمة التي لها مخططات الأقطاب والأصفار الموضحة، أوجد التردد الزاوي المتقطع زمنياً Ω_{max} و Ω_{min} في المدى $-\pi \le \Omega \le \pi$ والتي عندها يكون مقدار دالة العبور قيمة عظمى، أو صغرى. إذا كان هناك أكثر من قيمة لـ Ω_{max} أو Ω_{min} ، فأوجد كل هذه القيم؟



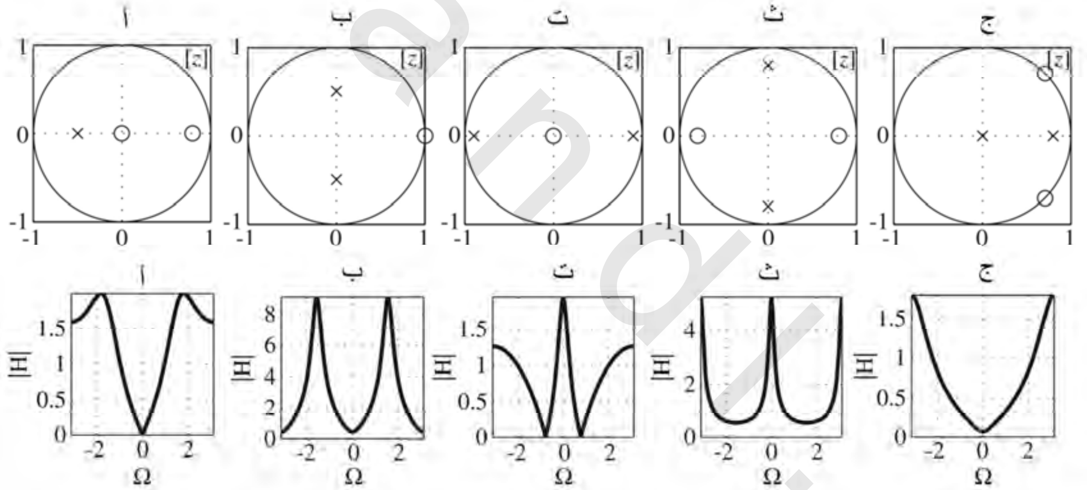
شكل رقم (ت-٣٢)

٣٣- ارسم تخطيطياً مقدار الاستجابة الترددية للأنظمة الموضحة في شكل (ت- ٣٣) من مخططات الأقطاب والأصفار لها:



شكل رقم (ت–٣٣)

٣٤- وافق بين مخططات الأقطاب والأصفار الموضحة في شكل (ت- ٣٤) ومقادير الاستجابة الترددية المقابلة:



شكل رقم (ت–٣٤)

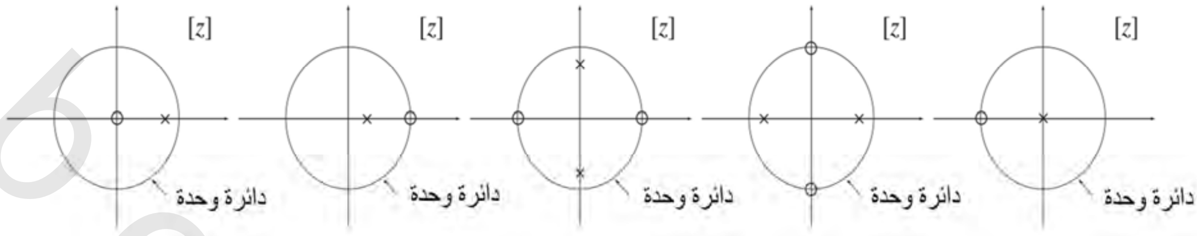
٣٥- باستخدام التعريفات التالية للمرشحات المنفذة للترددات المنخفضة، والمنفذة للترددات المرتفعة، والمنفذة لمجال من الترددات، والكابحة لمجال من الترددات، صنف الأنظمة التي دوال عبورها لها مخططات الأقطاب والأصفار الموضحة في شكل (ت- ٣٥). (بعضها قد لا يمكن تصنيفه). في كل حالة دالة العبور هي H(z).

المنفذ للترددات المنخفضة: $H(1)\neq 0$ و $H(-1)=0$

المنفذ للترددات المرتفعة: $H(1)=0$ و $H(-1)\neq 0$

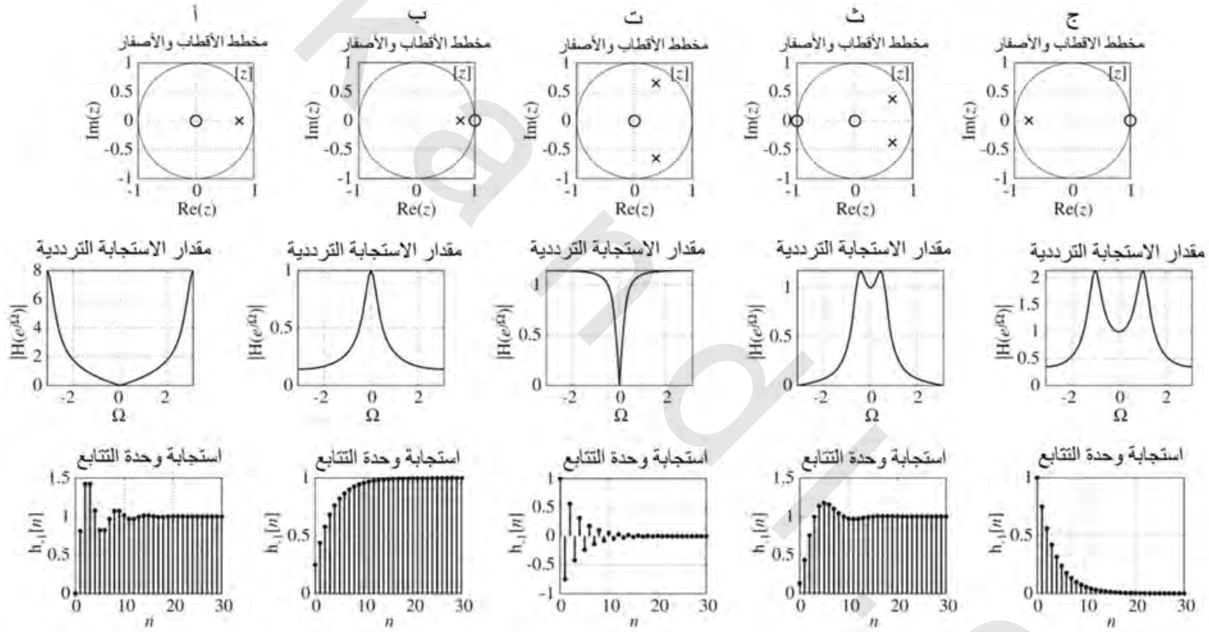
المنفذ لمجال من الترددات: $H(1)=0$ و $H(-1)=0$ و $H(z)\neq 0$ لمدى معين لـ $|z|=1$

الكابح لمدى من الترددات: $H(1)\neq 0$ و $H(-1)\neq 0$ و $H(z)=0$ لواحدة على الأقل لـ $|z|=1$



شكل رقم (ت–٣٥)

٣٦- لكل مقدار استجابة ترددية وكل استجابة لتتابع الوحدة الموضحة في شكل (ت- ٣٦) أوجد مخطط الأقطاب والأصفار المقابل:



شكل رقم (ت–٣٦)