الفصل العاشر

أخذ العينات (العينــنة) ومعالجة الإشارة

(١٠,١) المقدمة والأهداف

لا يكون عادة في تطبيق معالجة الإشارات على الإشارات الحقيقية في الأنظمة الحقيقية وصف حسابي لهذه الإشارات، ويجب أن نقيس هذه الإشارات ونحللها لاكتشاف خواصها. إذا كانت الإشارة غير معلومة، فإن عملية التحليل تبدأ بعملية اكتساب أو قراءة الإشارات، وقياس وتسجيل الإشارات على مدار فترة معينة من الزمن. من الممكن عمل ذلك باستخدام شرائط التسجيل، أو أي جهاز تسجيل تناظري آخر، ولكن الطريقة الأكثر شيوعاً هذه الأيام هي عن طريق أخذ العينات أو العيننة. (إن لفظة تناظري أو تماثلي نقصد بها الإشارات والأنظمة المستمرة زمنياً). في الفصول السابقة قمنا باستكشاف طرق تحليل الإشارات المستمرة زمنياً والإشارات المتقطعة زمنياً. في هذا الفصل سنفحص العلاقة بينهما.

معظم معالجة وتحليل الإشارات هذه الأيام يتم عمله باستخدام معالجة الإشارات الرقمية digital signal processing, DSP. يمكن لأي نظام DSP أن يقرأ، ويخزن ويقوم بأداء العمليات الحسابية على الأرقام. يمكن استخدام الحاسب العادي كنظام معالجة للإشارات. حيث إن كمية الذاكرة والذاكرة الإضافية لأي معالج للإشارة تكون محدودة، فإنها يمكنها التعامل مع عدد محدود من الأرقام. ولذلك، فإنه إذا كان مطلوباً استخدام DSP لتحليل أي إشارة، فإنه يمكن فقط قراءة هذه العينات، أي العيننة، لمدة محودة من الزمن. السؤال المهم الذي سنتناوله في هذا الفصل "إلى أي مدى تصف هذه العينات بدقة الإشارة التي أخذت منها؟". سنرى في هذا الفصل كيف أنه إذا كان سيكون هناك فقد في المعلومات أم لا، وكمية هذه المعلومات، وكيف أن ذلك يعتمد على الطريقة التي تؤخذ بها العينات. سنرى أنه تحت ظروف معينة، فإنه يمكن عملياً تخزين كل معلومات الإشارة في عدد محدد من العينات العددية.

العديد من عمليات الترشيح التي تم عملها سابقاً باستخدام المرشحات التماثلية تستخدم الآن عمليات الترشيح الرقمي، التي تعمل على العينات المأخوذة من الإشارة، بدلاً من العمل على الإشارة التماثلية الأساسية. أنظمة التليفونات الخلوية الحديثة تستخدم DSP لتحسين جودة الصوت، وفصل القنوات، ونقل المستخدمين بين الخلايا. أنظمة تليفونات المسافات البعيدة تستخدم DSP لكي تستخدم بكفاءة خطوط المسافات الطويلة ووصلات الميكرويف. تستخدم أجهزة التليفزيون DSP لتحسين جودة الصورة. تعتمد رؤية الروبوتات على الإشارات من كاميرات تقوم برقمنة أو أخذ عينات من الصورة وتحليلها بطرق حسابية معينة للتعرف على بعض خواصها. أجهزة التحكم الحديثة والسيارات، وأنظمة التصنيع والتجهيزات العلمية يكون بها في العادة معالجات خبيئة تقوم بتحليل الإشارات وأخذ قرارات بناءً على ذلك باستخدام DSP.

أهداف هذا الفصل

١- تحديد كيفية عينة الإشارات المستمرة زمنياً للحفاظ على معظم وإن لم يكن كل معلومات الإشارة.

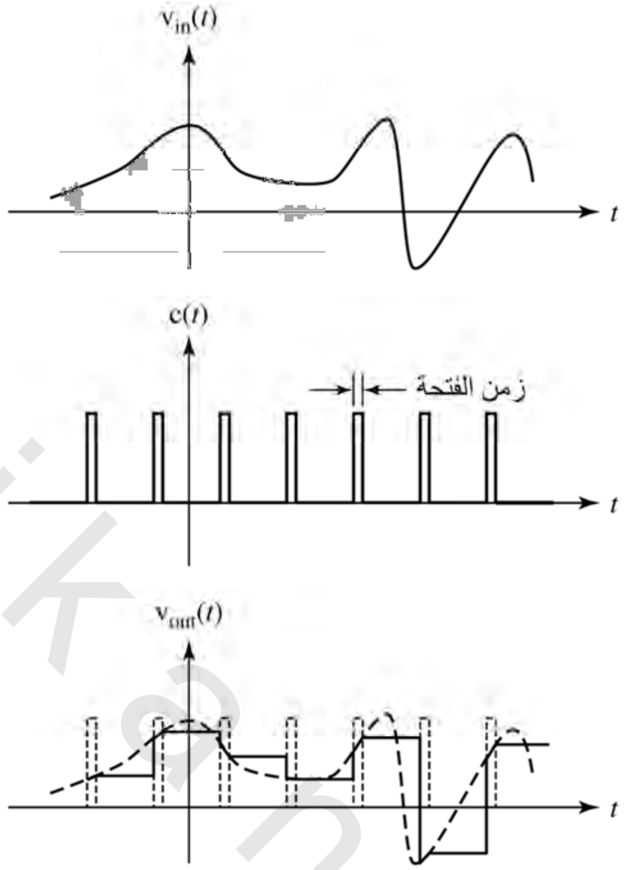
٢- لنتعلم كيفية إعادة تشكيل الإشارات المستمرة زمنياً من عيناتها.

٣- لتطبيق طرق أخذ العينات إلى الإشارات المتقطعة زمنياً لرؤية التشابه مع العينة المستمرة زمنياً.

(١٠,٢) أخذ العينة (العيننة) المستمرة زمنياً

طرق أخذ العينات (**العيننة**)

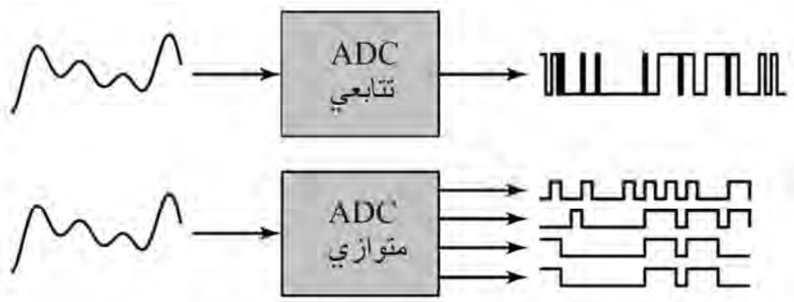
أخذ عينات الإشارات الكهربية، التي أحياناً تكون التيار، ولكن في العادة تكون الجهد، يتم عملها غالباً بخطوتين، أخذ العينة والمسك sample and hold, (S/H) والتحويل من تماثلي إلى رقمي analog to digital converter, ADC. الدخل لـ S/H هو الجهد التماثلي المطلوب تحويله. عند إعطاء نبضة التزامن لـ S/Hفإنها تعطي هذا الجهد على خرجها وتمسك بقيمة هذا الجهد حتى يتم قدحها بنبضة تزامن أخرى لتكتسب قيمة جديدة من الدخل كما في شكل (١٠,١).



شكل رقم (١٠,١) تشغيل دائرة أخذ العينة ومسكها

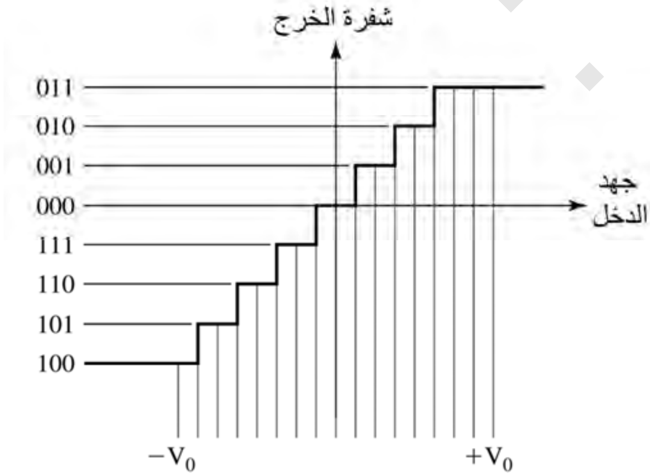
في شكل (١٠,١) الإشارة c(t) هي نبضات التزامن، أو القدح. اكتساب جهد الدخل لل S/H يحدث أثناء زمن الفتح، وهو عرض نبضة التزامن. أثناء نبضة التزامن، فإن جهد إشارة خرج الـ S/H يتحرك من قيمته عند النبضة السابقة، بحيث تتبع إشارة جهد الدخل. عند نهاية نبضة التزامن يتم مسك إشارة جهد الخرج عند قيمتها المحددة حتى حدوث نبضة التزامن التالية.

يستقبل المحول التماثلي الرقمي ADC الجهد التماثلي عند دخله ويعطي مجموعة من البتات الثنائية (تسمى أحياناً بالكود أو الشفرة). استجابة الـ SDC بهذه البتات من الممكن أن تكون استجابة تتابعية، أو متوازية. إذا كانت استجابة ADC على الصورة التتابعية، فإنها تعطي على طرف خرج واحد إشارة خرج واحدة عبارة عن تتابع زمي من الجهود العالية والمنخفضة تمثل الوحايد والأصفار في مجموعة البتات الثنائية. إذا كانت استجابة أو خرج ADC على الصورة المتوازية، فإنه يكون هناك جهد خرج منفصل لكل بت، وكل بت يظهر في الوقت نفسه على خرج أو طرف من أطراف ADC كجهد مرتفع أو منخفض يمثل الوحايد والأصفار في مجموعة البتات الثنائية، كما في شكل (١٠,٢).



شكل رقم (١٠,٢) التحويل من تماثلي إلى رقمي المتتابع والمتوازي.

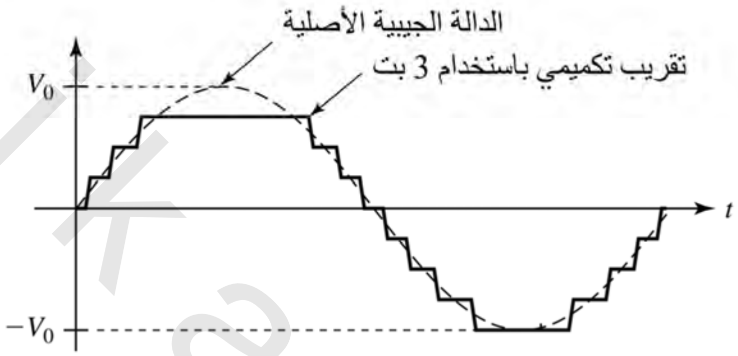
الدخل لل ADC هي إشارة مستمرة زمنياً والاستجابة تكون إشارة متقطعة زمنياً. خرج ADC لا تكون فقط متقطعاً زمنياً ولكنه تكون أيضاً مكمماً ومشفراً. عدد البتات الثنائية الخارجة من ADC يكون محدداً ومعروفاً. ولذلك فإن عدد نماذج ، أو قيم الخرج الناتج يكون محدداً وفريداً وعددها يساوي 2^n. عملية التكميم quantization هي عملية تحويل قيم مستمرة من قيم الدخل إلى عدد محدد من القيم. حيث أن الاستجابة يصاحبها خطأ نتيجة هذا التكميم ، فإنها تبدو كما لو كان عليها ضوضاء ، وهذه الضوضاء تسمى ضوضاء التكميم. إذا كان عدد البتات المستخدمة لتمثيل الخرج كبيراً بما فيه الكفاية ، فإن ضوضاء التكميم تكون غالباً مهملة بالنسبة لمصادر الضوضاء الأخرى. بعد التكميم يقوم ADC بتشفير الإشارة. التشفير هو تحويل الجهد التماثلي إلى نموذج من البتات الثنائية. العلاقة بين دخل وخرج ADC ، الذي تكون فيه قيمة الدخل $-V_0<v_{in}(t)<+V_0$ موضحة في شكل(١٠,٣) لمحول ADC خرجه ثلاث بتات. (ADC الذي خرجه يتكون من ٣ بت نادرا ما يستخدم، إن لم يكن مستحيلا ، ولكنه يبين تأثير عملية التكميم بطريقة لطيفة ، لأن عدد نماذج قيم الخرج يكون صغيراً وتكون قيمة ضوضاء التكميم كبيرة).



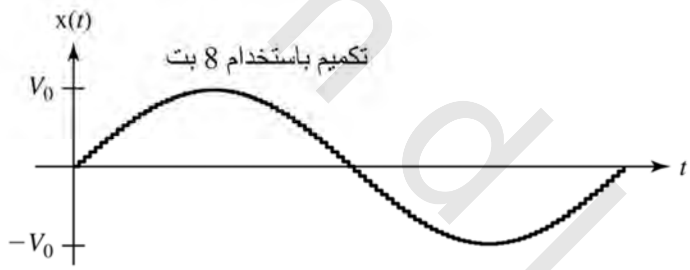
شكل (١٠,٣) العلاقة بين خرج المحول التماثلي الرقمي ADC ودخله

من السهل رؤية تأثير عملية التكميم بالتطبيق على دالة جيبية باستخدام ADC من 3 بت كما في شكل (١٠,٤). عند تكميم إشارة باستخدام 8 بت، فإن خطأ التكميم يكون أصغر كما في شكل (١٠,٥).

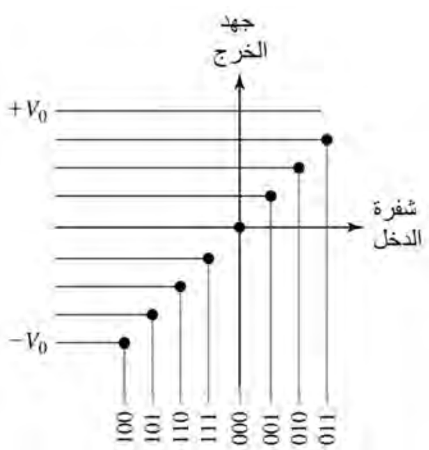
عكس التحويل من تماثلي إلى رقمي هو التحويل من رقمي إلى تماثلي والذي يتم باستخدام المحول الرقمي التماثلي digital to analog converter DAC. الدخل للـ ADC يكون نموذجاً من البتات الثنائية ويكون خرجه عبارة عن جهد تماثلي. حيث إن عدد نماذج البتات الداخلة يكون محدداً، فإن خرج DAC يكون جهداً تماثلياً مكمماً. العلاقة بين دخل وخرج DAC المكون من 3 بت موضح في شكل (١٠,٦).



شكل رقم (١٠,٤) دالة جيبية مكممة باستخدام ٣ بت



شكل رقم (١٠,٥) دالة جيبية مكممة باستخدام ٨ بت



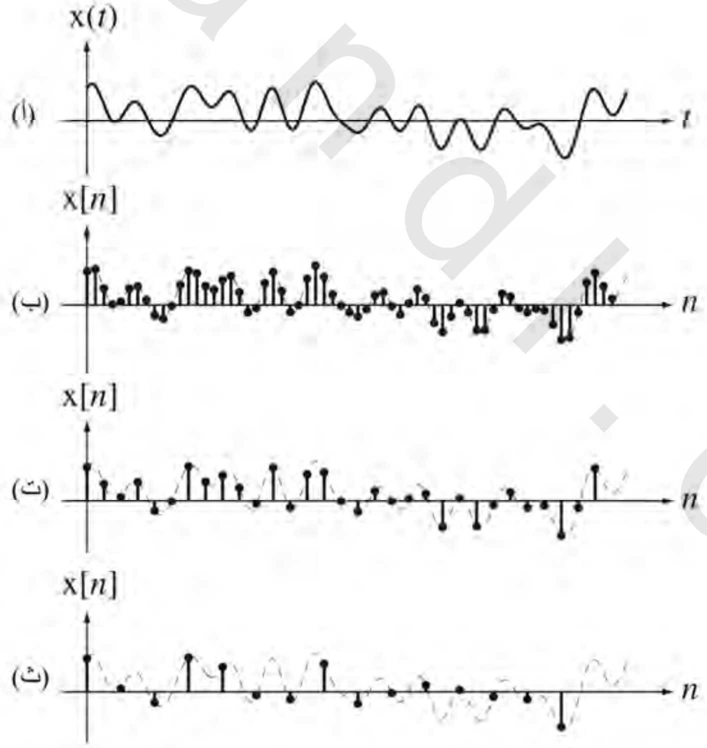
شكل رقم (١٠,٦) العلاقة بين خرج ودخل DAC

في الأجزاء التالية لن نأخذ في الاعتبار تأثير عملية التكميم. نموذج تحليل تأثيرات عملية العيننة سنفترض فيه أن عملية العيننة مثالية بمعنى أن ضوضاء التكميم على إشارة الخرج ستكون صفراً.

نظرية أخذ العينات (العيننة)

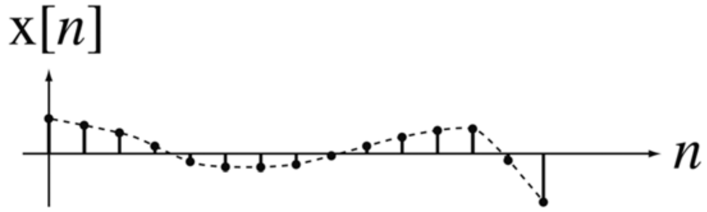
مفاهيم نوعية

إذا أردنا استخدام عينات من إشارة مستمرة زمنياً، بدلاً من استخدام الإشارة نفسها، فإن أهم سؤال يجب الإجابة عنه هو كيف سنأخذ عينات هذه الإشارة بحيث نحافظ على المعلومات المضمنه فيها. إذا كان من الممكن إعادة تشكيل الإشارة من العينات، فإن العينات بالتأكيد تحتوي كل معومات الإشارة. يجب علينا أن نقرر ما هي سرعة أخذ العينات وما مقدار زمن أخذ هذه العينات. افترض الإشارة x(t) الموضحة في شكل (١٠,٧أ). افترض إن الإشارة يتم أخذ عيناتها بالمعدل الموضح في شكل (١٠,٧ب). معظم الناس من المحتمل بديهيا أن يقول أن هناك كفاية من العينات التي تصف الإشارة وصفاً جيداً عن طريق رسم منحنى متواصل بين نقاط العينات، ولكن ماذا عن معدل العيننة الموضح في شكل (١٠,٧ب)؟ هل هذا المعدل مناسب ؟ ماذا عن المعدل الموجود في شكل (١٠,٧ث) ؟ معظم الناس من المحتمل أنهم سيوافقون أن المعدل الموجود في شكل (١٠,٧ث) معدل مناسب ؟



شكل رقم (١٠,٧) (أ) إشارة مستمرة زمنياً (ب) حتى (ث) إشارات مختلفة معاد تشكيلها من عينات بمعدلات مختلفة للإشارة المستمرة زمنياً

إن رسم منحنى مستمر على مجموعة العينات السابقة قد يبدو مشابهاً بدرجة كبيرة مثل المنحنى الأصلي للإشارة. على الرغم من أن معدل العينات لم يكن مناسباً في الإشارة السابقة، فإنه قد يبدو مناسباً لإشارات أخرى كما في شكل (١٠,٨). إنه يبدو مناسباً للإشارة في شكل (١٠,٨) لأنه أكثر نعومة واتصالا والتغيرات فيه أبطأ بكثير.

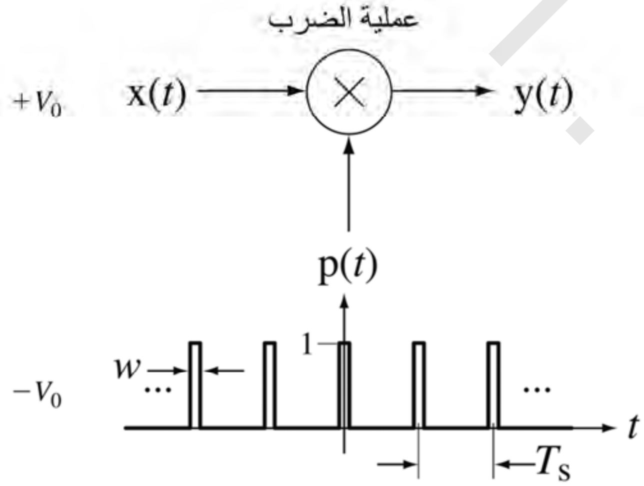


شكل رقم (١٠,٨) إشارة متقطعة زمنياً مشكلة عن طريق أخذ عينات من إشارة مستمرة بطيئة التغير

إن أقل معدل لأخذ العينات مع الحفاظ على المعلومات المضمنة في الإشارة الأصلية يعتمد على معدل تغير الإشارة مع الزمن، والمحتويات الترددية في الإشارة. إن السؤال عن مقدار السرعة التي نأخذ بها العينات لوصف أي إشارة قد تمت الإجابة عليه عن طريق نظرية أخذ العينات، ولقد كان كلاود شانون Claude Shannon من معامل بل Bell Labs مشاركاً أساسياً في إعداد هذه النظرية.

استنتاج نظرية أخذ العينات (العيننة)

سنفترض أن عملية أخذ العينات من إشارة x(t) مستمرة زمنياً ستكون هي ضرب هذه الإشارة بتتابع من النبضات الدورية p(t). سنفترض أن مقدار كل واحدة من هذه النبضات يساوي واحداً، وأن عرض كل نبضة يساوي w وسنفترض أن الدورة الأساسية لهذا التتابع من النبضات هي Ts كما في شكل (١٠,٩).



شكل رقم (١٠,٩) تتابع النبضات

يمكن وصف تتابع النبضات حسابياً بالمعادلة $p(t)=rect(t/w)*\delta_{Ts}(t)$ ، وعلى ذلك فإن خرج عملية الضرب سيكون كما يلي :

$$y(t) = x(t)p(t) = x(t)\left[rect\left(\frac{t}{w}\right) * \delta_{Ts}(t)\right]$$

متوسط الإشارة y(t) على مدار نبضة متمركزة عند t=kTs يمكن اعتبارها تقريباً للعينة x(t) عند الزمن t=kTs. تحويل فورير المستمر زمنياً CTFT للإشارة y(t) هو :

$$Y(f) = X(f) * wsinc(wf)f_s\delta_{f_s}(f)$$

حيث f_s=1/Ts هي معدل تكرار النبضات (التردد الأساسي لتتابع النبضات) وأيضا :

$$Y(f) = X(f) * \left[\mathrm{w}f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(\mathrm{w}kf_s)\,\delta(f-kf_s)\right]$$

$$Y(f) = \mathrm{w}f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(\,\mathrm{w}kf_{s)\,X\,(f-kf_s)}$$

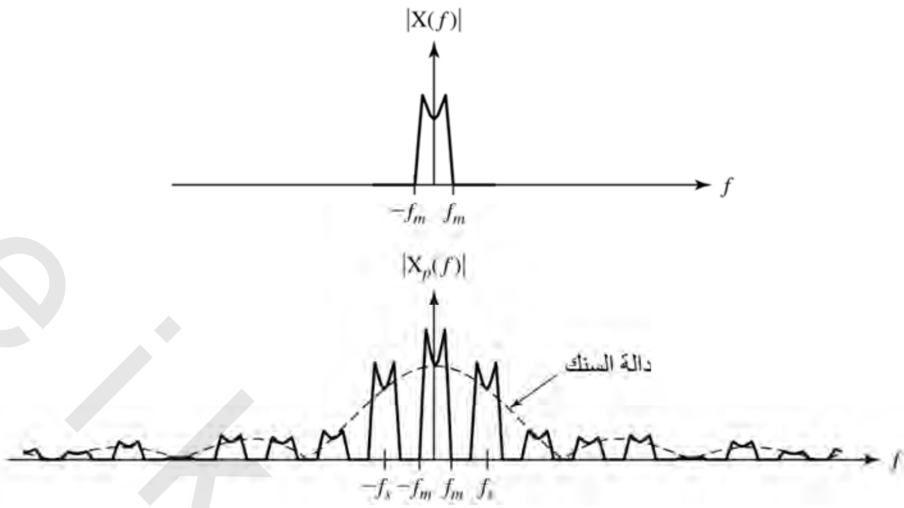
تحويل فورير المستمر زمنياً للخرج Y(f) هو صورة متكررة لتحويل فورير المستمر زمنياً لإشارة الدخل x(t) المتكررة زمنياً عند مضاعفات صحيحة لمعدل تكرار النبضات f_s ومضروب أيضاً في قيمة دالة سنك يتحدد عرضها بعرض النبضة w كما في شكل (١٠،١٠). تحدث صور متكررة لطيف إشارة الدخل العديد من المرات في طيف إشارة الخرج، كل واحدة من هذه الصور تحدث عند مضاعف صحيح من معدل تكرار النبضات ومضروبة في ثوابت مختلفة.

كلما جعلنا عرض النبضة أصغر، فإن القيمة المتوسطة تقترب من القيمة الحقيقية لإشارة الدخل عند مركز النبضة. إن تقريب العينة المثالية يتحسن مع اقتراب w من الصفر. في النهاية مع اقتراب w من الصفر فإن :

$$\mathrm{y}(t) = \lim_{w\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{x(t)\,rect}\big((\mathrm{t}-\mathrm{nT_S})/\mathrm{W}\big)$$

في النهاية، فإن طاقة الإشارة ستقترب من الصفر. ولكن إذا عدلنا الآن عملية أخذ العينات لتعويض هذا التأثير عن طريق جعل مساحة كل نبضة من نبضات العينة تساوي واحداً بدلاً من ارتفاع النبضة، فإننا سنحصل على تتابع النبضات الجديد التالي :

$$p(t) = \left(\frac{1}{w}\right) rect\left(\frac{t}{w}\right) * \delta_{Ts}(t)$$



شكل رقم (١٠,١٠) مقدار CTFT لإشارات الدخل والخرج

والآن يمكن كتابة y(t) كما يلي :

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)(1/w)\,\mathrm{rect}\big((t - nT_S)/W\big)$$

سنفترض أن هذا الخرج عند هذه النهاية مع اقتراب w من الصفر هو $x_\delta(t)$. عند هذه النهاية ستكون النبضات المستطيلة $\left(\frac{1}{w}\right) rect\left(\frac{t-nTs}{w}\right)$ ستقترب من صدمات وحدة كما يلي :

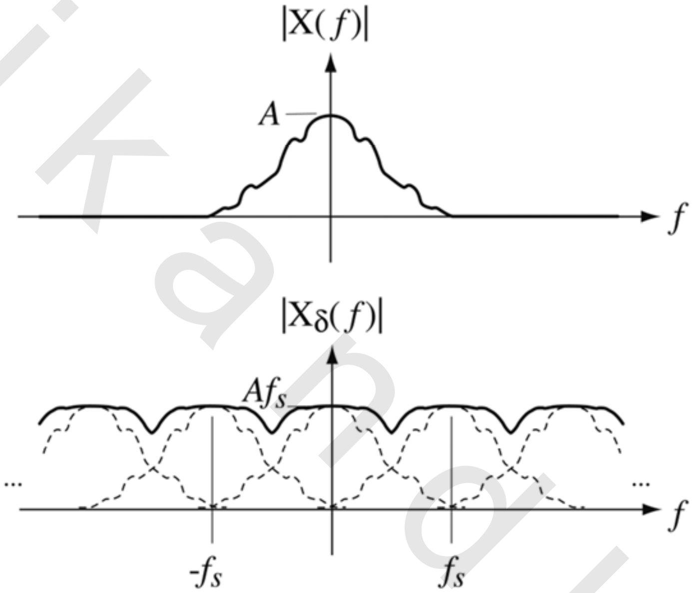
$$x_\delta(t) = \lim_{w\to 0} y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_S) = x(t)\delta_{T_S}(t)$$

هذه العملية تسمى عيننة الصدمة أو أحياناً تسمى تعديل الصدمة. بالطبع، فإن هذا النوع من العيننة يكون غير ممكنا لأننا لا نستطيع الحصول على دالة الصدمة عملياً. ولكن تحليل هذا النوع من العيننة النظرية يكون مفيداً لأنه يؤدي إلى علاقة بين قيم الإشارة عند نقاط متقطعة وقيم الإشارة عند كل الأزمنة الأخرى. لاحظ أنه في هذا النموذج من العيننة، فإن خرج دائرة العيننة ما زال إشارة مستمرة زمنياً، ولكن قيمتها تكون صفراً فيما عدا عند لحظات أخذ العينات.

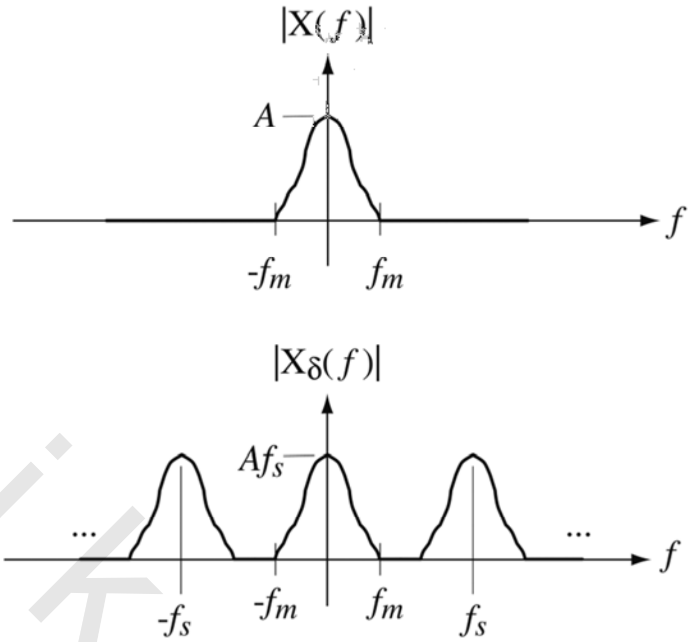
سنحتاج هنا لفحص CTFT للخرج الجديد $x_\delta(t)$، والذي يمكن كتابته كما يلي :

$$x_\delta(f) = X(f) * (1/T_S)\delta_{1/T_S}(f) = f_s X(f) * \delta_{f_S}(f)$$

إن ذلك يمثل مجموع نسخ متساوية الحجم لـ CTFT، X(f) للإشارة الأصلية x(t)، وكل واحدة مزاحة بمضاعف صحيح من تردد أخذ العينات، ومضروبة في f_s كما في شكل (١٠,١١). هذه النسخ تسمى نسخاً مستعارة. في شكل (١٠,١١) تمثل الخطوط المتقطعة أو المشرطة مقدار هذه النسخ المستعارة من CTFT للإشارة الأصلية والخط المستمر يمثل مقدار مجموع هذه النسخ المستعارة. من الواضح أن مقدار CTFT للإشارة الأصلية قد فقد في عملية التداخل بين هذه النسخ. ولكن إذا كانت X(f) تساوى صفراً لكل $|f|>f_m$ وإذا كانت $f_s>2f_m$، فإن النسخ المستعارة لن تتداخل كما في شكل (١٠,١٢).



شكل رقم (١٠,١١) CTFT لإشارة أخذت عيناتها بدالة الصدمة



شكل رقم (١٠,١٢) CTFT لإشارة محدودة المجال معيننة باستخدام الصدمات بتردد أكبر

الإشارات التي يكون لها X(f) تساوي صفراً لكل $|f|>f_m$ تسمى إشارات محدودة المجال. إذا كانت النسخ المستعارة لن تتداخل، فإنه على الأقل سيمكن استعادة الإشارة الأصلية من الإشارة المعيننة بالصدمات باستخدام مرشح يتخلص من النسخ المستعارة عند $f\pm f_s$ و $\pm 2f_s$ و $\pm 3f_s$ و .... وذلك باستخدام مرشح منفذ للترددات المنخفضة تكون استجابته الترددية المثالية كما يلي:

$$H(f) = \begin{Bmatrix} T_S, & |f| < f_c \\ 0, & otherwise \end{Bmatrix} = T_S\, rect\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$

هذه الحقيقة تشكل الأساس لما يعرف بنظرية العيننة أو نظرية أخذ العينات.

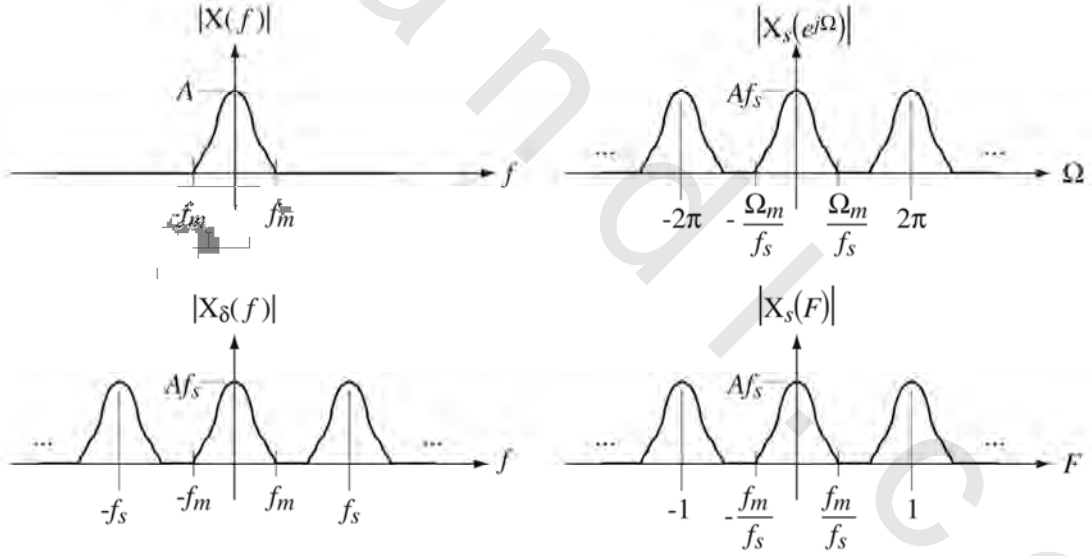
إذا أخذت عينة من أي إشارة مستمرة زمنياً عند كل الأزمنة بمعدل f_s يكون أكبر من ضعف حد مجال الإشارة f_m، فإن الإشارة المستمرة زمنياً يمكن استرجاعها تماماً من هذه العينات.

إذا كان أكبر تردد موجود في الإشارة هو f_m، فإن معدل أخذ العينات (العيننة) يجب أن يكون أكبر من $2f_m$، والتردد $2f_m$ يسمى معدل نيكويست Nyquist rate. إن الكلمات معدل، وتردد، كل منهما تصف شيئاً يحدث دورياً. في هذا الكتاب كلمة تردد نقصد بها الترددات الموجودة في أي إشارة، وكلمة معدل سيقصد بها الطريقة التي يتم أخذ عينات الإشارة بها. الإشارة التي يتم أخذ عيناتها بمعدل أكبر من معدل نيكويست تسمى إشارة فوق معيننة oversampled، والإشارة التي يتم أخذ عيناتها بمعدل أقل من معدل نيكويست تسمى إشارة تحت عيننة

undersampled. عندما يتم أخذ عينات أي إشارة بمعدل يساوي f_s فإن التردد $f_s/2$ يسمى تردد نيكويست. ولذلك، إذا كانت أي إشارة لها طاقة عند أو فوق تردد نيكويست، فإن النسخ المستعارة ستتداخل.

نموذج آخر لعملية أخذ العينات قد استخدمناه في الفصول السابقة وهو توليد الإشارة المتقطعة زمنياً x[n] من الإشارة المستمرة زمنياً x(t) من خلال x[n]=x(nTs) حيث Ts هي الزمن بين عينتين متتابعتين. إن هذا قد يبدو نموذجاً أكثر معقولية، وفي بعض الأحوال هو كذلك، ولكن العينة اللحظية عند نقطة معينة في الزمن تكون مستحيلة عملياً. سنسمي هذا النموذج للعينة بكلمة "عينة" فقط بدلاً من "العينة الصدمية" أو impulse sampling.

تذكر أن DTFT لأي إشارة متقطعة زمنياً يكون دورياً. وكذلك فإن CTFT لأي إشارة معينة صدميا يكون دوريا أيضا. CTFT لأي إشارة مستمرة زمنياً معينة صدميا $x_\delta(t)$ و DTFT لأي إشارة متقطعة زمنياً $x_s[n]$ المشكلة عن طريق أخذ العينات من الإشارة نفسها المستمرة زمنياً تكون متشابهة كما في شكل (١٠,١٣). (الرمز الجانبي s في الإشارة $x_s[n]$ تم وضعه للتخلص من الخلط بين التحويلات المختلفة التي ستأتي). إن الشكل الموجي يكون هو نفسه. الفرق الوحيد هو أن DTFT يعتمد على التردد المعمم F أو Ω وCTFT على التردد الحقيقي f أو ω. يمكن استنتاج نظرية العينة باستخدام DTFT بدلاً من CTFT وستكون النتيجة هي نفسها.

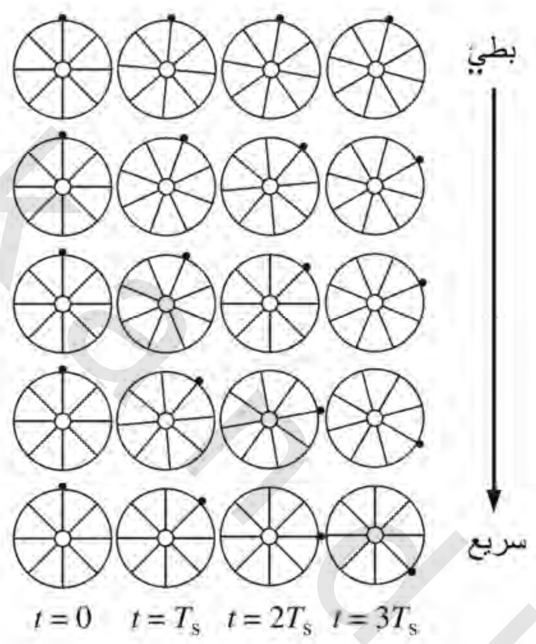


شكل رقم (١٠,١٣) مقارنة بين CTFT لإشارة معينة صدميا و DTFT لعينات إشارة

التزوير Aliasing

إن ظاهرة التزوير (تداخل هذه النسخ) ليست مفهوماً رياضياً غريباً خارج نطاق خبرة الناس العاديين. تقريبا كل واحد قد لاحظ هذه الظاهرة، ولكن من المحتمل بدون أن يعرف ماذا يسمى هذه الظاهرة. إحدى

الممارسات الشهيرة التي توضح ظاهرة النسخ المزيفة أو المستعارة تحدث أحيانا أثناء مشاهدة التليفزيون. افترض أنك تلاحظ أحد الأفلام الغربية على التليفزيون وهناك صورة لحصان يجر عربة عجلاتها بها أسلاك أو قوائم من مركزها إلى المحيط. مع زيادة سرعة العربة أسرع وأسرع ستصل إلى لحظة عندها تظهر العجلة كما لو كانت توقفت عن الدوران للأمام وتبدأ في الظهور كما لو كانت تدور للخلف على الرغم من العربة تتحرك للأمام. إذا تمت زيادة السرعة أكثر من ذلك فإن العجلات ستظهر كما لو أنها توقفت وبعدها تدور للأمام مرة ثانية. إن هذا يعتبر مثالاً جيداً على ظاهرة النسخ المزيفة، أو المستعارة.



شكل رقم (١٠,١٤) الأوضاع الزاوية لعجلة العربة عند أربع لحظات للعيننة

على الرغم من عدم ظهور ذلك للعين البشرية، فإن الصورة على شاشة التليفزيون يتم التقاطها 30 مرة في الثانية (في نظام الفيديو القياسي NTSC). بمعنى أن الصورة في الحقيقة يتم أخذ عيناتها بمعدل 30 هرتز. شكل (١٠,١٤) يبين الأوضاع على العجلة ذات الأسلاك القطرية عند ٤ لحظات لأخذ العينة وذلك للعديد من سرعات الدوران، بدءا من سرعة الدوران المنخفضة عند القمة والتقدم في اتجاه السرعات العالية في الأسفل. (هناك نقطة مؤشر تم إضافتها على العجلة للمساعدة في رؤية الدوران الحقيقي للعجلة، في مقابل الدوران الظاهري).

العجلة لها ثمانية أسلاك قطرية، بحيث إنه مع الدوران بمقدار ثمن دورة كاملة فإن العجلة تظهر كما لو في موضعها الأصلي. لذلك فإن صورة العجلة لها دورة زاوية مقدارها $\pi/4$ أو 45^o، وهي المسافة الزاوية بين الأسلاك. إذا كانت سرعة دوران العجلة هي f_0 دورة/الثانية (Hz) فإن تردد الصورة الأساسي هو $8f_0$Hz. أي أن الصورة تتكرر ثماني مرات تماماً في الدورة الكاملة للعجلة.

لنفترض أن الصورة يتم أخذها بمعدل 30 هرتز ($Ts=1/30\ s$). في الصف الأعلى تدور العجلة في اتجاه عقارب الساعة بسرعة $-5^o/Ts$ ($-150^o/s$ أو $-0.416rev/s$)، لذلك فإنه في الصف الأعلى، فإن الأسلاك دارت بمقدار 0^o و 5^o و 10^oو 15^o في اتجاه عقارب الساعة. لذلك فإن عين ومخ الملاحظ تفسر تتابع الصور بحيث تبدو كما لو كانت العجلة تدور في اتجاه عقارب الساعة نتيجة تقدم الزوايا مع لحظات أخذ العينات. في هذه الحالة، فإن العجلة تظهر كما لو كانت تدور بتردد دوران الصورة وهو $-150^o/s$.

في الصف الثاني تكون سرعة الدوران أربع مرات أسرع من الصف الأول، وزوايا الدوران عند لحظات أخذ العينات صفراً وعشرين وأربعين وستين درجة في اتجاه عقارب الساعة. هنا ما زالت العجلة تظهر تدور في اتجاه عقارب الساعة عند سرعة دورانها الحقيقية $-600^o/s$. في الصف الثالث، أصبحت سرعة الدوران تساوي $-675^o/s$. هنا يبدأ الغموض الظاهر نتيجة أخذ العينات في الظهور. إذا لم تكن النقطة المؤشر موجودة، فإنه قد يكون من غير الممكن تحديد إذا كانت العجلة تدور بمقدار -22.5^o لكل عينة أم $+22.5^o$ لكل عينة، لأن عينات الصورة تتماثل تماماً لهاتين الحالتين. إنه من غير الممكن، عن طريق النظر على عينات الصور، تحديد إذا كان الدوران في اتجاه أم عكس عقارب الساعة. في الصف الرابع تدور العجلة بسرعة مقدارها $-1200^o/s$. الآن (بإهمال النقطة المؤشر) تظهر العجلة كما لو كانت تدور بمقدار $+5^o$ لكل عينة بدلاً من التردد الدوراني الحقيقي -40^o لكل عينة. استقبال المخ البشري سيظهر كما لو كانت العجلة تدور 5^o عكس عقارب الساعة لكل عينة بدلاً من 40^o في اتجاه عقارب الساعة. في الصف الأسفل تكون سرعة الدوران $-1350^0/s$ أو 45^o لكل عينة في اتجاه عقارب الساعة. الآن تظهر العجلة كما لو كانت ثابتة على الرغم من أنها تدور في اتجاه عقارب الساعة. سرعة دورانها الزاوية تبدو كما لو كانت صفراً ؛ لأنها يتم أخذ عيناتها بمعدل يساوي تماماً لتردد الصورة الأساسي.

مثال ١٠,١

حساب معدلات نيكويست للإشارات

احسب معدل نيكويست لكل واحدة من الإشارات التالية :

(أ) $x(t)=25\cos(500\pi t)$

$X(f)=12.5[\delta(f-250)+\delta(f+250)]$

أكبر تردد (وهو التردد الوحيد) موجود في هذه الإشارة هو $f_m=250Hz$. وبالتالي فإن معدل نيكويست سيكون 500Hz.

(ب) $x(t)=15\mathrm{rect}(t/2)$

$X(f)=30\mathrm{sinc}(2f)$

حيث إن الدالة سنك لا تؤول إلى الصفر أبداً وتظل موجودة دائماً، وبتردد محدد، فإن أعلى تردد في الإشارة سيكون غير محدد أو غير معروف وبالتالي فإن معدل نيكويست سيكون غير معروف. الدالة المستطيلة ليست محدودة النطاق الترددي.

ج) $x(t)=10\text{sinc}(5t)$
$X(f)=2\text{rect}(f/5)$

أكبر تردد موجود في x(t) هو قيمة fالتي تكون عندها الدالة rect لها القيمة غير المتصلة عند العبور من الواحد للصفر $f_m=2.5\text{Hz}$. وبالتالي فإن معدل نيكويست سيكون 5Hz.

د) $x(t)=2\text{sinc}(5000t)\sin(500000\pi t)$

$$X(f)=\frac{1}{2500}rect\left(\frac{f}{500}\right)*\frac{j}{2}[\delta(f+250{,}000)-\delta(f-250{,}000)]$$

$$X(f)=\frac{j}{5000}\left[rect\left(\frac{f+250{,}000}{5000}\right)-rect\left(\frac{f-250{,}000}{5000}\right)\right]$$

أكبر تردد في x(t) هو $f_m=252.5\text{kHz}$، وبالتالي فإن معدل نيكويست سيكون 505kHz.

مثال ١٠,٢

تحليل مرشح RC كمرشح مضاد للنسخ المزيفة أو المستعارة

افترض أن إحدى الإشارات المطلوب قراءتها من خلال نظام لاكتساب، أو قراءة البيانات لها مقدار طيفي مسطح حتى 100kHz ثم ينزل هناك إلى الصفر. افترض أيضاً أن أسرع معدل يمكن أن يقرأ به هذا النظام لهذه البيانات هو 60kHz. صمم مرشح RC منفذ للترددات المنخفضة ومضاد للنسخ المستعارة بحيث يقلل مقدار طيف الإشارة إلى 30kHz إلى أقل من 1% من قيمتها عند الترددات المنخفضة جداً بحيث يتم تقليل النسخ المستعارة إلى أقل ما يمكن.

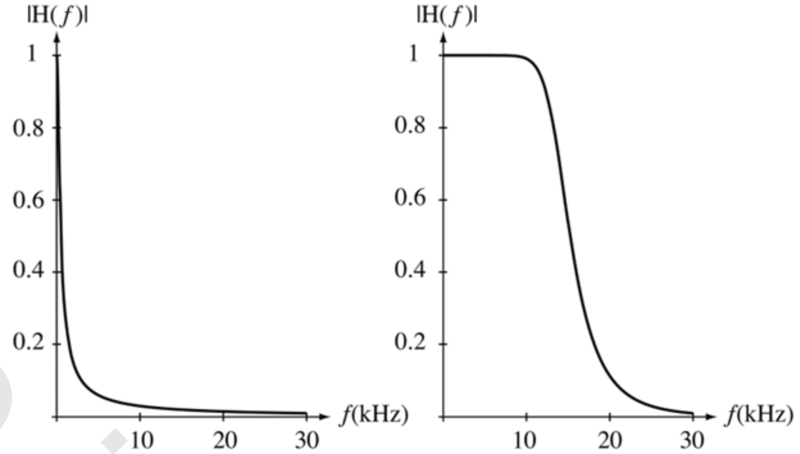
$$H(f)=\frac{1}{j2\pi fRC+1}$$

مقدار مربع الاستجابة الترددية للمرشح يساوي:

$$|H(f)|^2=\frac{1}{(2\pi fRC)^2+1}$$

وقيمتها عند الترددات المنخفضة جداً تقترب من الواحد. سنضع الثابت الزمني RC بحيث يكون مربع المقدار عند 30kHz يساوي $(.01)^2$ كما يلي:

$$|H(30{,}000)|^2=\frac{1}{(2\pi\times 30{,}000\times RC)^2+1}=(0.01)^2$$



شكل رقم (١٠,١٥) (أ) مقدار الاستجابة الترددية للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة والمضاد للنسخ المستعارة

(ب) مقدار الاستجابة الترددية لمرشح بترورث منفذ للترددات المنخفض ومضاد للنسخ المستعارة من الدرجة السادسة

بحل هذه المعادلة سنجد أن RC=0.5305. التردد الركني (التردد عند 3dB-) للمرشح RC هو 300Hz، وهي 100 مرة أقل من تردد نيكويست الذي يساوي 30kHz كما في شكل (١٠,١٥). يجب وضع هذا التردد منخفضاً بهذه القيمة لتحقيق المتطلبات باستخدام مرشح بقطب واحد؛ لأن استجابته الترددية تنزلق ببطء كبير. لهذا السبب فإن معظم المرشحات المضادة للنسخ المستعار يتم تصميمها بدرجات أعلى حتى يكون لها معدل سريع في الانتقال من مجال المرور إلى مجال الوقف أو الكبح. شكل (١٠,١٥ب) يوضح الاستجابة الترددية لمرشح منفذ للترددات المنخفضة من الدرجة السادسة ومن النوع بترورث. (المرشحات بترورث سيتم تغطيتها في الفصل ١٥). الدرجات الأعلى من المرشح ستحافظ على الإشارة أكثر من المرشح RC.

الإشارات المحدودة الزمن والإشارات المحدودة النطاق

تذكر أن العبارة الحسابية الأصلية لطريقة أخذ العينات من إشارة كانت $x_s[n]=x(nT_s)$. هذه المعادلة محققة لأي قيمة صحيحة للـ n وهذا يعني أن الإشارة x(t) يتم أخذ عيناتها عند كل الأزمنة. لذلك فإننا سنحتاج لعدد لا نهائي من العينات لوصف الدالة x(t) تماما من المعلومات الموجودة في $x_s[n]$. نظرية أخذ العينات مبنية أو معتمدة على هذه الطريقة. وعلى ذلك، فبالرغم من معرفة معدل نيكويست، والذي قد يكون محدداً، فإنه قد نحتاج (وهذا بصفة عامة) أن نأخذ عدداً لا نهائياً من العينات لإعادة التشكيل التامة للإشارة الأصلية من عيناتها، حتى ولو كانت هذه الإشارة محدودة النطاق وستكون العيننة فوق حدية.

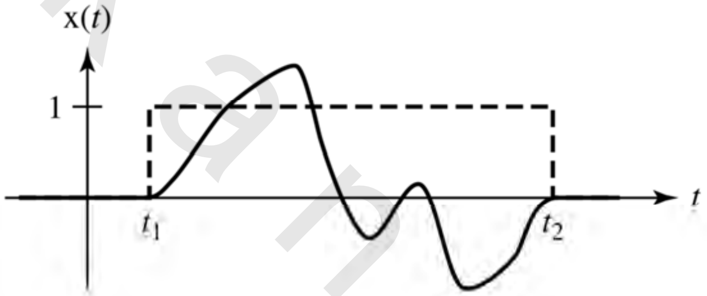
إنه من الجائز أن نعتقد أنه إذا كانت الإشارة محدودة زمنياً (لها قيم لا تساوي الصفر على مدى زمني محدود)، فإنه يمكن أخذ العينات في هذه الفترة الزمنية فقط، مع معرفة أن كل العينات الأخرى تكون صفراً، مع

كون كل المعلومات في الإشارة. المشكلة مع هذه الفكرة هي أنه لا توجد إشارة محدودة زمنياً وتكون في الوقت نفسه محدودة المجال، ولذلك لن يوجد معدل عيننة معروف أو مناسب.

إن حقيقة أن أي إشارة لن تكون في الوقت نفسه محدودة الزمن ومحدودة المجال، تعتبر قانوناً أساسياً في تحليل فورير. يمكن التحقق من هذا القانون عن طريق العرض التالي. افترض أن أي إشارة x(t) لها قيم تساوي الصفر خارج المدى التالي $t_1<t<t_2$. افترض أن CTFT هو X(f). إذا كانت x(t) محدودة زمنياً بالمدى الزمني $t_1<t<t_2$، فإنه يمكن ضربها في دالة مستطيلة يكون جزأها الذي لا يساوي الصفر يغطي نفس المدى الزمني بدون تغيير الإشارة. بمعنى:

$$x(t) = x(t)rect\left(\frac{t-t_0}{\Delta t}\right)$$ المعادلة رقم (١٠،١)

حيث $t_0=(t_1+t_2)/2$ و $\Delta t=t_1+t_2$ كما في شكل (١٠،١٦).



شكل رقم (١٠،١٦) دالة محدودة زمنياً ومستطيل محدود بالحد الزمني نفسه للإشارة

بإيجاد CTFT لكل من الطرفين في المعادلة (١٠،١) نحصل على ما يلي:

$$X(f) = X(f) * \Delta t\ sinc(\Delta t f)e^{-j2\pi f t_0}$$

هذه المعادلة الأخيرة تقول إن X(f) نفسها لن تتأثر نتيجة التفافها مع الدالة سنك. حيث إن sinc(Δtf) لها امتداد لا نهائي لا يساوي الصفر في التردد f، فإنه إذا تم التفافها مع X(f) التي لها امتداد محدود لا يساوي الصفر في التردد f، فإن نتيجة التفاف الدالتين سيكون لها امتداد لا نهائي لا يساوي الصفر في التردد f. ولذلك فإن المعادلة الأخيرة لا يمكن تحقيقها بأي X(f) يكون لها امتداد محدود من القيم التي لا تساوي الصفر في التردد f، مما يثبت أنه إذا كانت هناك أي إشارة محدودة الزمن، فإنه لا يمكن أن تكون محدودة المجال أيضاً. العكس من ذلك وهو أن أي إشارة تكون محدودة المجال لا يمكن أن تكون محدودة الزمن أيضا، يمكن إثباتها بطريقة مشابهة.

أي إشارة يمكن أن تكون في الوقت نفسه غير محدودة في كل من الزمن والتردد، ولكنها لا يمكن أن تكون في الوقت نفسه محدودة في كل من الزمن والتردد.

الاستيفاء interpolation

الاستيفاء المثالي

الوصف السابق عن كيفية استعادة الإشارة الأصلية قد أوضح أنه يمكننا ترشيح الإشارة المعينة صدمياً للتخلص من كل النسخ المستعارة فيما عدا النسخة المتمركزة عند التردد الصفري. إذا كان هذا المرشح هو مرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة له معامل تكبير ثابت $Ts=1/f_s$ في مجال المرور وعرض مجاله هو f_c حيث $f_m<f_c<f_s-f_m$ ، فإن هذه العملية يمكن وصفها في المجال الترددي كما يلي :

$$X(f) = T_S rect(f/2f_c) \times X_\delta(f) = T_S rect(f/2f_c) \times f_s X(f) * \delta_{f_s}(f)$$

إذا أجرينا التحويل العكسي لهذه المعادلة نحصل على :

$$X(t) = \underbrace{T_s f_s}_{=1} 2f_c \operatorname{sinc}(2f_c t) * \underbrace{\mathrm{X(t)}(1/f_s)\delta\, T_s(t)}_{=(1/f_s)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{x(nT_S)\delta(t-nT_S)}}$$

$$X(t) = 2(f_c/f_s)\operatorname{sinc}(2f_c\mathrm{t}) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{x(nT_s)\delta(t-nT_S)}$$

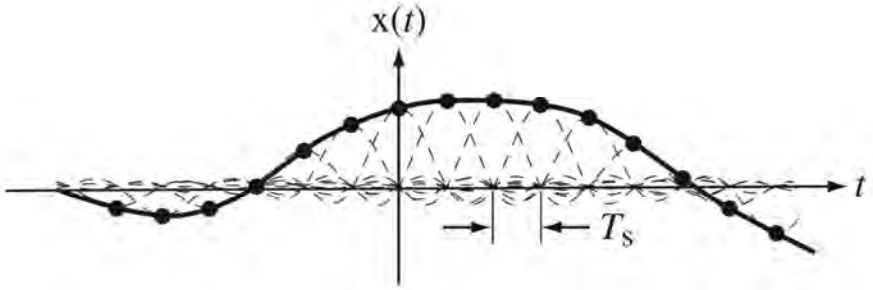
$$X(t) = 2(f_c/f_s)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{x(nT_s)}\operatorname{sinc}\big(2f_c(\mathrm{t-nT_S})\big)$$ المعادلة رقم (١٠،٢)

بتتبع هذه الفكرة غير العملية ، وهي العينة الصدمية ، فقد وصلنا لنتيجة تسمح لنا بملء قيم الإشارة عند كل الأزمنة ، بمعلومية قيم هذه الإشارة عند نقاط متساوية التباعد زمنياً. لا يوجد هناك صدمات في المعادلة (١٠،٢) ، فقط هناك قيم العينات ، وهي قيم شدة الصدمات التي قد تم توليدها عن طريق العينة الصدمية. عملية ملء القيم الغائبة بين العينات هي ما يسمى بالاستيفاء أو interpolation.

افترض الحالة الخاصة $f_c=f_s/2$. في هذه الحالة ، فإن عملية الاستيفاء يمكن وصفها بالمعادلة المبسطة التالية :

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{x(nT_s)}\operatorname{sinc}((\mathrm{t-nT_S})/\mathrm{T_s})$$

الآن يتكون الاستيفاء ببساطة من ضرب كل دالة سنك في قيمة العينة المقابلة لها وجمع كل دوال السنك المحجمة والمزاحة كما هو موضح في شكل (١٠،١٧).



شكل رقم (١٠,١٧) عملية الاستيفاء لمرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة تردده الركني يساوي نصف معدل أخذ العينات

بالرجوع لشكل (١٠.١٧)، نلاحظ أن قمة كل دالة سنك عند زمن كل عينة وتكون بصفرٍ عند نقاط كل العينات الأخرى. وبالتالي فإن الاستيفاء يكون صحيحاً عند نقاط العينات. الاستنتاج السابق يبين أنه صحيحاً أيضاً عند كل النقاط بين العينات.

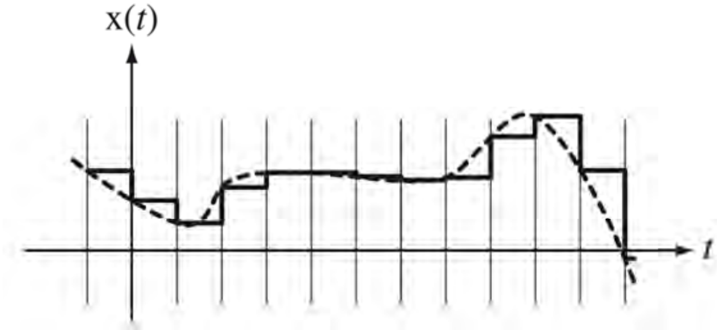
الاستيفاء العملي

طريقة الاستيفاء في الجزء السابق تعيد تشكيل الإشارة تماماً ولكنها تعتمد على فرض لا يمكن تحقيقه عملياً، وهو وجود عدد لا نهائي من العينات. القيمة الاستيفائية عند أي نقطة هي مجموع المشاركات من عدد لا نهائي من دوال السنك المحجمة، وكل منها تمتد إلى الما لانهاية في الزمن. ولكن نتيجة لظروف عملية، فإننا لا يمكننا قراءة عدد لا نهائي من العينات ولا يمكننا معالجتها، فإنه يجب علينا تقريباً أن نشكل الإشارة باستخدام عدد محدود من العينات، وهناك العديد من الطرق التي يمكن استخدامها لذلك. اختيار إحدى هذه الطرق لاستخدامها في عملية الاستيفاء في أي حالة يعتمد على دقة التشكيل المطلوبة وعلى مقدار العيننة الزائدة للإشارة.

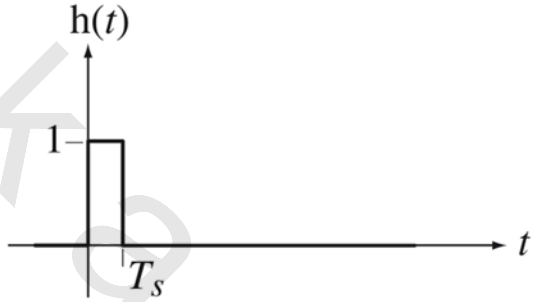
الإمساك من الدرجة الصفرية

ربما تكون أبسط فكرة للتشكيل التقريبي للإشارة هي أن نجعل القيمة المشكلة للإشارة هي قيمة آخر عينة كما في شكل (١٠.١٨). إن هذه طريقة بسيطة؛ لأن العينات وهي في صورة كود أو شفرة يمكنها أن تكون الدخل للمحول الرقمي التماثلي DAC الذي يمكن قدحة ليعطي إشارة خرج جديدة مع كل نبضة تزامن. الإشارة الناتجة بهذه الطريقة تأخذ شكل درجات السلم التي تتبع الإشارة الأصلية. هذه الطريقة لتشكيل الإشارة يمكن نمذجتها عن طريق العيننة الصدمية للإشارة، ثم نجعل الإشارة المعيننة صدمياً تكون دخلاً لنظام يسمى نظام المسك من الدرجة صفر الذي تكون استجابته الصدمية كما يلي وكما في شكل (١٠.١٩):

$$h(t) = \begin{Bmatrix} 1, & 0 < t < T_s \\ 0, & otherwise \end{Bmatrix} = rect\left(\frac{1 - T_s/2}{T_s}\right)$$



شكل رقم (١٠,١٨) نظام المسك من الدرجة الأولى.



شكل رقم (١٠,١٩) الاستجابة الصدمية لنظام المسك من الدرجة الأولى.

أحد الطرق الشائعة لتقليل تأثير النسخ المستعار هي اتباع الإمساك من الدرجة صفر بمرشح عملي منفذ للترددات المنخفضة الذي يقوم بتنعيم هذه الدرجات نتيجة الإمساك من الدرجة صفر. إن وجود الماسك من الدرجة صفر بالتأكيد سيسبب تأخيراً بالنسبة للإشارة الأصلية؛ لأنه يكون سببياً كما أن المرشح العملي المنفذ للترددات المنخفضة سيضيف تأخيراً أكثر.

الإمساك من الدرجة الأولى

فكرة طبيعية أخرى هي الاستيفاء بين العينات باستخدام خطوطاً مستقيمة، كما في شكل رقم (١٠,٢٠). إن ذلك بالتأكيد سيعطي تقريباً أفضل للإشارة الأصلية، ولكنه أصعب قليلاً في التفيذ. كما هو واضح في شكل رقم (١٠,٢٠)، فإن قيمة الإشارة المستوفاة أو المشكلة عند أي لحظة تعتمد على قيمة العينة السابقة وقيمة العينة التالية. إن ذلك لا يمكن تحقيقه في الزمن الحقيقي؛ لأن قيمة العينة التالية تكون غير معروفة في الزمن الحقيقي. ولكن إذا كان مسموحاً بتأخير الإشارة المشكلة بمقدار زمن عينة واحدة Ts، فإنه يمكننا تنفيذ هذه العملية في الزمن الحقيقي. الإشارة المشكَّلة بهذه الطريقة ستظهر كما في شكل رقم (١٠,٢١).

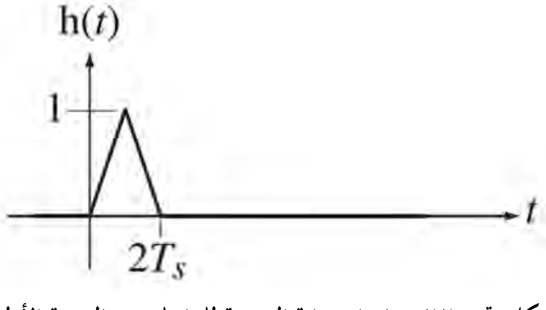
شكل رقم (١٠,٢٠) إشارة أعيد تشكيلها باستخدام استيفاء الخطوط المستقيمة.

شكل رقم (١٠,٢١) إشارة مُشكَّلة باستيفاء الخطوط المستقيمة ومؤخرة بزمن عينة واحدة.

هذه الطريقة للاستيفاء يمكن تنفيذها عن طريق استخدام ماسك من الدرجة صفر والذي نتبعه بماسك من آخر مثله تماما من الدرجة صفر. إن ذلك يعني أن الاستجابة الصدمية لهذا النظام الاستيفائي هو التفاف استجابة الصدمة لماسك صفري مع نفسه كما يلي وكما في شكل (١٠,٢٢):

$$h(t) = rect\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right) * rect\left(\frac{t - T_s/2}{T_s}\right) = tri\left(\frac{t - T_s}{T_s}\right)$$

هذا النوع من الاستيفاء يسمى المسك من الدرجة الأولى.



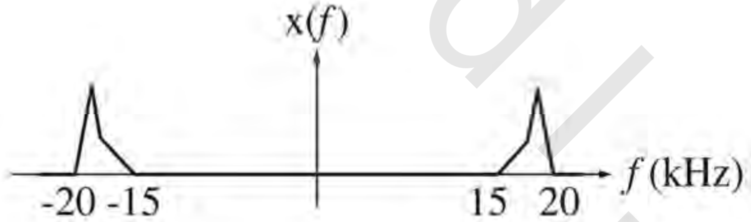
شكل رقم (١٠,٢٢) استجابة الصدمة للماسك من الدرجة الأولى.

واحد من الأمثلة الشهيرة على استخدام العينة وإعادة تشكيل الإشارة هو إعادة تشغيل الاسطوانة المدمجة الصوتية CD. تحتفظ CD بعينات من الإشارة الموسيقية التي تم اكتسابها بمعدل 44.1kHz. نصف هذا المعدل هو التردد 22.05kHz. الاستجابة الترددية لأذن بشرية صحيحة لشخص صغير تمتد في العادة من 20Hz حتى حوالي 20kHz مع بعض التغيرات في هذا المدى. لذلك فإن معدل أخذ العينات يكون أكبر قليلاً من ضعف أكبر تردد تستطيع الأذن البشرية أن تسمعه أو تكتشفه.

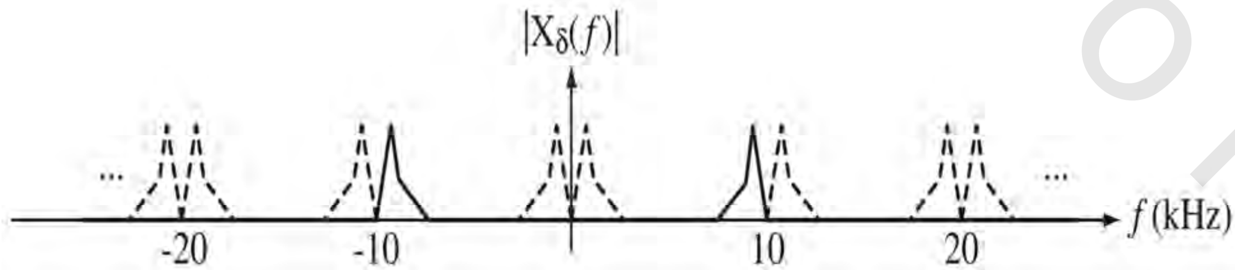
أخذ عينات (عيننة) إشارات لها مجال مرور

إن نظرية أخذ العينات، كما تم ذكرها مسبقا، كانت تعتمد على فكرة بسيطة. إذا تم أخذ العينات بسرعة عالية بما فيه الكفاية، فإن النسخ المستعارة لن تتداخل وفي هذه الحالة يمكن إعادة تشكيل الإشارة الأصلية باستخدام مرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة. ولقد وجد أنه إذا تم أخذ العينات بمعدل أسرع من ضعف أكبر تردد في الإشارة، فإنه يمكن استرجاع الإشارة الأصلية من هذه العينات. وهذا حقيقي لكل الإشارات، ولكن لبعض الإشارات يمكن تقليل المعدل الأدنى لأخذ العينات.

عند وضع الفرض بأنه يجب أخذ العينات بمعدل أكبر من ضعف أكبر تردد في الإشارة، كنا نفترض ضمنياً أنه إذا أخذنا العينات بأي معدل أقل من ذلك، فإن تلك النسخ المستعارة ستتداخل، ولكن ذلك ليس حقيقياً مع كل الإشارات. فمثلاً، افترض إشارة مستمرة زمنياً لها طيف لمجال تمرير متوسط لا يساوي الصفر فقط في المدى الترددي $15kHz<|f|<20kHz$. وبالتالي فإن عرض مجال هذه الإشارة هو 5kHz كما في شكل (١٠,٢٣).

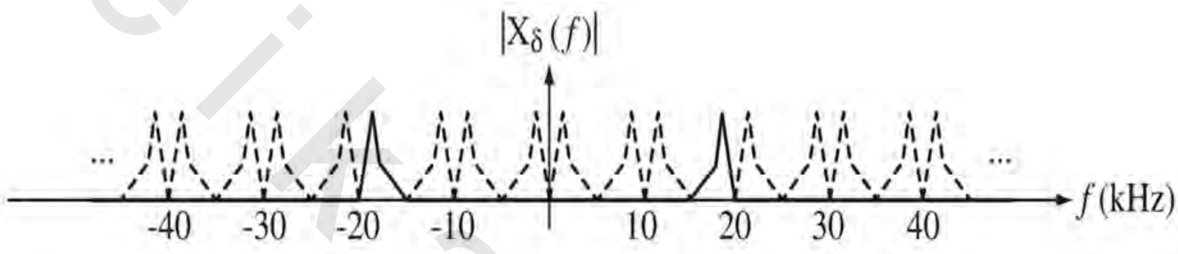


شكل رقم (١٠,٢٣) طيف إشارة بمجال تمرير متوسط ضيق.



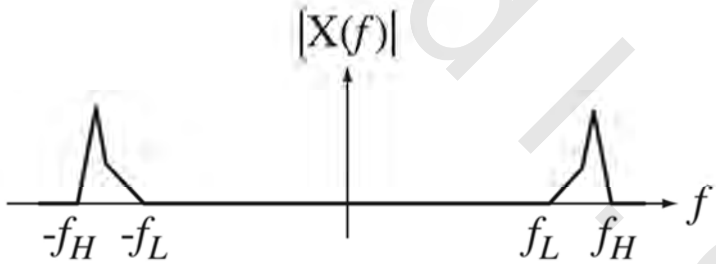
شكل رقم (١٠,٢٤) طيف إشارة بمجال تمرير متوسط تم أخذ عيناتها صدمياً بمعدل 20kHz.

إذا قمنا بأخذ عينات هذه الإشارة بمعدل 20kHz ربما سنحصل على نسخ مستعارة كالموضحة في شكل (١٠,٢٤). مثل هذه النسخ المستعارة لا تتداخل. ولذلك فإنه من الممكن بمعرفة طيف الإشارة الأصلية والمرشح المناسب، أن نستعيد الإشارة من هذه العينات. إنه حتى يمكننا أن نأخذ العينات بمعدل 10kHz ، وهو نصف أكبر تردد في الإشارة، و النسخ المستعار سيكون كما في شكل (١٠,٢٥)، وسيكون من الممكن استعادة الإشارة الأصلية (نظريا) باستخدام المرشح نفسه. ولكن إذا أخذنا العينات بأي معدل أقل من ذلك فإن النسخ المستعارة ستتداخل بالتأكيد وسيكون من الصعب استرداد الإشارة الأصلية. لاحظ أن هذا المعدل لأخذ العينات ليس أعلى من ضعف أكبر تردد في الإشارة، ولكنه ضعف عرض مجال الإشارة.



شكل رقم (١٠,٢٥) طيف إشارة ذات مجال مرور متوسط معينة بمعدل 10kHz

في هذا المثال كانت النسبة بين أكبر تردد وعرض المجال للإشارة رقماً صحيحاً. عندما تكون هذه النسبة ليست رقما صحيحا تصبح المسألة أكثر صعوبة لإيجاد أقل معدل. ولأخذ العينات يتجنب النسخ المستعار، كما في شكل (١٠,٢٦).



شكل رقم (١٠,٢٦) مقدار الطيف لإشارة تمرير مجال متوسط عامة

يحدث النسخ المستعار عند إزاحات المضاعفات الصحيحة لمعدل أخذ العينات. افترض أن الرقم الصحيح k يشير إلى النسخ المستعارة. وبالتالي فإن النسخة المستعارة رقم (k-1) يجب أن تقع كلها تحت f_L ويجب أن تقع النسخة رقم k كلها فوق f_H، وذلك يعني :

$$(k-1)f_s + (-f_L) < f_L \Rightarrow (k-1)f_s < 2f_L$$

وأيضا :

$$kf_s + (-f_H) > f_H \Rightarrow kf_s > 2f_H$$

بإعادة ترتيب هذين التعبيرين نحصل على :

$$(k-1)f_s < 2(f_H - B)$$

حيث B هي عرض المجال f_H-f_L ويمكننا كتابة :

$$\frac{1}{f_s} < \frac{k}{2f_H}$$

الآن بوضع حاصل ضرب الجوانب اليسرى لهذه التعبيرات التي هي أقل من حاصل ضرب الجوانب اليمنى فإننا نحصل على :

$$k-1 < (f_H - B)\frac{k}{f_H} \Rightarrow k < \frac{f_H}{B}$$

وحيث إن k يجب أن تكون صحيحة ، فإن ذلك يعني أن الحد الحقيقي على k هو :

$$k_{max} = \left\lfloor \frac{f_H}{B} \right\rfloor$$

وهو أكبر رقم صحيح في f_H/B. وبالتالي فإن الشرطين التاليين :

$$k_{max} = \left\lfloor \frac{f_H}{B} \right\rfloor \text{ و } k_{max} > \frac{2f_H}{f_{s,min}}$$

أو الشرط الوحيد التالي :

$$f_{s,min} > \frac{2f_H}{\lfloor f_H/B \rfloor}$$

يحددان أقل معدل لأخذ العينات الذي لن يحدث عنده نسخ مستعار.

مثال ١٠,٣

أقل معدل لأخذ العينات لتجنب النسخ المستعار

افترض إشارة ليس لها مكونات طيفية لا تساوي الصفر خارج النطاق 34kHz<|f|<47kHz. ما هو أقل معدل لأخذ العينات يتجنب النسخ المستعار ؟

$$f_{s,min} > \frac{2f_H}{\lfloor f_H/B \rfloor} = \frac{94\text{ kHz}}{\lfloor 47\text{ kHz}/13\text{ kHz} \rfloor} = 31.333\text{ kHz}$$

مثال ١٠,٤

أقل معدل لأخذ العينات لتجنب النسخ المستعار

افترض إشارة ليس لها مكونات لا تساوي الصفر خارج المدى 0<|f|<580kHz. ما هو أقل معدل أخذ للعينات يتجنب النسخ المستعار.

$$f_{s,min} > \frac{2f_H}{\lfloor f_H/B \rfloor} = \frac{1160\text{ kHz}}{\lfloor 580\text{ kHz}/580\text{ kHz} \rfloor} = 1160\text{ kHz}$$

وهذه إشارة مرور متوسط وأقل معدل لأخذ العينات يساوي ضعف أكبر تردد كما تم تحديده في نظرية العينة.

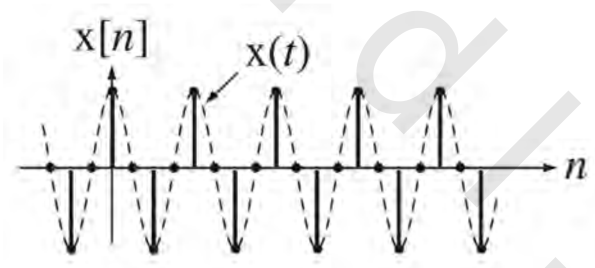
في معظم حالات التصميم الهندسية الحقيقية، يكون اختيار معدل العينات أكثر من ضعف أكبر تردد في الإشارة هو الحل العملي. كما سنرى بعد قليل، يكون هذا المعدل أكبر بدرجة معقولة من معدل نيكويست من أجل تبسيط بعض عمليات معالجة الإشارة الأخرى.

أخذ عينات الدالة الجيبية

الفكرة الكلية وراء تحليل فورير هي أن أي إشارة يمكن تحليلها إلى مجموعة من الدوال الجيبية (الحقيقية أو المركبة). لذلك، دعنا نستكشف عملية العيننة عن طريق النظر إلى بعض الدوال الجيبية الحقيقية المعيننة فوق أو تحت أو عند معدل نيكويست. في كل مثال يكون هناك عينة تحدث عند الزمن t=0. إن ذلك سيضع علاقة طورية بين الإشارة الحقيقية الموصوفة حسابيا وطريقة أخذ عيناتها. (إن ذلك يكون اختيارياً، ولكن في العادة يجب أن يكون هناك زمن لأخذ العينات يمثل زمن مرجعي، وعندما نحصل على العينات في زمن محدد، ستكون أول عينة في العادة عند الزمن t=0 إلا إذا تم ذكر ما يخالف ذلك. أيضا في الاستخدام العادي لـ DFT في المعالجة الرقمية للإشارات، فإن أول عينة نفترض في العادة أنها تحدث عند الزمن t=0).

الحالة ١

دالة جيب تمام cosine معيننة بمعدل أربع مرات ترددها أو عند ضعف معدل نيكويست كما في شكل رقم (١٠,٢٧).

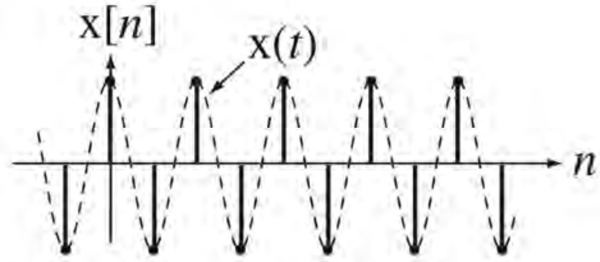


الشكل رقم (١٠,٢٧) دالة جيب تمام معيننة عند ضعف معدل نيكويست الخاص بها.

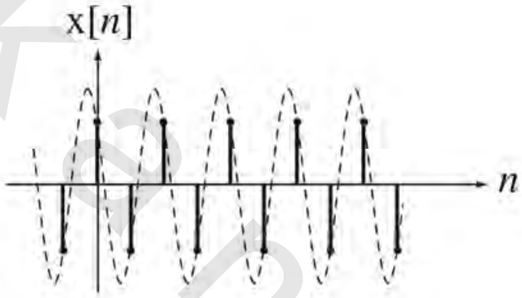
من الواضح هنا أنه بمعرفة قيم العينات وبمعرفة أن الإشارة معيننة بدرجة سريعة بما فيه الكفاية، فإن ذلك يكون كافياً للوصف الكامل للدالة الجيبية بصورة وحيدة أو فريدة. لا يوجد هناك أي دالة جيبية أخرى بهذا التردد، أو بأي تردد آخر تحت معدل نيكويست يمكنها أن تمر تماماً خلال كل نقاط العينات على المدار الزمني الكامل $-\infty<n<\infty$. في الحقيقة لا توجد أي إشارة أخرى من أي نوع تكون محدودة المجال تحت معدل نيكويست يمكنها أن تمر تماماً خلال كل نقاط هذه العينات.

الحالة ٢

دالة جيب تمام معينة عند ضعف ترددها أو عند معدل نيكويست كما في شكل (١٠,٢٨).



شكل رقم (١٠,٢٨) جيب تمام معينة عند معدل نيكويست.



شكل رقم (١٠,٢٩) دالة جيب بنفس العينات مثل جيب التمام معينة عند معدل نيكويست.

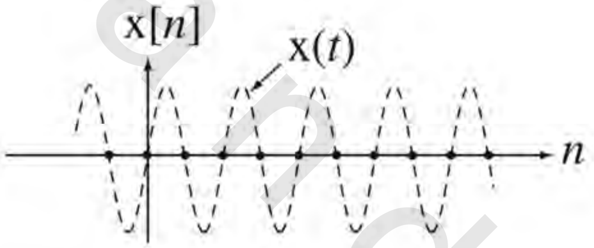
هل هذه العينات كافية لتحديد الإشارة بصورة فريدة ؟ الإجابة هي لا. افترض الدالة الجيبية الموضحة في شكل (١٠,٢٩) والتي لها التردد نفسه وتمر تماما خلال العينات نفسها.

إن هذه تعتبر حالة خاصة توضح دقة نظرية العينة التي ذكرناها مسبقاً. لكي يتم التأكد من إعادة تشكيل أي إشارة عامة من عيناتها، فإن معدل أخذ العينات يجب أن يكون أكبر من معدل نيكويست بدلاً من أن يكون مساوياً تماماً لمعدل نيكويست. في الأمثلة السابقة لم يكن الأمر مهماً ؛ لأن طاقة الإشارة عند تردد نيكويست تماماً كانت صفراً (لا توجد صدمة في مقدار طيف الإشارة عند هذا التردد). إذا كانت هناك دالة جيبية في أي إشارة، عند حد المجال تماماً، فإن معدل أخذ العينات يجب أن يزيد على معدل نيكويست لكي نتمكن من إعادة التشكيل التامة. لاحظ أنه لا يوجد هناك أي التباس عن تردد الإشارة. ولكن هناك التباس في المقدار والطور كما هو موضح. إذا تم تطبيق خطوات طريقة الاستيفاء بالدالة سنك المستنتجة مسبقاً على العينات التي في شكل (١٠,٢٩) فإن الدالة الجيبية التي في شكل (١٠,٢٨) هي التي ستنتج.

أي دالة جيبية عند تردد معين يمكن التعبير عنها كمجموع من جيوب التمام غير المزاحة بمقدار معين عند التردد نفسه ودالة جيبية غير مزاحة بمقدار معين عند التردد نفسه. مقادير الجيوب وجيوب التمام غير المزاحة تعتمد على طور الدالة الجيبية الأصلية. باستخدام الحقائق المثلثية التالية :

$$A\,cos(2\pi f_0 t + \Theta) = A\,cos(2\pi f_0 t)cos(\Theta) - A\,sin(2\pi f_0 t)sin(\Theta).$$
$$A\,cos(2\pi f_0 t + \Theta) = \underbrace{A\,cos(\Theta)}_{A_C}\ cos(2\pi f_0 t) + \underbrace{[-A\,sin(\Theta)]}_{A_S}\ sin(2\pi f_0 t).$$
$$A\,cos(2\pi f_0 t + \Theta) = A_C cos(2\pi f_0 t) + A_S\,sin(2\pi f_0 t)$$

عند عيننة الدالة الجيبية عند معدل نيكويست تماماً فإن الاستيفاء بالدالة سنك تعطي عادة جزء جيب التمام وتهمل جزء الجيب وهذا أحد تأثيرات النسخ المستعار. جزء جيب التمام في الدالة الجيبية العامة يسمى عادة الجزء الطوري من الدالة الجيبية وجزء الجيب يسمى جزء الطور المتعامد. إن إسقاط الجزء الطوري المتعامد في أي دالة جيبية يمكن رؤيته بسهولة في النطاق الزمني عن طريق عيننة دالة جيبية غير مزاحة عند معدل نيكويست تماماً. كل العينات ستكون أصفاراً، كما في شكل رقم (١٠,٣٠).



شكل رقم (١٠,٣٠) دالة جيبية معيننة عند معدل نيكويست.

إذا أضفنا دالة جيبية بأي مقدار عند هذا التردد تماماً وبعد قمنا بأخذ عيناتها، فإن العينات ستكون هي نفسها كما لو كانت الدالة الجيبية لم تكن هناك لأن قيمتها تساوي صفراً عند زمن كل عينة كما في شكل (١٠,٣١). لذلك فإن الجزء المتعامد الطور أو الجزء الجيبي الذي يكون عند نفس تردد نيكويست تماماً يفقد تماماً عند عيننة هذه الإشارة.

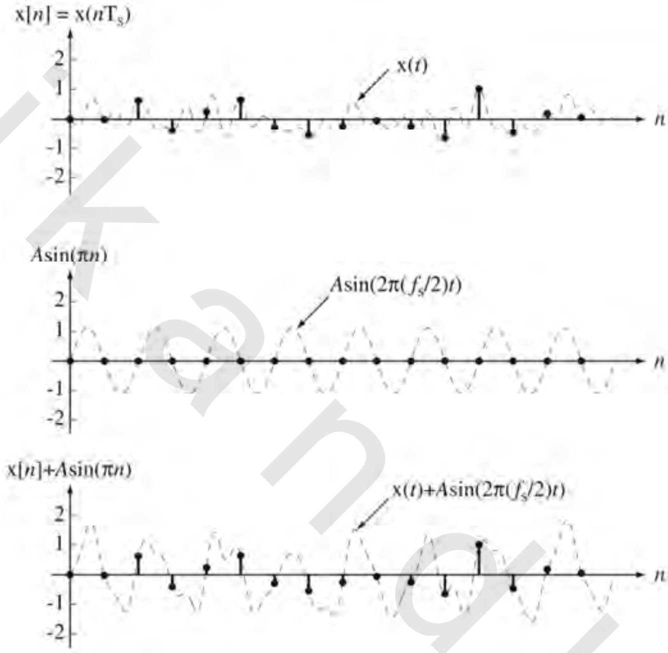
الحالة ٣

عينات مأخوذة من دالة جيبية أعلى قليلا من معدل نيكويست كما في شكل (١٠,٣٢).

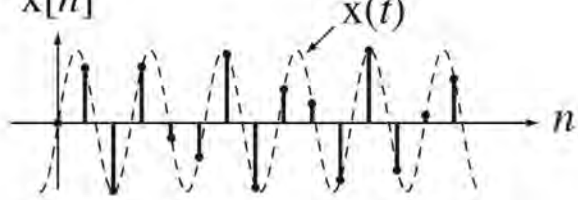
الآن حيث إن معدل أخذ العينات أعلى قليلاً من معدل نيكويست، فإن العينات لن تحدث كلها عند نقاط عبور الصفر للدالة الأصلية وسيكون هناك معلومات كافية في العينات لإعادة تشكيل الإشارة. سيكون هناك جيب واحد فقط يكون تردده أقل من تردد نيكويست، ومقداره، وطوره سيمران تماماً خلال هذه العينات.

الحالة ٤

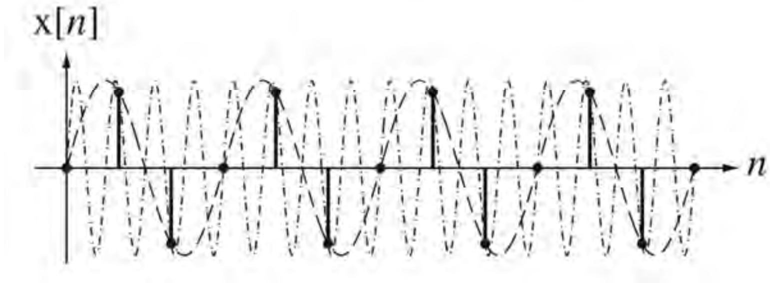
دالتان جيبيتان بترددين مختلفين ومعينتان بنفس بالمعدل نفسه وبقيم العينات نفسها كما في شكل (١٠،٣٣).
في هذه الحالة ستكون الدالة الجيبية زائدة العينة، والدالة الجيبية ذات التردد العالي ستكون ناقصة التردد. وهذا يوضح الالتباس الناتج عن نقص العينة. إذا كان لدينا معرفة أو اتصال مع العينات المأخوذة من الدالة الجيبية ذات التردد المرتفع، ونعتقد أن الإشارة قد تم عينتها بطرقة تامة تبعاً لنظرية العينة، فإننا سنفسرها كما لو كانت آتية من الجيب ذي التردد الأقل.



شكل رقم (١٠،٣١) تأثير زيادة دالة جيبية عند تردد نيكويست على العينات.



شكل رقم (١٠،٣٢) دالة جيبية معينة بمعدل أعلى قليلاً من معدل نيكويست.



شكل رقم (١٠,٣٣) دالتان جيبيتان مختلفتان في التردد ولهما قيم العينات نفسها.

إذا تم أخذ عينات الدالة الجيبية $x_1(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\theta)$ بمعدل يساوي f_s، هذه العينات ستكون هي نفسها مثل العينات من دالة جيبية أخرى $x_2(t)=A\cos(2\pi(f_0+kf_s)t+\theta)$ حيث k رقم صحيح (يشمل الأرقام الصحيجة السالبة). يمكن توضيح عن طريق توسيع المعامل $x_2(t)x_2(t)=A\cos(2\pi f_0 t+2\pi(kf_s)t+\theta)$. لاحظ حدوث العينات عند الأزمنة nTs حيث n رقم صحيح. لذلك فإن قيم العينة رقم n للدالتين الجيبيتين ستكون:

$$x_1(nT_s) = A\,cos(2\pi f_0 nT_s + \Theta)$$

وأيضا:

$$x_2(nT_s) = A\,cos(2\pi f_0 nT_s + 2\pi(kf_s)nT_s + \Theta)$$

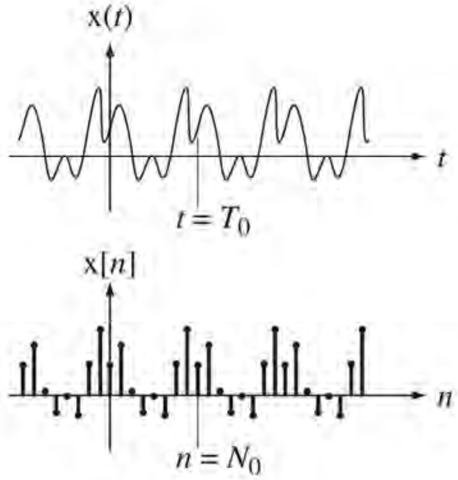
وحيث إن $f_sTs=1$ فإن المعادلة الثانية يمكن تبسيطها إلى $x_2(nTs)=A\cos(2\pi f_0 nTs+2k\pi n+\theta)$. حيث أن kn هي حاصل ضرب رقمين صحيحين وهو أيضا يكون رقما صحيحا، وحيث إن إضافة رقم صحيح من 2πلمعامل الدالة الجيبية لا يغير من قيمتها:

$$x_2(nT_s) = A\,cos(2\pi f_0 nT_s + 2k\pi n + \Theta) = A\,cos(2\pi f_0 nT_s + \Theta) = x_1(nT_s)$$

الدوال الدورية المحدودة المجال

لقد رأينا في أحد الأجزاء السابقة ما هي المتطلبات للحصول على عملية عيننة كاملة لأي إشارة. ولقد تعلمنا أيضاً، وعموماً، أنه لكي يمكن إعادة التشكيل الكامل للإشارة، فإنه يكون مطلوباً الحصول على عدد لا نهائي من العينات. حيث إن أي نظام معالجة للإشارات الرقمية DSP يكون لها مقدرة محدودة على الذاكرة، فإنه من الضروري أن نستكشف طرقاً لتحليل الإشارة باستخدام عدد محدود من العينات.

هناك نوع واحد من الإشارات التي يمكن وصفها بالكامل بعدد محدد من العينات، بمعنى أنها إشارة محدودة المجال دورية. معرفة ما يحدث في دورة واحدة يكون كافياً لوصف كل الدورات، والدورة الواحدة تكون محدودة الفترة الزمنية كما في شكل رقم (١٠,٣٤).



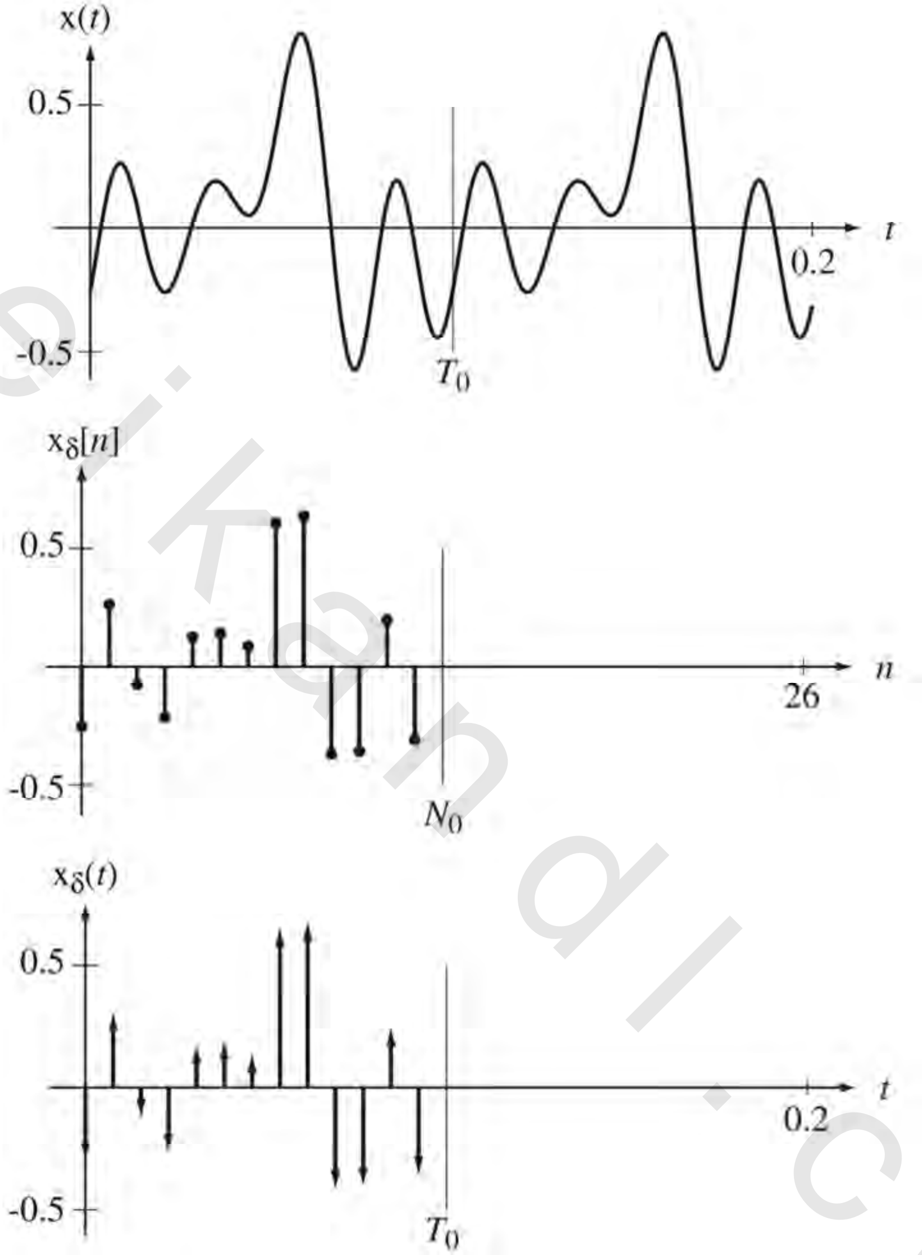
شكل رقم (١٠,٣٤) إشارة محدودة المجال، ودورية، ومستمرة زمنياً، وإشارة متقطعة زمنياً مشكلة عن طريق أخذ عينات من هذه الإشارة بمعدل ٨ مرات لكل دورة أساسية

لذلك فإن عدد محدود من العينات على مدار دورة واحدة من إشارة محدودة المجال ودورية بمعدل يكون فوق معدل نيكويست ويكون أيضاً مضاعفاً صحيحاً من التردد الأساسي يكون كافياً للوصف الكامل لهذه الإشارة. إن جعل معدل أخذ العينات يساوي مضاعفاً صحيحاً من التردد الأساسي يؤكد أن العينات من أي دورة أساسية تكون هي نفسها تماماً مثل العينات من أي دورة أساسية أخرى.

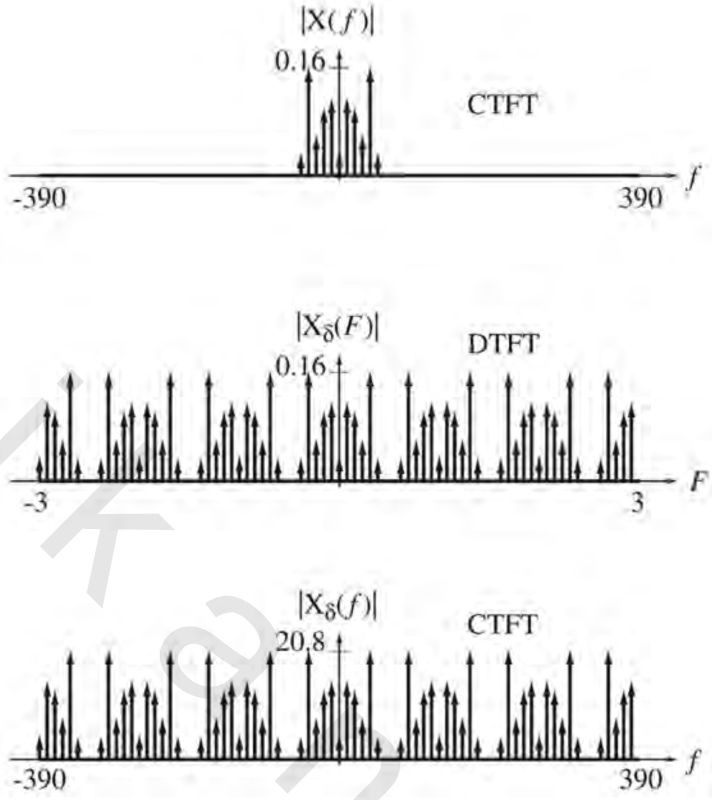
سنفترض أن الإشارة المشكلة من عينة إشارة $x(t)$ محدودة المجال، ودورية، وبمعدل فوق معدل نيكويست ستكون هي الإشارة الدورية $x_s[n]$، وافترض أن صورة معيننة صدمياً من $x(t)$ عند المعدل نفسه ستكون $x_\delta(t)$ كما في شكل (١٠,٣٥).

شكل (١٠,٣٥) يبين دورة أساسية واحدة فقط من العينات للتأكيد على أن دورة واحدة من العينات تكون كافية للوصف الكامل لإشارة دورية محدودة المجال. يمكننا إيجاد تحويلات فورير المناسبة لهذه الإشارات، كما في شكل (١٠,٣٦).

تحويل فورير المستمر زمنياً CTFT للإشارة $x(t)$ يتكون من صدمات فقط ؛ لأنه دوري ويتكون من عدد محدود من الصدمات ؛ لأنه محدود المجال. لذلك فإن عدداً محدوداً من الأرقام يصف بالكامل الإشارة في كل من النطاق الترددي والزمني. إذا ضربنا شدة الصدمات في $X(f)$ في معدل أخذ العينات f_s سنحصل على شدة النبضات في المدى الترددي نفسه لـ $X_\delta(f)$.



شكل رقم (١٠,٣٥) دالة دورية محدودة المجال ومستمرة زمنياً، ودالة متقطعة زمنياً وإشارة صدمة مستمرة زمنياً متولدة عن طريق عيننة هذه الإشارة بمعدل أعلى من معدل نيكويست



شكل رقم (١٠,٣٦) مقدار تحويلات فورير الثلاث في النطاق الزمني.

مثال ١٠,٥

إيجاد دالة CTFS التوافقية من دالة DFT التوافقية.

أوجد دالة CTFS التوافقية للدالة x(t)=4+2cos(20πt)-3sin(40πt) عن طريق العيننة فوق معدل نيكويست وعند مضاعف صحيح من التردد الأساسي على دورة أساسية واحدة وأوجد دالة الـ DFT التوافقية لهذه العينات.

هناك ثلاثة ترددات موجودة في هذه الإشارة وهي 0Hz و 10Hz و 20Hz. ولذلك فإن أعلى تردد موجود في الإشارة هو f_m=20Hz وبالتالي فإن معدل نيكويست سيكون 40Hz. التردد الأساسي هو القاسم المشترك الأعظم للـ 10Hz والـ 20Hz وهو 10Hz. ولذلك يجب أن نأخذ العينات بتزامن 1/10 ثانية. إذا كنا سنأخذ العينات عند معدل نيكويست لمدة دورة واحدة أساسية، سنحصل على ٤ عينات. إذا كنا سنأخذ العينات فوق معدل نيكويست عند مضاعف صحيح من التردد الأساسي، سنأخذ ٥ عينات أكثر في الدورة الأساسية الواحدة. لجعل الحسابات أبسط

سنأخذ العينات ٨ مرات في دورة أساسية واحدة، وهو ما يساوي معدل عينة مقداره 80 هرتز. وبالتالي مع بدء العيننة عند الزمن t=0 فإن العينات ستكون كما يلي:

$$\{x[0], x[1], \ldots, x[7]\} = \{6, \quad 1+\sqrt{2}, \quad 4, \quad 7-\sqrt{2}, 2, \quad 1-\sqrt{2}, \quad 4, \quad 7+\sqrt{2}\}$$

باستخدام معادلة حساب دالة DFT التوافقية لدالة متقطعة زمنياً:

$$X[k] = \sum_{k=\langle N_0\rangle} \mathrm{x[n]}e^{-j2\pi kn/N_0}$$

$$\{X[0], X[1], \ldots, X[7]\} = \{32, 8, j12, 0, 0, 0, -j12, 8\}$$

الجانب الأيمن من المعادلة السابقة هو دورة أساسية واحدة من دالة DFT التوافقية X[k] للدالة x[n]. بإيجاد دالة CTFS التوافقي للدالة x(t)=4+2cos(20πt)-3sin(40πt) مباشرة باستخدام:

$$c_x[k] = (1/T_0)\int_{T_0} \mathrm{X(t)e}^{-j2\pi kt/T_0}\mathrm{dt}$$

سنحصل على ما يلي:

$$\{c_x[-4], c_x[-3], \ldots, c_x[4]\} = \{0, 0, -j\,3/2\,, 1, 4, 1, j\,3/2\,, 0, 0\}$$

من النتيجتين السابقتين، سنجد أن 1/N مضروبة في القيم X[0] و X[1] و X[2] و X[3] و X[4] في دالة DFT التوافقية والقيم التوافقية لل CTFS وهي $c_x[0]$ و $c_x[1]$ و $c_x[2]$ و $c_x[3]$ و $c_x[4]$ هي نفسها، وباستخدام حقيقة أن X[k] تكون دورية بدورة أساسية ٨، بمعنى أن (1/8){X[-4], X[-3], X[-2], X[-1]} وأيضا $c_x[-1]$ و $c_x[-2]$ و $c_x[-3]$ و $c_x[-4]$ ستكون هي نفسها أيضاً.

دعنا الآن نكسر نظرية العيننة عند معدل نيكويست. في هذه الحالة هناك ٤ عينات في دورة أساسية واحدة:

$$\{X[0], X[1], X[2], X[3]\} = \{6, 4, 2, 4\}$$

وستكون دورة واحدة لدالة DFT التوافقية كما يلي:

$$\{X[0], X[1], X[2], X[3]\} = \{16, 4, 0, 4\}$$

القيم التي لا تساوى الصفر في دالة CTFS التوافقية ستكون هي المجموعة التالية:

$$\{c_x[-2], c_x[-1], \ldots, c_x[2]\} = \{\, -j\,3/2\,, 1, 4, 1, j\,3/2\}$$

القيمة j3/2 الخاصة بـ $x_x[2]$ غائبة من دالة DFT التوافقية، لأن X[2]=0. إن ذلك هو مقدار الدالة الجيبية عند التردد 40Hz. إن ذلك يثبت أنه عند أخذ عينات من دالة جيبية عند معدل نيكويست تماماً، فإننا لن نراها في العينات؛ لأن هذه العينات تكون تماماً عند نقاط عبور الصفر.

من الممكن للقارئ المفكر أن يلاحظ أن وصف أي إشارة اعتماداً على عينات في النطاق الزمني من دورة أساسية واحدة تتكون من مجموعة محددة من الأرقام $x_s[n]$ حيث $n_0<n<n_0+N$، والتي تحتوي على N من الأعداد الحقيقية المستقلة، ووصف دالة ال DFT التوافقية المقابلة لهذه الإشارة في النطاق الترددي تتكون من مجموعة محددة

من الأرقام $X_s[k], k_0 \le k \le k_0+N$ ، التي تحتوي على N من الأرقام المركبة وبالتالي 2N من الأرقام الحقيقية (اثنان من الأرقام الحقيقية لكل رقم مركب، الجزء الحقيقي والجزء التخيلي). ولذلك فإنه قد يبدو أن الوصف في النطاق الزمني يكون أكثر فعالية من الوصف في النطاق الترددي حيث إنه يتحقق بعدد أقل من الأرقام الحقيقية. ولكن كيف سيكون ذلك عندما تكون المجموعة $X_s[k], k_0 \le k \le k_0+N$ سيتم حسابها من المجموعة $x_s[n]$ حيث $n_0<n<n_0+N$ بدون أي معلومات إضافية ؟ النظرة الفاحصة للعلاقة بين هاتين المجموعتين من الأرقام ستبين أن هذا الفرق الظاهري هو وهم.

كما شرحنا مسبقاً في الفصل ٧ ، فإن $X_s[0]$ تكون دائماً حقيقية ، ويمكن حسابها بمعادلة DFT كما يلي :

$$X_s[0] = \sum_{n=\langle N \rangle} X_s[n]$$

حيث إن كل الـ $x_s[n]$ تكون حقيقية ، فإن $X_s[0]$ يجب أن تكون حقيقيةً أيضاً لأنها ببساطة مجموع كل الـ $x_s[n]$. ولذلك ، فإن هذا الرقم لن يكون له أبداً قيمة تخيلية لا تساوي الصفر. هناك حالتان يجب افتراضهما بعد ذلك ، وهما N رقم زوجي و N رقم فردي.

الحالة 1 ، N رقم زوجي

للبساطة ، وبدون فقد في العمومية ، يمكننا كتابة :

$$X_s[k] = \sum_{n=\langle N \rangle} X_s[n] e^{-j\pi kn/N} = \sum_{n=k_0}^{k_0+N-1} X_s[n] e^{-j\pi kn/N}$$

بفرض $k_0=-N/2$ ، فإن :

$$X_s[k_0] = X_s[-N/2] = \sum_{n=\langle N \rangle} X_s[n] e^{j\pi n} = \sum_{n=\langle N \rangle} X_s[n](-1)^n$$

و $X_s[-N/2]$ ستكون بالتأكيد حقيقية. كل قيم دوال DFT التوافقية في دورة واحدة ، فيما عدا $X_s[0]$ و $X_s[-N/2]$ ، تحدث في صورة أزواج على الصورة $X_s[k]$ و $X_s[-k]$. تذكر أنه لأي $x_s[n]$ ، فإن $X_s[k] = X_s^*[-k]$. بمعنى ، بمجرد أن نعرف $X_s[k]$ فإننا نعرف $X_s[-k]$ أيضاً. لذلك ، على الرغم من أن كل $X_s[k]$ تحتوي على رقمين حقيقيين ، وأيضا $X_s[-k]$ ، فإن $X_s[-k]$ لن تضيف أي معلومات لأننا نعرف مسبقاً أن $X_s[k] = X_s^*[-k]$. لاحظ أن $X_s[-k]$ ليست مستقلة عن $X_s[k]$. لذلك فإنه لدينا الآن ، كأرقام مستقلة ، $X_s[0]$ و $X_s[N/2]$ و $X_s[k]$ حيث $1 \le k \le N/2$. كل $X_s[k]$ من $k=1$ حتى $k=N/2-1$ تعطي عدد $2(N/2-1)=N-2$ من الأرقام الحقيقية المستقلة. بجمع الرقمين الحقيقيين بالتأكيد ، وهما $X_s[0]$ ، $X_s[N/2]$ سيكون لدينا في النهاية عدد N من الأرقام الحقيقية المستقلة في وصف الإشارة في النطاق الترددي.

الحالة 2: N رقم فردي

للتبسيط، وبدون فقد في العمومية سنفترض $k_0=-(N-1)/2$. في هذه الحالة يكون لدينا ببساطة $X_s[0]$ بالإضافة إلى $(N-1)/2$ من الأزواج المركبة المترافقة $X_s[k]$ و $X_s[-k]$. لقد رأينا مسبقاً أن $X_s[k] = X_s^*[-k]$. ولذلك فإن لدينا $X_s[0]$ واثنين من الأرقام الحقيقية المستقلة لكل زوج مترافق أو N-1 من الأرقام الحقيقية المستقلة للعدد الكلي N من الأرقام الحقيقية المستقلة.

المحتوى المعلوماتي في صورة أرقام حقيقية مستقلة محفوظ في عملية التحويل من النطاق الزمني إلى النطاق الترددي.

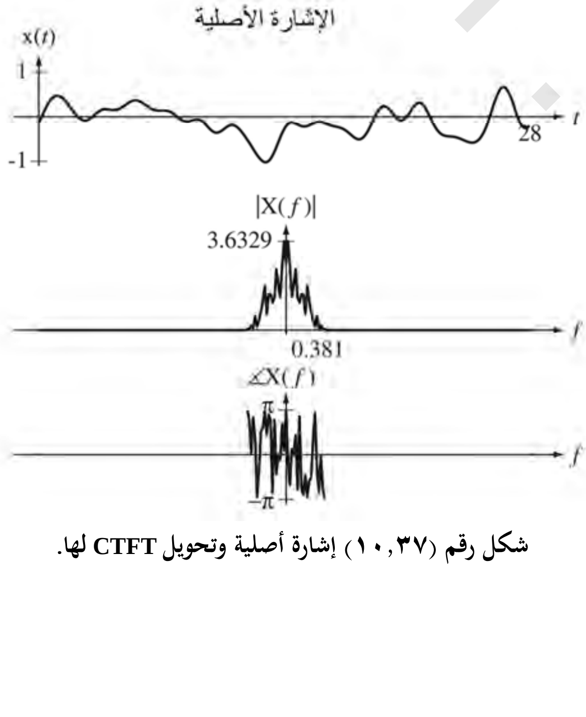
معالجة الإشارات باستخدام DFT

العلاقة بين CTFT و DFT

في الشرح التالي للعلاقة بين CTFT و DFT سنعرض خطوات المعالجة من CTFT للدالة الأصلية حتى DFT عن إشارة مثال. بعد ذلك سيتم عرض العديد من الاستخدامات لعمليات معالجة الإشارات. سنستخدم الصورة F للـ DTFT لأن علاقات التحويل تكون أكثر تماثلاً منها في الصورة Ω.

افترض الإشارة $x(t)$ تم أخذ عيناتها وافترض أن العدد الكلي من العينات المأخوذة هو N حيث $N=Tf_s$، و T هي زمن العيننة الكلي و f_s هي تردد العيننة، بالتالي فإن الزمن بين العينات سيكون $Ts=1/f_s$. فيما يلي سنرى مثالاً على إشارة أصلية في كل من النطاقين الزمني والترددي كما في شكل (١٠.٣٧).

خطوة المعالجة الأولى في التحويل من CTFT إلى DFT هي أن نأخذ عينات الإشارة $x(t)$ لتكوين الإشارة $x_s[n]=x(nTs)$. الصورة المقابلة للنطاق الترددي للدالة المتقطعة زمنياً هي تحويل الـ DTFT لها. في الجزء التالي سننظر إلى العلاقة بين هذين التحويلين.



شكل رقم (١٠,٣٧) إشارة أصلية وتحويل CTFT لها.

العلاقة بين CTFT و DTFT

CTFT هو تحويل فورير لدالة مستمرة زمنياً وDTFT هو تحويل فورير لدالة متقطعة زمنياً. إذا ضربنا الدالة المستمرة زمنياً x(t) في صدمات دورية دورتها هي Ts ، فإننا نولد الدالة الصدمية المستمرة زمنياً كما يلي :

$$X_\delta(t) = x(t)\delta_{\mathrm{T_s}}(\mathrm{t}) = \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} \mathrm{x(nT_s)\delta(t-nT_s)}$$ المعادلة رقم (١٠,٣)

إذا كونا الآن الدالة $x_s[n]$ التي قيمها هي قيم الدالة المستمرة زمنياً x(t) عند مضاعفات صحيحة لـ Ts (وهي أيضاً تمثل مقدار الصدمات في دالة الصدمات المستمرة زمنياً ($x_\delta(t)$)، سنحصل على العلاقة $x_s[n]=x(nTs)$. الدالتان $x_s[n]$ و $x_\delta(t)$ يتم وصفهما بمجموعة الأرقام نفسها (شدة الصدمة) ويحتويان نفس المعلومات. إذا حسبنا الآن ال CTFT للمعادلة (١٠,٣) سنحصل على :

$$X_\delta(f) = x(f) * f_s\delta_{f_s}(f) = \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} \mathrm{x(nT_s)e}^{-j2\pi f n\mathrm{T_s}}$$

حيث :

$$f_s = 1/T_s \ \ and\ \ x(t) \overset{f}{\leftrightarrow} X(f)$$

أو :

$$X_\delta(f) = f_s \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} \mathrm{x}(f-\mathrm{k}f_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_s[n]e^{-j2\pi f n/f_s}$$

إذا قمنا بعمل التغيير التالي : $f \rightarrow f_sF$ سنحصل على :

$$X_\delta(f_sF) = f_s \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} \mathrm{x}\big(f_s(\mathrm{F-k})\big) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_s[n]e^{-j2\pi nF}}_{=X_s(F)}$$

العلاقة الأخيرة هي التعريف التام لـ DTFT لـ $x_s[n]$، وهي $X_s(F)$. باختصار، إذا كانت $x_s[n]=x(nTs)$ و $x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_s[n]\delta(t-nTs)$ فإن :

$$X_s(F) = X_\delta(f_sF)$$ المعادلة رقم (١٠,٤)

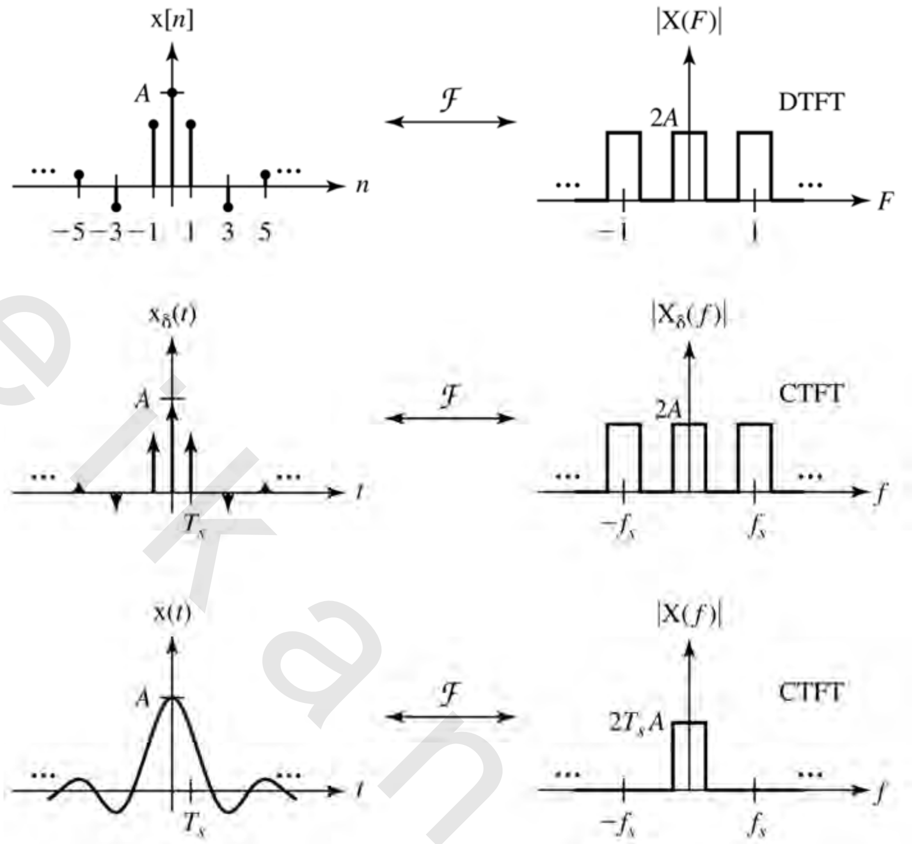
أو :

$$X_\delta(f) = X_s\left(\frac{f}{f_s}\right)$$ المعادلة رقم (١٠,٥)

وأيضاً :

$$X_s(F) = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\big(f_s(F-k)\big)$$ المعادلة رقم (١٠,٦)

انظر شكل رقم (١٠,٣٨).



الشكل رقم (١٠,٣٨) طيف فورير لإشارة أصلية، وإشارة معيننة صدمياً، وإشارة معيننة

الآن يمكننا كتابة DTFT للـ $x_s[n]$ والذي هو $X_s(F)$ بدلالة ال CTFT للـ x(t) والذي هو X(f). إنها ستكون كالتالي:

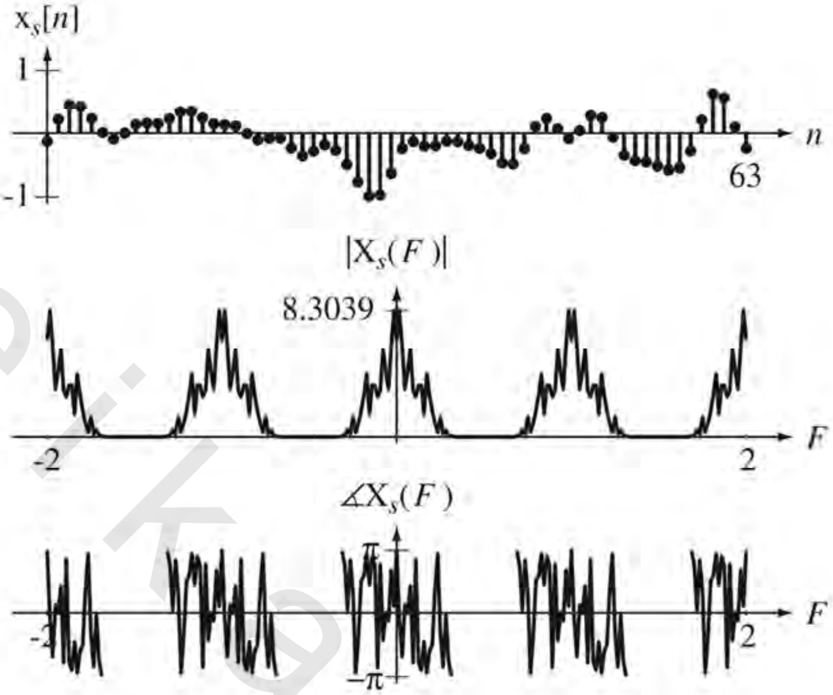
$$X_s(F) = f_s\, X(f_s F) * \delta_1(\mathrm{F}) = f_s \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} \mathrm{X}\big(f_s(\mathrm{F}-\mathrm{k})\big)$$

الصورة المحجمة ترددياً والمكررة دورياً للـ X(f) موضحة في شكل (١٠,٣٩).

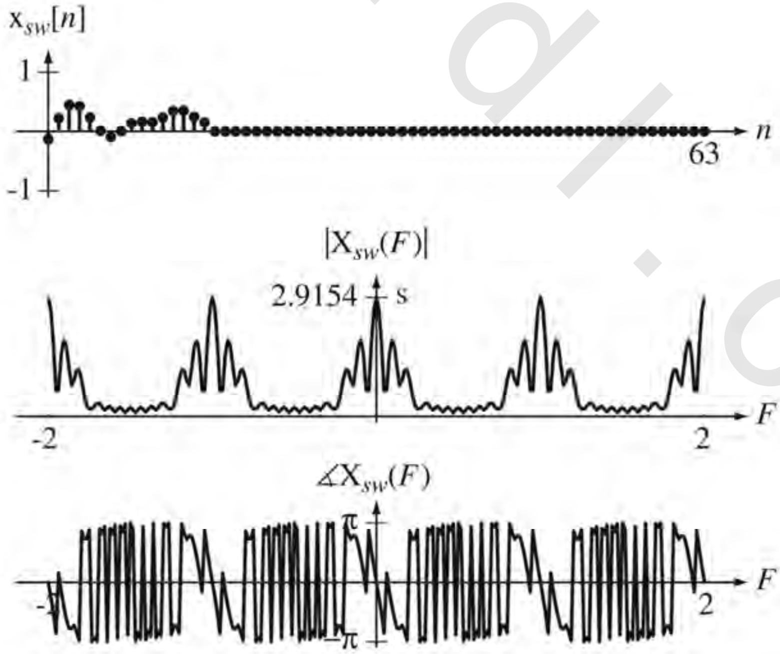
بعد ذلك يجب أن نقصر عدد العينات على هذا العدد الذي يحدث في كل زمن عيننة الزمن المتقطع N. افترض أن زمن أول عينة هو n=0. (إن هذا الفرض التلقائي في الـ DFT. يمكن استخدام أزمنة مرجعية أخرى ولكن تأثير هذا الزمن المرجعي الآخر يكون ببساطة في صورة إزاحة طورية تتغير خطياً مع التردد). يمكن تحقيق ذلك عن طريق ضرب $x_s[n]$ في دالة نافذة كالتالي:

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n < N \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

وكما هو موضح في شكل (١٠,٤٠).



شكل رقم (١٠,٣٩) إشارة أصلية، معيننة زمنياً لتكوين إشارة متقطعة زمنياً، وتحويل DTFT لهذه الإشارة المتقطعة زمنياً



شكل رقم (١٠,٤٠) إشارة أصلية، معيننة زمنياً وأخذت منها نافذة لتكوين إشارة متقطعة زمنياً، و DTFT لهذه الإشارة المتقطعة زمنياً

هذه الدالة للنافذة بها عدد N من القيم التي لا تساوي الصفر، الأولى منها تكون عند الزمن n=0. سنسمي الدالة المعينة والتي أخذ منها نافذة بالاسم $x_{sw}[n]$. وبالتالي فإن:

$$w_{SW}[n] = w[n]X_S[n] = \begin{cases} X_S[n], & 0 \le n < N \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

إن عملية قصور الإشارة على مدى معين N في الزمن المتقطع تسمى النوفذة، لأننا نعتبر فقط هذا الجزء من الإشارة المعينة الذي تتم رؤيته من خلال نافذة ذات طول محدد. دالة هذه النافذة ليس بالضرورة أن تكون مستطيلة. في العادة يتم استخدام أشكال أخرى للنافذة عملياً لتقليل تأثير يسمى الارتشاح، أو التسريب (سيتم وصفه حالاً) في النطاق الترددي. DTFT للإشارة $x_{sw}[n]$ هو الالتفاف الدوري لـ DTFT للإشارة $x_s[n]$ و DTFT لدالة النافذة w[n]، التي يمكن كتابتها على الصورة $X_{sw}(F)=W(F)*X_s(F)$. DTFT لدالة النافذة سيكون:

$$W(F) = e^{-j\pi F(N-1)} N\, drcL(F,N)$$

وبالتالي:

$$X_{SW}(F) = e^{-j\pi F(N-1)} N\, drcL(F,N)\ \Theta\ f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\big(f_s(F-k)\big)$$

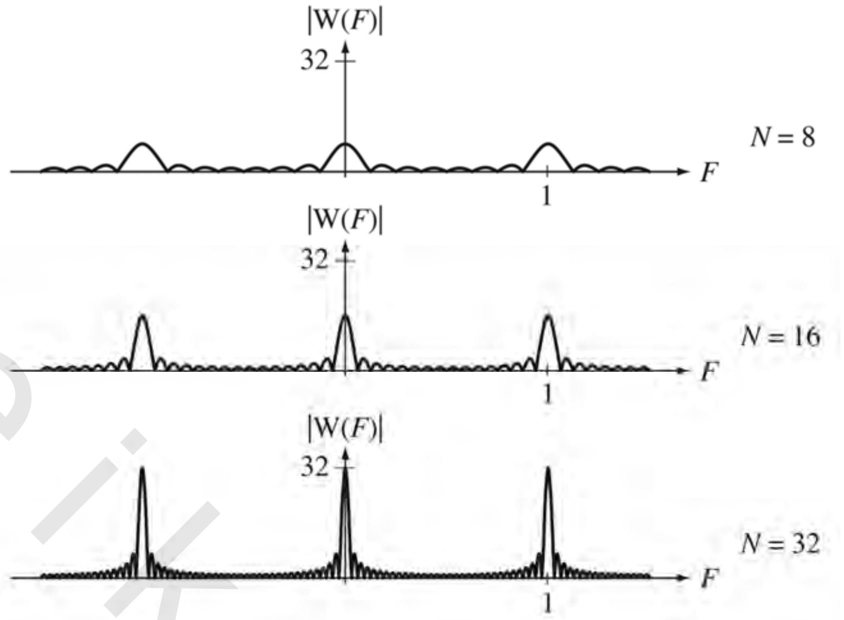
أو باستخدام حقيقة أن الالتفاف الدوري مع الإشارات الدورية يكافئ الالتفاف غير الدوري مع أي إشارة غير دورية التي يمكن تكرارها لتكون إشارة دورية.

$$X_{SW}(F) = f_s\left[e^{-j\pi F(N-1)} N\, drcL(F,N)\right] * X(f_s F)$$ المعادلة رقم (١٠,٧)

ولذلك فإن النوفذة في المجال الترددي في الأزمنة المتقطعة هو أن تحويل فورير للإشارة المعينة زمنياً قد تم التفافه دورياً مع:

$$W(F) = e^{-j\pi F(N-1)} N\, drcL(F,N)$$

كما في شكل (١٠.٤١).



شكل رقم (١٠،٤١) مقدار DTFT لدالة النافذة التالية لثلاث قيم مختلفة لعرض النافذة :

$$\mathbf{w[n]} = \begin{cases} \mathbf{1} & \mathbf{0 \le n < N} \\ \mathbf{0}, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

ستؤدي عملية الالتفاف إلى انتشار $X_s(f)$ في النطاق الترددي، مما يتسبب في انتشار $X_s(F)$ عند أي تردد إلى الترددات القريبة في $X_{sw}(F)$. وهو ما جاء منه تعبير الانتشار. إن استخدام دالة نافذة مختلفة يكون DTFT لها أكثر تحديداً في النطاق الترددي يقلل من هذا التسريب (ولكن لا يمكن التخلص منه). كما هو موضح في شكل (١٠،٤١) فإنه مع زيادة عدد العينات N، فإن عرض الفص الرئيسي لكل دورة أساسية لهذه الدالة يقل، مما يقلل من هذا التسريب. لذلك فإن طريقة أخرى لتقليل التسريب تكون عن طريق استخدام عدد أكبر من العينات.

عند هذه النقطة من العملية نحن لدينا تتابع من الأرقام من الإشارة المعينة والمنوفذة، ولكن DTFT للإشارة المنوفذة يكون دالة دورية في التردد F المستمر ولذلك لا يكون مناسباً للتخزين في ذاكرة الحاسب والتعامل معه منها. إن حقيقة أن الدالة في النطاق الزمني أصبحت محدودة زمنياً بسبب النوفذة، وحقيقة أن دالة النطاق الترددي تكون دورية تسمح لنا الآن أن نأخذ عينات في النطاق الترددي في الدورة الأساسية لكي نصف النطاق الترددي بالكامل. من الطبيعي عند هذه النقطة أن نتعجب كيف أنه علينا أن نأخذ عينات من الدالة في النطاق الترددي لكي نكون قادرين على إعادة تشكيلها من عيناتها. إن الإجابة عن ذلك تكون مطابقة تقريباً للإجابة بالنسبة للعينة في النطاق الزمني للإشارات فيما عدا أن الزمن والتردد تتبدل أدوارهما. العلاقات بين النطاقين الزمني والترددي تكون متطابقة تقريبا نتيجة التبادلية بين تحويلات فورير الأمامية والعكسية.

علاقات العيننة والتكرار الدوري

تحويل ال DFT العكسي لأي دالة دورية x[n] لها دورة أساسية N يتم تعريفها كما يلي :

$$X[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} X[k]e^{j2\pi kn/N}$$ المعادلة رقم (١٠،٨)

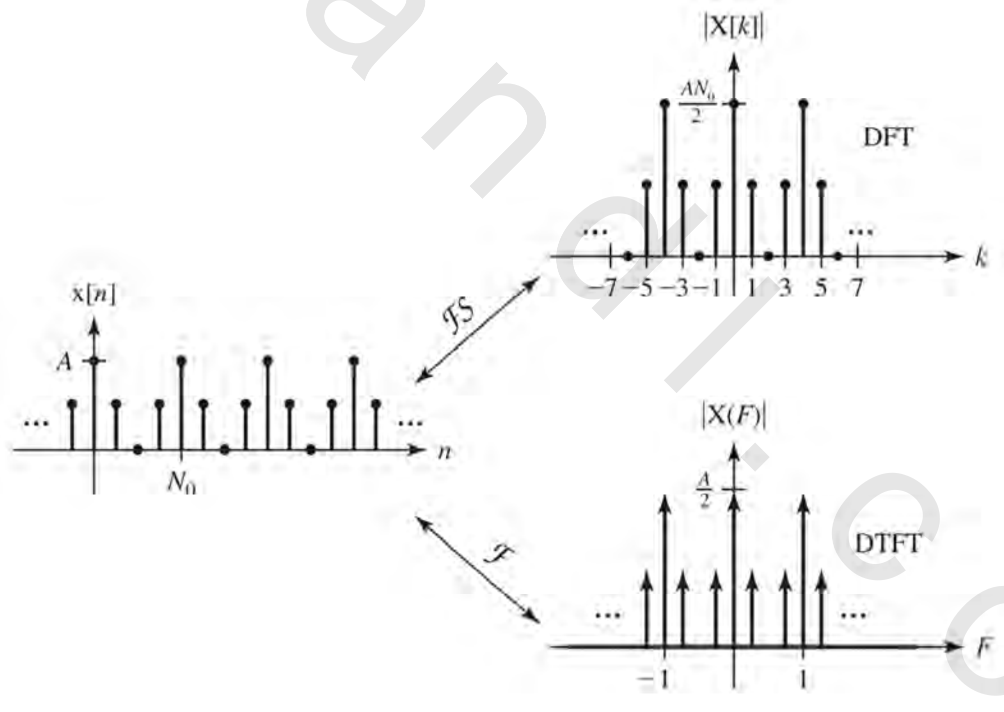
بأخذ DTFT للطرفين باستخدام زوج تحويل DTFT التالي : $e^{j2\pi f_0 n} \leftrightarrow \delta_1(F - F_0)$ يمكننا أن نوجد DTFT للإشارة x[n]، كالتالي :

$$X(F) = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} X[k]\delta_1(F - k/N)$$ المعادلة رقم (١٠،٩)

وبالتالي :

$$X(F) = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} X[k]\sum_{q=-\infty}^{\infty}\delta(F - k/N - q) = \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta(F - k/N)$$ المعادلة رقم (١٠،١٠)

وهذه يوضح أنه بالنسبة للدوال الدورية ، فإن DFT يكون ببساطة حالة خاصة محجمة من DTFT. إذا كانت أي دالة x[n] دورية ، فإن DTFT لها يتكون من صدمات فقط تحدث عند k/N بشدة مقدارها X[k]/N كما في شكل (١٠،٤٢).



شكل رقم (١٠،٤٢) الدالة التوافقية و DTFT للدالة x[n]=(A/2)[1+cos(2πn/4)].

باختصار ، وبالنسبة للدالة x[n] التي لها دورة أساسية مقدارها N ، فإن :

$$X(F) = \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta(F - k/N)$$ المعادلة رقم (١٠,١١)

لنفترض أن x[n] هي دالة غير دورية DTFT لها هو X(F). وافترض أن $x_p[n]$ هي امتداد دوري للدالة x[n] بدورة أساسية مقدارها N_p كالتالي وكما في شكل (١٠,٤٣) :

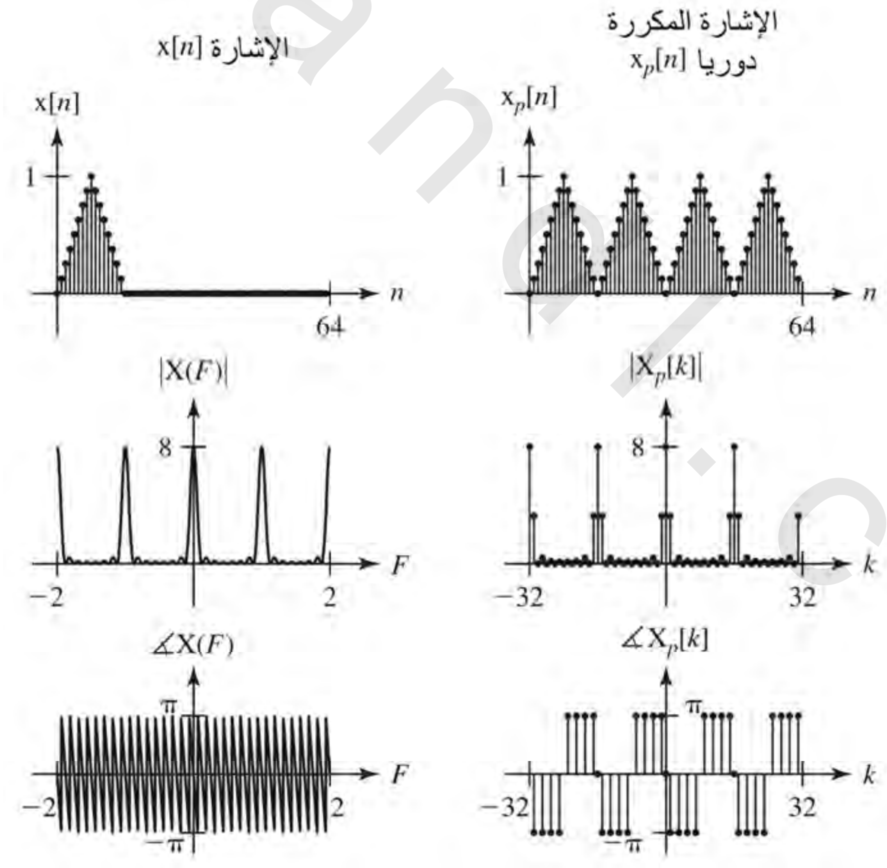
$$X_p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[n - mN_p] = X[n] * \delta_{N_p}[n]$$ المعادلة رقم (١٠,١٢)

باستخدام الثنائية بين الضرب والالتفاف للـ DTFT ، وبإيجاد DTFT للمعادلة (١٠,١٢) نحصل على :

$$X_p(F) = X(F)(1/N_p)\delta_{1/N_p}(F) = (1/N_p)\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k/N_p)\delta(F - k/N_p)$$ (١٠,١٣)

باستخدام (١٠,١١) و (١٠,١٣) :

$$X_p[k]=X(k/N_p)$$ المعادلة رقم (١٠,١٤)



شكل رقم (١٠,٤٣) إشارة وتحويل DTFT لها والتكرار الدوري للإشارة ودالة DFT التوافقية له

حيث $X_p[k]$ هي DFT لـ $x_p[n]$. إذا تم التكرار الدوري لأي إشارة $x[n]$ غير دورية، بدورة أساسية N_p لتشكيل دالة دورية $x_p[n]$ تكون قيم الدالة التوافقية لـ DFT لها هي $X_p[k]$ يمكن إيجادها من $X(F)$، التي تمثل DTFT لـ $x[n]$، محسوبة عند الترددات المتقطعة k/N_p. إن هذا يشكل تقابل بين العينة في النطاق الترددي والتكرار الدوري في النطاق الزمني.

إذا قمنا الآن بتكوين تكرار دوري للإشارة $x_{sw}[n]$ كما يلي:

$$X_{swp}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_{sw}[n-mN]$$

بدورة أساسية N، و DFT لها سيكون:

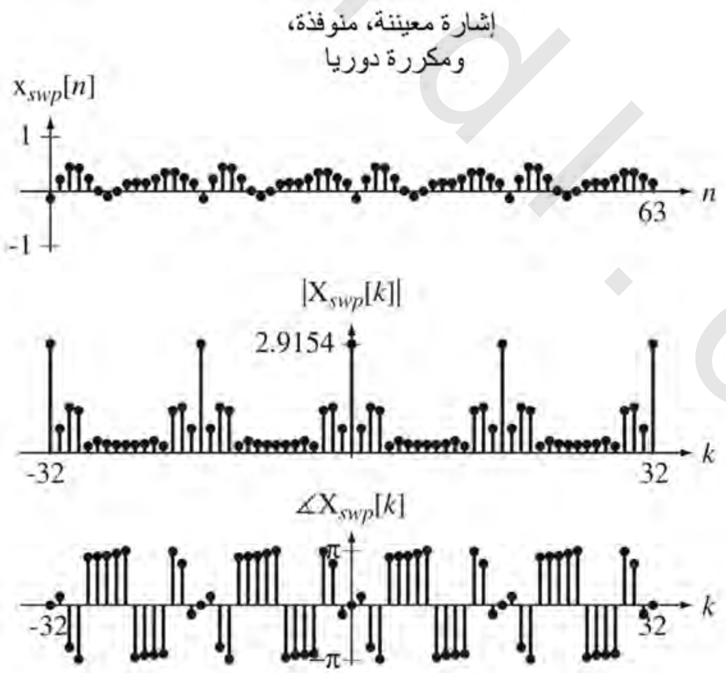
$$X_{swp}[k] = X_{sw}(k/N) \text{ حيث } k \text{ تمثل رقماً صحيحاً}$$

أو من المعادلة (١٠.٧)،

$$X_{swp}[k] = f_s\left[e^{-j\pi F(\mathrm{N}-1)}\mathrm{N}\ \mathrm{drcl}(\mathrm{F},\mathrm{N}) * \mathrm{X}(f_s\mathrm{F})\right]F \to k/N$$

إن تأثير العملية السابقة، وهي العينة في النطاق الترددي، تسمى أحياناً التجميع السياجي كما في شكل (١٠.٤٤).

حيث إن الطول غير الصفري للإشارة $x_{sw}[n]$ تساوي N تماماً، فإن $x_{swp}[n]$ تكون تكرار دوري للدالة $x_{sw}[n]$ بدورة أساسية تساوي طول هذه الدالة بحيث إن الصور العديدة للإشارة $x_{sw}[n]$ لن تتداخل ولكنها بدلا من ذلك ستتلامس. لذلك فإن $x_{sw}[n]$ يمكن استعادتها من $x_{swp}[n]$ عن طريق عزل دورة واحدة من $x_{swp}[n]$ في المدى الزمني المتقطع $0 \le n < N$.



شكل رقم (١٠,٤٤) الإشارة الأصلية، وعينة زمنية لها، ونوفذة، وتكرار دوري لها لتشكيل إشارة دورية متقطعة زمنياً ودورية و DFT لها

والنتيجة هي:

$$X_{swp}[k] = f_s\left[e^{-j\pi F(\mathrm{N}-1)}\mathrm{N}\ \mathrm{drcl}(\mathrm{F},\mathrm{N}) * \mathrm{X}(f_s\mathrm{F})\right]F \rightarrow k/N$$

التي تمثل DFT للامتداد الدوري للإشارة المتقطعة زمنياً المتكونة من أخذ عينات الإشارة الأصلية على فترة زمنية محددة.

باختصار، عند الانتقال من CTFT للإشارة المستمرة زمنياً إلى DFT للعينات المأخوذة من الإشارة المستمرة زمنياً على فترة زمنية محددة، فإننا نفعل ما يلي: في النطاق الزمني:

١- اقرأ عينات الإشارة المستمرة زمنياً.

٢- خذ نافذة من هذه العينات عن طريق ضربها في دالة نافذة.

٣- كرر دورياً العينات غير المساوية للصفر من الخطوة ٢

في النطاق الترددي:

١- أوجد DTFT للإشارة المعيننة، التي تعتبر صورة محجمة ومكررة دورياً من CTFT للإشارة الأصلية.

٢- نفذ الالتفاف الدوري لـ DTFT للإشارة المعيننة مع DTFT لدالة النافذة.

٣- خذ عينات الخطوة 2 في النطاق الترددي.

DFT و DFT العكسي، والتي هي أصلا عمليات رقمية، تكون تقابلاً تاماً بين مجموعة N من الأرقام الحقيقية ومجموعة N من الأرقام المركبة. إذا كانت مجموعة الأرقام الحقيقية تمثل مجموعة N من قيم الإشارة على مدار دورة واحدة من الإشارة x[n] المتقطعة زمنياً والدورية، فإن المجموعة N من الأرقام المركبة ستكون مجموعة من المقادير المركبة على مدار دورة واحدة لـ DFTوهو X[k] للإشارة المتقطعة زمنياً. إن هذه تمثل المقادير المركبة للجيوب المتقطعة زمنياً التي، عند إضافتها، ستعطي الإشارة المتقطعة زمنياً Nx[n].

إذا كانت المجموعة N من الأرقام الحقيقية تمثل مجموعة من العينات من دورة واحدة من الإشارة الدورية المستمرة زمنياً والمحددة المجال المعيننة فوق معدل نيكويست وعند معدل مضاعف صحيح من ترددها الأساسي، الأرقام الراجعة من DFT يمكن تحجيمها وتفسيرها كمقادير مركبة من دوال جيبية مركبة مستمرة زمنياً والتي عند إضافتها ستعيد توليد الإشارة الدورية المستمرة زمنياً.

ولذلك عند استخدام ال DFT في تحليل الإشارات الدورية المتقطعة زمنياً أو الإشارات الدورية المستمرة زمنياً والمحدودة المجال فإننا نستطيع الحصول على النتائج التي يمكن استخدامها في الحساب الدقيق لكل من DTFS، أو DTFT، أو CTFS، أو CTFT للإشارة الدورية. عند استخدام DFT في تحليل الإشارات غير الدورية، فإننا ضمنياً نقوم بعمل تقريب؛ لأن DFT و DFT العكسي يكونان صحيحين تماماً للإشارات الدورية فقط.

إذا كانت مجموعة الأرقام الحقيقية N تمثل كل، أو عملياً كل القيم المختلفة عن الصفر من إشارة طاقة غير دورية متقطعة زمنياً، فإنه يمكننا إيجاد تقريب للـ DTFT لهذه الإشارة عند مجموعة من الترددات المتقطعة باستخدام النتائج المسترجعة من DFT. إذا كانت مجموعة الأرقام الحقيقية N تمثل عينات من كل، أو عملياً كل المدى غير المساوي للصفر لدالة غير دورية مستمرة زمنياً، فإنه يمكننا إيجاد تقريب للـ CTFT لهذه الإشارة المستمرة زمنياً عند مجموعة من الترددات المتقطعة باستخدام النتائج المسترجعة من DFT.

حساب الدالة التوافقية لتتابع CTFS باستخدام DFT

يمكن توضيح أنه إذا كانت الإشارة x(t) دورية بتردد دوري f_0، وإذا تم أخذ عيناتها بمعدل f_s يكون أعلى من معدل نيكويست، وإذا كانت نسبة معدل العينات إلى التردد الأساسي f_s/f_0 رقماً صحيحاً، فإن الـ DFT لهذه العينات وهو X[k] يكون له علاقة مع الدالة التوافقية للـ CTFS للإشارة $c_x[k]$ بالعلاقة التالية:

$$X[k] = N\ c_x[k] * \delta_N[k]$$

في هذه الحالة الخاصة ستكون العلاقة صحيحة وتامة.

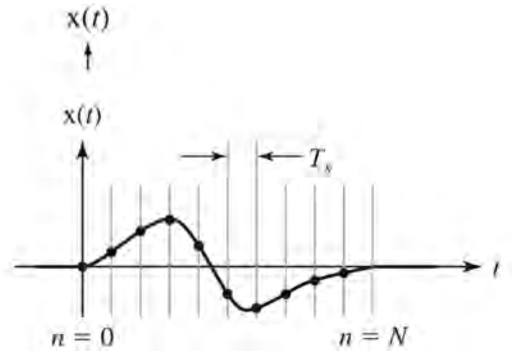
تقريب تحويل CTFT مع DFT

CTFT الأمامي

في الحالات التي تكون فيها الإشارة المطلوب تحويلها لا يمكن وصفها بدالة حسابية، أو أن تكامل تحويل فورير لا يمكن إجراؤه تحليلياً، فإنه أحياناً يمكننا تقريب CTFT عددياً باستخدام ا DFT. إذا كانت الإشارة المطلوب تحويلها إشارة طاقة سببية، فإنه يمكننا توضيح أن CTFT يمكن تقريبه عند ترددات متقطعة kf_s/N بالعلاقة:

$$X(k\,f_s/N) \cong T_S \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)e^{-j2\pi kn/N} \cong T_S \times DFT\big(x(nT_s)\big), |k| \ll N$$ المعادلة رقم (١٠,١٥)

حيث $Ts=1/f_s$ و N تم اختيارها بحيث إن المدى الزمني 0 حتى NTs يغطي كل طاقة الإشارة x كما في شكل (١٠,٤٥). لذلك إذا كانت الإشارة المطلوب تحويلها إشارة طاقة سببية وقمنا بأخذ عيناتها على مدى زمني يحتوي عملياً كل طاقة الإشارة، فإن التقريب في المعادلة (١٠,١٥) يصبح صحيحاً عندما |k|<<N.



شكل رقم (١٠,٤٥) إشارة طاقة سببية معيننة بمعدل Ts ثانية بين العينات في الفترة الزمنية NTs

CTFT العكسي

CTFT العكسي معرف كما يلي:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft}\, df$$

إذا كنا نعرف $X(kf_s/N)$ في المدى $-N<<-k_{max} \le k \le k_{max}<<N$ وإذا كان المقدار $X(kf_s/N)$ مهملاً خارج هذا المدى، فإنه من الممكن توضيح أن $n<<N$،

$$X(nT_S) \cong f_s \times DFT^{-1}\big(X_{ext}(kf_s/N)\big)$$

حيث:

$$X_{ext}(kf_s/N) = \begin{cases} X(kf_s/N), & -k_{max} \le k \le k_{max} \\ 0, & k_{max} < |k| \le N/2 \end{cases}$$

$$X_{ext}(kf_s/N) = X_{ext}((k+mN)f_s/N)$$

تقريب DTFT مع DFT

التقريب العددي للـ DTFT باستخدام DFT تم استنتاجه في الفصل ٧. DTFT للـ x[n] المحسوب عند الترددات $F=k/N$ أو $\Omega=2\pi k/N$ هو:

$$X(k/N) \cong DFT(X[n]) \quad \text{المعادلة رقم (١٠,١٦)}$$

تقريب الالتفاف المستمر زمنياً مع DFT

الالتفاف غير الدوري

واحد من الاستخدامات الشائعة الأخرى للـ DFT هي تقريب الالتفاف لاثنين من الدوال المستمرة زمنياً باستخدام الـ DFT باستخدام عينات منهما. افترض أننا نريد إجراء الالتفاف على اثنين من الدوال غير الدورية x(t) و h(t). من الممكن أن نبين أنه إذا كانت $|n|<<N$،

$$y(nT_s) \cong T_s \times DFT^{-1}\Big(DFT\big(X(nT_s)\big) \times DFT\big(h(nT_s)\big)\Big) \quad \text{المعادلة رقم (١٠,١٧)}$$

الالتفاف الدوري

افترض أن كلاً من x(t) و h(t) كانتا إشارتين دوريتين مستمرتان زمنياً بدورة عامة T وتم أخذ عيناتهما على هذا الزمن بالضبط بمعدل f_s الذي يكون فوق معدل نيكويست، مع أخذ عدد N من العينات من كل إشارة. افترض y(t) هي نتيجة الالتفاف الدوري بين x(t) و h(t)، بالتالي يمكننا أن نبين أن:

$$y(nT_s) \cong T_s \times DFT^{-1}\Big(DFT\big(X(nT_s)\big) \times DFT\big(h(nT_s)\big)\Big) \quad \text{المعادلة رقم (١٠,١٨)}$$

الالتفاف المتقطع زمنياً مع DFT

الالتفاف غير الدوري

إذا كانت الإشارتان[x[n و h[n] معظم طاقتهما تقع في المدى 0≤n<N ، فإنه يمكن إثبات أنه إذا كانت |n|<<N فإن :

$$y[n] \cong DFT^{-1}\big(DFT(X[n]) \times DFT(h[n])\big)$$ المعادلة رقم (١٠,١٩)

الالتفاف الدوري

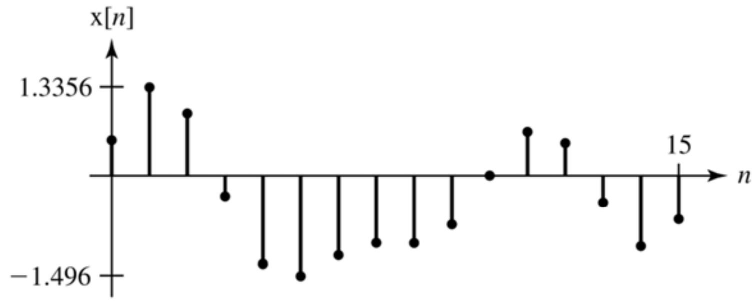
افترض أن كلاً من x[n] و h[n] إشارتين دوريتين بدورة عامة N. افترض أن y[n] هي نتيجة الالتفاف الدوري بين كل من x[n] و h[n]، وبالتالي يمكننا إثبات أن :

$$y[n] \cong DFT^{-1}\big(DFT(X[n]) \times DFT(h[n])\big)$$ المعادلة رقم (١٠,٢٠)

ملخص لمعالجة الإشارات باستخدام الـ DFT

CTFS	$X([k]) \cong e^{-j\pi k/N}\frac{\sin(k/N)}{\mathrm{N}}X[k],\ \|k\| \ll N$
CTFS	$X([k]) = Nc_x[k] * \delta_N[k]\ if\ f_s > f_{\mathrm{Nyq}}$ and $f_s/f_0\ is\ an\ integer$
CTFT	$X(kf_s/N) \cong T_S \times DFT\big(X(nT_S)\big)$
DTFT	$X(k/N) \cong DFT(X[n])$
الالتفاف غير الدوري المستمر زمنياً	$[X(t) * h(t)]_{t\to nT_s} \cong T_s \times DFT^{-1}\Big(DFT\big(X(nT_s)\big) \times DFT\big(h(nT_s)\big)\Big)$
الالتفاف غير الدوري المتقطع زمنياً	$X[n] * h[n] \cong DFT^{-1}\Big(DFT\big(X(n)\big) \times DFT\big(h(n)\big)\Big)$
الالتفاف الدوري المستمر زمنياً	$[X(t)\Theta h(t)]_{t\to nT_s} \cong T_s \times DFT^{-1}\Big(DFT\big(X(nT_s)\big) \times DFT\big(h(nT_s)\big)\Big)$
الالتفاف الدوري المتقطع زمنياً	$X[t]\Theta h[t] \cong T_s \times DFT^{-1}\big(DFT(X[n]) \times DFT(h[n])\big)$

من الاستخدامات المثالية لـ DFT هي تقدير CTFT لإشارة مستمرة زمنياً باستخدام مجموعة محددة فقط من العينات المأخوذة من هذه الإشارة. افترض أننا قمنا بأخذ عينات من إشارة مستمرة زمنياً x(t) 16 مرة بالمعدل 1kHz لاكتساب العينات x[n] الموضحة في شكل (١٠,٤٦).



شكل رقم (١٠،٤٦) 16 عينة من إشارة مستمرة زمنياً.

ماذا نعرف حتى الآن ؟ نحن نعرف قيم x(t) عند 16 نقطة زمنية، على مدار زمي مقداره 16 ميللي ثانية. نحن لا نعرف ما هي قيم الإشارة السابقة أو اللاحقة لـ x(t). نحن أيضاً لا نعرف ما هي القيم التي تحدث بين العينات التي اكتسبناها. ولذلك لكي نعطي أي ملخص معقول عن x(t) وCTFT الخاص بها سنحتاج إلى معلومات إضافية.

افترض أننا نعلم أن x(t) محدودة المجال حتى أقل من 500Hz. إذا كانت هذه الإشارة محدودة المجال، فإنها لا يمكن أن تكون محدودة الزمن، وبالتالي فقد عرفنا أنه خارج الزمن الذي تم فيه أخذ عينات الإشارة، فإن قيم هذه الإشارة ليست كلها أصفارا. في الحقيقة فإنها لا يمكن أن تكون قيمة ثابتة، لأنها إذا كانت كذلك، فإنه يمكننا طرح هذه القيمة الثابتة من الإشارة، وبالتالي سنحصل على إشارة محدودة زمنياً، والتي لا يمكن أن تكون محدودة المجال. قيم الإشارة خارج النطاق 16 ميللي ثانية يمكنها أن تتغير بطرق عدة، أو يمكنها أن تتغير حسب نموذج معين. إذا كانت تتكرر في نموذج دوري، مع هذه 16 قيمة كدورة أساسية، بالتالي فإن x(t) تكون إشارة محدودة المجال ودورية وفريدة. هذه الإشارة المحدودة المجال التي لها هذه الدورة الأساسية هي فقط التي تعطي هذه العينات. هذه العينات والـ DFT لها تعطي هذا الزوج لـ DFT :

$$X[n] \overset{DFT}{\underset{16}{\longleftrightarrow}} X[k]$$

الدالة التوافقية لـ CTFS وهي $c_x[k]$ يمكن إيجادها من DFT من خلال المعادلة التالية :

$$X[k] = Nc_X[k] * \delta_N[k]$$ إذا كانت $f_s > f_{Nyq}$ و f_s/f_0 رقماً صحيحاً

وبالتالي فإن x(t) يمكن استعادتها بالكامل. أيضاً، فإن CTFT يكون هو مجموعة من الصدمات المتباعدة بمقدار تردد الإشارة الأساسي وشدتها هي نفسها مثل قيم الدالة التوافقية لـ CTFS.

الآن دعنا نضع فرضاً مختلفاً عمَّا يحدث خارج حدود الـ 16 ميلليثانية من مجموعة العينات الزمنية. افترض أننا نعلم أن x(t) تساوي صفراً خارج حدود 16 ميللي ثانية التي أخذنا خلالها العينات. بالتالي فإن الإشارة تكون محدودة زمنياً ولا يمكن أن تكون محدودة المجال وبالتالي فإننا لن نستطيع تحقيق نظرية العيننة. ولكن إذا كانت الإشارة ناعمة بما فيه الكفاية وقمنا بأخذ العينات بسرعة كافية، فإنه من الممكن أن تكون كمية طاقة الإشارة في CTFT فوق

معدل نيكويست مهملة، ويمكننا أن نحسب تقريبات جيدة لـ CTFT للإشارة x(t) عند مجموعة معينة من الترددات باستخدام:

$$X(kf_s/N) \cong T_S \times DFT\big(X(nT_S)\big)$$

(١٠,٣) أخذ العينات (العيننة) المتقطعة زمنياً

أخذ العينات (العيننة) بالصدمة الدورية

في الأجزاء السابقة كانت كل الإشارات التي يتم أخذ عيناتها إشارات مستمرة زمنياً. الإشارات المتقطعة زمنياً يمكن عيننتها أيضاً. تماماً مثلما يحدث في الإشارات المستمرة زمنياً، فإن الاهتمام الأساسي في عيننة الإشارات المتقطعة زمنياً يكون هو إذا كانت المعلومات في الإشارة سيتم الحفاظ عليها عن طريق عملية العيننة أم لا. هناك عمليتان متكاملتان تستخدمان في معالجة الإشارات المتقطعة زمنياً لتغير معدل العيننة للإشارة، وهما التقسيم و الاستيفاء. التقسيم هو عملية لتقليل عدد العينات، والاستيفاء هو عملية زيادة عدد العينات، وسنفترض التقسيم أولا.

عندما نقوم بعمل العيننة الصدمية لإشارة مستمرة زمنياً فإننا نضرب هذه الإشارة في صدمة دورية مستمرة زمنياً. بالتماثل مع ذلك، فإنه يمكننا عيننة إشارة متقطعة زمنياً عن طريق ضربها في صدمة دورية متقطعة زمنياً. إفترض أن الإشارة المتقطعة زمنياً المطلوب عيننتها هي x[n]. وبالتالي فإن الإشارة المعيننة ستكون كالتالي:

$$X_s[n] = X[n]\delta_{N_s}[n]$$

حيث Nsهي الزمن المتقطع بين العينات كما في شكل (١٠,٤٧).

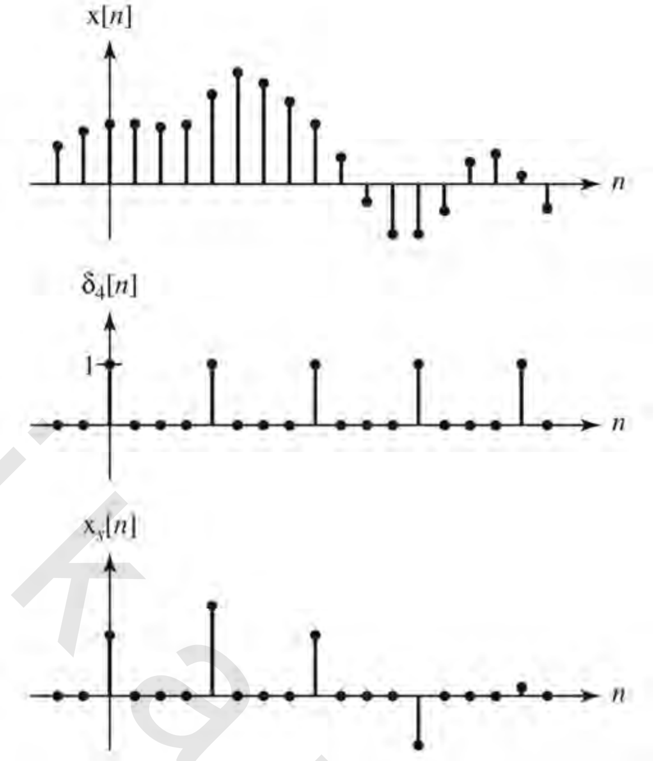
DTFT للإشارة المعيننة ستكون كالتالي وكما في شكل (١٠,٤٨):

$$X_s(F) = X(F)\ \Theta\ F_S\delta_{F_s}(F),\ F_s = 1/N_s$$

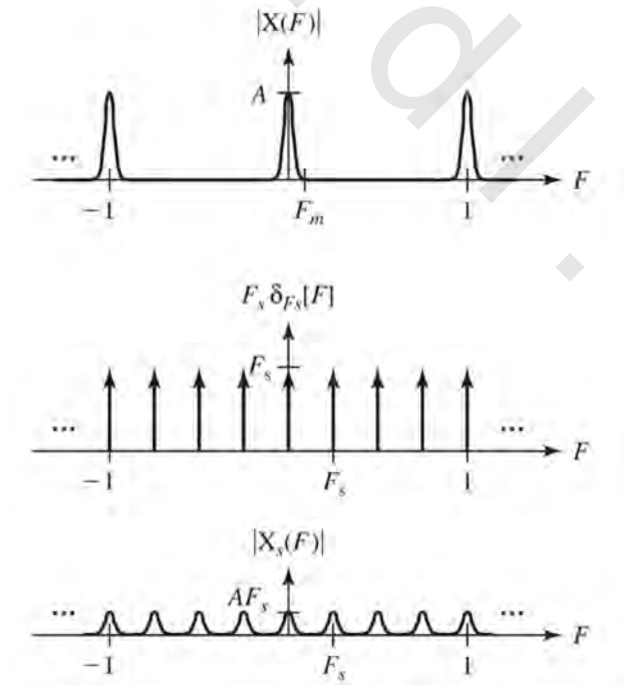
التشابه بين العيننة المتقطعة زمنياً والعيننة المستمرة زمنياً واضحة. في كل من الحالتين، إذا كان النسخ المستعار لن يتداخل، فإن الإشارة الأصلية يمكن استرجاعها من العينات وهناك معدل حرج لهذه العينات حتى يمكن استرجاع هذه الإشارات. معدل العيننة يجب يحقق العلاقة $F_s>2F_m$ حيث F_m هي التردد الدوري المتقطع زمنياً الذي فوقه سيكون DTFT للإشارة الأصلية المتقطعة زمنياً يساوي صفر (في الدورة الأساسية الرئيسية، $|F|<1/2$). بمعنى أنه عندما $F_m<|F|<1-F_m$ سيكون DTFT للإشارة الأصلية يساوي صفر. الإشارة المتقطعة زمنياً التي تحقق هذه المطالب تكون محدودة المجال بالمعنى الزمني المتقطع.

تماماً مثلما هو الحال مع العيننة المستمرة زمنياً، إذا تمت العيننة المثالية لأي إشارة، فإنه يمكننا استرجاعها من هذه العينات عن طريق الاستيفاء. عملية استرجاع الإشارة الأصلية يتم وصفها في النطاق الزمني الترددي المتقطع كعملية ترشيح منفذة للترددات المنخفضة:

$$X(F) = X_s(F)\ [\ (1/F_s)\mathrm{rect}(\mathrm{F}/2F_c) * \delta_1(\mathrm{F})]$$



شكل رقم (١٠,٤٧) مثال على العينة المتقطعة زمنياً.



شكل رقم (١٠,٤٨) DTFT لإشارة متقطعة زمنياً ونسخة معينة منها

حيث F_c هي تردد قطع الزمن المتقطع للمرشح المثالي المتقطع زمنياً المنفذ للترددات المنخفضة. العملية المكافئة لذلك في نطاق الزمن المتقطع هي الالتفاف في الزمن المتقطع المعرفة كالتالي :

$$X_s[n] = X_s[n] * (2\,F_c/F_s)sinc(2F_c n)$$

في التطبيقات العملية لعيننة الإشارات المتقطعة زمنياً ، فإنه ليس هناك معنى لاستعادة كل القيم الصفرية بين نقاط العيننة ، لأننا نعرف مسبقاً أنها أصفار. لذلك فمن الشائع توليد إشارة جديدة $x_d[n]$ ، التي بها فقط قيم الإشارة المتقطعة زمنياً $x_s[n]$ عند مضاعفات صحيحة من فترة العيننة N_s. عملية تكوين هذه الإشارة الجديدة تسمى التقسيم أو الاستنفاد. لقد تم شرح عملية التقسيم في الفصل ٣. العلاقة بين هذه الإشارات ستكون كالتالي :

$$X_d[n] = X_s[N_s n] = X[N_s n]$$

هذه العملية هي عملية تحجيم زمني متقطعة زمنياً التي عندما تكون $N_s>1$ ، تسبب انضغاطاً زمنياً متقطع زمنياً والتأثير المقابل لذلك في النطاق الزمني الترددي المتقطع سيكون تمدداً ترددياً متقطع زمنياً. DTFT للإشارة $x_d[n]$ سيكون :

$$X_d(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_d[n]e^{-j2\pi Fn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_s[N_S n]e^{-j2\pi Fn}$$

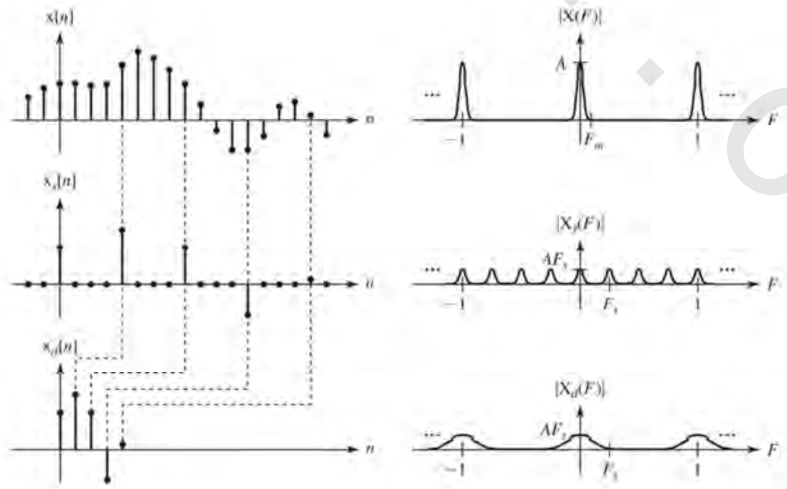
يمكننا إجراء تعديل في المتغيرات كالتالي $m=N_s n$ وبالتالي :

$$X_d(F) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ m \text{ رقم صحيح من } N_s}}^{\infty} X_s[m]e^{-j2\pi Fm/N_s}$$

الآن باعتبار مميزات حقيقة أن كل قيم $x_s[n]$تكون بين القيم المسموحة وهي ، أن m تساوي مضاعفاً صحيحاً من N_s ، تكون صفراً ، فإنه يمكننا تضمين هذه الأصفار في المجموع لتعطي مايلي :

$$X_d(F) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_s[m]e^{-j2\pi(F/N_s)m} = X_s(F/N_s)$$

وبالتالي فإن DTFT للإشارة المقسمة ، أو المهملة يكون نسخة محجمة من DTFT المتقطع زمنياً وترددياً من الإشارةالمعيننة كما في شكل (١٠،٤٩).



شكل رقم (١٠،٤٩) مقارنة بين تأثيرات النطاق المتقطع زمنياً والنطاق المتقطع زمنياً وترددياً على العيننة والتقسيم

لاحظ بحرص أن DTFT للإشارة المقسمة ليس نسخة محجمة متقطعة زمنياً وتردديا ً من DTFT للإشارة الأصلية ، ولكنه بدلاً من ذلك نسخة محجمة متقطعة زمنياً وتردديا ً من DTFT لعينات من الإشارة الأصلية المتقطعة زمنياً.

إن تعبير العينة المخفضة downsampling يستخدم أحياناً بدلاً من تعبير التقسيم. هذا التعبير يأتي من فكرة أن الإشارة المتقطعة زمنياً قد نتجت عن طريق أخذ عينات من إشارة مستمرة زمنياً. إذا كانت الإشارة المستمرة زمنياً زائدة العينة بمعامل معين بالتالي ، فإن الإشارة المتقطعة زمنياً يمكن تقسيمها ، أو تخفيض عيناتها بالمعامل نفسه بدون فقد في المعلومات من الإشارة الأصلية المستمرة زمنياً ، وبالتالي يتم إنقاص معدل العينة الفعلي أو تخفيضه.

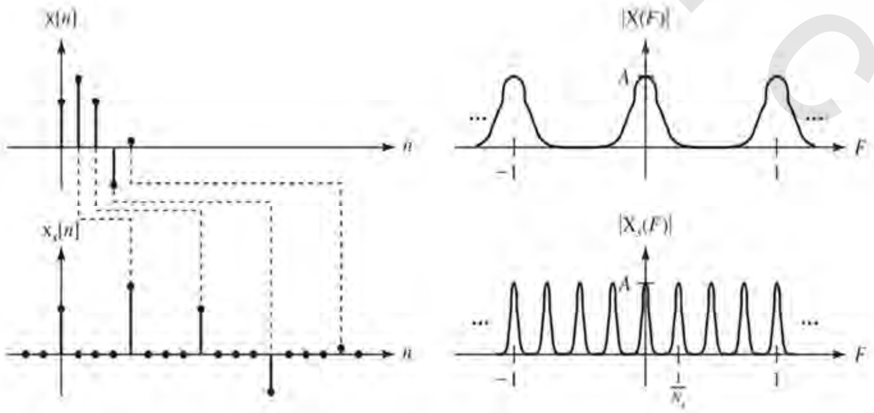
الاستيفاء

العكس من عملية التقسيم أو تخفيض العينة هوالاستيفاء أو رفع العينة ، والعملية ببساطة تكون العملية العكسية من عملية التقسيم. أولاً يتم إدخال أصفار بين العينات ، بعد ذلك يتم ترشيح هذه الإشارة الناتجة عن طريق مرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة متقطع زمنياً. افترض أن الإشارة الأصلية المتقطعة زمنياً هي x[n] وافترض أن الإشارة الناتجة بعد زيادة N_s-1 من الأصفار بين العينات ستكون $x_s[n]$. وبالتالي يمكن كتابة ما يلي :

$$x_s[n] = \begin{cases} X[n/N_s], & n/N_s \text{ رقم صحيح} \\ 0, & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

هذا التعبير المتقطع زمنياً لـ x[n] لتشكيل أو تكوين $x_s[n]$ هو تماماً العكس من عملية الضغط المتقطع زمنياً للإشارة $x_s[n]$ لتكوين الإشارة $x_d[n]$ أثناء عملية التقسيم ، ولذلك يجب أن نتوقع أن التأثير في النطاق المتقطع زمنياً وتردديا سيكون المعكوس أيضا. التوسيع المتقطع زمنياً بمعامل مقداره N_s يولد تضاغط متقطع زمنياً وتردديا ً بالمعامل نفسه كما يلي زكما في شكل رقم (١٠.٥٠) :

$$X_s(F)=X(N_sF)$$



شكل رقم (١٠,٥٠) التأثيرات، في كل من النطاق المتقطع زمنياً والنطاق المتقطع زمنياً وتردديا ً، لإدخال عدد Ns-1 من الأصفار بين العينات

يمكن ترشيح الإشارة $x_s[n]$ بمرشح منفذ للترددات المنخفضة للاستيفاء بين القيم غير المساوية للصفر. إذا استخدمنا مرشحاً مثالياً منفذاً للترددات المنخفضة بمعامل تكبير يساوي واحداً بدالة العبور التالية:

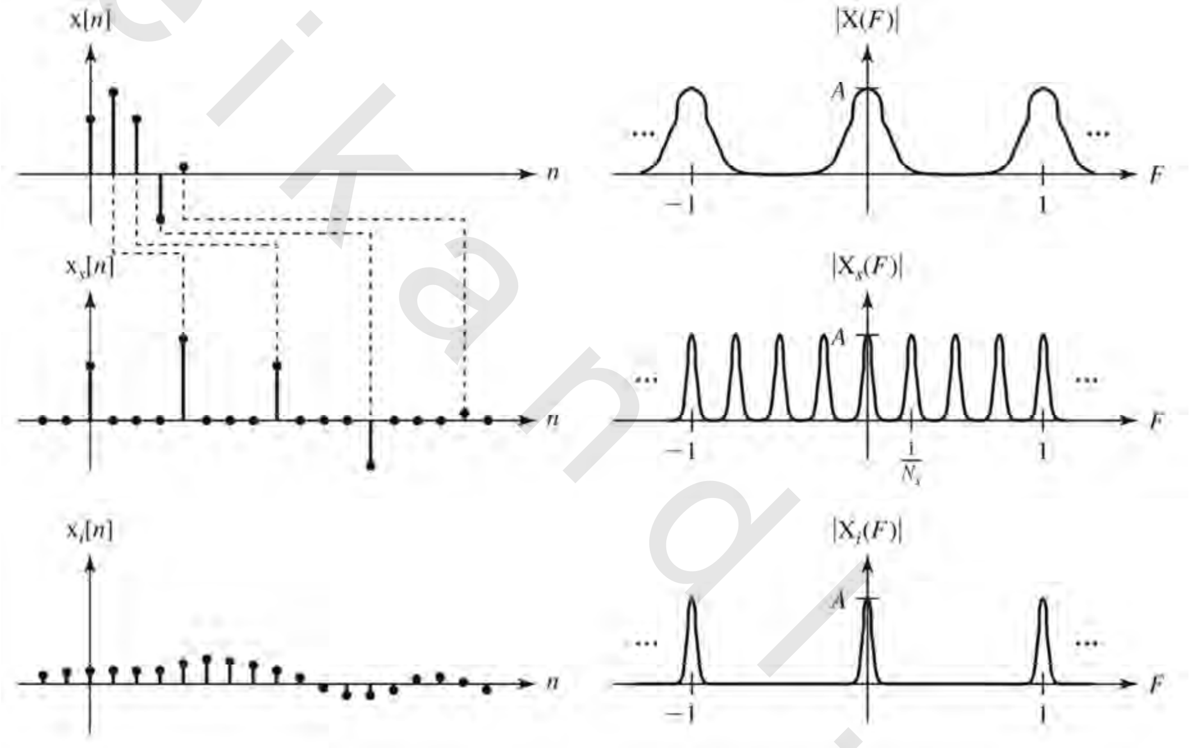
$$H(F) = rect(N_S F) * \delta_1(F),$$

فإننا سنحصل على إشارة مستوفاة كالتالي:

$$X_i(F) = X_S(F)[rect(N_S F) * \delta_1(F)]$$

والمكافئ لذلك في النطاق المتقطع زمنياً هو كالتالي وكما هو موضح في شكل (١٠,٥١):

$$X_i[n] = X_S[n] * (1/N_1) sinc(n/N_s)$$



شكل رقم (١٠,٥١) مقارنة بين تأثيرات النطاق المتقطع زمنياً والنطاق المتقطع زمنياً وترددياً لعملية التوسع والاستيفاء

لاحظ أن الاستيفاء باستخدام المرشح المثالي المنفذ للترددات المنخفضة، الذي معامل تكبيره واحد قد أدخل معامل تكبير مقداره $1/N_s$، مما يقلل من مقدار الإشارة المستوفاة $x_i[n]$ بالنسبة للإشارة الأصلية $x[n]$. يمكن تعويض هذا التأثير باستخدام مرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة معامل تكبيره يساوي N_s بدلاً من معامل تكبير الوحدة كما يلي:

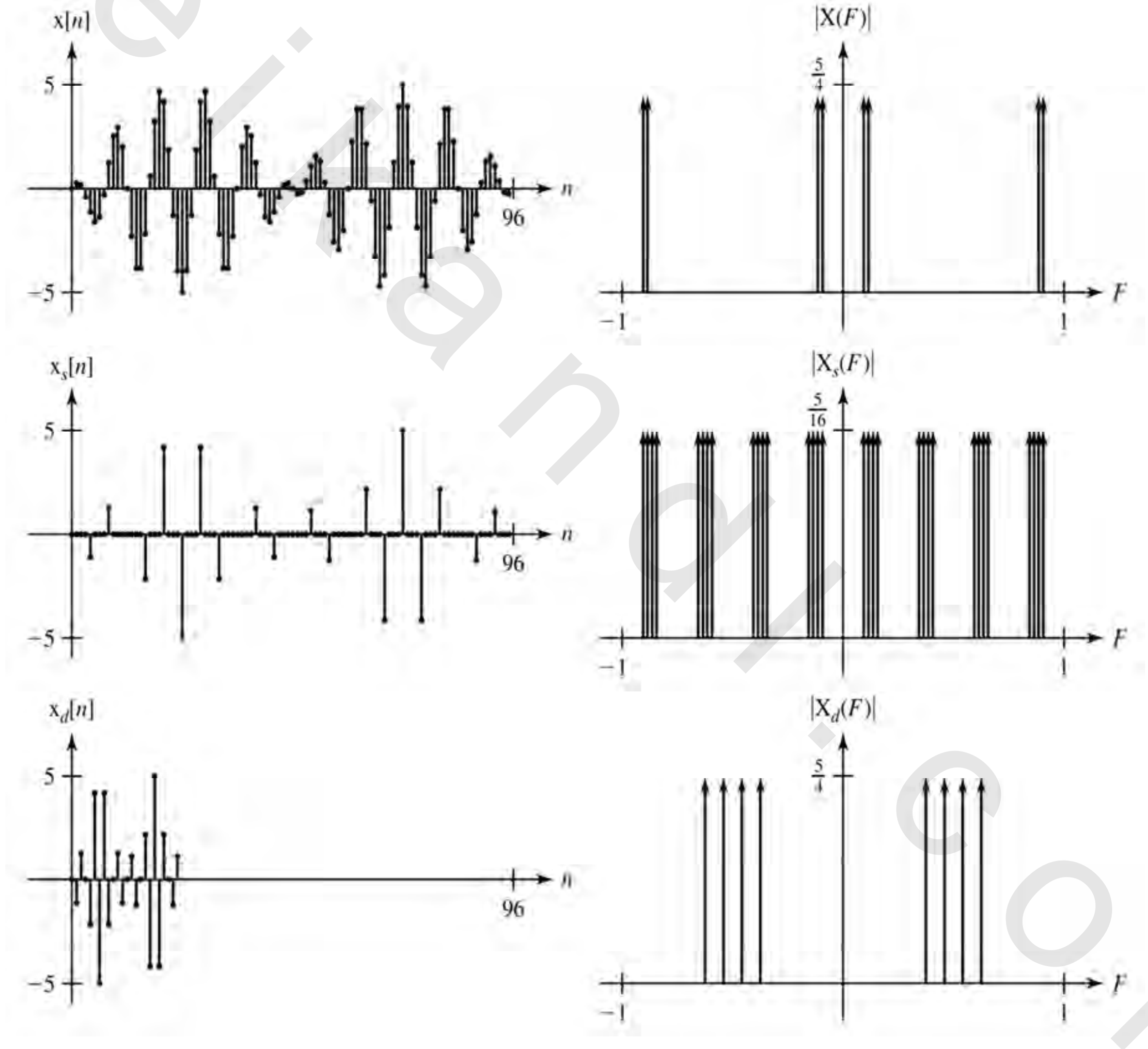
$$H(F) = N_s\, rect(N_S F) * \delta_1(F)$$

مثال ١٠,٦

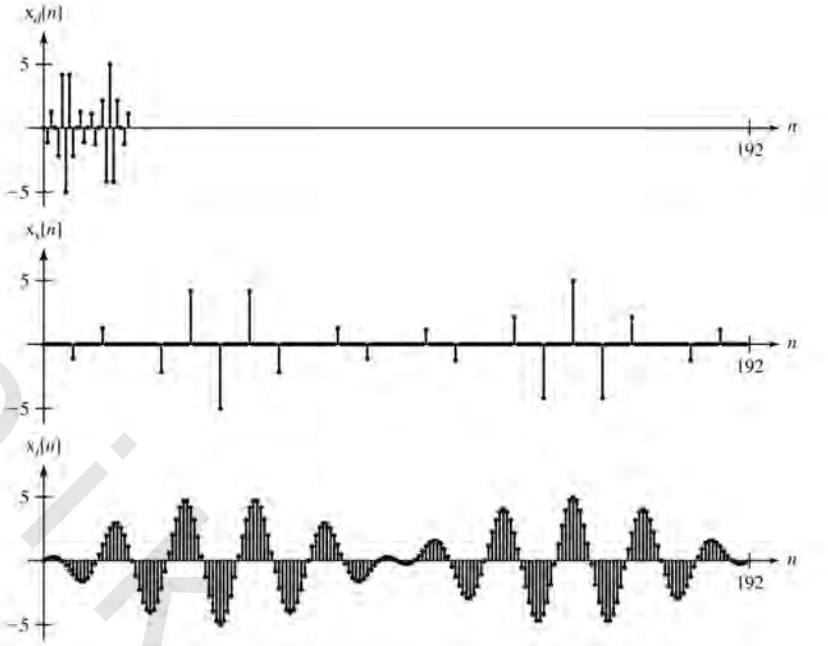
مطلوب أخذ عينات الإشارة التالية :

$$X(t) = 5\,sin(2000\pi t)cos(20{,}00\pi t)$$

بمعدل 80kHz على مدار دورة واحدة لتشكيل الإشارة المتقطعة زمنياً x[n]. خذ كل رابع عينة من x[n] لتكوين $x_s[n]$، وقسم أو خفض عيننة $x_s[n]$ لتكون الإشارة $x_d[n]$. بعد ذلك ارفع عيننة $x_d[n]$ بمعامل مقداره ثمانية لتكوين الإشارة $x_i[n]$ كما هو موضح في شكل (١٠,٥٢) وشكل (١٠,٥٣).



شكل رقم (١٠,٥٢) الإشارات المتقطعة زمنياً الأصلية وعيناتها والمقسمة و DTFT لها



شكل رقم (١٠,٥٣) الإشارات المتقطعة زمنياً المرشحة بمرشح منفذ للترددات المنخفضة والمتقطع زمنياً والإشارة الأصلية وغير المعيننة

(١٠,٤) ملخص للنقاط المهمة

١- الإشارة المعيننة أو المعيننة صدمياً لها طيف فورير يكون نسخ متكررة دورياً لطيف الإشارة الأصلية التي عيننتها. كل تكرار يسمى نسخة مستعارة أو نسخة مزيفة.

٢- إذا كانت النسخ المستعارة في طيف الإشارة المعيننة لا تتداخل، فإن الإشارة الأصلية يمكن استرجاعها من هذه العينات.

٣- إذا تمت عيننة الإشارة بمعدل أكبر من ضعف أكبر تردد في هذه الإشارة، فإن النسخ المستعارة لن تتداخل.

٤- لا يمكن لإشارة أن تكون في الوقت نفسه محدودة زمنياً ومحدودة المجال.

٥- دالة الاستيفاء المثالية هي دالة السنك ولكن حيث إنها غير سببية، فإنه عملياً يجب استخدام طرق أخرى.

٦- أي إشارة دورية محدودة المجال يمكن وصفها بالكامل بمجموعة محددة من الأرقام.

٧- CTFT لأي إشارة و DFT لعينات منها تكون متعلقة ببعضها بعضاً من خلال عمليات العيننة الزمنية، والنوفذة، والعيننة الترددية.

٨- يمكن استخدامل DFT لتقريب CTFT، و CTFS وعمليات معالجة الإشارات الشهيرة الأخرى، ومع زيادة معدل العيننة و/أو عدد العينات فإن التقريب يكون أفضل.

٩- الطرق المستخدمة في عينة الإشارات المستمرة زمنياً يمكن استخدامها تقريباً بالطريقة نفسها في عينة الإشارات المتقطعة زمنياً، وهناك مفاهيم مماثلة لعرض المجال، وأقل معدل عينة، والنسخ المستعار، وهكذا.

تمارين مع إجاباتها

(في كل تمرين، تكون الإجابات مرتبة بطريقة عشوائية)

تعديل مقدار النبضة

١- مطلوب أخذ عينات الإشارة التالية:

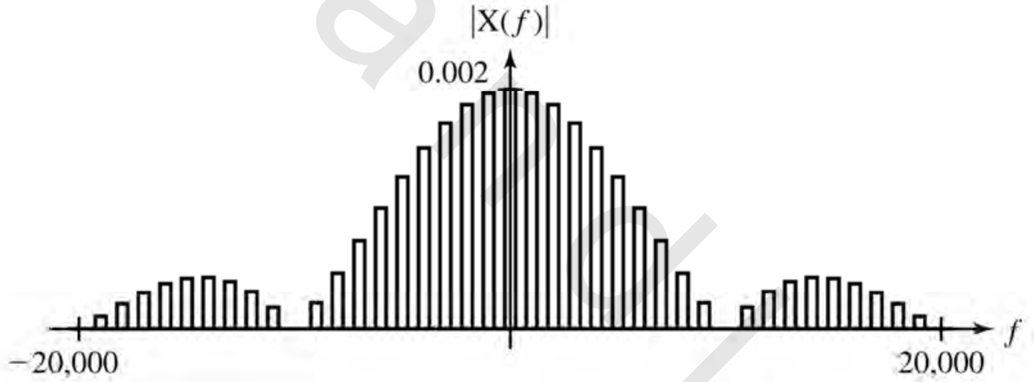
$$X(t) = 10\, sinc(500t)$$

عن طريق ضربها في طابور النبضات التالي:

$$P(t) = rect(10^4 t) * \delta_{0.001}(t)$$

وذلك لتكوين الإشارة $x_p(t)$. ارسم مقدار CTFT للإشارة $x_p(t)$ وهو Xp(f).

الإجابة:



شكل رقم (ج.ت-١)

٢- افترض الإشارة:

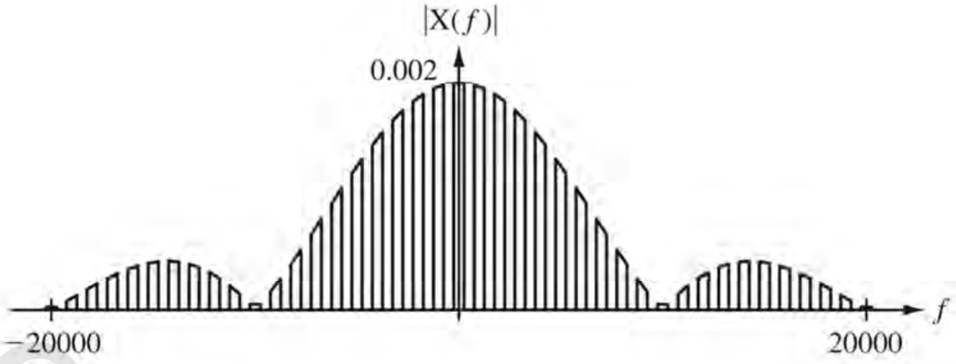
$$X(t) = 10\, sinc(500t)$$

كما في تمرين 1 وكون الإشارة التالية:

$$X_p(t) = [1000\, X(t) \times 0.001\delta_{0.001}(t)] * rect(10^4 t)$$

ارسم الدالة Xp(f) التي تمثل مقدار CTFT للدالة $x_p(t)$ وقارنها مع نتيجة التمرين 1.

الإجابة:



شكل رقم (ج–ت–٢)

أخذ العينات

٣- إشارة $x(t)=25\sin(200\pi t)$ تم عينتها بمعدل 300Hz بحيث أن أول عينة تكون عند $t=0$. فما هي قيمة العينة رقم ٥ ؟

الإجابة: 21.651

٤- إشارة $x(t)=4\cos(20\pi t)$ تم أخذ عيناتها صدمياً بمعدل 40Hz لتكوين $x_s(t)$ ؟

(أ) ما هو أول تردد موجب فوق 10Hz تكون عنده $X_s(f)$ لا تساوي الصفر ؟

(ب) إذا تم ترشيح $x_s(t)$ بمرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة، ما هو أعلى تردد ركني للمرشح الذي يمكن أن ينتج استجابة جيبية ؟

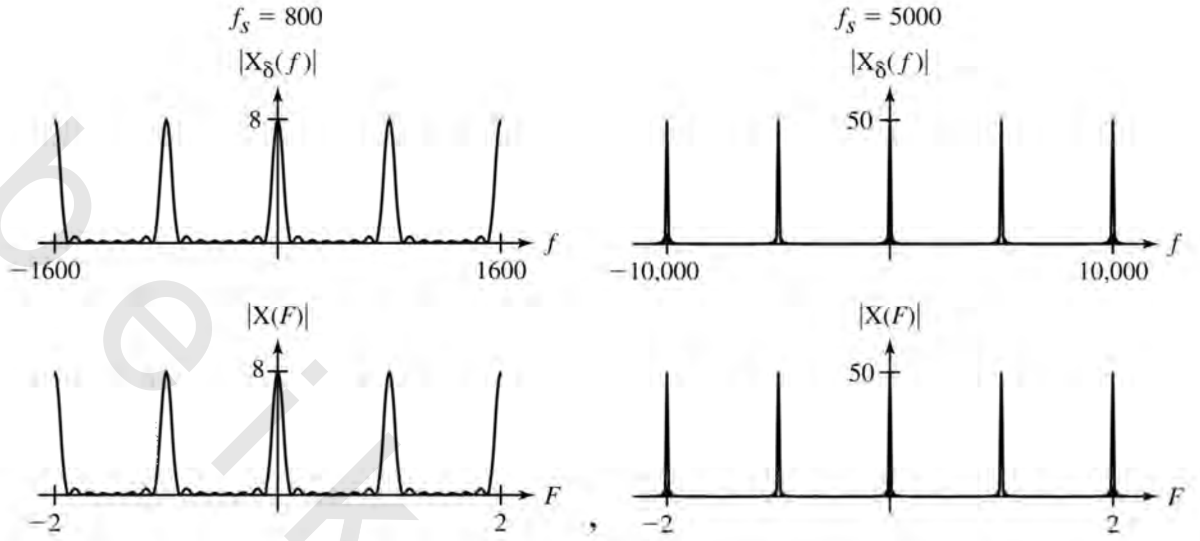
(ج) إذا تم ترشيح $x_s(t)$ بمرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة، ما هو أعلى تردد ركني للمرشح لا ينتج عنه أي استجابة ؟

(د) غير معدل العينة إلى 12Hz وكرر الأجزاء (أ) و (ب) و (ت) ؟

الإجابة: 14 و 10 و 30 و 10 و 2 و 30،٣

٥- افترض الإشارة $x(t)=tri(100t)$، كون الإشارة $x[n]$ عن طريق عينة $x(t)$ بمعدل $f_s=800$ وكون إشارة معلوماتية صدمية مكافئة $x_\delta(t)$ عن طريق ضرب $x(t)$ في تتابع دوري من صدمات الوحدة التي يكون ترددها الأساسي هو نفسه $f_0=f_s=800$. ارسم مقدار DTFT للإشارة $x[n]$ والـ CTFT للإشارة $x_\delta(t)$. غير معدل العينة إلى $f_s=5000$ وكرر.

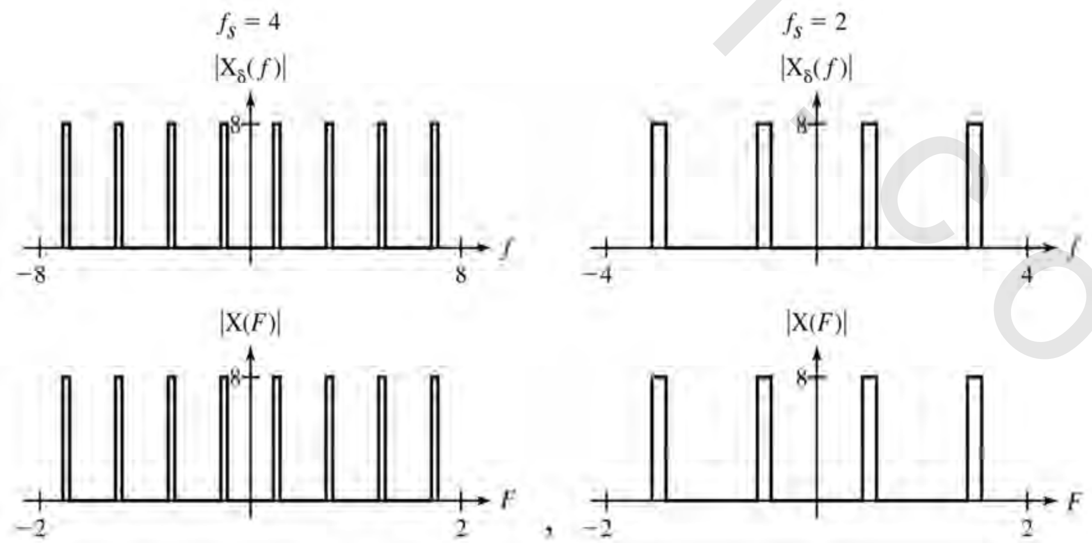
الإجابة :



شكل رقم (ج–ت–٥)

٦- إفترض الإشارة محدودة المجال $x(t)=\text{sinc}(t/4)\cos(2\pi t)$ ، كون الإشارة $x[n]$ عن طريق عينة $x(t)$ بالمعدل $f_s=4$ وكون إشارة متكافئة المعلومات صدمية $x_\delta(t)$ عن طريق ضرب $x(t)$ في التتابع الدوري من صدمات الوحدة التي ترددها الأساسي هو نفسه $f_0=f_s=4$. ارسم مقدار DTFT للإشارة $x[n]$ و CTFT للإشارة $x_\delta(t)$. غير معدل العينة إلى $f_s=2$ وكرر.

الإجابة :



شكل رقم (ج–ت–٦)

العيننة الصدمية

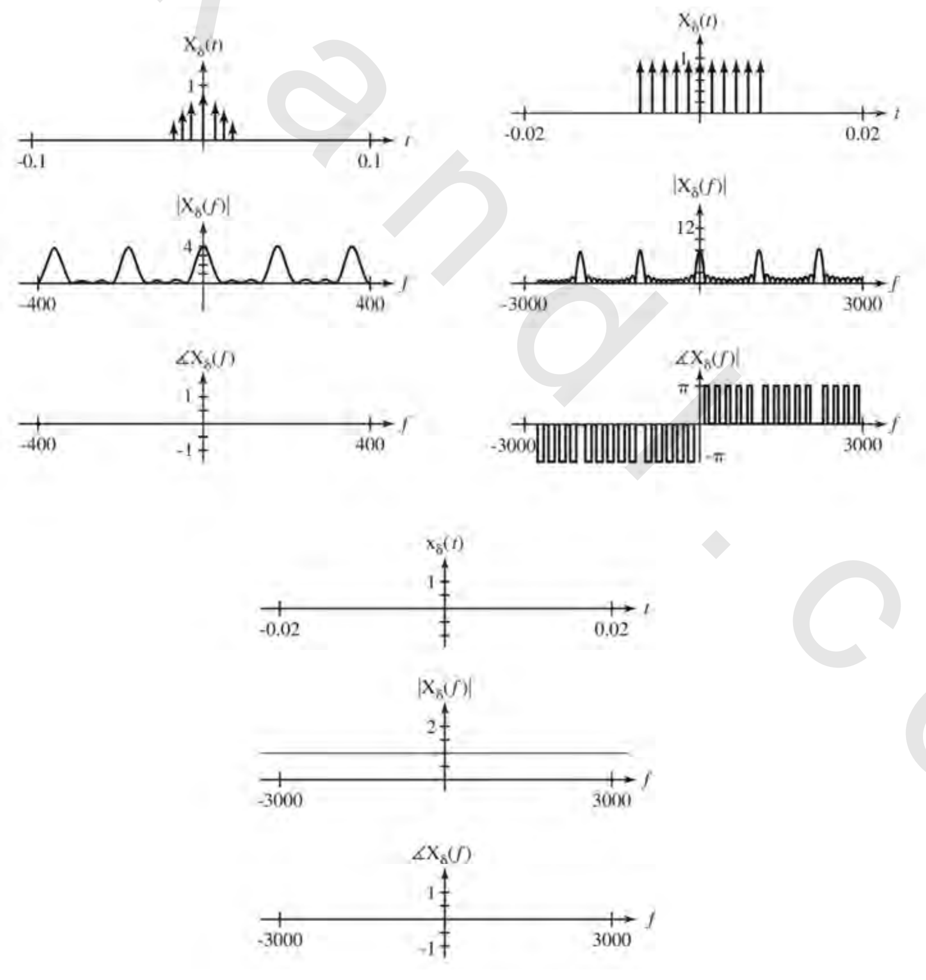
٧- لكل إشارة x(t)، أوجد عيناتها الصدمية عند المعدل المحدد بضربها في الصدمة الدورية $\delta_{T_s}(t)\left(T_s = \frac{1}{f_s}\right)$ وارسم هذه الإشارات المعيننة صدمياً $x_\delta(t)$ على المدى الزمني المحدد، وارسم أيضاً مقدار وزاوية $X_\delta(f)$ التي تمثل الـ CTFT على المدى الترددي المحدد:

(أ) $X(t) = rect(100t), f\_s = 1100$
$-20\ ms < t < 20\ ms, -3kHz < f < 3kHz$

(ب) $X(t) = rect(100t), f_s = 110$
$-20\ ms < t < 20\ ms, -3kHz < f < 3kHz$

(ج) $X(t) = tri(45t), f_s = 180$
$-100\ ms < t < 100\ ms, -400 < f < 400$

الإجابة:

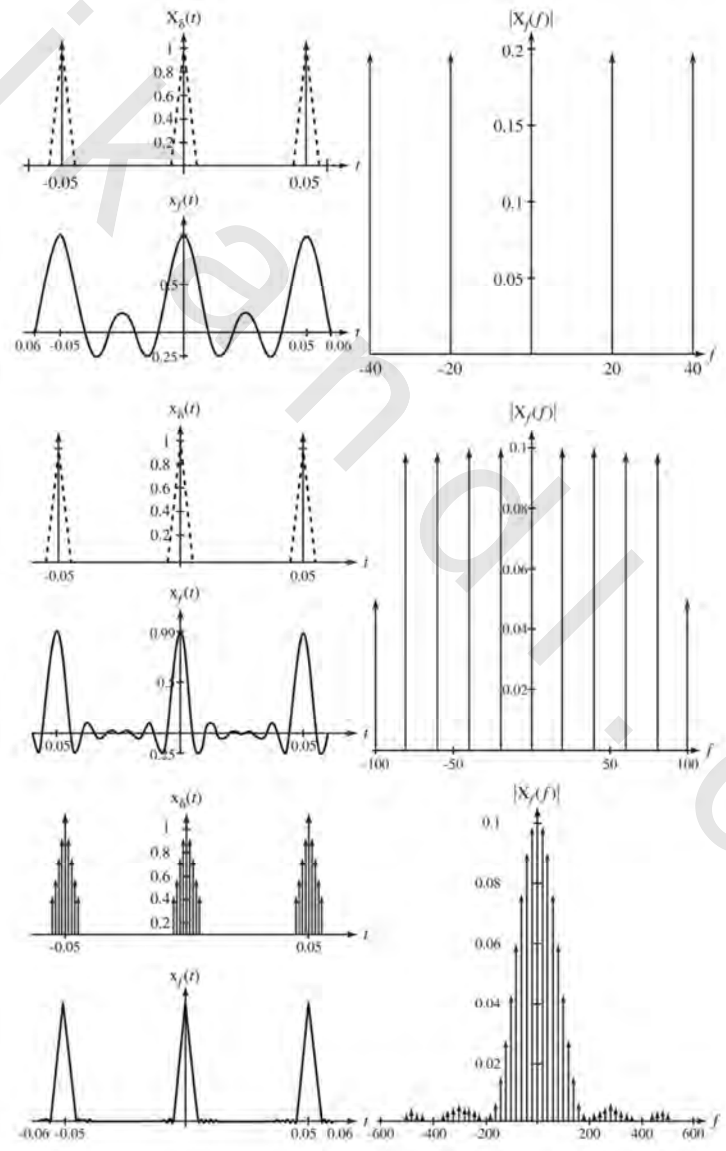


شكل رقم (ج-ت-٧)

٨- افترض الإشارة $x(t)=tri(200t)*\delta_{0.05}(t)$ ، مطلوب عينة هذه الإشارة صدمياً بالمعدل f_s المحدد بضربها في الصدمات الدورية التي على الصورة $\delta_{T_s}(t)\left(T_s=\frac{1}{f_s}\right)$. بعد ذلك رشح الإشارة المعينة صدمياً $x_\delta(t)$ باستخدام مرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة له معامل تكبير يساوي Ts في مجال التمرير وتردده الركني يساوي تردد نيكويست. ارسم الإشارة $x(t)$ واستجابة المرشح المنفذ للترددات المنخفضة $x_f(t)$ على المدى الزمني التالي $-60ms<t<60ms$.

(أ) $f_s=1000$ (ب) $f_s=200$ (ت) $f_s=100$

الإجابة:



شكل رقم (ج–ت–٨)

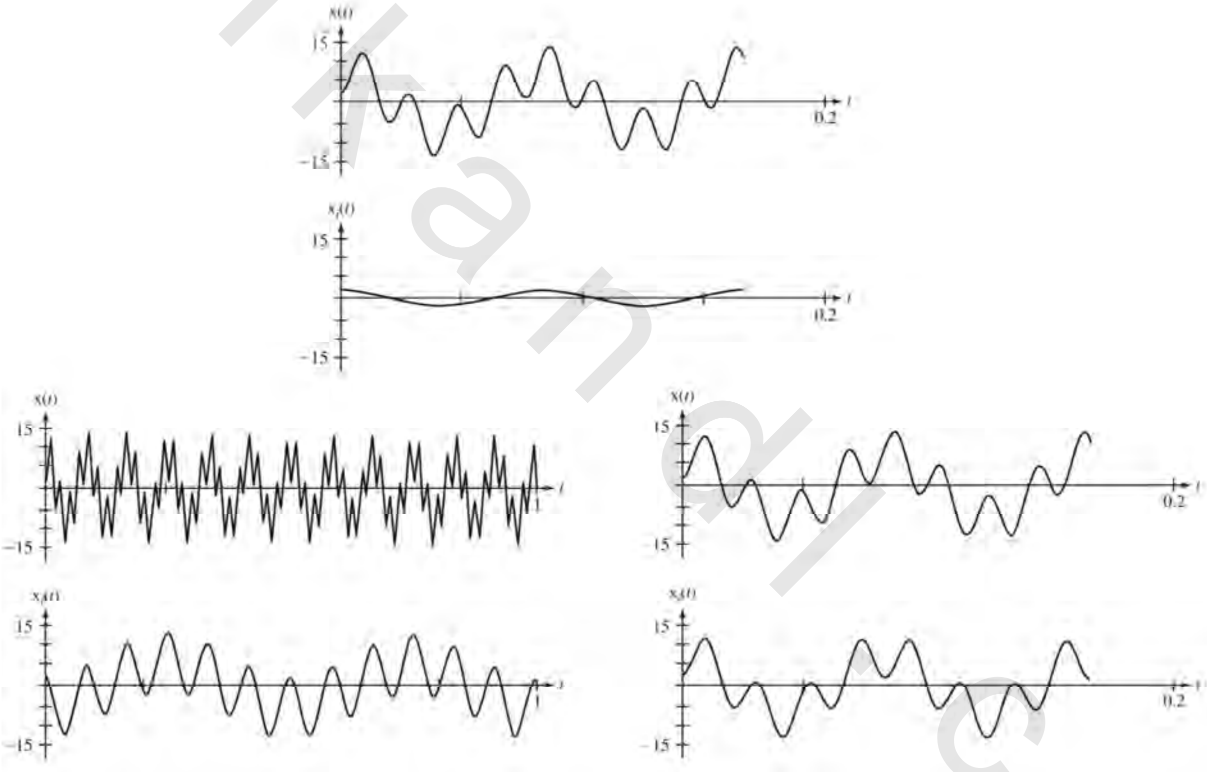
٩- افترض الإشارة x(t)=8cos(24πt) - 6cos(104πt) ، مطلوب عينة هذه الإشارة صدمياً بالمعدل المحدد بضربها في الصدمات الدورية التي على الصورة $\delta_{T_s}(t)\left(T_s = \frac{1}{f_s}\right)$. بعد ذلك رشح الإشارة المعيننة صدمياً باستخدام مرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة له معامل تكبير يساوي Ts في مجال التمرير وتردده الركني يساوي تردد نيكويست. ارسم الإشارة x(t) واستجابة المرشح المنفذ للترددات المنخفضة $x_i(t)$ على مدى دورتين أساسيتين لـ $x_i(t)$.

(أ) $f_s=100$

(ب) $f_s=50$

(ج) $f_s=40$

الإجابة:



شكل رقم (ج-ت-٩)

معدلات نيكويست

١٠- أوجد معدلات نيكويست للإشارات التالية:

(أ) $X(t) = sinc(20t)$

(ب) $X(t) = 4sinc^2(100t)$

(ت) $X(t) = 8sin(50\pi t)$

(ث) $X(t) = 4sin(30\pi t) + 3\,cos(70\pi t)$

(ج) $X(t) = rect(300t)$

(ح) $X(t) = -10sin(40\pi t)cos(300\pi t)$

(خ) $X(t) = sinc(t/2)\delta_{10}(t)$

(د) $X(t) = sinc(t/2)\delta_{0.1}(t)$

الإجابة: 200 و 340 و 70، غير محدد و 50 و 0.4 و غير محدد و 20.

الإشارات المحددة زمنياً والمحددة مجاليا

١١- ارسم الإشارات التالية المحددة زمنياً. أوجد وارسم CTFT لكل منها وتأكد من أنها ليست محددة المجال:

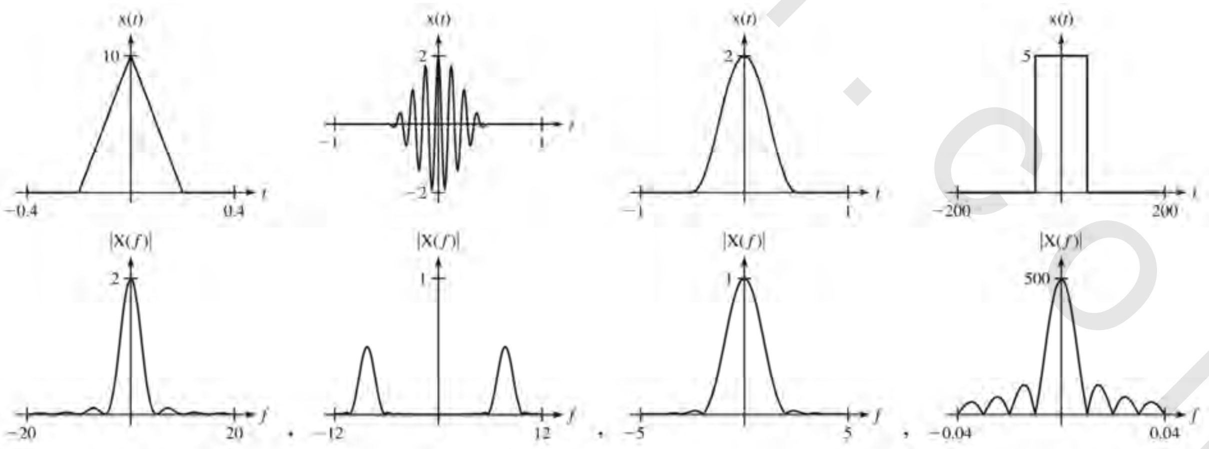
(أ) $X(t) = 5\,rect(t/100)$

(ب) $X(t) = 10\,tri(5t)$

(ت) $X(t) = rect(t)[1 + cos(2\pi t)]$

(ث) $X(t) = rect(t)[1 + cos(2\pi t)]cos(16\pi t)$

الإجابة:



شكل رقم (ج–ت–١١)

١٢- ارسم مقدار CTFT التالي للإشارات محددة المجال وأوجد وارسم CTFT العكسي لكل منها. تأكد من أن هذه الإشارات لن تكون محددة زمنياً:

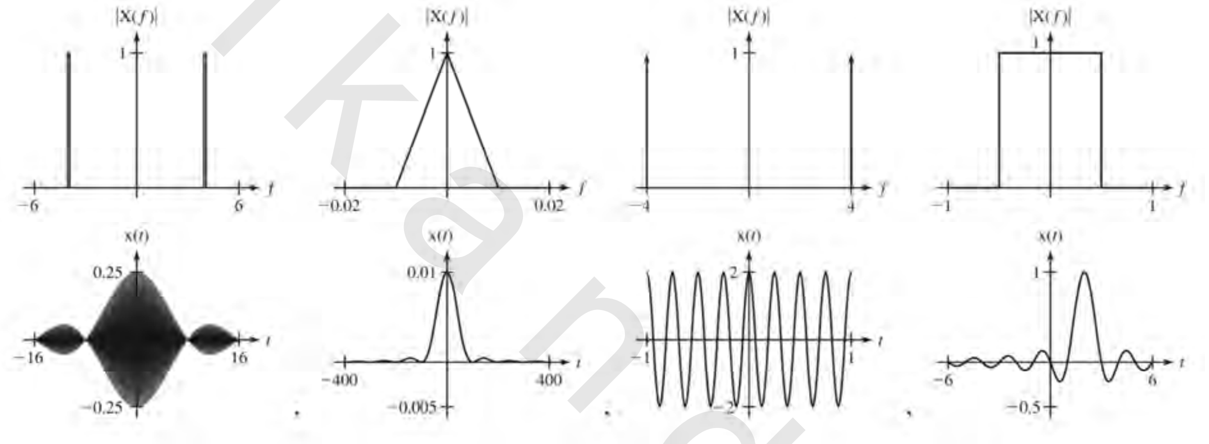
(أ) $X(f) = rect(f)e^{-j4\pi f}$

(ب) $X(f) = tri(100f)e^{j\pi f}$

(ت) $X(f) = \delta(f-4) + \delta(f+4)$

(ث) $X(f) = j[\delta(f+4) - \delta(f-4)] * rect(8f)$

الإجابة:



شكل رقم (ج-ت-١٢)

الاستيفاء

١٣- مطلوب عيننة الإشارة $x(t)=\sin(2\pi t)$ بمعدل عيننة f_s. بعد ذلك باستخدام ماتلاب، ارسم الاستيفاء بين هذه العينات في المدى الزمني $-1<t<1$ باستخدام التقريب التالي:

$$y(t) \cong 2(f_c/f_s)\sum_{n=-N}^{N} X(nT_s)\, sinc\big(2f_c(t-nT_s)\big)$$

وذلك مع القيم التالية لكل من f_s و f_c و N:

(أ) $f_s = 4,\ f_c = 2,\ N = 1$

(ب) $f_s = 4,\ f_c = 2,\ N = 2$

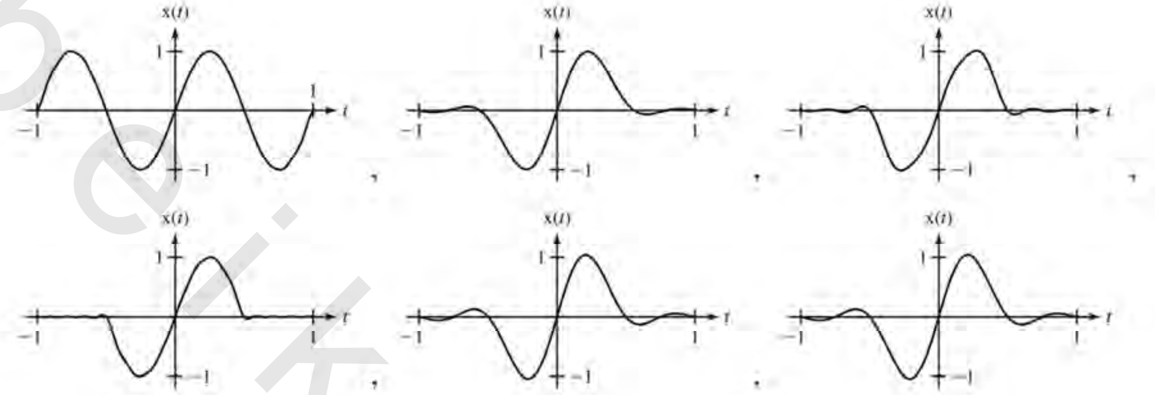
(ت) $f_s = 8,\ f_c = 4,\ N = 4$

(ث) $f_s = 8,\ f_c = 2,\ N = 4$

(ج) $f_s = 16,\ f_c = 8,\ N = 8$

(ح) $f_s = 16,\ f_c = 8,\ N = 16$

الإجابة :



شكل رقم (ج–ت–١٣)

١٤- لكل إشارة وكل معدل عيننة فيما يلي ، ارسم الإشارة الأصلية واستيفاء بين عينات الإشارة باستخدام مسك من الدرجة صفر ، على المدى الزمني $-1<t<1$. (دالة ماتلاب stairs من الممكن أن تكون مفيدة هنا) :

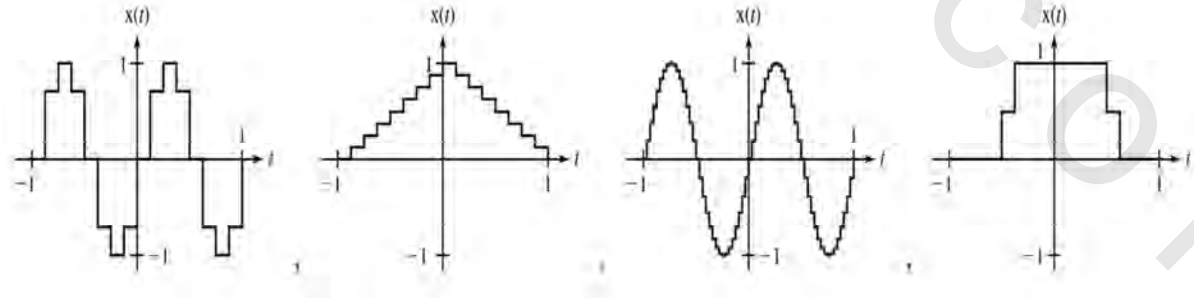
(أ) $X(t) = sin(2\pi t), f_s = 8$

(ب) $X(t) = sin(2\pi t), f_s = 32$

(ت) $X(t) = rect(t), f_s = 8$

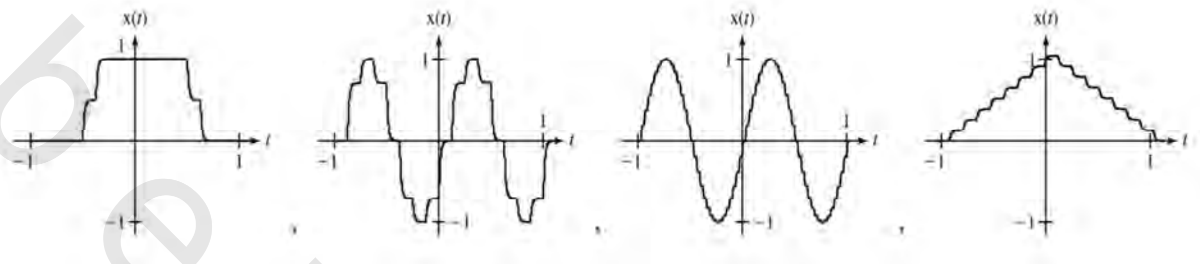
(ث) $X(t) = tri(t), f_s = 8$

الإجابة :



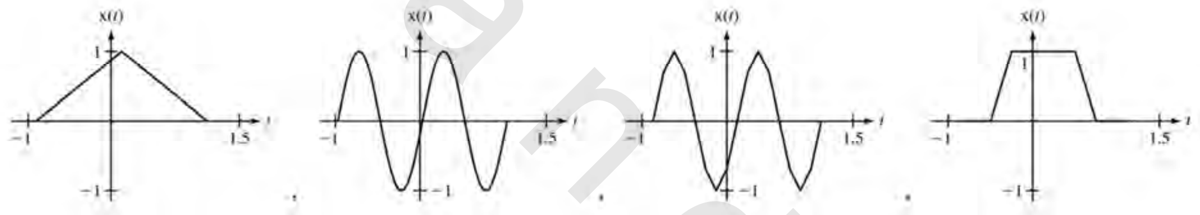
شكل رقم (ج–ت–١٤)

١٥- لكل إشارة في تمرين ١٤، استخدم مرشح منفذ للترددات المنخفضة لترشيح الإشارة المستوفاة بالمسك من الدرجة صفر باستخدام مرشح له قطب واحد وتردد الـ 3dB- يساوي ربع معدل العيننة.



شكل رقم(ج-ت-١٥).

١٦- أعد تمرين ١٤ مع استخدام مسك من الدرجة الأولى بدلاً من المسك من الدرجة الصفرية.



شكل رقم (ج-ت-١٦).

النسخ المستعارة (التزوير)

١٧- مطلوب عيننة الإشارتين $x_1(t) = e^{-t^2}$ و $x_1(t) = e^{-t^2} + \sin(8\pi t)$ في الفترة الزمنية التالية: -3<t<3 عند 8Hz ووضح أن قيم العينات في الإشارتين تكون هي نفسها.

١٨- لكل زوج من الإشارات التالية، خذ العينات عند المعدل المحدد وأوجد DTFT للإشارات المعيننة. في كل حالة، اشرح عن طريق فحص الـ DTFT لكل إشارتين، لماذا تكون الإشارتان هما نفسيهما:

(أ) $X(t) = 4\,cos(16\pi t)\ and\ X(t)4\,cos(76\pi t), f_s = 30$

(ب) $X(t) = 6sinc(8t)\ and\ X(t) = 6sinc(8t)cos(400\pi t), f\_s = 100$

(ج) $X(t) = 9cos(14\pi t)\ and\ X(t) = 9cos(98\pi t), f_s = 56$

الإجابة:

$75\,rect(25F/2) * \delta_1(F), 2[\delta_1(F-8/30)+\delta_1(F+8/30)](9/2)[\delta_1(F-1/8)+\delta_1(F+1/8)]$

١٩- لكل دالة جيبية، أوجد أوجد دالتين جيبيتين آخرتين تكون تردداتهما أقرب ما يمكن من الدالة الجيبية المعطاة، والتي عند عينتها عند معدل معين يكون لها العينات نفسها تماماً:

(أ) $X(t) = 4\cos(8\pi t), f_s = 20$

(ب) $X(t) = 4\sin(8\pi t), f_s = 20$

(ج) $X(t) = 2\sin(-20\pi t), f_s = 50$

(د) $X(t) = 2\cos(-20\pi t), f_s = 50$

(هـ) $X(t) = 5\cos(30\pi t + \pi/4), f_s = 50$

الإجابة:

$-2\sin(-80\pi t) and\ 2\sin(-120\pi t), 5\cos(130\pi t+\pi/4)\ and\ 5\cos(-70\pi t+\pi/4),\ 4\sin(48\pi t)\ and\ -4\sin(32\pi t), 2\cos(80\pi t)\ and\ 2\cos(-120\pi t), 4\cos(48\pi t)\ and\ 4\cos(32\pi t)$

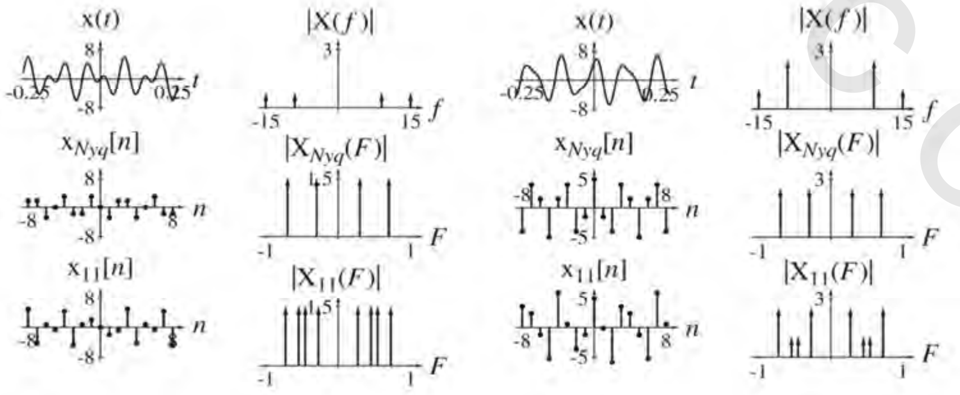
الإشارات الدورية محدودة النطاق

٢٠- مطلوب أخذ عينات الإشارات x(t) التالية لتكوين الإشارات x[n]. خذ العينات عند معدل نيكويست وبعد ذلك عند المعدل الأعلى التالي الذي تكون عنده f_s/f_0 رقماً صحيحاً (مما يعني أن زمن العينة الكلي مقسوماً على الزمن بين العينات يكون أيضاً رقماً صحيحاً). ارسم هذه الإشارات ومقادير CTFT للإشارات المستمرة زمنياً، و DTFT للإشارات المتقطعة زمنياً.

(أ) $X(t) = 2\sin(30\pi t) + 5\cos(18\pi t)$

(ب) $X(t) = 6\sin(6\pi t)\cos(24\pi t)$

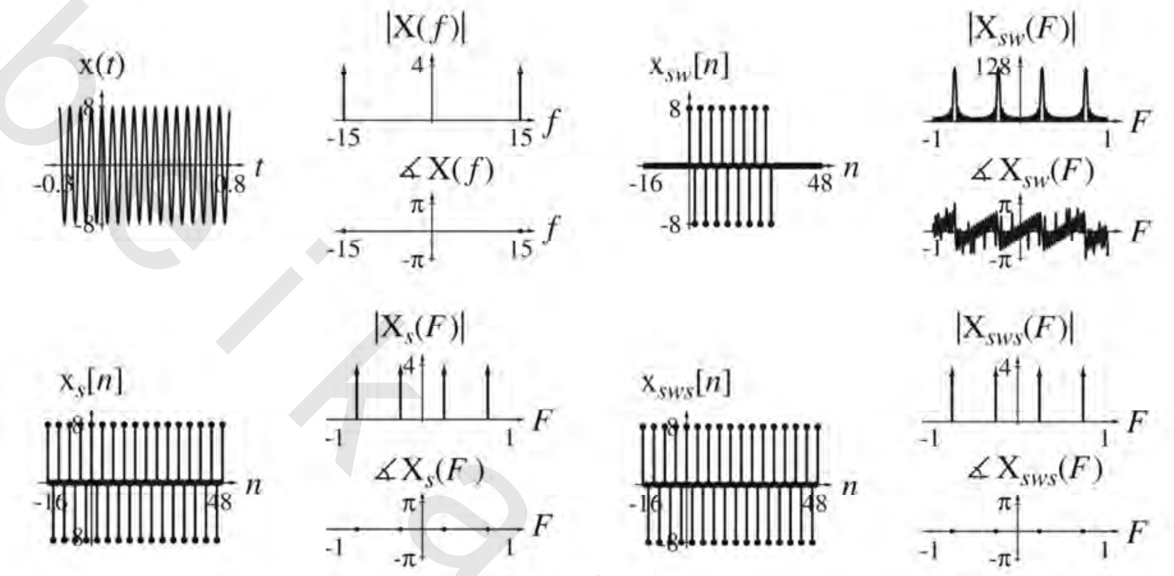
الإجابة:



شكل رقم (ج–ت–٢٠)

العلاقات بين CTFT وCTFS وDFT

٢١- ابدأ بالإشارة $x(t)=8\cos(30\pi t)$، ثم خذ عيناتها، ثم نوقذها، ثم كررها دورياً باستخدام معدل العيننة $f_s=60$ وعرض النافذة $N=32$. لكل إشارة في هذه العملية، ارسم الإشارة وتحويلها، إما CTFT أو DTFT.



شكل رقم (ج-ت-٢١)

٢٢- مطلوب عيننة كل إشارة $x(t)$ عدد N من العينات بالمعدل f_s لتوليد الإشارة $x[n]$. ارسم الدالة $x(t)$ مع الزمنt و $x[n]$ مع nT_s على الفترة الزمنية $0<t<NT_s$. أوجد $X[k]$ التي تمثل الـ DFT لـ N من العينات. ثم ارسم مقدار وزاوية $X(f)$ مع f و $T_sX[k]$ مع $k\Delta f$ على المدى الترددي التالي: $-f_s/2<f<f_s/2$ حيث $\Delta f=f_s/N$. ارسم $T_sX[k]$ كدالة مستمرة في $k\Delta f$ باستخدام الدالة plot في ماتلاب:

(أ) $X(t) = 5rect\big(2(t-2)\big),\ f_s = 16,\ N = 64$

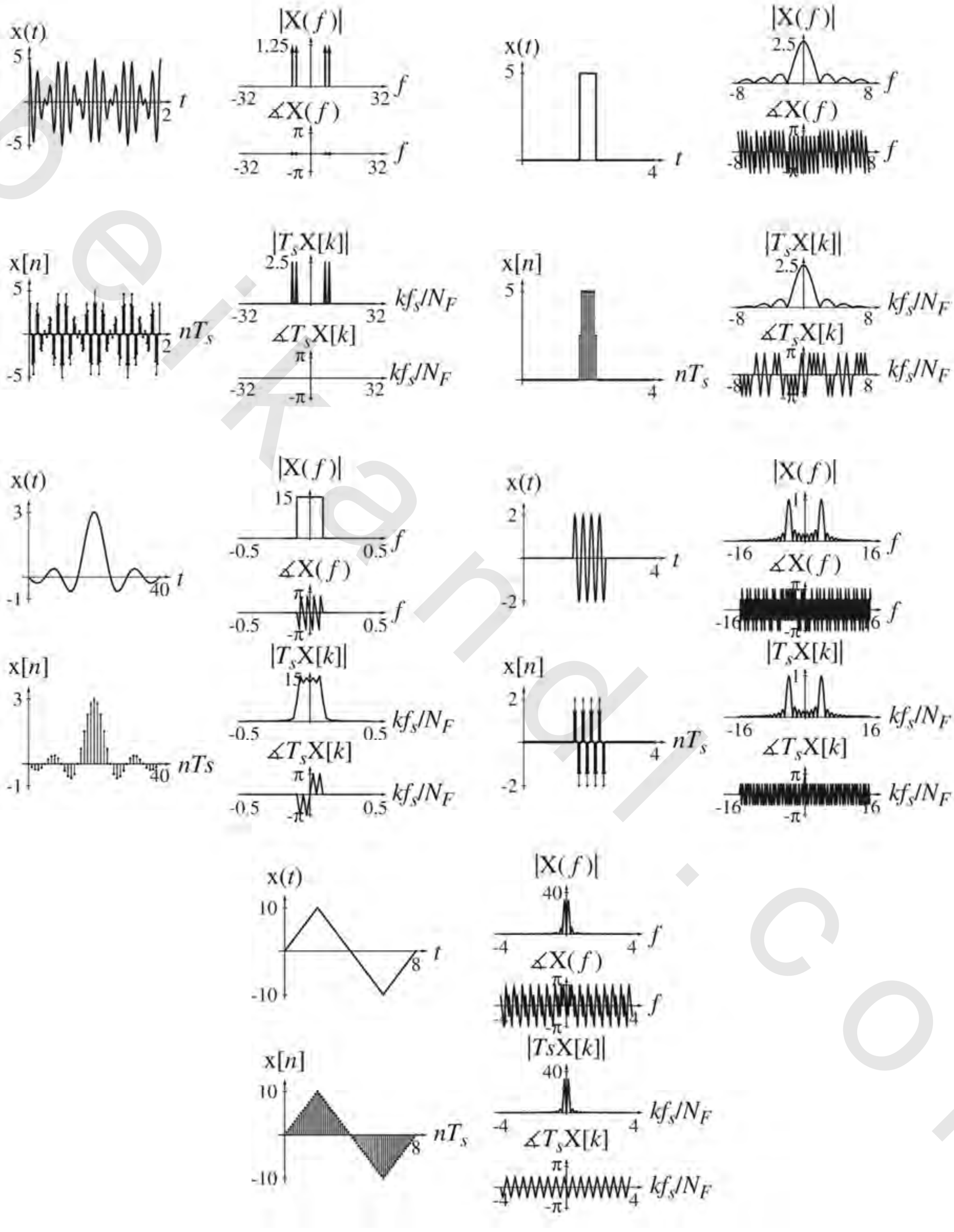
(ب) $X(t) = 3sinc((t-20)/5),\ f_s = 1,\ N = 40$

(ت) $X(t) = 2rect(t-2)sin(8\pi t),\ f_s = 32,\ N = 128$

(ث) $X(t) = 10\left[tri\left(\frac{t-2}{2}\right) - tri\left(\frac{t-6}{2}\right)\right],\ f_s = 8,\ N = 64$

(ج) $X(t) = 5cos(2\pi t)cos(16\pi t),\ f_s = 64,\ N = 128$

الإجابة :



شكل رقم (ج-ت-٢٢)

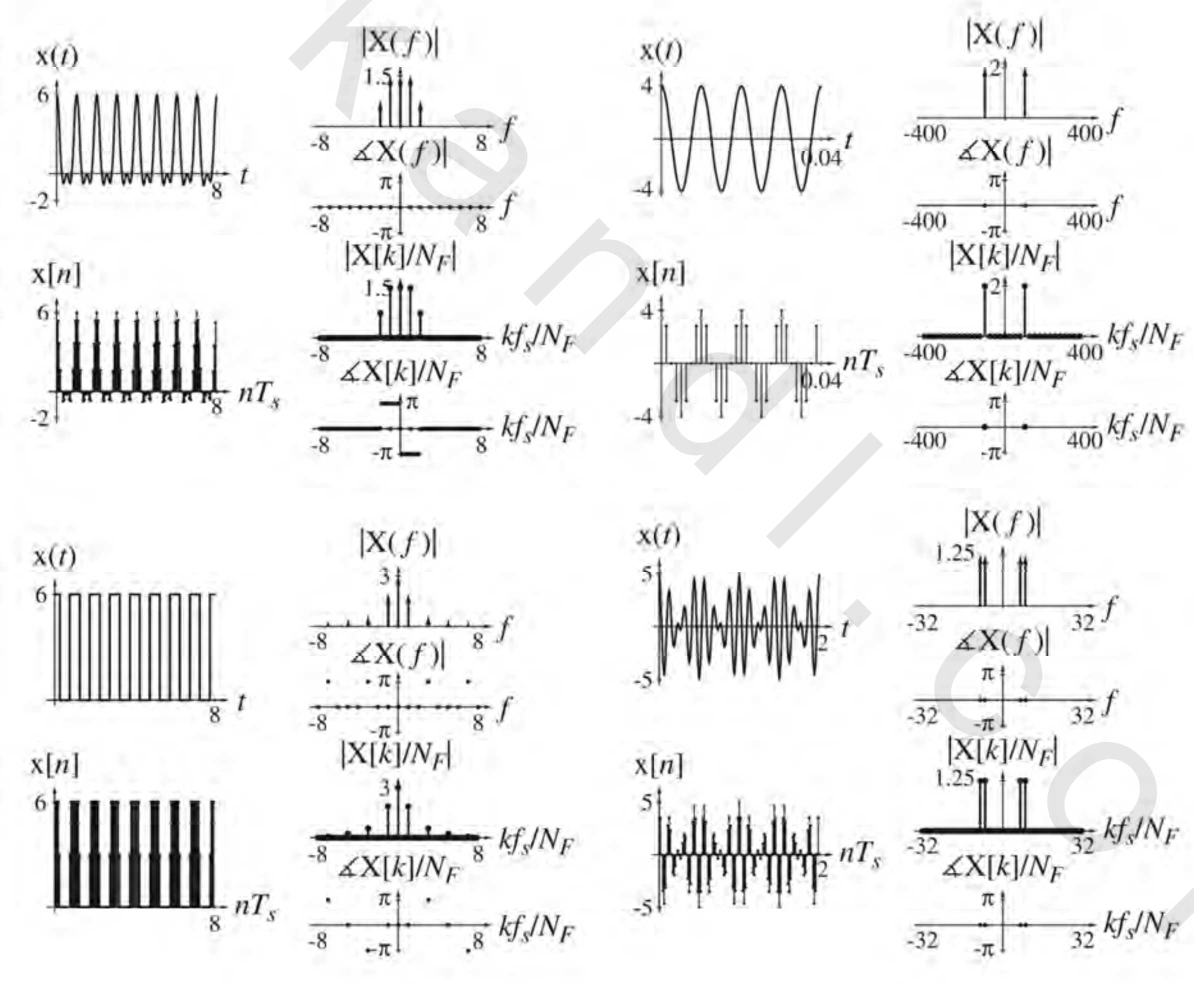
٢٣- مطلوب عيننة كل إشارة x(t) عدد N من العينات بالمعدل f_s لتوليد الإشارة x[n]. ارسم الدالة x(t) مع الزمن t و x[n] مع nTs على الفترة الزمنية 0<t<NTs. أوجد X[k] التي تمثل الـ DFT للـ N من العينات. ثم ارسم مقدار وزاوية X(f) مع f و X[k]/N مع kΔf على المدى الترددي التالي: $-f_s/2<f<f_s/2$ حيث $\Delta f=f_s/N$. ارسم X[k]/N كدالة صدمة في kΔf باستخدام الدالة stem في ماتلاب لتمثيل الصدمات:

(أ) $X(t) = 4cos(200\pi t),\ f_s = 800,\ N = 32$

(ب) $X(t) = 6rect(2t) * \delta_1(t),\ f_s = 16,\ N = 128$

(ت) $X(t) = 6sinc(4t) * \delta_1(t),\ f_s = 16,\ N = 128$

(ث) $X(t) = 5cos(2\pi t)cos(16\pi t),\ f_s = 64,\ N = 128$



شكل رقم (ج-ت-٢٣)

النوافذ

٢٤- أحياناً يتم استخدام أشكال مختلفة عن النافذة المستطيلة. باستخدام ماتلاب أوجد وارسم مقادير DFT لهذه النوافذ مع N=32.

(أ) نافذة فون هان ، أو نافذة هاننج Hanning

$$w[n] = \frac{1}{2}\left[1 - cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right], 0 \le n < N$$

(ب) نافذة بارتليت Bartlett

$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \le n \le \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \le n < N \end{cases}$$

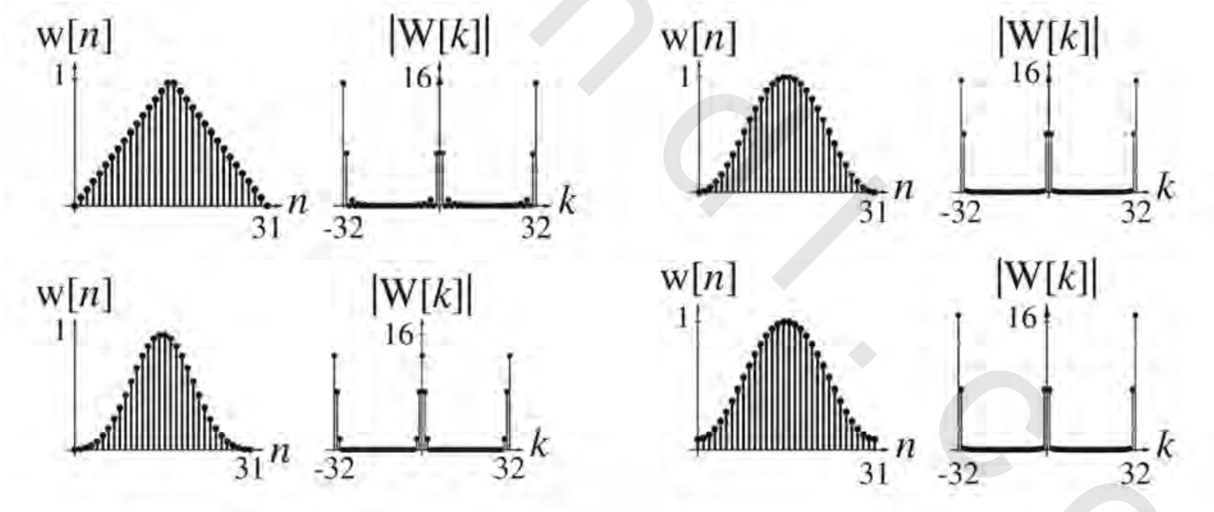
(ج) نافذة هامنج Hamming

$$w[n] = 0.54 - 0.46\, cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), 0 \le n < N$$

(د) نافذة بلاكمان Blackman

$$w[n] = 0.42 - 0.5\, cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right), 0 \le n < N$$

الإجابة :



شكل رقم (ج–ت–٢٤)

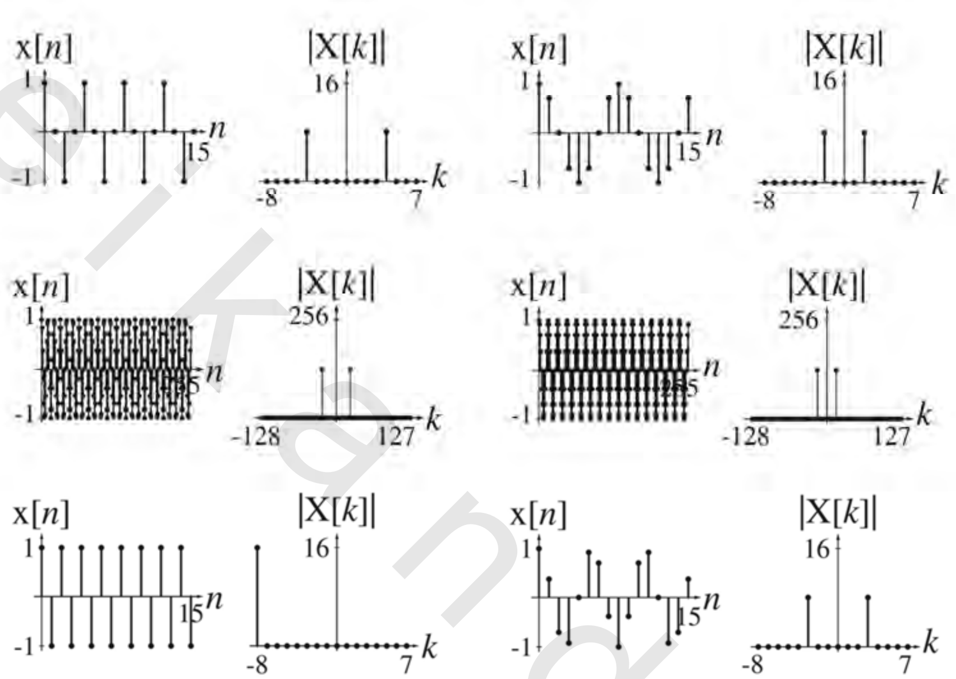
DFT

٢٥- خذ عينات الإشارات التالية عند المعدلات المبينة وللأزمنة المبينة أيضاً وارسم مقادير DFT مع الرقم التوافقي لكل منها في المدى N/2<k<(N/2)-1–.

(أ) $X(t) = cos(2\pi t),\ f_s = 2,\ N = 16$ (ب) $X(t) = cos(2\pi t),\ f_s = 8,\ N = 16$

(ت) $X(t) = cos(2\pi t),\ f_s = 16,\ N = 2$ (ث) $X(t) = cos(3\pi t),\ f_s = 2,\ N = 16$

(ج) $X(t) = cos(3\pi t),\ f_s = 8,\ N = 16$ (ح) $X(t) = cos(3\pi t),\ f_s = 16,\ N = 256$



شكل رقم (ج–ت–٢٥)

٢٦- خذ عينات الإشارات التالية عند المعدلات المبينة وللأزمنة المبينة أيضاً وارسم مقادير وزوايا الـ DFT مع الرقم التوافقي لكل منها في المدى N/2<k<(N/2)-1–.

(أ) $X(t) = tri(t-1),\ f_s = 2,\ N = 16$

(ب) $X(t) = tri(t-1),\ f_s = 8,\ N = 16$

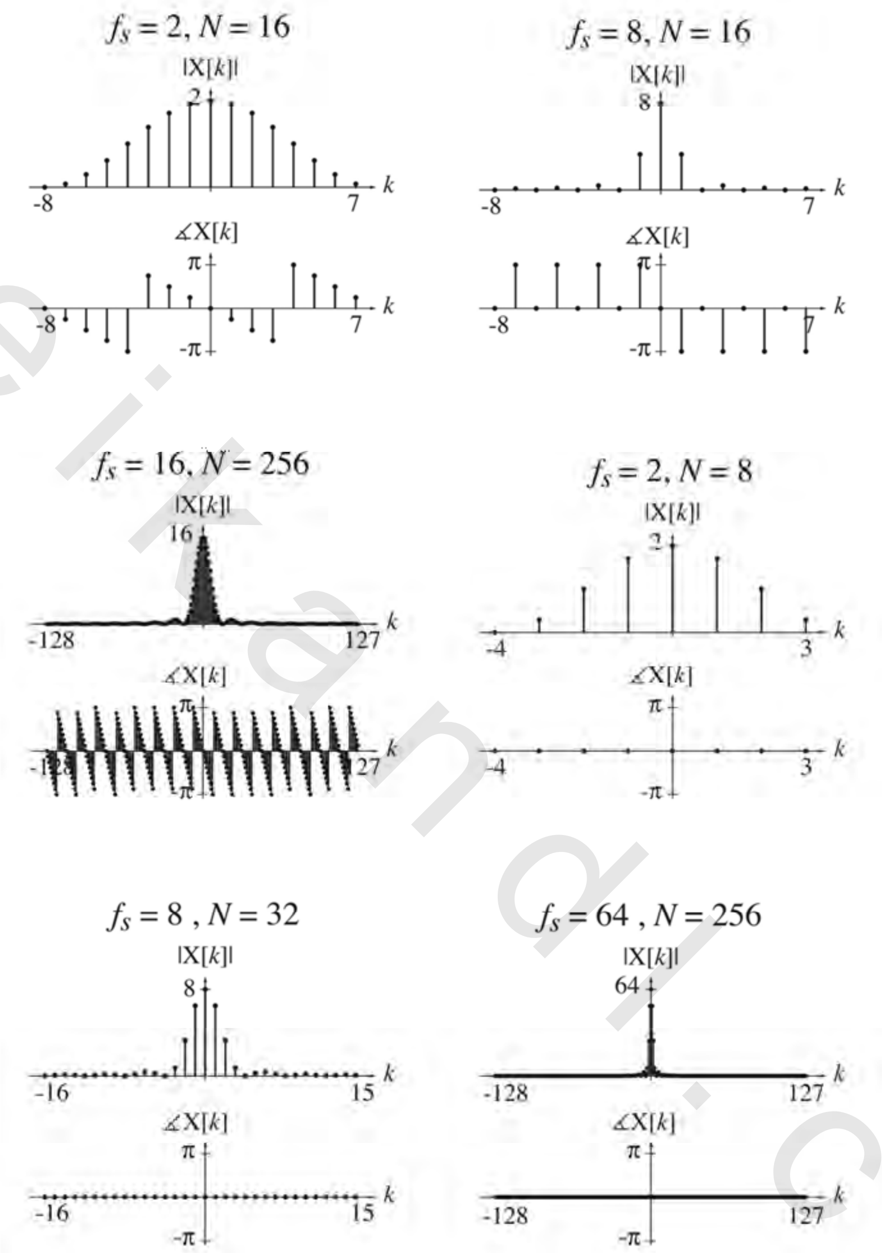
(ت) $X(t) = tri(t-1),\ f_s = 16,\ N = 256$

(ث) $X(t) = tri(t) + tri(t-4),\ f_s = 2,\ N = 8$

(ج) $X(t) = tri(t) + tri(t-4),\ f_s = 8,\ N = 32$

(ح) $X(t) = tri(t) + tri(t-4),\ f_s = 64,\ N = 256$

الإجابة:



شكل رقم (ج–ت–٢٦)

٢٧- لكل إشارة مما يأتي، ارسم الإشارة الأصلية، والإشارة المعينة في فترة العينة المبينة:

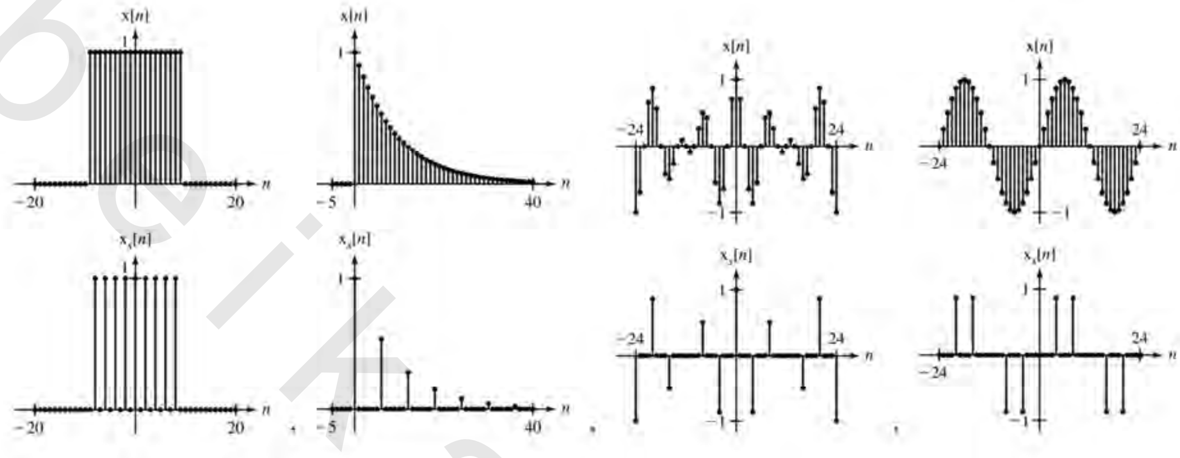
(أ) $X[n] = sin(2\pi n/24),\ N_s = 4$

(ب) $X[n] = (u[n+9] - u[n-10]),\ N_s = 2$

(ت) $X[n] = cos(2\pi n/48)cos(2\pi n/8),\ \ N_s = 2$

(ت) $X[n] = (9/10)^n\, u[n],\ \ N_s = 6$

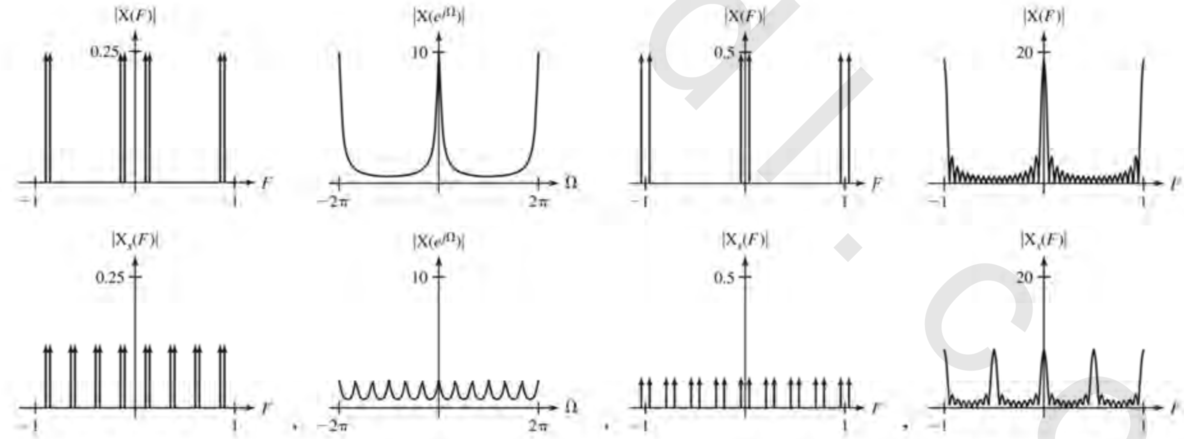
الإجابة:



شكل رقم (ج–ت–٢٧)

٢٨- لكل إشارة في تمرين ٢٧ ، ارسم مقدار DTFT للإشارة الأصلية والإشارة المعيننة :

الإجابة:



شكل رقم (ج–ت–٢٨)

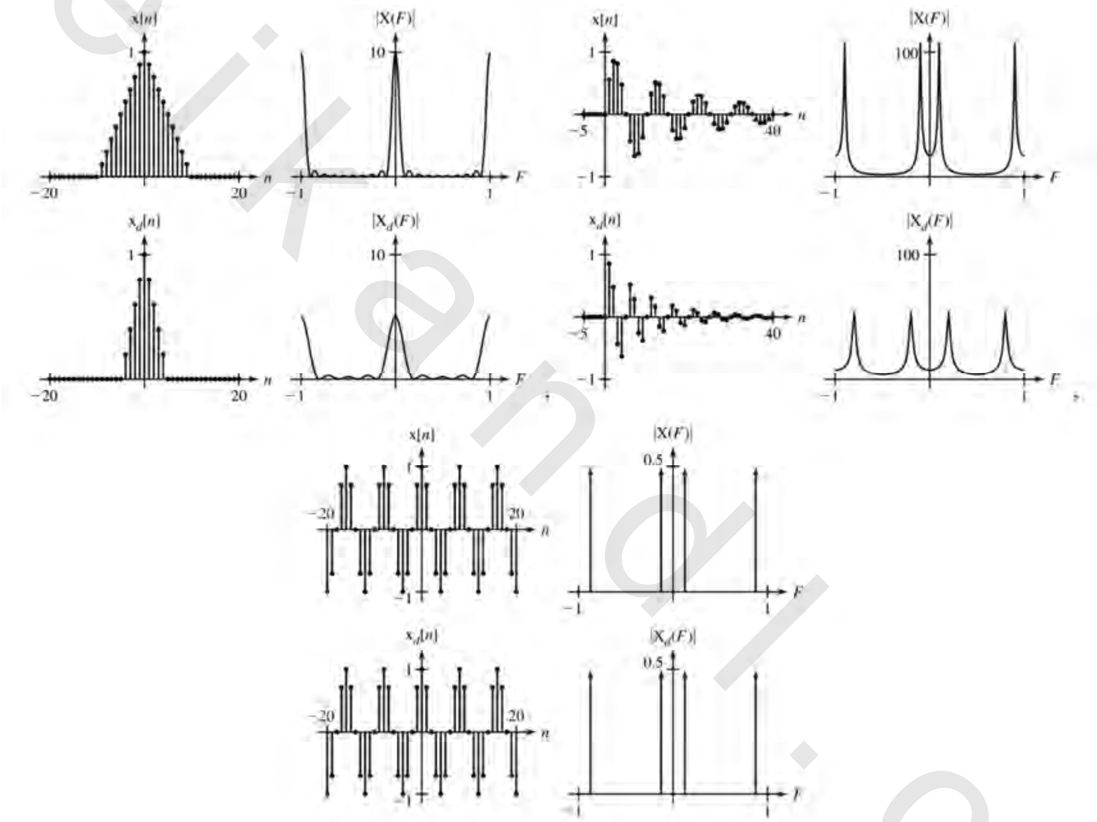
٢٩- لكل إشارة مما يأتي ، إرسم الإشارة الأصلية والإشارة المقسمة لفترة العينة المبينة. ارسم أيضاً مقادير الـ DTFT لكل من الإشارتين

(أ) $X[n] = tri(n/10),\ N_s = 2$

(ب) $X[n] = (0.95)^n sin(2\pi n/10)u[n],\ N_s = 2$

(ت) $X[n] = cos(2\pi n/8),\ N_s = 7$

الإجابة :



شكل رقم (ج-ت-٢٩)

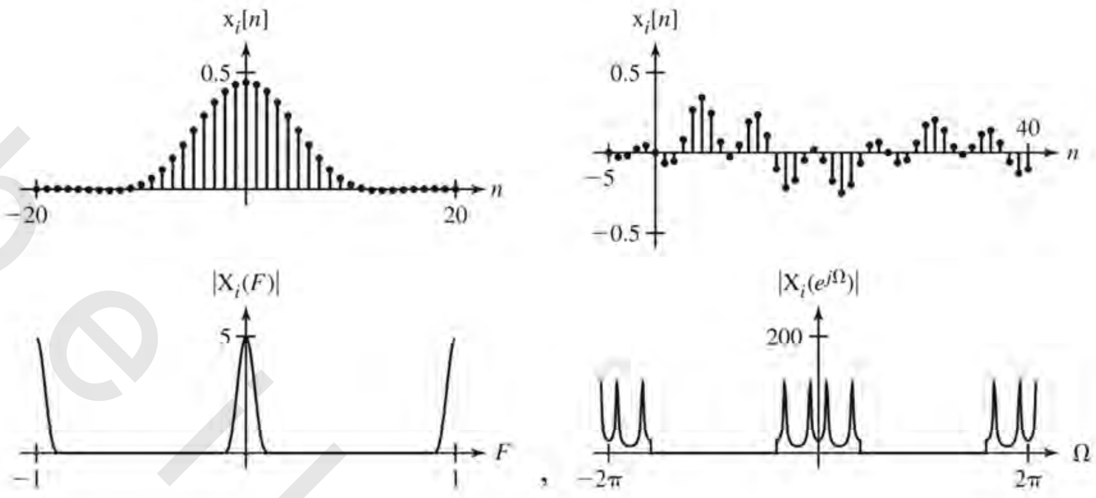
٣٠- لكل إشارة في تمرين ٢٩ ، أدخل رقم الأصفار المبين بين العينات ، رشح الإشارات بمرشح متقطع زمنياً منفذ للترددات المنخفضة بتردد القطع المبين وارسم الإشارات الناتجة ومقدار DTFT لها.

(أ) أدخل صفراً واحداً بين العينات ، وتردد القطع هو Fc=0.1.

(ب) أدخل 4 أصفار بين العينات ، وتردد القطع هو Fc=0.2.

(ج) أدخل ٤4 أصفار بين العينات ، وتردد القطع هو Fc=0.02.

الإجابة :



شكل رقم (ج-ت-٣٠)

تمارين بدون إجابات

أخذ العينات (العيننة)

٣١- باستخدام ماتلاب (أو أي أداة حاسب مكافئة) ارسم الإشارة :

$$X(t) = 3cos(20\pi t) - 2\,sin(30\pi t)$$

على المدى الزمني 0<t<400ms. ارسم أيضا الإشارة المتكونة من عيننة هذه الدالة في فترات العيننة التالية : (أ) Ts=1/120 s (ب) Ts=1/60 s (ت) Ts=1/30 s (ث) Ts=1/15 s. اعتماداً على ما تلاحظة، ماذا يمكنك أن تقول عن مقدار السرعة التي يجب عيننة هذه الإشارة بها بحيث يمكن استرجاعها من هذه العينات ؟

٣٢- الإشارة x(t)=20cos(1000πt) تم عيننتها صدمياً بالمعدل 2kHz. ارسم دورتين أساسيتين من الإشارة المعيننة صدمياً $x_\delta(t)$. (افترض أن الإشارة الأولى تكون عند t=0). بعد ذلك ارسم أربع دورات أساسية، متمركزة عند التردد 0Hz، ل $X_\delta(f)$ التي تمثل CTFT للإشارة المعيننة صدمياً $x_\delta(t)$. غير معدل العيننة إلى 500Hz وكرر.

٣٣- الإشارة x(t)=10rect(t/4) تم عيننتها صدميا بالمعدل 2kHz. ارسم الإشارة المعيننة صدمياً $x_\delta(t)$ في الفترة -4<t<4. بعد ذلك ارسم ثلاث دورات أساسية، متمركزة عند التردد f=0Hz، لـ $X_\delta(f)$ التي تمثل الـ CTFT للإشارة المعيننة صدمياً $x_\delta(t)$. غير معدل العيننة إلى 1/2Hz وكرر.

٣٤- الإشارة x(t)=4sinc(10t) تم عينتها صدمياً بالمعدل 20kHz. ارسم الإشارة المعينة صدمياً $x_\delta(t)$ في الفترة -0.5<t<0.5. بعد ذلك ارسم ثلاث دورات أساسية، متمركزة عند التردد f=0Hz، ل $X_\delta(f)$ التي تمثل CTFT للإشارة المعينة صدمياً $x_\delta(t)$. غير معدل العينة إلى 4Hz وكرر.

٣٥- إشارة x[n] تم تكوينها عن طريق عينة الإشارة x(t)=20cos(8πt) بمعدل العينة 20Hz. ارسم x[n] على مدى 10 دورات أساسية مع الزمن المتقطع. بعد ذلك اعمل الشيء نفسه لترددات العينة 8Hz و 6Hz.

٣٦- إشارة x[n] تم تكوينها عن طريق عينة الإشارة x(t)=-4sin(200πt) بمعدل العينة 400Hz. ارسم x[n] على مدى 10 دورات أساسية مع الزمن المتقطع. بعد ذلك اعمل الشيء نفسه لترددات العينة 200Hz و 60Hz.

٣٧- الإشارة x(t) تمت عينتها فوق معدل نيكويست لتكوين الإشارة x[n] وتم أيضا عينتها صدمياً بنفس المعدل لتكوين الإشارة $x_\delta(t)$. DTFT للإشارة x[n] هو:

$$X(F) = 10\,rect(5F) * \delta_1(F)\ or\ X(e^{j\Omega}) = 10rect(5\Omega/2\pi) * \delta_{2\pi}(\Omega)$$

(أ) إذا كان معدل العينة هو 100Hz، فما هو أعلى تردد يكون عنده CTFT للإشارة x(t) لا يساوي الصفر ؟

(ب) ما هو أقل تردد موجب أكبر من أعلى تردد في الإشارة x(t) الذي يكون عنده CTFT للإشارة $x_\delta(t)$ لا يساوي الصفر ؟

(ج) إذا كان المطلوب هو استرجاع الإشارة x(t) من الإشارة المعينة صدمياً $x_\delta(t)$ عن طريق استخدام مرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة واستجابة الصدمة له هي h(t)=Asinc(wt)، فما أكبر قيمة ممكنة للـ w ؟

أخذ العينات (العيننة) الصدمية

٣٨- لكل إشارة x(t)، خذ عيناتها صدمياً بالمعدل المبين عن طريق ضربها في صدمات دورية كالتالي: $\delta_{Ts}(t)\ \left(T_s = \frac{1}{f_s}\right)$. ارسم الإشارة المعينة صدمياً $x_\delta(t)$ على المدى الزمني المحدد ومقدار وزاوية الـ $X_\delta(f)$ التي تمثل CTFT على المدى الترددي المبين:

(أ) $X(t) = 5\big(1 + cos(200\pi t)\big)rect(100t),\ f_s = 1600$

(ب) $X(t) = e^{-t^2/2},\ f_s = 5$

(ت) $X(t) = 10e^{-t/20}\,u(t),\ f_s = 1$

٣٩- افترض الإشارة $x(t)=rect(20t)*\delta_{0.1}(t)$ والمرشح المثالي المنفذ للترددات المنخفضة الذي تكون استجابته الترددية هي $T_s rect(f/f_s)$، لمعالجة الإشارة x(t) بطريقتين مختلفتين.

العملية 1: رشح الإشارة واضربها في f_s.

العملية 2 : خذ عينات الإشارة صدمياً بالمعدل المحدد، بعد ذلك رشح الإشارة المعينة صدمياً.

لكل معدل عينة، ارسم الإشارة الأصلية x(t) والإشارة المعالجة y(t) على المدى الزمني التالي: -0.5<t<0.5. في كل حالة، وعن طريق فحص CTFT للإشارات، لماذا تكون الإشارتان أو لا تكونان متشابهتين.

(أ) $f_s=1000$ (ب) $f_s=200$ (ت) $f_s=50$ (ث) $f_s=20$ (ج) $f_s=10$

(ه) $f_s=4$ (ح) $f_s=2$

٤٠- خذ عينات الإشارة التالية:

$$X(t)=\begin{cases}4sin(20\pi t), & -0.2<t<0.2\\ 0, & \text{فيما عدا ذلك}\end{cases}=4sin(20\pi t)rect(t/0.4)$$

على المدى الزمني -0.5<t<0.5 وعند معدلات العينة المبينة ثم استرجع الإشارة تقريبياً باستخدام طريقة الدالة سنك:

$$X(t)=2(f_c/f_s)\sum_{n=-\infty}^{N}X(nT_s)\,sinc\big(2f_c(t-nT_s)\big)$$

فيما عدا مع مجموعة العينات المحددة وباستخدام تردد القطع الموضح للمرشح. بمعنى استخدم:

$$X(t)=2(f_c/f_s)\sum_{n=-N}^{N}X(nT_s)\,sinc\big(2f_c(t-nT_s)\big)$$

حيث N=0.5/Ts. ارسم الإشارة المسترجعة في كل حالة:

(أ) $f_s=20, f_c=10$ (ب) $f_s=40, f_c=10$

(ت) $f_s=40, f_c=20$ (ث) $f_s=100, f_c=10$

(ج) $f_s=100, f_c=20$ (ح) $f_s=100, f_c=50$

معدلات نيكويست

٤١- أوجد معدلات نيكويست للإشارات التالية:

(أ) $X(t)=15rect(300t)cos(10^4\pi t)$

(ب) $X(t)=15sinc(40t)cos(150\pi t)$

(ت) $X(t)=15\left[rect(500t)*\delta_{1/100}(t)\right]cos(10^4\pi t)$

(ث) $X(t)=4\left[sinc(500t)*\delta_{1/200}(t)\right]$

(ج) $X(t) = 2\left[sinc(500t) * \delta_{1/200}(t)\right]cos(10^4\pi t)$

(ح) $X(t) = \begin{cases} |t|, |t|, < 10 \\ 0, |t| \geq 10 \end{cases}$

(خ) $X(t) = -8sinc(101t) + 4cos(200\pi t)$

(د) $X(t) = -32sinc(101t)cos(200\pi t)$

(ذ) $X(t) = 7sinc(99t) * \delta_1(t)$

النسخ المستعارة (التزوير)

٤٢- على مخطط واحد، ارسم الإشارة المتقطعة زمنياً المتكونة عن طريق عينة الدوال الثلاث التالية بمعدل عينة 30Hz :

(أ) $X_1(t) = 4sin(20\pi t)$

(ب) $X_2(t) = 4sin(80\pi t)$

(ج) $X_2(t) = -4sin(40\pi t)$

٤٣- ارسم الدالة $x[n]$ المتكونة عن طريق أخذ عينات الدالة $x(t)=10sin(8\pi t)$ عند ضعف معدل نيكويست. بعد ذلك على المحور نفسه ارسم دالتين آخرتين مستمرتين زمنياً على الأقل التي يمكن أن تعطي العينات نفسها تماما إذا تمت عينتها عند الأزمنة نفسها.

٤٤- دالة جيب تمام $x(t)$ ودالة جيب $y(t)$ بالتردد نفسه تم إضافتها لتكون إشارة مركبة $z(t)$. بعد ذلك تم عينة الإشارة $z(t)$ عند معدل نيكويست لها مع الافتراض المعتاد أن هناك عينة تحدث عند $t=0$. أي واحدة من الإشارات $x(t)$ أم $y(t)$ إذا تمت عينتها بنفسها ستنتج نفس مجموعة العينات.

٤٥- كل واحدة من الإشارات x التالية تمت عينتها لتعطي الإشارة x_s عن طريق ضربها في دالة صدمية دورية على الصورة $\delta_{T_s}(t)$ و $f_s=1/T_s$:

(أ) $x(t)=4cos(20\pi t), f_s=40$ ، ما هو أول تردد موجب فوق 10Hz تكون عنده $X_s(f)$ لا تساوي الصفر ؟

(ب) $x(t)=10tri(t), f_s=4$ ، إذا تم استيفاء الإشارة المعينة ببساطة عن طريق مسك قيمة آخر عينة، ما هي القيمة الممكنة للإشارة المستوفاة عند الزمن $t=0.9$ ؟

أخذ العينات (العيننة) العملية

٤٦- ارسم مقدار الـ CTFT للإشارة $x(t)=25sinc^2(t/6)$. ما هو أقل معدل عينة مطلوب لاسترجاع الإشارة x(t) تماما من عيناتها ؟ قد يبدو أن عدد لا نهائي من العينات قد يكون مطلوبا لاسترجاع x(t) من عيناتها. إذا كان أحدهم يريد أن يطبق موائمة تكون فيها العيننة على أقل زمن ممكن تحتوي 99% من الطاقة في هذا الشكل الموجي، فما هو عدد العينات المطلوبة ؟

٤٧- ارسم مقدار CTFT للإشارة $x(t)=8rect(3t)$. هذه الإشارة ليست محدودة المجال وبالتالي فإنها لا يمكن عيننتها بصورة تامة بحيث يمكن استرجاع الإشارة الأصلية من هذه العينات. كموائمة عملية على ذلك، افترض أن عرض مجال يحتوي ٩٩٪ من طاقة الإشارة x(t) يكون كبيراً بما فيه الكفاية لاسترجاع x(t) من عيناتها. ما هو أقل معدل عينة مطلوب في هذه الحالة ؟

الإشارات الدورية المحدودة المجال

٤٨- كم عدد قيم العينات المطلوبة لتعطي معلومات كافية لوصف الإشارات التالية المحدودة المجال وصفا تاماً :

(أ) $X(t) = 8 + 3cos(8\pi t) + 9sin(4\pi t)$

(ب) $X(t) = 8 + 3cos(7\pi t) + 9sin(4\pi t)$

٤٩- مطلوب أخذ عينات الإشارة $x(t)=15[sinc(5t)*\delta_2(t)]sin(32\pi t)$ لتكون الإشارة x[n]. خذ العينات عند معدل نيكويست ثم عند المعدل الأعلى الذي يكون عنده عدد العينات لكل دورة رقم صحيح. ارسم الإشارات ومقدار CTFT للإشارة المستمرة زمنياً و DTFT للإشارة المتقطعة زمنياً.

٥٠- إشارة x(t) دورية ودورة أساسية واحدة من هذه الإشارة يمكن وصفها كما يلي :

$$X(t) = \begin{cases} 3t, & 0 < t < 5.5 \\ 0, & 5.5 < t < 8 \end{cases}$$

أوجد عينات هذه الإشارة على مدار دورة أساسية واحدة المعيننة بالمعدل 1Hz (تبدأ عند الزمن t=0). بعد ذلك ارسم بالمقياس نفسه دورتين اساسيتين من الإشارة الأصلية ودورتين أساسيتين من الإشارة الدورية، والتي تكون محدودة المجال عند 0.5Hz أو أقل والتي من الممكن أن يكون لها هذه العينات نفسها.

DFT

٥١- إشارة x(t) تم عيننتها ٤ مرات وهذه العينات هي {x[0], x[1], x[2],x[3]}. الـ DFT لهذه العينات هو {X[0], X[1], X[2], X[3]}. X[3] يمكن كتابتها كما يلي : X[3]=ax[0]+bx[1]+cx[2]+dx[3]، فما هي قيمة كل من a و b و c و d ؟

٥٢- خذ عينات الإشارة المحدودة المجال x(t)=15cos(300πt)+40sin(200πt) عند معدل نيكويست الخاص بها تماماً على مدار دورة أساسية واحدة تماماً من x(t). أوجد DFT لهذه العينات. من DFT أوجد الدالة التوافقية للـ CTFS. إرسم CTFS الناتج وقارنه مع الإشارة x(t). اشرح أي فروق. أعد مع معدل العينة الذي يساوي ضعف معدل نيكويست.

٥٣- خذ عينات الإشارة المحدودة المجال x(t)=8cos(50πt)-12sin(80πt) عند معدل نيكويست الخاص بها تماماً على مدار دورة أساسية واحدة تماماً من x(t). أوجد DFT لهذه العينات. من DFT أوجد الدالة التوافقية للـ CTFS. ارسم CTFS الناتج وقارنه مع الإشارة x(t). اشرح أي فروق. أعد مع معدل العينة الذي يساوي ضعف معدل نيكويست.

٥٤- إشارة x(t) دورية ومحدودة المجال أعلى تردد فيها هو 25Hz تمت عينتها عند المعدل 100Hz على مدى دورة أساسية واحدة تماما لتكوين الإشارة x[n]. هذه العينات هي :

$$\{X[0], X[1], X[2], X[3]\} = \{a, b, c, d\}$$

افترض أن دورة واحدة من الـ DFT لهذه العينات ستكون {X[0], X[1], X[2], X[3]} :

(أ) ما هي قيمة X[1] بدلالة a و b و c و d ؟

(ب) ماهي القيمة المتوسطة لـ x(t) دلالة a و b و c و d ؟

(ج) واحد من الأرقام {X[0], X[1], X[2], X[3]} يجب أن يكون صفراً. فما هو ولماذا؟

(د) اثنان من الأرقام {X[0], X[1], X[2], X[3]} يجب أن يكونا حقيقيين. فما هما ولماذا؟

(ه) إذا كان X[1]=2+j3 ، فما هي القيمة العددية لـ X[3] ولماذا ؟

٥٥- باستخدام ماتلاب :

(أ) أوجد تتابعاً شبه عشوائي من 256 نقطة بيانات في صورة متجه x باستخدام الدالة rand ، وهي دالة ضمنية في ماتلاب.

(ب) أوجد DFT لهذا التتابع وضعه في المتجه X.

(ج) افترض متجهاً آخر X1pf يساوي المتجه X.

(د) غير كل القيم في المتجه X1pf إلى الصفر فيما عدا أول 8 نقاط وآخر 8 نقاط.

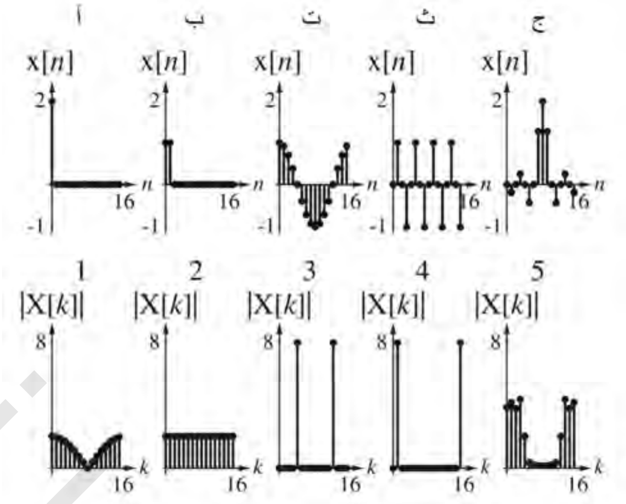
(ه) أوجد الجزء الحقيقي في معكوس الـ DFT للمتجه X1pf وضعه في متجه آخر x1pf.

(و) أوجد مجموعة من 256 عينة زمنية تبدأ عند t=0 ومنفصلة بمقدار واحد بانتظام.

(ز) ارسم x و x1pf مع الزمن t على التدريج نفسه وقارنهما.

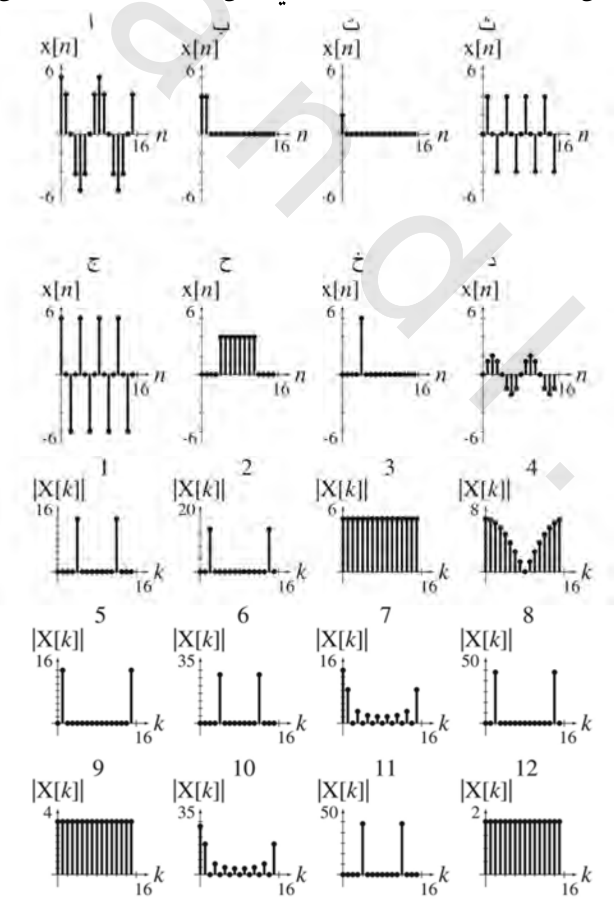
ما هو نوع تأثير هذه العملية على مجموعة البيانات ؟ لماذا يسمى متجه البيانات الناتج x1pf؟

٥٦- في شكل (ت- ٥٦) وائم كل دالة مع مقادير DFT المقابلة :



شكل رقم (ت–٥٦)

٥٧- لكل x[n] في شكل (ت- ٥٧) أوجد X[k] التي تمثل مقدار الـ DFT المقابل :



شكل رقم (ت–٥٧).