الفصل الحادي عشر

تحليل الاستجابة الترددية

(١١,١) المقدمة والأهداف

حتى هذه النقطة كانت المادة العلمية المقدمة في هذا الكتاب رياضية بدرجة عالية وملخصة، أو نظرية أو تجريدية. لقد رأينا بعض الأمثلة بشكل عرضي أو متقطع على استخدام هذه الطرق لتحليل الإشارات والأنظمة ولكننا لم نستعرض هذا الاستخدام بعمق في الحقيقة. وصلنا نحن الآن إلى النقطة التي أصبح لدينا عندها ما يكفي من الأدوات النظرية للتعامل مع بعض أنواع الإشارات المهمة والأنظمة، ولكي نثبت لماذا تكون طرق النطاق الترددي مشهورة وفعالة بهذا الشكل في تحليل العديد من الأنظمة. بمجرد أن نبني أدوات حقيقية ونتعود على طرق النطاق الترددي سنفهم لماذا يقضي العديد من المهندسين المحترفين كل وقتهم في "النطاق الترددي" لتوليد، وتصميم، وتحليل الأنظمة باستخدام هذه الطرق التحويلية.

كل نظام LTI له استجابة صدمية ومن خلال تحويل فورير لها، نحصل على الاستجابة الترددية، ومن خلال تحويل لا بلاس لهذه الاستجابة الصدمية أيضاً نحصل على دالة العبور. سنقوم بتحليل أنظمة تسمى مرشحات يتم تصميمها لكي يكون لها استجابة ترددية معينة. سنعرف تعبير المرشح المثالي، وسنرى طرقاً لتقريب هذا المرشح المثالي. حيث إن الاستجابة الترددية تكون على هذه الدرجة من الأهمية في تحليل الأنظمة، فإننا سنقدم طرقا فعالة لإيجاد الاستجابة الترددية للأنظمة المعقدة.

أهداف الفصل

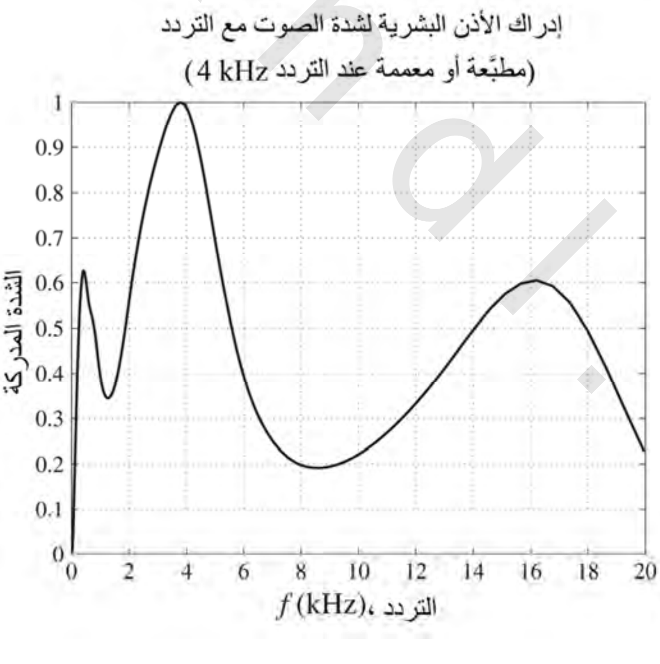
١- لنعرض استخدام الطرق التحويلية في تحليل بعض الأنظمة مع التطبيقات الهندسية العملية.

٢- لنبني تقدير أو اعتراف بتحليل إشارات القدرة والأنظمة التي يتم إجراؤها مباشرة في النطاق الترددي.

(١١,٢) الاستجابة الترددية

ربما يكون من أكثر الأمثلة شيوعا على الاستجابة الترددية في الاستخدامات الحياتية اليومية هو استجابة الأذن البشرية للأصوات. الشكل رقم (١١,١) التغيرات الاستقبالية لأذن بشرية عادية لشخص صحيح لشدة تردد جيبي منفرد مع تغير التردد من 20Hz حتى 20kHz. هذا المدى من التردد يسمى المدى أو المجال السماعي.

هذه الاستجابة الترددية تكون نتيجة هيكل أو تركيب الآذن. أحد الأنظمة المصممة مع أخذ استجابة الأذن في الاعتبار هو نظام الترفيه الصوتي المنزلي. هذا النظام يعتبر مثالا على الأنظمة المصممة بدون المعرفة الدقيقة لأي الإشارات التي سيقوم هذا النظام بمعالجتها أو كيف ستتم المعالجة التامة لها، ولكن من المعروف أن هذه الإشارات تقع في المدى الترددي المسموع. حيث البشر على اختلاف أنواعهم يكون لهم أذواق مختلفة للموسيقي وكيف يجب أن تسمع هذه الموسيقي، فإن مثل هذه الأنظمة يجب أن يكون بها بعض المرونة. أي نظام صوتي يكون به مكبر قادر على ضبط الشدة النسبية لأي تردد مع الترددات الأخرى من خلال الضوابط النغمية مثل ضابط جهارة الصوت، وضابط الثلاثية، وتعويض الشدة أو مخطط التعادل. كل هذه الضوابط تسمح لأي مستخدم للنظام بضبط الاستجابة الترددية للحصول على أحسن استماع لأي نوع من أنواع الموسيقي.



الشكل رقم (١١,١) متوسط إدراك الأذن البشرية لشدة نغمة صوتية ذات مقدار ثابت كدالة في التردد

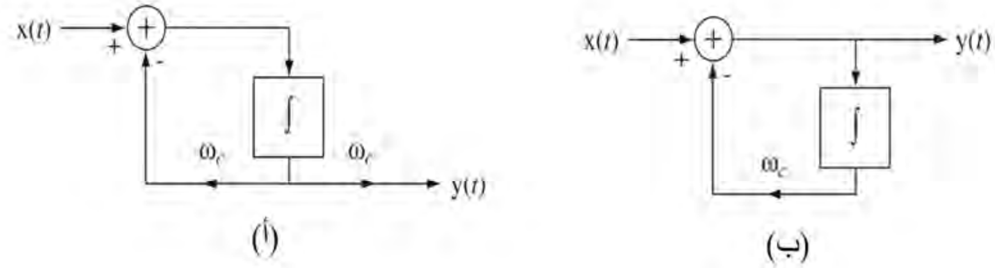
ضوابط المكبرات الصوتية تعتبر أمثلة جيدة على الأنظمة المصممة في النطاق الترددي. الغرض من هذه الضوابط هو تشكيل الاستجابة الترددية لهذه المكبرات. يتم استخدام تعبير المرشح أو الترشيح في الأنظمة التي يكون الغرض الأساسي منها هو تشكيل الاستجابة الترددية. لقد رأينا مسبقاً القليل من الأمثلة على المرشحات الموصوفة بأنها مرشحات منفذة للترددات المنخفضة، أو منفذة للترددات العالية، أو منفذة لمجال من الترددات، أو عائقة أو محبطة لمجال من الترددات. ماذا تعني كلمة مرشح على العموم ؟ المرشح هو جهاز لفصل شيء مرغوب من شيء آخر غير مرغوب فيه. مرشح القهوة يفصل القهوة المطلوبة من حبيبات القهوة غير المطلوبة. مرشح الزيت يتخلص من الجزيئات غير المرغوب فيها في الزيت. في العادة يعرف المرشح في تحليل الإشارات والأنظمة على أنه جهاز يؤكد أو يقوي طاقة الإشارة في مدى ترددي معين بينما يحبط أو يوهن من طاقة الإشارة في مدى ترددي آخر.

(١١,٣) المرشحات المستمرة زمنياً

أمثلة على المرشحات

المرشحات يكون لها مجال للمرور ومجال آخر للإيقاف. مجال المرور هو المدى الترددي الذي يسمح فيه المرشح لطاقة الإشارة بالمرور دون أن تتأثر نسبياً. مجال الوقف أو الإعاقة هو المدى الترددي الذي فيه يحبط المرشح أو يوهن من طاقة الإشارة، ويسمح بالقليل جداً من هذه الطاقة بالمرور. الأربعة أنواع الأساسية من المرشحات هي: المنفذة للترددات المنخفضة، والمنفذة للترددات العالية، والمنفذة لمجال من الترددات والمحبطة لمجال من الترددات. في المرشحات المنفذة للترددات المنخفضة يكون مجال المرور أو السماح هو منطقة من الترددات المنخفضة ومجال الإيقاف أو الإحباط هو منطقة من الترددات المرتفعة. في المرشحات المنفذة للترددات المرتفعة تنعكس هاتان المنطقتان، حيث يتم توهين أو إعاقة الترددات المنخفضة ويتم السماح للترددات العالية. المرشح المنفذ لمجال من الترددات يكون له مجال مرور متوسط من الترددات ويوقف كل من الترددات المنخفضة والعالية. المرشح المحبط لمجال من الترددات يعكس كل من مجال المرور ومجال الوقف في المرشح المنفذ لمجال من الترددات.

الضبط المبسط لكل من حجم أو مستوى الجهورية والثلاثية (الترددات المنخفضة والعالية) في المكبر الصوتي يمكن أن يتم عن طريق استخدام مرشحات منفذة للترددات المنخفضة وأخرى منفذة للترددات المرتفعة بترددات ركنية مختلفة. لقد رأينا دوائر لبناء المرشحات المنفذة للترددات المنخفضة. يمكننا أيضاً عمل مرشح منفذ للترددات المنخفضة عن طريق استخدام بلوكات أو وحدات بنائية قياسية من الأنظمة المستمرة زمنياً و المكاملات، والمكبرات ونقاط التجميع كما في الشكل رقم (١١,٢أ).



الشكل رقم (١١،٢) مرشحات بسيطة، (أ) مرشح منفذ للترددات المنخفضة، (ب) مرشح منفذ للترددات العالية.

النظام الموجود في الشكل رقم (١١،٢أ) هو مرشح منفذ للترددات المنخفضة بتردد ركني هو ω_c (بالراديان على الثانية) ومقدار الاستجابة الترددية الذي يقترب من الواحد عن الترددات المنخفضة. إن ذلك يعتبر نظاماً بسيطاً بالطريقة المباشرة II. دالة العبور لهذا النظام هي :

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s+\omega_c}$$

ولذلك، فإن الاستجابة الترددية ستكون :

$$H(f) = H(s)_{s\to j2\pi f} = \frac{2\pi f_c}{j2\pi f + 2\pi f_c} = \frac{f_c}{jf + f_c} \text{ أو } H(j\omega) = H(s)_{s\to j\omega} = \frac{\omega_c}{j\omega + \omega_c}$$

حيث $\omega_c=2\pi f_c$. النظام الموضح في الشكل رقم (١١،٢ب) هو مرشح منفذ للترددات العالية بتردد ركني ω_c. دالة العبور لهذا المرشح والاستجابة الترددية له ستكونان كما يلي :

$$H(s) = \frac{s}{s+\omega_c}, \qquad H(j\omega) = \frac{\omega_c}{j\omega + \omega_c}, \qquad H(f) == \frac{f_c}{jf + f_c}$$

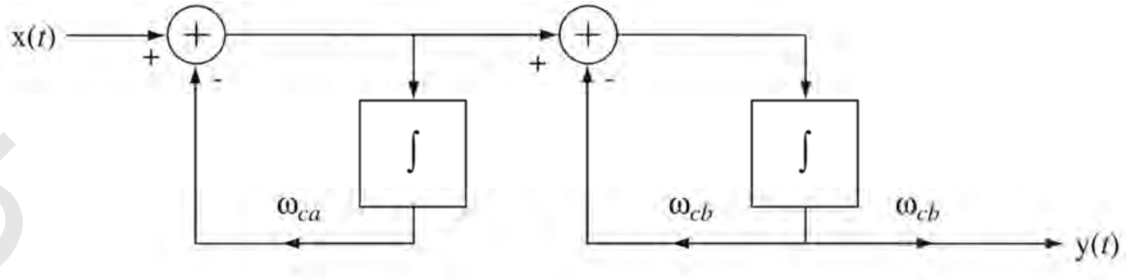
في أي واحد من المرشحين، إذا تم تغيير ω_c، فإن الطاقة النسبية للإشارة عند الترددات المنخفضة والمرتفعة يمكن ضبطها. هذان النظامان يمكن وضعهما على التوالي لتكوين مرشح منفذ لمجال من الترددات كما في الشكل (١١،٣). دالة العبور والاستجابة الترددية للمرشح المنفذ لمجال من الترددات ستكونان كما يلي :

$$H(s) = \frac{s}{s+\omega_{ca}} \times \frac{\omega_{cb}}{s+\omega_{cb}} = \frac{\omega_{cb}\mathrm{s}}{\mathrm{s}^2 + (\omega_{ca}+\omega_{cb})s + \omega_{ca}\omega_{cb}}$$

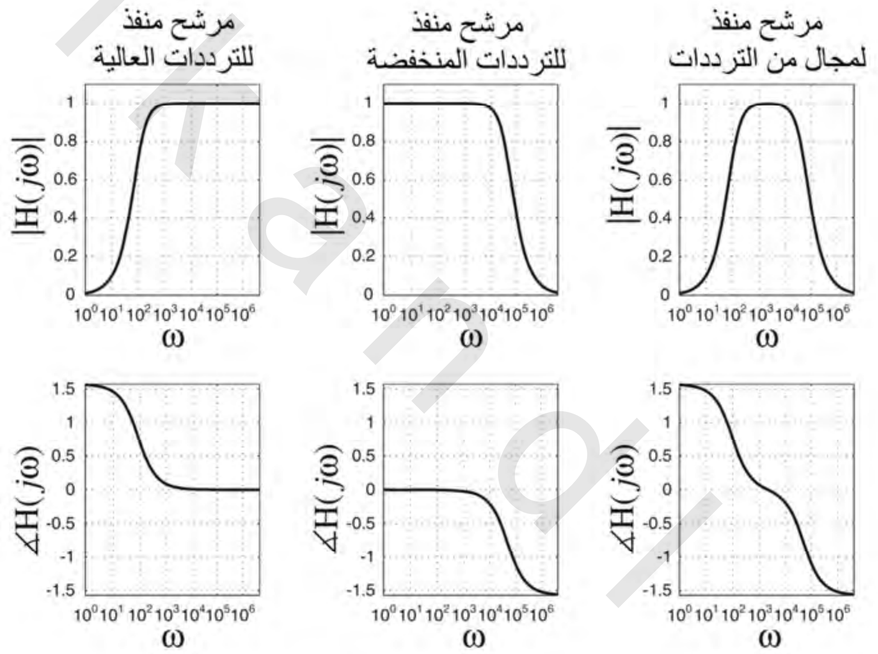
$$H(j\omega) = \frac{j\omega\omega_{cb}}{(j\omega)^2 + j\omega(\omega_{ca}+\omega_{cb}) + \omega_{ca}\omega_{cb}}$$

$$H(f) == \frac{jff_{cb}}{(jf)^2 + jf(f_{ca}+f_{cb}) + f_{ca}f_{cb}}$$

$$f_{ca} = \omega_{ca}/2\pi\ ,\ f_{cb} = \omega_{cb}/2\pi$$



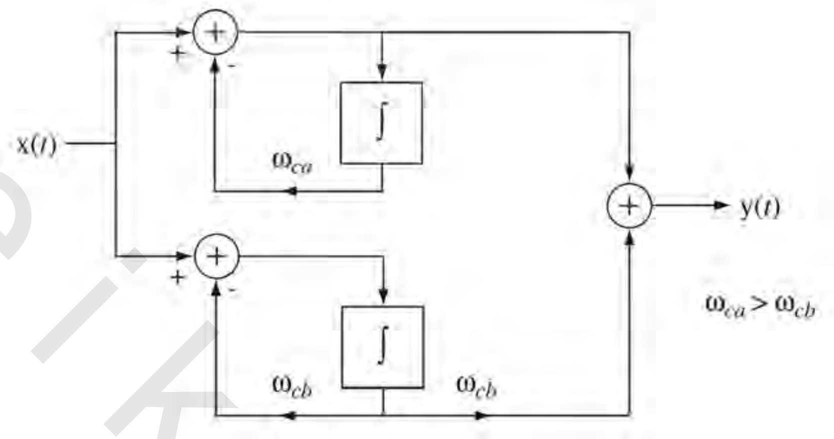
الشكل رقم (١١,٣) مرشح منفذ لمجال من الترددات عن طريق تتابع مرشح منفذ للترددات العالية وآخر منفذ للترددات المنخفضة



الشكل رقم (١١,٤) الاستجابات الترددية لمرشح منفذ للترددات العالية، وآخر منفذ للترددات المنخفضة، وآخر منفذ لمجال من الترددات

كمثال على ذلك سنفترض أن ω_{ca}=100 وأن ω_{cb}=50000. وبالتالي فإن الاستجابات الترددية لكل من المرشح المنفذ للترددات المنخفضة، والمنفذ للترددات المرتفعة، والمنفذ لمجال من الترددات ستكون كما هو موضح في الشكل (١١,٤).

يمكن بناء المرشح المعوق لمجال من الترددات عن طريق التوصيل على التوازي لمرشح منفذ للترددات المنخفضة وآخر منفذ للترددات المرتفعة إذا كان التردد الركني للمرشح المنفذ للترددات المنخفضة أقل من التردد الركني للمرشح المنفذ للترددات المرتفعة كما في الشكل (١١,٥).



الشكل (١١,٥) مرشح معوق لمجال من الترددات تم تكوينه عن طريق توصيل مرشح منفذ للترددات المنخفضة وآخر منفذ للترددات المرتفعة

دالة العبور والاستجابة الترددية للمرشح المعوق لمجال من الترددات ستكونان كما يلي :

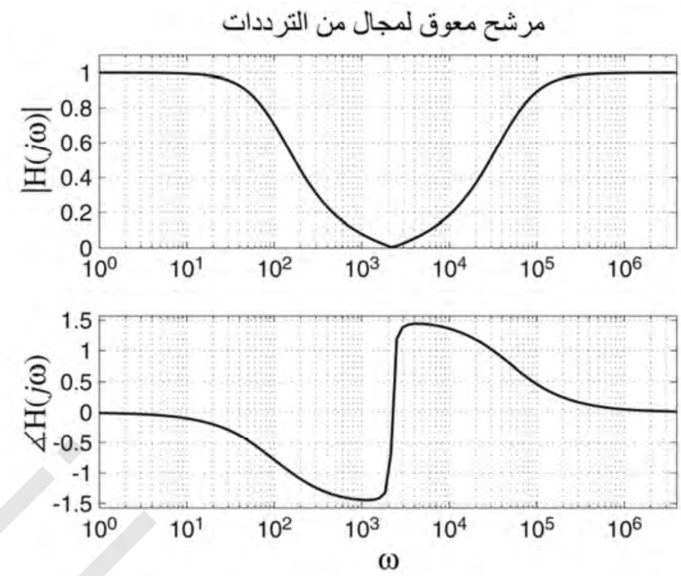
$$H(s) = \frac{s^2+2\omega_{cb}s+\omega_{ca}\omega_{cb}}{s^2+(\omega_{ca}+\omega_{cb})s+\omega_{ca}\omega_{cb}}$$

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2+j2\omega\omega_{cb}+\omega_{ca}\omega_{cb}}{(j\omega)^2+j\omega(\omega_{ca}+\omega_{cb})+\omega_{ca}\omega_{cb}}$$

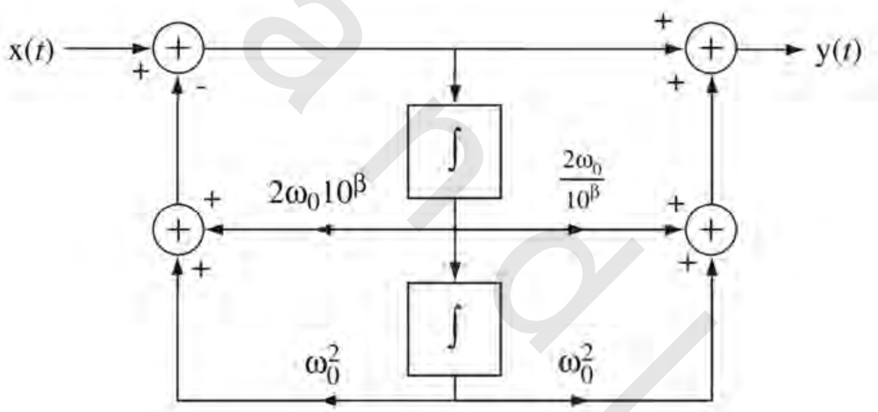
$$H(f) = \frac{(jf)^2+j2ff_{cb}+f_{ca}f_{cb}}{(jf)^2+jf(f_{ca}+f_{cb})+f_{ca}f_{cb}}$$

$$f_{ca} = \omega_{ca}/2\pi\ ,\ f_{cb} = \omega_{cb}/2\pi$$

إذا افتراضنا كمثال على ذلك أن ω_{ca}=50000 وأن ω_{cb}=100 فإن الاستجابة الترددية للمرشح المعوق المجال من الترددات ستكون كما في الشكل (١١,٦).



الشكل رقم (١١,٦) مرشح معوق لمجال من الترددات



الشكل رقم (١١,٧) نظام مزدوج التربيع

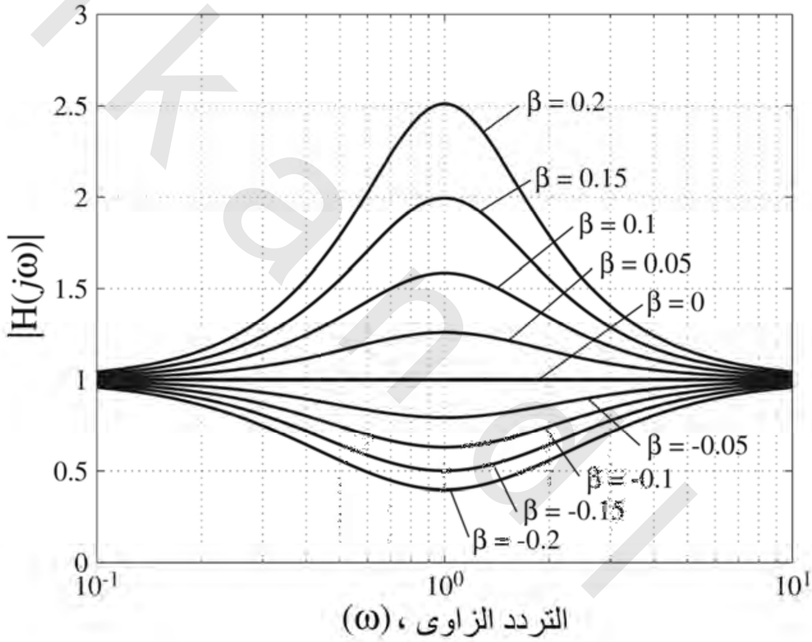
المعادل التخطيطي graphic equalizer يكون أكثر تعقيداً من المرشحات المنفذة للترددات المنخفضة، والمنفذة للترددات المرتفعة، والمنفذة لمجال من الترددات البسيطة. إنها يكون لديها العديد من المرشحات المتتالية، كل منها يمكنه أن يزيد أو ينقص من الاستجابة الترددية للمكبر في مجال ضيق من الترددات. افتراض النظام الموضح في الشكل (١١,٧). دالة العبور والاستجابة الترددية له ستكون كما يلي:

$$H(s) = \frac{s^2 + 2\omega_0 s/10^\beta + \omega_0^2}{s^2 + 2\omega_0 s \times 10^\beta + \omega_0^2}$$

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + j2\omega_0\omega/10^\beta + \omega_0^2}{(j\omega)^2 + j2\omega_0\omega \times 10^\beta + \omega_0^2}$$

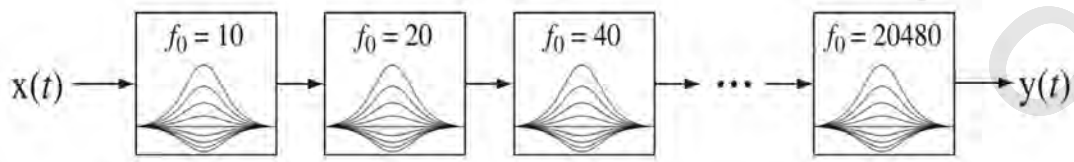
هذه الدالة تكون مزدوجة التربيع في المتغير s، بمعنى أنها نسبة بين كثيرتي حدود تربيعيتين. إذا رسمنا مقدار الاستجابة الترددية مع $\omega_0=1$ لقيم متعددة للمعامل β، فإنه يمكننا أن نرى كيف يمكن استخدام هذا النظام كأحد المرشحات في المعادل التخطيطي كما في الشكل رقم (١١,٨).

من الواضح أنه بالاختيار المناسب للمعامل β، فإن هذا المرشح يمكنه أن يقوي أو يدعم الإشارات بالقرب من تردده المركزي w_0 وله استجابة ترددية تقترب من الواحد عند الترددات البعيدة من تردده المركزي. يمكن استخدام مجموعة من المرشحات المتوالية من هذا النوع، وكل منها يكون له تردد مركزي مختلف، لتقوية أو تضعيف العديد من المجالات الترددية وبالتالي تقريب الاستجابة الترددية من أي شكل يريده المستخدم كما في الشكل رقم (١١,٩).



الشكل رقم رقم (١١,٨) مقدار الاستجابة الترددية التالية:

$$H(j\omega)=\frac{(j\omega)^2+j2\omega/10^{\beta}+1}{(j\omega)^2+j2\omega\times10^{\beta}+1}$$

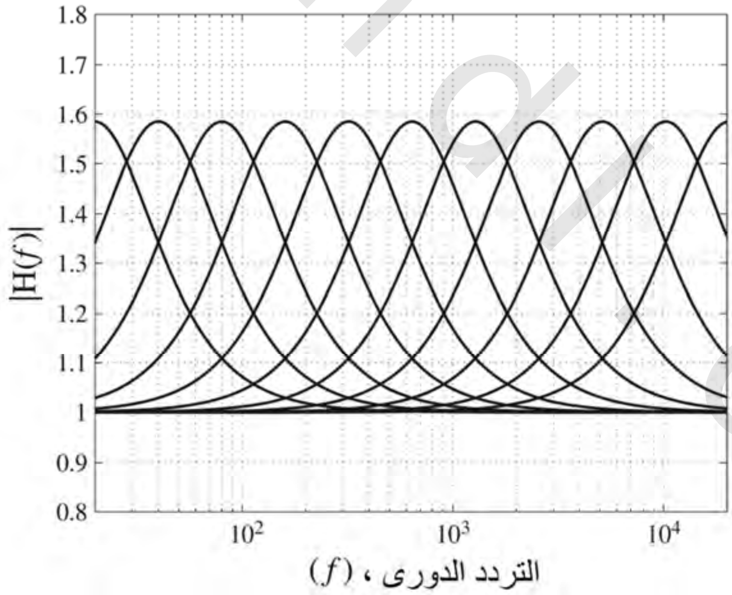


الشكل رقم (١١,٩) رسم صندوقي لمهوم المعادل التخطيطي

بوضع كل المرشحات بحيث يقوم كل منها بتقوية مجاله الترددي، فإن مقدار الاستجابة الترددية لهذه الأنظمة الجانبية من الممكن أن تكون كما في الشكل رقم (١١,١٠). الترددات المركزية لهذه المرشحات هي 20Hz، و 40Hz، و 80Hz، و....، و 20480 Hz. هناك مسافة بين كل مرشح والتالي تقدر بمسافة ضعفية ترددية octave أو الأوكتاف. الأوكتاف هو تغير بمقدار الضعف في التردد. إن ذلك يجعل التردد المركزي لهذه المرشحات متباعدة بانتظام على المقياس اللوغاريتمي، وعروض المجال لهذه المرشحات تكون أيضاً منتظمة على هذا التدريج اللوغاريتمي.

مثال آخر على نظام مصمم للتعامل مع إشارات غير معروفة من الممكن أن يكون بناء نظام جهاز قياس الضغط، والحرارة، والتدفق، وهكذا في أي عملية صناعية. إننا لا نعلم كيف تتغير معاملات هذه العمليات تماماً. ولكنها عموماً تقع خلال مدى معروف ولا يمكنها أن تتغير بأسرع من معدل معين نتيجة بعض الحدود الطبيعية للعملية. للمرة الثانية، فهذه المعرفة تسمح لنا بتصميم نظام للمعالجة المناسبة لهذا النوع من الإشارات.

على الرغم من أن خواص الإشارة الصحيحة قد لا تكون معروفة، إلا أننا في العادة نعرف شيئا عنها. إننا في العادة نعرف طيف القدرة التقريبي لها. بمعنى، أننا نعرف وصفاً تقريبياً لطاقة الإشارة في النطاق الترددي. إذا كنا لا نستطيع حساب طيف القدرة رياضيا، فإننا نستطيع تقديره اعتماداً على معرفة طبيعة النظام الذي تسبب في توليده أو أننا نستطيع قياسه. أحد الطرق لقياس هذا الطيف قد تكون من خلال استخدام المرشحات.



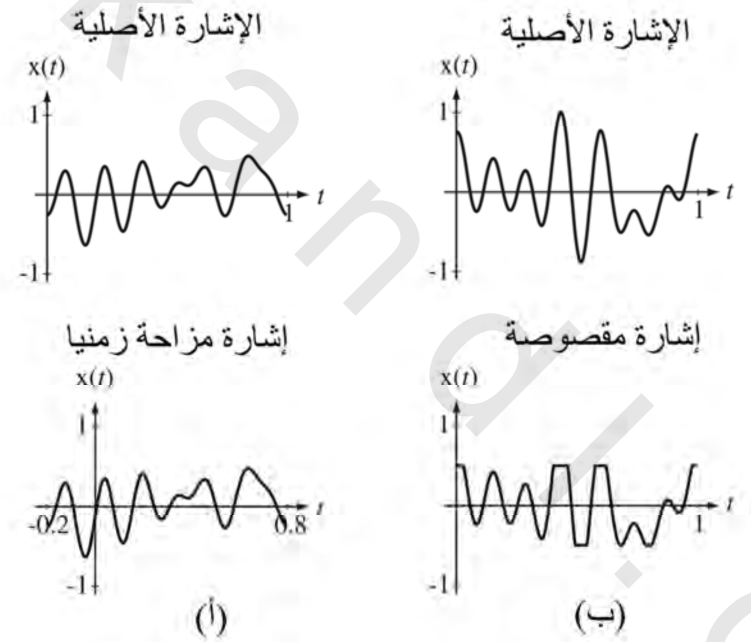
الشكل رقم (١١,١٠) مقدار الاستجابة الترددية لأحد عشر مرشحا موزعة على المدى السماعي.

المرشحات المثالية

التشويه

المرشح المثالي المنفذ للترددات المنخفضة من الممكن أن يمرر كل طاقة الإشارة عند الترددات التي تحت قيمة عظمى معينة، بدون أي تشويه للإشارة في هذا المدى الترددي، ويوقف أو يعوق أو يحجز كل طاقة الإشارة عند الترددات الأعلى من هذه القيمة العظمى. من المهم هنا أن نحدد أو نعرف بدقة ماذا نعني بالتشويه. في العادة يتم تفسير التشويه في تحليل الإشارات والأنظمة أنه يعني أي تغيير في شكل الإشارة. ضرب الإشارة في قيمة ثابتة، أو الإزاحة الزمنية للإشارة، تعتبر تغييرات في الإشارة ولكنها لا تعتبر تشويهاً.

افترض الإشارة x(t) التي لها الشكل الموضح في أعلى الشكل رقم (١١,١١أ). بالتالي فإن الإشارة التي في أسفل الشكل رقم (١١,١١أ) تعتبر نسخة غير مشوهة من هذه الإشارة. الشكل رقم (١١,١١ب) يوضح أحد أنواع التشويه.

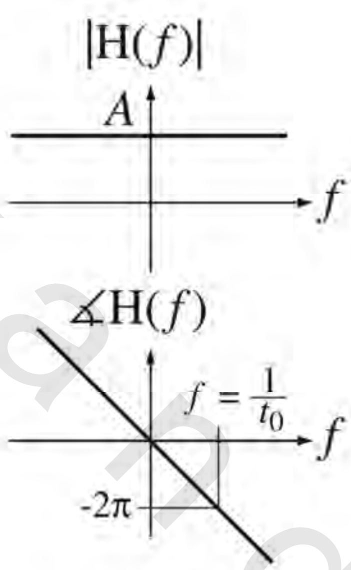


الشكل رقم (١١,١١) (أ) إشارة أصلية ونسخة منها متغيرة ولكنها غير مشوهة (ب) إشارة أصلية ونسخة مشوهة منها

إن استجابة أي نظام LTI تساوي التفاف الإثارة أو الدخل لهذا النظام مع استجابة الصدمة له. أي إشارة يتم التفافها مع وحدة الصدمة الموجودة عند نقطة الأصل لا يغير من هذه الإشارة، بمعنى $x(t)*\delta(t)=x(t)$. إذا كانت الصدمة لها شدة مختلفة عن الواحد، فإن الإشارة سيتم ضربها في هذه الشدة ولكن شكلها لن يتغير، بمعنى $x(t)*A\delta(t)=Ax(t)$. إذا تمت إزاحة وحدة الصدمة، فإن نتيجة الالتفاف سيتم إزاحتها أيضاً ولكن بدون تغيير

شكلها، بمعنى $x(t)*A\delta(t-t_0)=Ax(t-t_0)$. لذلك، فإن الاستجابة الترددية لأي مرشح والتي لا تتغير ستكون هي الصدمة، وهذه الصدمة من الممكن أن يكون لها شدة مختلفة عن الواحد ومن الممكن أيضاً أن تكون مزاحة زمنياً. الاستجابة الترددية المقابلة من الممكن أن تكون CTFT لاستجابة الصدمة

$H(f)=Ae^{-j2\pi f t_0}$. يمكن تمييز الاستجابة الترددية عن طريق مقدارها وزاويتها، $|H(f)|=A$ و $\measuredangle H(f) = -2\pi f t_0$. لذلك فإن أي نظام خالٍ من التشويه يكون له مقدار استجابة ترددية ثابت مع تغير التردد وزاوية تتغير خطيا مع التردد كما في الشكل رقم (١١،٢).



الشكل رقم (١١،١٢) المقدار والزاوية لنظام خالي من التشويه

يجب أن نلاحظ هنا أن استجابة الصدمة الخالية من التشويه أو الاستجابة الترددية هي في الحقيقة مفهوم لا يمكن تحقيقه في أي نظام عملي. لا يوجد نظام حقيقي تكون له استجابة ترددية تكون ثابتة على طول المدى الترددي حتى ما لانهاية. لذلك فإن الاستجابات الترددية لكل الأنظمة الطبيعية الحقيقية يجب أن تقترب من الصفر مع اقتراب التردد من الما لانهاية.

تصنيفات المرشحات

حيث إن الهدف من المرشح يكون هو إزاحة الجزء غير المرغوب فيه من الإشارة ويترك الباقي، فإنه لا يوجد مرشح، ولا حتى المرشح المثالي، يكون خالياً من التشويه لأن مقدار استجابته الترددية لا تكون ثابتة مع

التردد. ولكن المرشح المثالي يكون خالياً من التشويه في خلال مجال التمرير له فقط. مقدار استجابته الترددية يكون ثابتاً خلال مجال التمرير وزاوية الاستجابة الترددية تكون خطية خلال مجال التمرير أيضاً.

يمكننا الآن أن نعرف الأربعة أنواع الأساسية للمرشحات المثالية. في الوصف التالي تكون f_m، و f_L، و f_H كلها قيم موجبة ومحددة.

المرشح المثالي المنفذ للترددات المنخفضة يسمح بمرور طاقة الإشارة للترددات في المدى $0<|f|<f_m$ بدون تشويه ويمنع طاقة الإشارة عند الترددات الأخرى.

المرشح المثالي المنفذ للترددات المرتفعة يمنع مرور طاقة الإشارة للترددات في المدى $0<|f|<f_m$ ويسمح بمرور طاقة الإشارة عند الترددات الأخرى بدون تشويه.

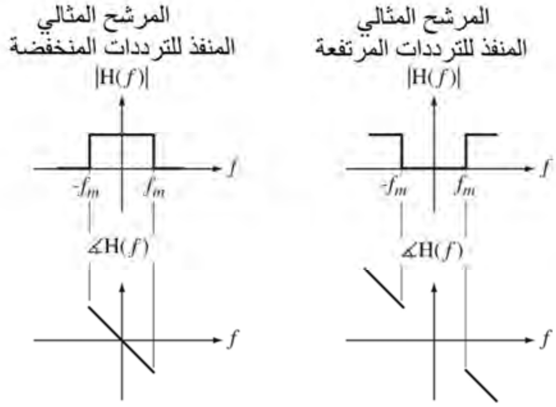
المرشح المثالي المنفذ لمجال ترددي يسمح بمرور طاقة الإشارة للترددات في المدى $f_L<|f|<f_H$ بدون تشويه ويمنع طاقة الإشارة عند الترددات الأخرى.

المرشح المثالي المانع أو المعوق لمجال ترددي يمنع مرور طاقة الإشارة للترددات في المدى $f_L<|f|<f_H$ ويسمح بمرو طاقة الإشارة عند الترددات الأخرى بدون تشويه.

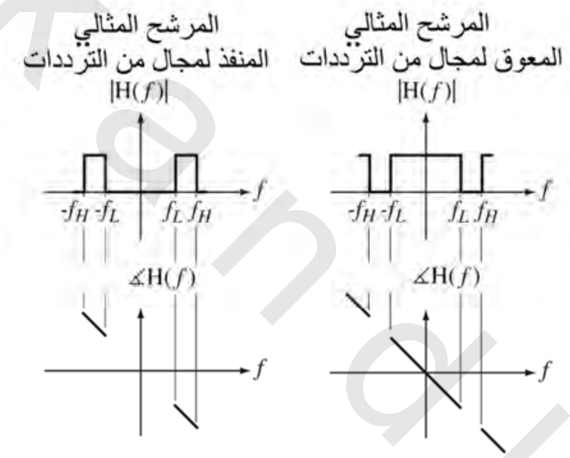
الاستجابة الترددية للمرشحات المثالية

الشكل رقم (١١،١٣) والشكل رقم (١١،١٤) يوضحان مقدار وزاوية الاستجابة الترددية للأصناف الأربعة من المرشحات المثالية.

من المناسب هنا أن نعرف كلمة شائعة الاستخدام في تحليل الإشارات والأنظمة، وهي عرض المجال bandwidth. إن تعبير عرض المجال يتم تطبيقه على كل من الإشارات والأنظمة. إنها تعني عموماً "مدى من الترددات". إن هذا من الممكن أن يكون مدى من الترددات الموجودة في أي إشارة، أو مدى من الترددات يقوم النظام بتمريره، أو منعه. لأسباب تاريخية فإنه يفسر عادة على أنه مجال الترددات في الفراغ الترددي الموجب. فمثلاً، المرشح المثالي المنفذ للترددات المنخفضة والذي له ترددات ركنية $\pm f_m$ كما هو موضح في الشكل رقم (١١،١٣) نقول أن له عرض مجال يساوي f_m، على الرغم من أن عرض المجال الذي مقداره لا يساوي صفراً يكون من الواضح أنه $2f_m$. المرشح المثالي المنفذ لمجال من الترددات يكون عرض مجاله يساوي f_H-f_L، والتي هي عرض مجال المرور في الفراغ الترددي الموجب.

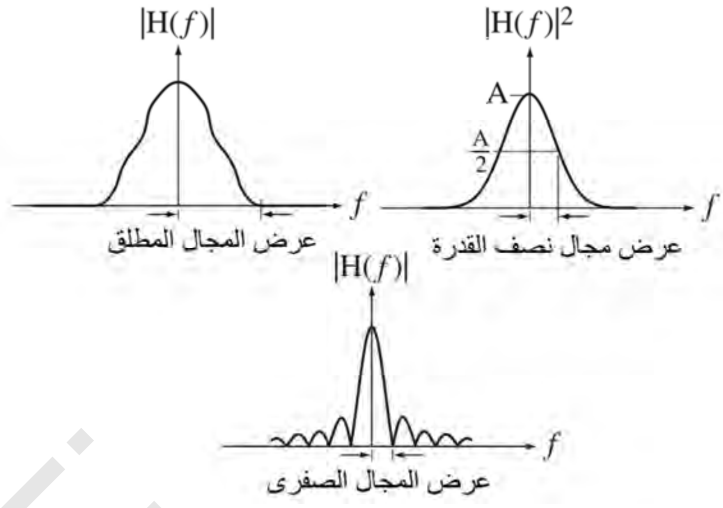


الشكل رقم (١١,١٣) مقدار وزاوية الاستجابات الترددية للمرشح المثالي المنفذ للترددات المنخفضة، والمرشح المثالي المنفذ للترددات



الشكل رقم (١١,١٤) مقدار وزاوية الاستجابات الترددية للمرشح المثالي المنفذ لمجال من الترددات، والمرشح المثالي المعطل لمجال من الترددات

هناك العديد من الأنواع المختلفة لتعريفات عرض المجال منها، عرض المجال المطلق، وعرض مجال نصف القدرة، وعرض المجال الصفري وهكذا كما في الشكل رقم (١١,١٥). كل منها يعد مجالاً من الترددات ولكنه معرف بطريقة مختلفة. فمثلاً، إذا كانت الإشارة ليس لها طاقة على الإطلاق تحت تردد أصغر موجب وفوق تردد أعظم موجب، فإن عرض المجال المطلق يكون هو الفرق بين هذين الترددين. إذا كانت إشارة لها عرض مجال مطلق محدد، فإنها يطلق عليها بأنها ذات عرض مجال شديد التحديد، أو عادة يطلق عليها بأنها محددة المجال. معظم الإشارات الحقيقية لا يعرف بأنها محددة المجال ولذلك كانت هناك حاجة لتعريفات أخرى لعرض المجال.

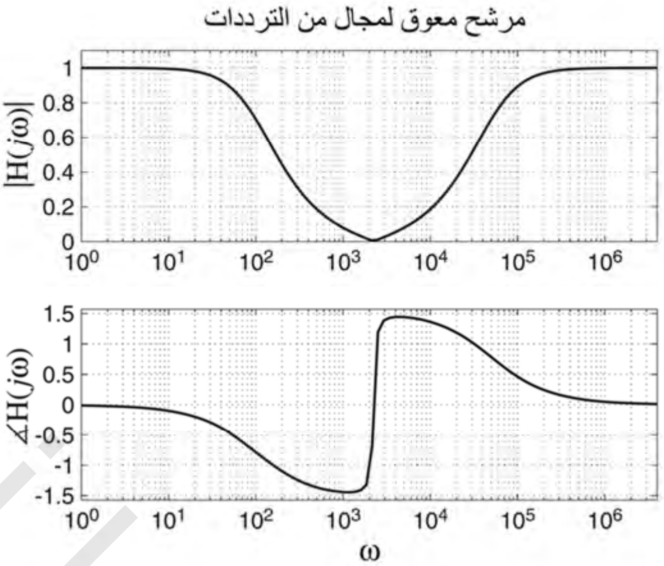


الشكل رقم (١١,١٥) أمثلة على تعريفات عرض المجال

الاستجابة الصدمية والسببية

الاستجابات الصدمية للمرشحات المثالية هي التحويلات العكسية لاستجاباتهم الترددية، الاستجابات الصدمية والترددية للأنواع الأساسية الأربعة للمرشحات المثالية تم تلخيصها في الشكل رقم (١١,١٦).

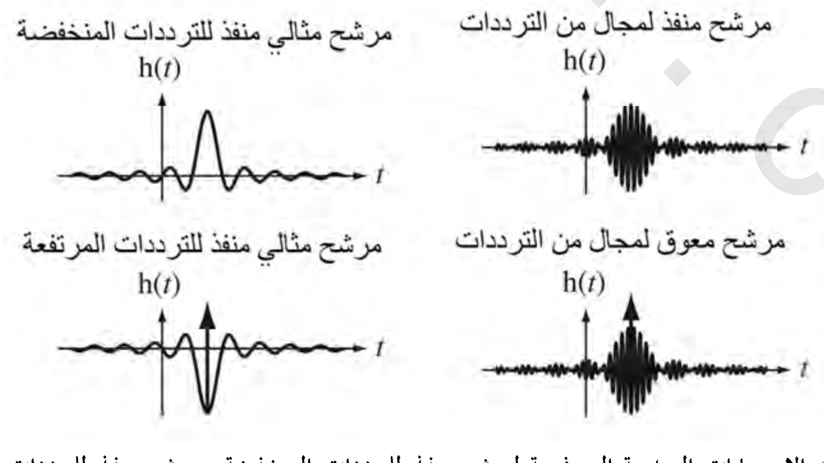
نوع المرشح المثالي	الإستجابة الترددية
منفذ للترددات المنخفضة	$H(f) = A\, rect(f/2f_m)e^{-j2\pi f t_0}$
منفذ للترددات المرتفعة	$H(f) = A\,[1 - rect(f/2f_m)]e^{-j2\pi f t_0}$
منفذ لمجال من الترددات	$H(f) = A\,[rect((f-f_0)/\Delta f) + rect((f+f_0)/\Delta f)]e^{-j2\pi f t_0}$
معوق لمجال من الترددات	$H(f) = A\,[1 - rect((f-f_0)/\Delta f) - rect((f+f_0)/\Delta f)]e^{-j2\pi f t_0}$
نوع المرشح المثالي	الاستجابة الصدمية
منفذ للترددات المنخفضة	$h(f) = 2A\, f_m sinc(2f_m(t-t_0))$
منفذ للترددات المرتفعة	$h(f) = A\delta(t-t_0) - 2A\, f_m sinc(2f_m(t-t_0))$
منفذ لمجال من الترددات	$h(f) = 2A\Delta f sinc(\Delta f(t-t_0))cos(2\pi f_0(t-t_0))$
معوق لمجال من الترددات	$h(f) = A\delta(t-t_0) - 2A\Delta f sinc(\Delta f(t-t_0))cos(2\pi f_0(t-t_0))$
	$\Delta f = f_H - f_L$, $f_0 = (f_H - f_L)/2$



الشكل رقم (١١,١٦) الاستجابات الترددية والاستجابات الصدمية للأنواع الأربعة الأساسية للمرشحات المثالية

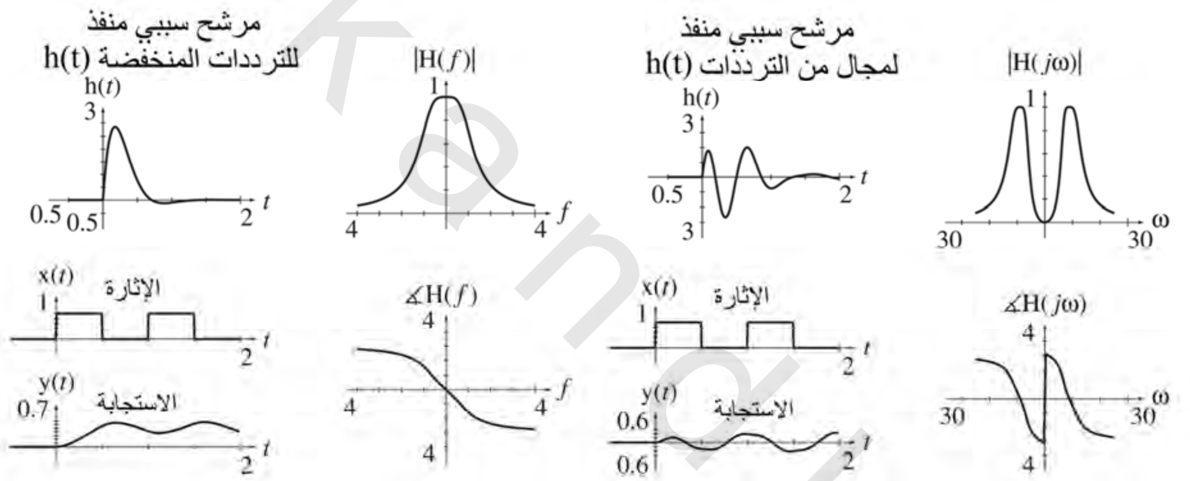
هذه المواصفات تعتبر مواصفات عامة، بمعنى أنها تشتمل على معامل تكبير اختياري ثابت A وزمن تأخير اختياري t_0. لاحظ أن المرشح المثالي المنفذ للترددات المرتفعة والمرشح المثالي المعوق لمجال من الترددات لها استجابات ترددية تمتد حتى المانهاية. وهذا غير ممكن في أي نظام حقيقي طبيعي. لذلك فإن التقريب العملي للمرشح المنفذ للترددات المرتفعة والمرشح المعوق لمجال من الترددات يسمحان للإشارات عالية التردد بالمرور ولكن حتى تردد عالٍ محدد. كلمة "عالي" كلمة نسبية وعملياً يقصد بها في العادة ترددات عالية بعد أي تردد في الإشارة حقيقي نتوقع وجوده في الإشارة.

الشكل (١١,١٧) يوضح أشكالا نموذجية للاستجابات الترددية للأنواع المختلفة للمرشحات المثالية.



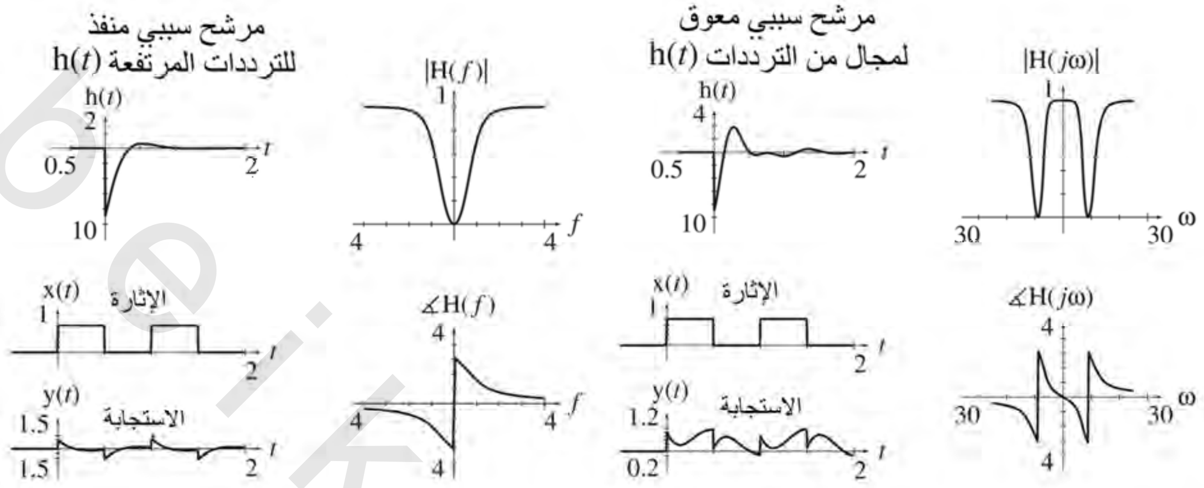
الشكل رقم (١١,١٧) الاستجابات الصدمية النموذجية لمرشح منفذ للترددات المنخفضة، ومرشح منفذ للترددات العالية، ومرشح منفذ لمجال من الترددات، ومرشح معوق لمجال من الترددات

كما ذكرنا مسبقاً، فإن أحد الأسباب في تسمية المرشحات المثالية بمسمى المثالية، هو أنها لا يمكن أن تكون موجودة عملياً. السبب في ذلك ليس ببساطة هو أن مكونات الأنظمة المثالية التي لها مواصفات مثالية لا توجد عمليا (على الرغم من عدم كفاية ذلك)، ولكنه أكثر بدائية من ذلك. افترض الاستجابات الصدمية النموذجية الموضحة في الشكل رقم (١١,١٧). إنها استجابات المرشحات لوحدات صدمة مطبقة عند الزمن t=0. لاحظ أن كل الاستجابات الصدمية لهذه المرشحات المثالية لها قيم غير صفرية قبل تطبيق النبضة عند الزمن t=0. في الحقيقة فإن كل هذه الاستجابات الصدمية تبدأ عند زمن لا نهائي أو غير محدد قبل الزمن t=0. يجب أن يكون من الواضح بديهياً أن الأنظمة الحقيقية لا يمكنها أن تنظر في المستقبل وتتوقع تطبيق الإثارة وتبدأ في الاستجابة لها قبل أن تحدث. إن كل المرشحات المثالية ليست سببية.



شكل رقم (١١,١٨) الاستجابات الصدمية، والاستجابات الترددية، والاستجابات لموجات مربعة لمرشحات سببية منفذة للترددات المنخفضة وأخرى منفذة لمجال من الترددات

على الرغم من عدم إمكانية بناء المرشحات المثالية، فإنه يمكن بناء تقريبات مفيدة لهذه المرشحات. في الشكل رقم (١١,١٨) والشكل رقم (١١,١٩) يوجد بعض الأمثلة على الاستجابات الصدمية، والاستجابات الترددية، والاستجابات لموجات مربعة لبعض المرشحات غير المثالية والسببية التي تقارب الأربعة أنواع الشائعة من المرشحات المثالية.



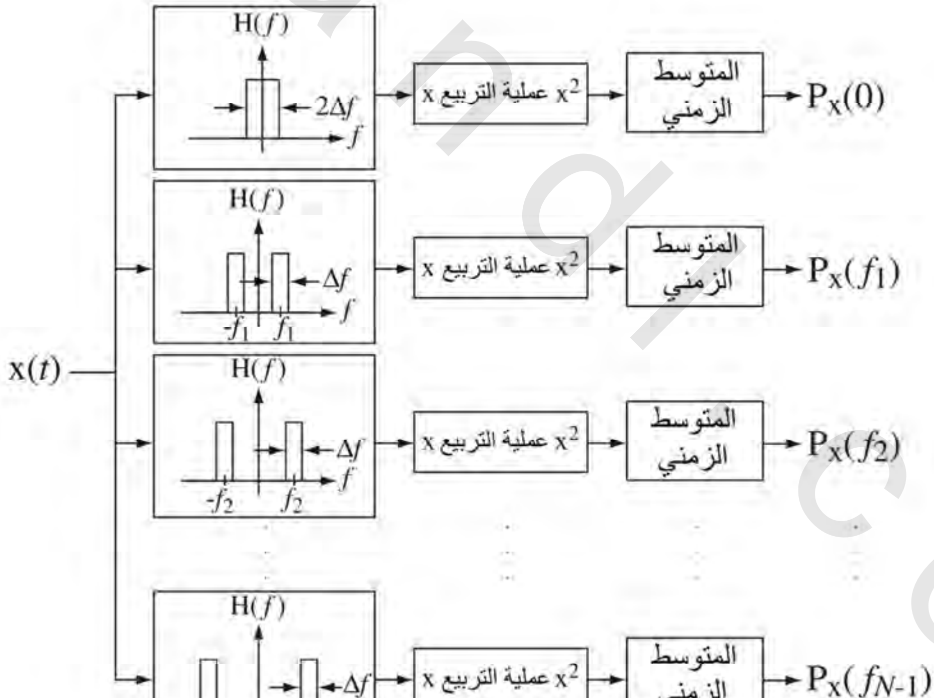
شكل رقم (١١,١٩) الاستجابات الصدمية، والاستجابات الترددية، والاستجابات لموجات مربعة لمرشحات سببية منفذة للترددات المرتفعة وأخرى معوقة لمجال من الترددات

إن المرشح المنفذ للترددات المنخفضة يعمل على تنعيم الموجة المربعة عن طريق التخلص من طاقة الإشارة العالية التردد منها ويترك طاقة الإشارة المنخفضة التردد (بما في ذلك التردد صفر)، مما يجعل القيمة المتوسطة لإشارتي الدخل والخرج تكون هي نفسها؛ (لأن الاستجابة الترددية عند التردد صفر تكون واحداً). المرشح المنفذ لمجال من الترددات يتخلص من طاقة الإشارة العالية التردد، وينعم الإشارة، وتخلص من طاقة الإشارة المنخفضة التردد (بما في ذلك التردد صفر)، مما يجعل القيمة المتوسطة للاستجابة تساوي الصفر.

المرشح المنفذ للترددات المرتفعة يتخلص من طاقة الإشارة المنخفضة التردد من الموجة المربعة، مما يجعل القيمة المتوسطة للاستجابة تساوي صفراً. ولكنه في الوقت نفسه يحتفظ بطاقة الإشارة العالية التردد التي تحدد عدم الاتصال الحاد في الموجة المربعة. المرشح المعوق لمجال من الترددات يتخلص من طاقة الإشارة في مجال صغير من الترددات ويترك طاقات الإشارة المنخفضة التردد والعالية التردد. لذلك فإنه يتم الاحتفاظ بعدم الاتصال في الموجة المربعة وبقيمتها المتوسطة ولكن بعضاً من طاقة الإشارة المتوسطة التردد يتم التخلص منها.

طيف القدرة

واحد من أهداف دخولنا في تحليل المرشحات كان لكي نشرح أحد الطرق في تحديد طيف القدرة لأي إشارة عن طريق قياسها. إن ذلك من الممكن أن يتم عن طريق النظام الموضح في الشكل رقم (١١.٢٠). يتم توجيه الإشارة إلى المرشحات المتعددة المنفذة لمجال من الترددات وكل منها له عرض المجال نفسه ولكن كتردد مركزي مختلف ووحيد. استجابة كل مرشح من هذه المرشحات تمثل جزءاً من الإشارة يقع في المجال الترددي لهذا المرشح. بعد ذلك، فإن الإشارة الخارجة من كل مرشح تدخل على نظام تربيع، وخرج هذا النظام يكون دخلاً لنظام متوسط زمني. نظام التربيع يقوم بتربيع الإشارة، وهذه ليست عملية خطية، وبالتالي فإن هذا النظاماً يكون نظام غير خطي. خرج نظام التربيع يمثل هذا الجزء من طاقة الإشارة اللحظية من الإشارة الأصلية x(t) التي تقع في مجال المرور للمرشح المنفذ لمجال من الترددات. بعد ذلك يقوم النظام التالي بإجراء المتوسط الزمني على هذه الإشارة. كل استجابة خرج $P_x(f_n)$ تمثل مقياس خرج لطاقة الإشارة الأصلية في مجال ضيق من الترددات المتمركزة عند f_n. بأخذ كل هذه المخارج مع بعضها، فإن كل الـ P's تمثل تغير طاقة الإشارة مع التردد، أو ما يسمى بطيف القدرة.

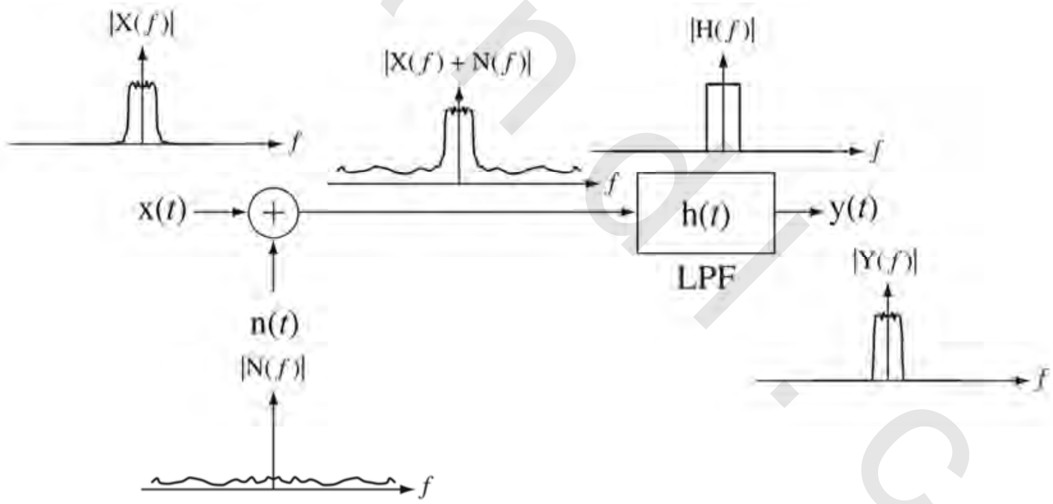


شكل رقم (١١,٢٠) نظام لقياس طيف القدرة لإشارة معينة

إنه من غير المحتمل أن يقوم المهندسون هذه الأيام بالبناء الحقيقي لمثل هذا النظام لقياس طيف القدرة لأي إشارة. الطريقة الأفضل لذلك هي استخدام جهاز يسمى المحلل الطيفي spectrum analyzer. ولكن هذا التوضيح كان مفيداً لأنه يؤكد على مفهوم المرشحات وماذا نعني من لفظ طيف القدرة.

التخلص من الضوضاء

كل إشارة مفيدة يصحبها عادة إشارة أخرى غير مرغوبة تسمى الضوضاء تكون مضافة عليها. أحد أهم الاستخدامات المفيدة للمرشحات هي التخلص من هذه الضوضاء. مصادر الضوضاء عديدة ومتغيرة. يمكن التقليل من هذه الضوضاء بدرجة كبيرة عن طريق التصميم بعناية لهذه المرشحات ولكن لا يمكن التخلص التام منها. كمثال على هذا الترشيح ، افترض أن طاقة الإشارة محددة في مدى ضيق من الترددات المنخفضة وأن طاقة الضوضاء تكون منتشرة على مدى أوسع من الترددات (وهذا يعتبر موقفاً شائعاً). يمكن ترشيح الإشارة زائد الضوضاء باستخدام مرشح منفذ للترددات المنخفضة لتقليل طاقة الضوضاء بدون أي تأثير كبير على طاقة الإشارة كما في الشكل رقم (١١,٢١).



شكل رقم (١١,٢١) التخلص الجزئي من الضوضاء باستخدام مرشح منفذ للترددات المنخفضة

نسبة طاقة الإشارة المرغوب فيها إلى طاقة إشارة الضوضاء تسمى نسبة الإشارة إلى الضوضاء signal to noise ratio وتختصر دائما إلى SNR. ربما يكون الافتراض الأساسي الأكثر أهمية في أنظمة الاتصالات هو تعظيم نسبة الإشارة للضوضاء SNR ، وتعتبر المرشحات من أهم التقنيات في تعظيم الـ SNR.

مخطط بود

الديسبل Decibil

عند رسم مخطط الاستجابة الترددية، فإن مقدار الاستجابة الترددية يتم تحويله في العادة إلى تدريج لوغاريتمي باستخدام وحدة تسمى الديسبل dB. إذا كان مقدار الاستجابة الترددية يُعطى بالعلاقة التالية :

$$|H(j\omega)| = \left|\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right|$$

فإن هذا المقدار معبرا عنه بالديسبل سيكون كما يلي :

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|H(j\omega)| = 20\log_{10}\left|\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right| = |Y(j\omega)|_{dB} - |X(j\omega)|_{dB}$$ المعادلة رقم (١١.١)

إن الاسم ديسبل يأتي من الوحدة الأصلية المعرفة عن طريق مهندسي تليفونات بل Bell Telephone، وهي وحدة البل bel (B)، المسماة على شرف أكسندر جراهام بل مكتشف التليفون. لقد تم تحديد البل بأنه اللوغاريت العادي (القاعدة عشرة) لنسبة القدرة. فمثلاً، إذا كانت إشارة الاستجابة لنظام معين تساوي 100 وكانت إشارة الدخل (معرفة ب الوحدات نفسها) تسوي 20، فإن تكبير قدرة هذا النظام معبراً عنها بالبل ستكون كما يلي :

$$\log_{10}(P_Y/P_X) = \log_{10}(100/20) \cong 0.699\,B$$

وحيث إن مقدمة الكلمة التي هي ديسي deci هي الوحدة العالمية القياسية للعشر (1/10)، فإن الديسبل يساوي عشر البل، وبالتالي فإن نسبة القدرة نفسها معبراً عنها بالديسبل dB ستكون 6.99dB. وبالتالي فإن تكبير القدرة معبراً عنه بالديسبل dB سيكون $10\log_{10}(P_Y/P_X)$. حيث إن طاقة الإشارة تتناسب مع مربع الإشارة نفسها، فإن نسبة الطاقة، معبراً عنها مباشرة بدلالة مقدار الإشارة ستكون :

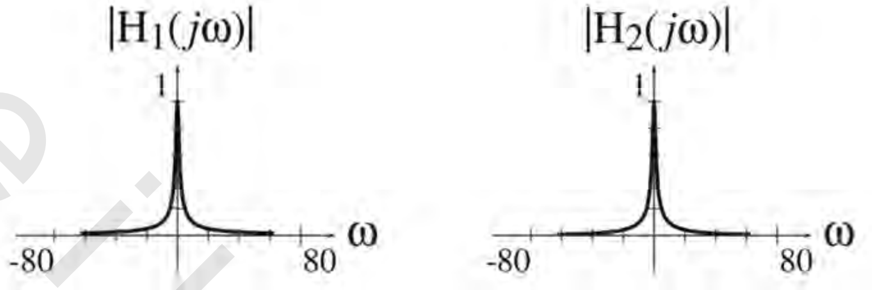
$$10\log_{10}(P_Y/P_X) = 10\log_{10}(Y^2/X^2) = 10\log_{10}[(Y/X)^2] = 20\log_{10}(Y/X)$$

في أي نظام يكون فيه العديد من الأنظمة الجانبية موصلة على التوالي، تكون الاستجابة الترددية الكلية تساوي حاصل ضرب الاستجابات الترددية المنفردة، ولكن الاستجابة الترددية الكلية بالديسبل تساوي مجموع الاستجابات الترددية المنفردة معبراً عن كل منها بالديسبل نتيجة التعريف اللوغاريتمي لـ dB. أيضاً، فإن استخدام الديسبل من الممكن أن يوضح سلوك الاستجابة الترددية الذي يكون من الصعب رؤيته من خلال الشكل الخطي.

قبل أن نفترض الاستجابات الترددية لمرشحات معينة، فإنه من المفيد أن نتعود على طريقة مفيدة جداً وشائعة لعرض الاستجابة الترددية. في العادة تكون مخططات الاستجابة الترددية الخطية، على الرغم من دقتها، لا توضح

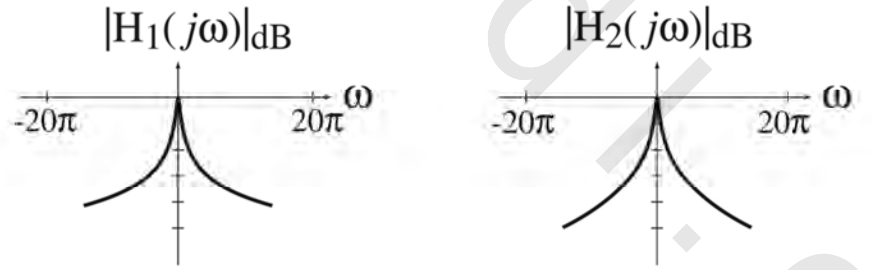
سلوكاً مهماً للنظام. كمثال على ذلك، افترض المخططين لاثنين من الاستجابات الترددية المختلفة الشكل كما يلي، وكما هو موضح في الشكل رقم (١١.٢٢):

$$H_2(j\omega) = \frac{30}{30 - \omega^2 + j31\omega} \text{ و } H_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$



شكل رقم (١١,٢٢) مقارنة بين مقداري اثنين من الاستجابات الترددية المختلفين ظاهرياً.

بالرسم بهذه الطريقة، فإن مقدار الاستجابة الترددية للدالتين يظهران متماثلين تماماً، على الرغم من معرفتنا باختلاف الاستجابتين. أحد الطرق لإظهار الفروق بين مثل هذه الاستجابات الترددية هو رسمها بالديسبل. الديسبل تم تحديده لوغاريتمياً كما رأينا. الرسم اللوغاريتمي يقلل من القيم الكبيرة ويؤكد أو يكبر القيم الصغيرة، وبالتالي فإن الفروق الصغيرة بين الاستجابات الترددية يمكن رؤيتها بسهولة أكثر كما في الشكل رقم (١١.٢٣).



شكل رقم (١١,٢٣) الاستجابتان الترددياتان السابقتان مرسومتان باستخدام مخطط لوغاريتمي للمقدار

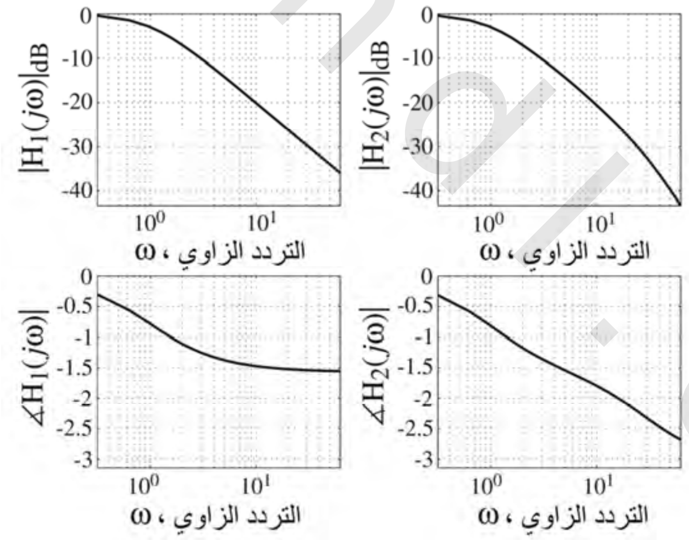
في المخطط الخطي، ظهر سلوك مقدار الاستجابتين الترددتين متماثلاً تماماً لأنه عند القيم الصغيرة يظهر المقداران متماثلين. في مخطط الديسبل، فإن الفرق بين مقدار الاستجابتين الترددتين عند القيم الصغيرة جداً يمكن ملاحظته.

على الرغم من استخدام هذا النوع من المخططات أحياناً، إلا أن الطريقة الأكثر شيوعاً في عرض الاستجابة الترددية هي مخطط بود Bode plot[1] ، أو رسم بود. مثل مخطط المقدار اللوغاريتمي، فإن مخطط بود يظهر الفروق الصغيرة بين الاستجابات الترددية ولكنه يعتبر طريقة نظامية في العرض السريع أو تقدير الاستجابة الكلية لنظام قد يحتوي علي العديد من الاستجابات الترددية المتتالية. مخطط المقدار اللوغاريتمي يكون لوغاريتمياً في بعد واحد. مخطط بود يكون لوغاريتمياً في البعدين. مخطط بود لمقدار الاستجابة الترددية عبارة عن مخطط لمقدار الاستجابة الترددية بالديسبل مع التدريج الترددي اللوغاريتمي. حيث إن تدريج التردد أصبح الآن لوغاريتمياً هو الآخر، فإن الترددات الموجبة فقط هي التي يمكن استخدامها. إن هذا لا يعتبر فقد في المعلومات حيث إنه في الاستجابة الترددية للأنظمة الحقيقية تكون قيم الاستجابة الترددية عند أي تردد سالب تساوي المرافق المركب للقيمة المقابلة عند التردد الموجب.

بالعودة إلى الاستجابتين الترددتين المختلفتين للنظامين السابقين واللذين سنعيد كتابتهما كما يلي :

$$H_2(j\omega)=\frac{30}{30-\omega^2+j31\omega} \text{ و } H_1(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1}$$

إذا قمنا برسم مخطط بود لكل منهما، فإن الفروق بينهما ستصبح أكثر ظهوراً كما في الشكل رقم (١١،٢٤). إن استخدام تدريج الـ dB يجعل سلوك مقداري الاستجابتين الترددتين عند الترددات العالية أكثر تفريقاً.



شكل رقم (١١،٢٤) مخططات بود لمثال الاستجابتين الترددتين.

(١) حصل هندريك بوده على شهادة البكالوريوس في عام ١٩٢٤ والماجستير عام ١٩٢٦ من جامعة ولاية أوهايو. في عام ١٩٢٦ بدأ العمل في مختبرات بل تيلكوم وعمل أيضاً في المرشحات الإلكترونية. وفي اثناء عملة في المختبرات ، ذهب بيل إلى كلية الدراسات العليا في جامعة كولومبيا وحصل على الدكتوراه في ١٩٣٥. في عام ١٩٣٨ استخدم بوده منحنيات القيمة والطور للاستجابة الترددية للدوال المركبة. وفحص استقرار الحلقات المغلقة باستخدام مفاهيم حدود الطور والمكسب. وتستخدم هذه المنحنيات على نطاق واسع مع العديد الأنظمة الإلكترونية. وقام بنشر كتاب نشر هو تحليل الشبكات وتصميم مكبر التغذية العكسية الذي يعتبر من الكتب الهامة هذا المجال. تقاعد بودة في أكتوبر ١٩٦٧ ، وتم اختياره وانتخابه أستاذاً للنظم الهندسية في جامعة هارفارد.

على الرغم من حقيقة أن الفروق بين المستويات المنخفضة لمقدار الاستجابات الترددية يمكن رؤيتها بطريقة أفضل باستخدام مخطط بود تعتبر سبباً جيداً، فإنه ليست تحت أي ظرف تعتبر السبب الوحيد، ولا هي حتى السبب الرئيسي. إن حقيقة أن معاملات التكبير للنظام بالديسبل يتم جمعها بدلا من ضربها في الأنظمة المتتالية يجعل التخطيط التقديري السريع لسلوك التكبير الكلي للنظام أسهل جداً باستخدام مخططات بود عن المخططات الخطية.

معظم الأنظمة الـ LTI يمكن وصفها بمعادلات تفاضلية خطية بمعاملات ثابتة. الصورة الأكثر شيوعاً لهذه المعادلة هي:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} X(t) \qquad \text{المعادلة رقم (١١,٢)}$$

حيث x(t) تمثل الإثارة أو الدخل و y(t) هي الاستجابة أو الخرج. في الفصل ٥ عرفنا أن دالة العبور تكون على الصورة التالية:

$$H(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_1 s + b_0}$$

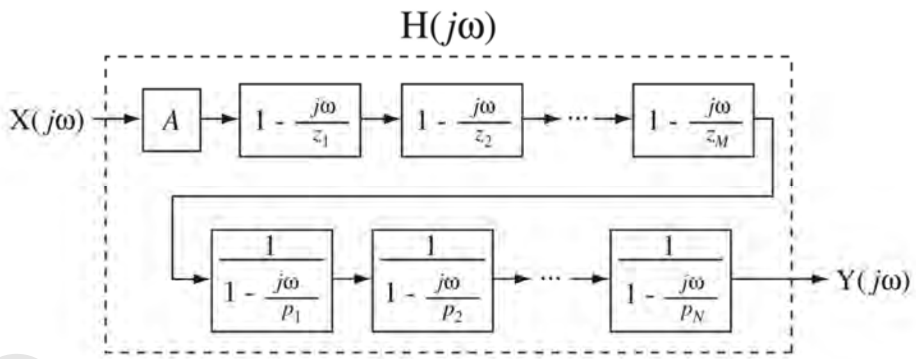
يمكن تحليل كثيرات الحدود في كل من البسط والمقام والتعبير عن دالة العبور كما يلي:

$$H(s) = A \frac{(1 - s/z_1)(1 - s/z_2) \ \dots \ (1 - s/z_m)}{(1 - s/p_1)(1 - s/p_2) \ \dots \ (1 - s/p_m)}$$

حيث كل من الـ z's وال p's تمثل الأصفار والأقطاب.

بالنسبة للأنظمة الحقيقية فإن المعاملات a و b في المعادلة (١١.٢) تكون كلها حقيقية وكل الـ p's والـ z's في صورة المفكوك تكون كلها حقيقية أو تحدث في أزواج مركبة مترافقة، بحيث إنه عند ضرب كل من البسط والمقام في صورة المفكوك للحصول على صورة النسبة بين كثيرتي الحدود فإن معاملات قوى المتغير s تكون كلها حقيقية.

من صورة المفكوك يمكننا افتراض أن دالة عبور النظام يمكن اعتبارها كما لو كانت تتابعاً من التكبير A غير المعتمد على التردد والعديد من الأنظمة الجانبية، التي يكون لكل منها دالة عبور من قطب محدد واحد، أو صفر محدد واحد. إذا حولنا الآن دالة العبور إلى استجابة ترددية من خلال s→jω، فإننا يمكننا أن نفكر في الاستجابة الترددية الكلية على أنها نتيجة من تتابع هذه المكونات المتعددة، كل منها له استجابة ترددية بسيطة كما في الشكل رقم (١١.٢٥).



شكل رقم (١١,٢٥) نظام ممثل في صورة أنظمة أبسط موصلة على التوالي

كل نظام من النظم المكونة ، أو الجانبية سيكون له مخطط بود ، وحيث إن مقدار مخططات بود تكون مرسومة بالديسبل ، فإن مخطط بود الكلي سيساوي مجموع مقادير مخططات بود لكل نظام منفرد. سيتم رسم الزاوية بطريقة خطية كما سبق (في تدريج لوغاريتمي للتردد) ومخطط بود للزاوية سيكون مجموع كل الزوايا المكونة للنظام الكلي.

نظام القطب الحقيقي الوحيد

افتراض الاستجابة الترددية لنظام جانبي من قطب واحد عند $s=p_k$ ولا يوجد أي صفر محدد كما يلي :

$$H(s) = \frac{1}{1-s/p_k} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{1-j\omega/p_k}$$ المعادلة رقم (١١.٣)

قبل الاستمرار ، سنفترض أولا التحويل CTFT العكسي للـ $H(j\omega)$. يمكننا استخدام زوج CTFT التالي :

$$e^{-at}u(t) \overset{f}{\leftrightarrow} \frac{1}{a+j\omega}, \qquad \mathrm{Re}(a) > 0$$

سنعيد كتابة (١١.٣) كما يلي :

$$H(j\omega) = -\frac{p_k}{j\omega - p_k}$$

وبالتالي سنحصل على ما يلي :

$$-p_k e^{p_k t}u(t) \overset{f}{\leftrightarrow} -\frac{p_k}{j\omega - p_k}, \; pk < 0$$ المعادلة رقم (١١,٤)

إن ذلك يوضح أن القطب يجب أن يكون له قيمة سالبة حقيقية حتى يكون للاستجابة الترددية معنى. إذا كانت القيمة موجبة ، فإننا لن نستطيع أن ننفذ CTFT العكسي لإيجاد الدالة الزمنية المطلوبة. إذا كانت p_k سالبة ، فإن الأس في المعادلة (١١,٤) سيتناقص إلى الصفر في المجال الزمني الموجب. إذا كانت موجبة ، فإنها ستتزايد أسياً في المجال الزمني الموجب وبالتالي سيكون النظام غير مستقر. تحويل فورير للأس المتزايد غير موجود. أيضاً ، فإن الاستجابة الترددية لن يكون لها معنى عملي للأنظمة غير المستقرة ؛ لأنها لن يمكن اختبارها أو التعامل معها أبداً.

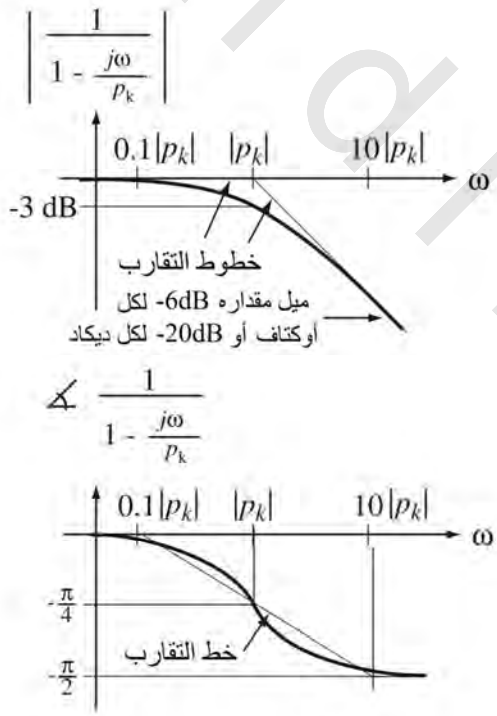
يوضح الشكل رقم (١١,٢٦) مقدار وزاوية الاستجابة $H(j\omega)=1/(1-j\omega/p_k)$ مع التردد. بالنسبة للترددات $\omega<<|p_k|$ فإن الاستجابة الترددية تقترب من $H(j\omega)=1$، وهذا يعني أن مقدار الاستجابة بالديسبل سيكون صفر dB تقريبا وزاوية الاستجابة ستكةن صفراً تقريباً أيضاً. بالنسبة للترددات $\omega>>|p_k|$ فإن الاستجابة الترددية ستكون تقريباً $H(j\omega)=-p_k/j\omega$، وبالتالي فإن مقدار الاستجابة الترددية سيقترب من ميل خطي مقداره 6dB- لكل أوكتاف أو 20dB- لكل ديكاد وستقترب زاوية الاستجابة من قيمة ثابتة مقدارها $-\pi/2$ راديان. (الأوكتاف هو معامل مقداره 2- تغير في التردد والديكاد هو معامل مقداره 10- تغير في التردد). هذه السلوكيات للترددات المتطرفة تعرف أو تحدد خطوط التقاربللمقدار والزاوية. تقاطع خطي ويعني أن مقدار خطوط التقارب تحدث عند $\omega=|p_k|$، وهي تسمى التردد الركني. عند التردد الركني $w=|p_k|$ ستكون الاستجابة الترددية كما يلي :

$$H(j\omega)=\frac{p_k}{1-\mathrm{j}|p_k|/p_k}=\frac{1}{1+\mathrm{j}},\qquad pk<0$$

وسيكون مقدارها يساوي $1/\sqrt{2}\cong 0.707$. يمكننا كتابة ذلك بالديسبل كما يلي :

$$(0.707)_{dB}=20log_{10}(0.707)=-3\;dB$$

عند هذه النقطة سيكون مخطط بود يساوي 3dB تحت التردد الركني المكون من تقاطع خطوط التقارب. هذه النقطة ستكون النقطة ذات أكبر بعد لمقدار مخطط بود من خطوط التقارب. زاوية مخطط بود تتغير خلال $-\pi/4$ راديان عند التردد الركني وتقترب من الصفر تحتها و $-\pi/2$ راديان فوق التردد الركني.



شكل رقم (١١,٢٦) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لنظام جانبي لقطب واحد حقيقي سالب

مثال ١١,١

مخطط بود للاستجابة الترددية لمرشح RC منفذ للترددات المنخفضة

ارسم مقدار وزاوية مخطط بود للاستجابة الترددية للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة الذي له ثابت زمني مقداره 50μs.

معادلة الاستجابة الترددية للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة يمكن كتابتها كما يلي :

$$H(j\omega)=\frac{1}{j\omega \mathrm{RC}+1}$$

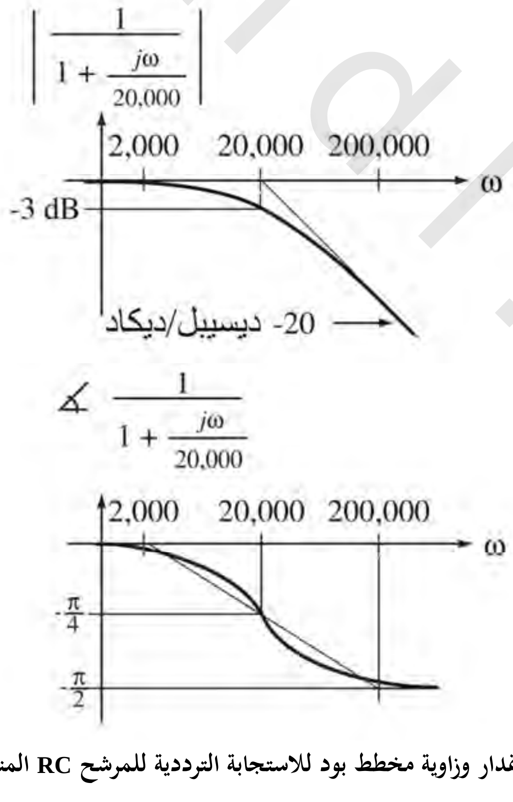
الثابت الزمني هو RC ، ولذلك يمكن كتابة الآتي :

$$\mathrm{H}(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}50\times10^{-6}\omega+1}$$

بوضع المقام يساوي صفراً والحل لإيجاد موضع القطب سنحصل علي موضع القطب عند $j\omega$=-20000. وبالتالي يمكننا كتابة الاستجابة الترددية في صورتها القياسية التي هي قطب واحد حقيقي سالب علي الصورة التالية :

$$\mathrm{H}(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1-\mathrm{j}\omega/(-20{,}000)}$$

التردد الركني المقابل على مخطط بود سيكون عند ω=20000 كما في الشكل رقم (١١.٢٧).

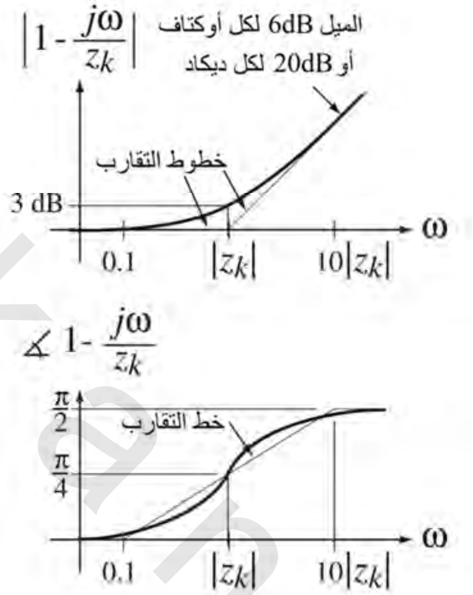


شكل رقم (١١,٢٧) مقدار وزاوية مخطط بود للاستجابة الترددية للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة

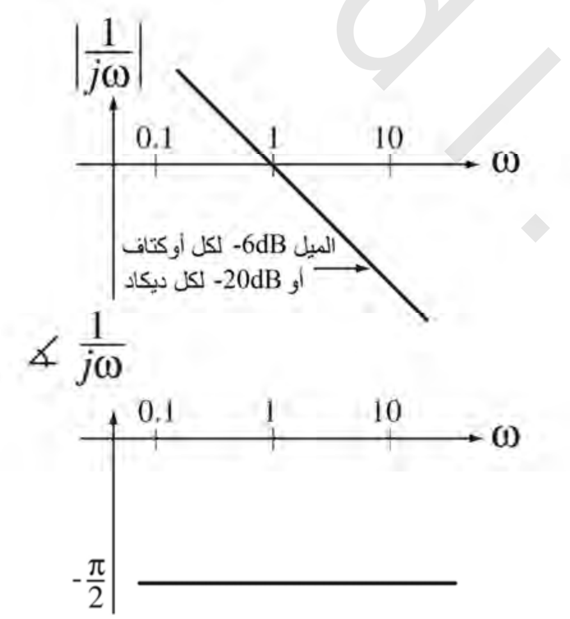
نظام الصفر الحقيقي الوحيد

بعمل تحليل مشابه لما تم عمله مع نظام القطب الوحيد الحقيقي، فإن مقدار وزاوية مخطط بود لنظام جانبي له صفر حقيقي واحد سالب وبدون أي قطب محدد، سيكون كما يلي وكما في الشكل رقم (١١,٢٨):

$$H(s) = 1 - S/z_k \Rightarrow H(j\omega) = 1 - j\omega/z_k, \qquad z_k < 0$$



شكل رقم (١١,٢٨) مقدار وزاوية مخطط بود للاستجابة الترددية لنظام جانبي من صفر حقيقي واحد سالب.



شكل رقم (١١,٢٩) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لقطب واحد s=0

المخططات مشابهة تماماً لهذه الخاصة بالقطب الحقيقي الواحد السالب عدا أن خطوط تقارب المقدار فوق التردد الركني لها ميل يساوي 6dB+ لكل أوكتاف أو 20dB+ لكل ديكاد والزاوية تقترب من $+\pi/2$ بدلاً من $-\pi/2$ راديان. إنه في الحقيقة مخطط بود للقطب الوحد الحقيقي السالب ولكنه معكوس من فوق لتحت.

بالنسبة للنظام الجانبي الذي له صفر حقيقي وحيد وسالب وبدون أي قطب محدد وعلى الصورة التالية :

$$H(j\omega) = 1 - j\omega/\mathrm{z_k}, \qquad \mathrm{z_k} > 0$$

فإن مخطط المقدار يكون هو نفسه كما في الشكل رقم (١١.٢٨) ولكن الزاوية تقترب من $-\pi/2$ بدلاً من $+\pi/2$ عند التردد فوق التردد الركني.

المكاملات والمفاضلات

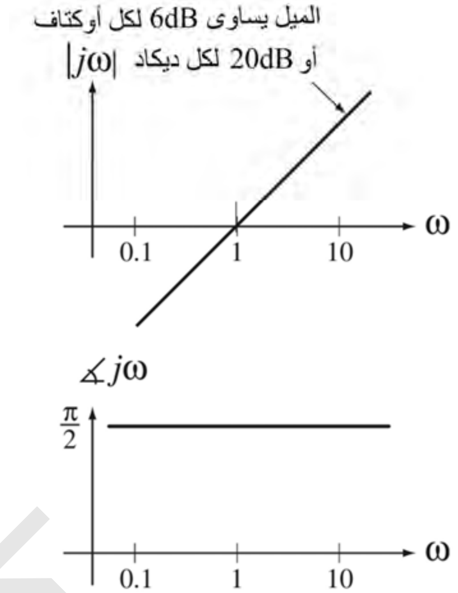
يجب أن نفترض أيضاً القطب أو الصفر عند التردد صفر كما في الشكل رقم (١١.٢٩) والشكل رقم (١١.٣٠). أي نظام له قطب واحد عند s=0 يسمى مكاملاً لأن دالة العبور له تكون على الصورة H(s)=1/s مع العلم أن القسمة على s تقابل التكامل في النطاق الزمني.

أي نظام له صفر وحيد عند s=0 يسمى مفاضلاً لأن دالة العبور له تكون على الصورة H(s)=s مع العلم أن الضرب في s يقابل التفاضل في النطاق الزمني.

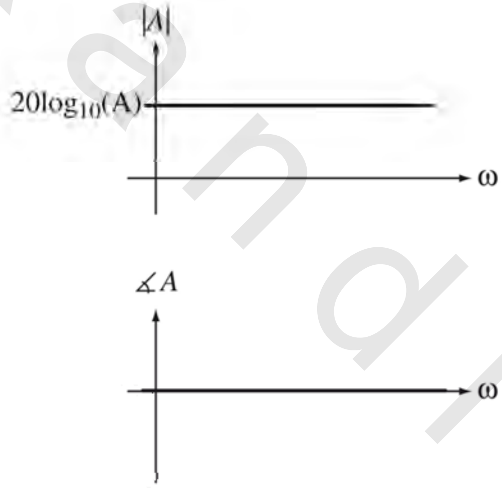
التكبير غير المعتمد على التردد

المكون الوحيد المتبقي من الأنظمة البسيطة هو معامل التكبير غير المعتمد على التردد الموضح في الشكل رقم (١١.٣١). في هذا الشكل افتراضنا أن معامل التكبير A ثابت وموجب، وهذا يوضح لماذا تكون الزاوية تساوي صفر. إذا كان A سالباً فإن الزاوية ستكون $\pm\pi$ راديان.

خطوط التقارب تعتبر وسيلة مساعدة في رسم مخطط بود الحقيقي وهي تساعد بعناية في رسم مخطط بود الكلي للأنظمة الأكثر تعقيداً. يمكن رسم خطوط التقارب بسرعة من معرفة بعض القوانين البسيطة وجمعها مع بعضها بغضا. بعد ذلك يمكن الرسم التقريبي لمخطط بود عن طريق رسم منحنى مستمر أكثر نعومة يقترب من خطوط التقارب ويتباعد عنها عند التردد الركني بمقدار ±3dB.



شكل رقم (١١,٣٠) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لصفر واحد عند s=0

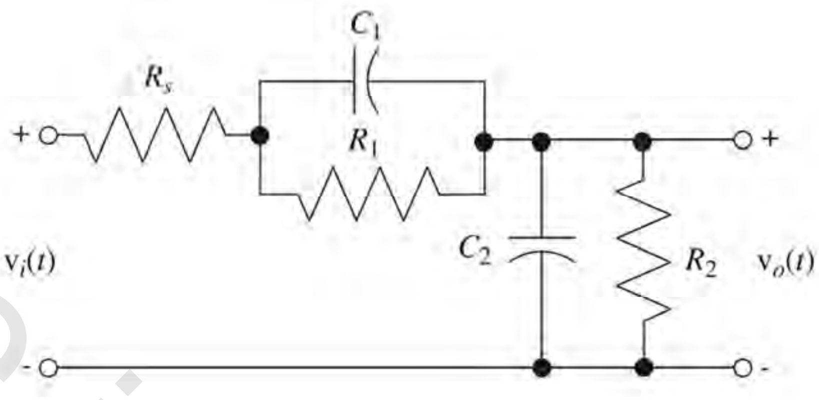


شكل رقم (١١,٣١) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لمعامل تكبير A غير معتمد على التردد

مثال ١١,٢

مخطط بود للاستجابة الترددية لدائرة RC

ارسم مخطط بود للاستجابة الترددية لجهد الدائرة الموضحة في الشكل رقم (١١,٣٢) حيث $C_1=1F$، و $C_2=2F$، و $R_s=4\Omega$، و $R_1=2\Omega$، و $R_2=3\Omega$.



شكل رقم (١١,٣٢) دائرة RC

دالة العبور لهذه الدائرة ستكون كالتالي :

$$H(s) = \frac{1}{R_s C_2} \frac{s + 1/R_1 C_1}{s^2 + \left(\frac{C_1+C_2}{R_s C_1 C_2} + \frac{R_1 C_1 + R_2 C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2}\right) s + \frac{R_1+R_2+R_s}{R_1 R_2 R_s C_1 C_2}}$$

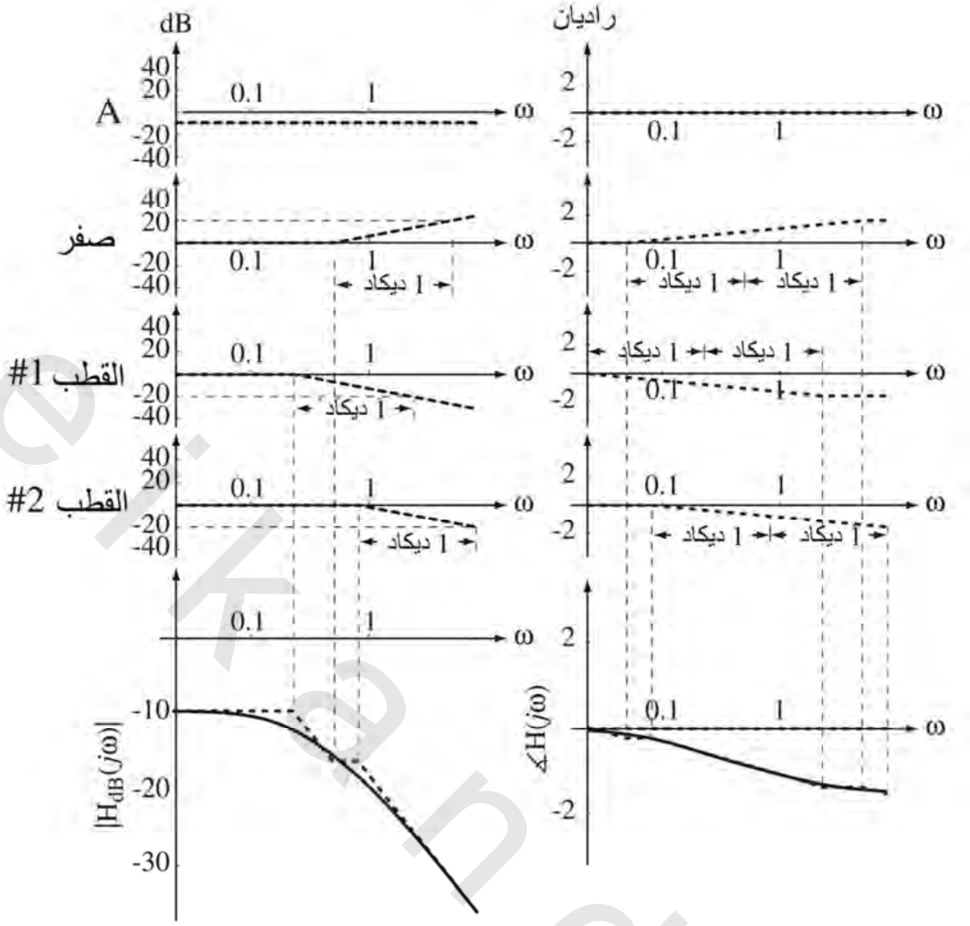
بالتعويض عن $s \to j\omega$ واستخدام قيما عددية للمكونات ، فإن الاستجابة الترددية ستكون كما يلي :

$$H(j\omega) = 3\frac{j2\omega + 1}{48(j\omega)^2 + j50\omega + 9} = 0.125\frac{j\omega + 0.5}{(j\omega + 0.2316)(j\omega + 0.8104)}$$

$$H(j\omega) = 0.333\frac{1 - \frac{j\omega}{(-0.5)}}{\left[1 - \frac{j\omega}{(-0.2316)}\right]\left[1 - \frac{j\omega}{(-0.8104)}\right]} = \mathrm{A}\frac{1 - j\omega/z_1}{(1 - j\omega/p_1)(1 - j\omega/p_1)}$$

حيث $A=0.333$ ، $z_1=-0.5$ ، $p_1=-0.2316$ ، $p_2=-0.8104$.

وعلى ذلك فالاستجابة الترددية لها قطبان محددان ، وصفر محدد واحد ، ومعامل تكبير غير معتمد على التردد. يمكننا سريعا تشكيل خطوط تقارب مخطط بود عن طريق إضافة مخططات بود التقاربية للمكونات المنفردة للاستجابة الترددية الكلية كما في الشكل رقم (١١،٣٣).



شكل رقم (١١,٣٣) الخطوط التقاربية المنفردة والخطوط التقاربية الكلية ومخطط بود النهائي ومخططات الزوايا للاستجابة الترددية لدائرة الجهد

برنامج ماتلاب التالي يوضح بعض الطرق لرسم مخططات بود:

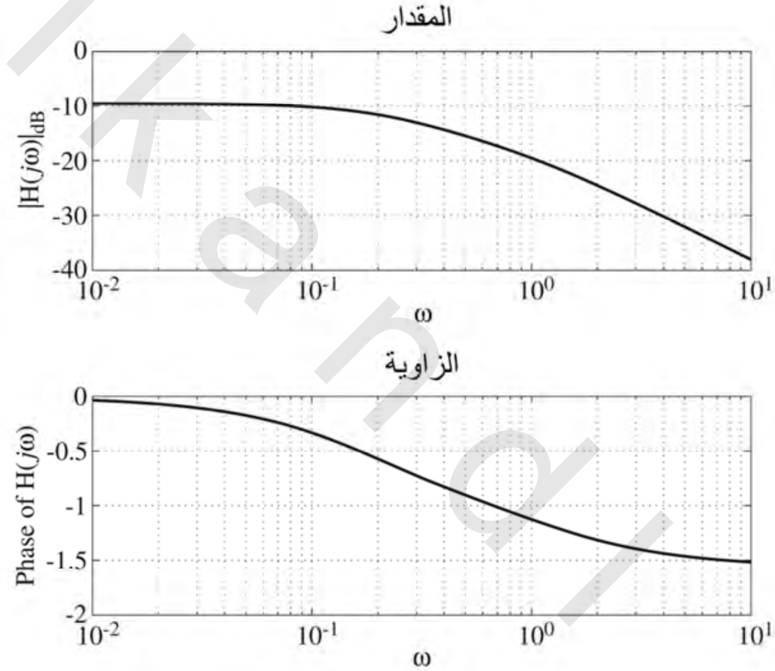
```
% وضع متجه لوغاريتمي للترددات الزاوية
%0.01- 10 rad/sec لرسم مخطط بود للمدى الترددي
w = logspace(-2,1,200) ;
% وضع معامل التكبير وقيم الصفر والقطب
A = 0.3333 ; z1 = -0.5 ; p1 = -0.2316 ; p2 = -0.8104
% حساب الاستجابات الترددية المركبة
H = A*(1-j*w/z1)./((1-j*w/p1).*(1-j*w/p2)) ;
% رسم مقدار مخطط بود
subplot(2,1,1) ; p = semilogx(w,20*log10(abs(H)),'k') ;
set(p,'LineWidth',2) ; grid on ;
```

```
xlabel('\omega','FontSize',18,'FontName','Times') ;
ylabel('|H({\itj}\omega)|_d_B','FontSize',18,'FontName','Times') ;
title('Magnitude','FontSize',24,'FontName','Times') ;
set(gca,'FontSize',14,'FontName','Times') ;
```

% رسم زوايا مخطط بود

```
subplot(2,1,2) ; p = semilogx(w,angle(H),'k') ;
set(p,'LineWidth',2) ; grid on ;
xlabel('\omega','FontSize',18,'FontName','Times') ;
ylabel('Phase of H({\itj}\omega)','FontSize',18,'FontName','Times') ;
title('Phase','FontSize',24,'FontName','Times') ;
set(gca,'FontSize',14,'FontName','Times') ;
```

مقدار وزاوية مخطط بود الناتجة ستكون كما هو موضح في الشكل رقم (١١,٣٤).



شكل رقم (١١,٣٤) مقدار وزاوية مخطط بود للاستجابة الترددية للمرشح

أزواج من الأقطاب والأصفار المركبة

نفترض الآن الحالة الأكثر تعقيداً من الأقطاب والأصفار المركبة. بالنسبة للدوال الحقيقية، فإنها تحدث عادة في أزواج مركبة مترافقة. وعلى ذلك فإن أي زوج من الأقطاب المركبة المترافقة بدون أي أصفار من الممكن أن تشكل دالة العبور التالية :

$$H(s) = \frac{1}{(1 - s/p_1)(1 - s/p_2)} = \frac{1}{1 - (1/p_1 + 1/p_1{}^*)s + s^2/p_1 p_2{}^*}$$

والاستجابة الترددية ستكون كما يلي :

$$H(j\omega) = \frac{1}{(1 - j\omega/p_1)(1 - j\omega/p_2)} = \frac{1}{1 - j\omega(1/p_1 + 1/p_1{}^*) + (j\omega)^2/p_1p_2{}^*}$$

والتي يمكن كتابتها كما يلي :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - j\omega\frac{2Re(p_1)}{|p_1|^2} + \frac{(j\omega)^2}{|p_1|^2}}$$

من جدول تحويلات فورير نحصل على :

$$e^{-\omega_n\zeta t} sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)u(t) \overset{f}{\leftrightarrow} \frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(j\omega)^2 + j\omega(2\zeta\omega_n) + \omega_n^2}$$

والذي يمكن التعبير عنه على الصورة التالية :

$$\omega_n\frac{e^{-\omega_n\zeta t} sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)}{\sqrt{1-\zeta^2}}u(t) \overset{f}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 + j\omega\frac{2\zeta\omega_n}{\omega_n^2} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}}$$

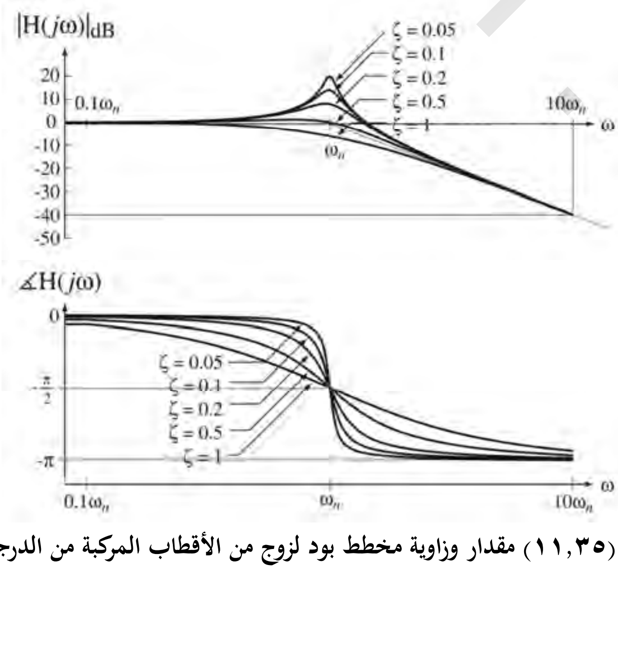
والتي يمكن كتابة الطرف الأيمن منها كنا يلي :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - j\omega\frac{2Re(p_1)}{|p_1|^2} + \frac{(j\omega)^2}{|p_1|^2}}$$

وهذه صورة قياسية لاستجابة نظام من الدرجة الثانية تحت الإخماد حيث التردد الزاوي الطبيعي هو ω_n ونسبة الإخماد هي ζ. ولذلك فإنه لمثل هذا النوع من الأنظمة الجانبية نحصل على :

$$\omega_n^2 = |p_1|^2 p_1p_2 \ \ and\ \zeta = \frac{Re_{(p_1)}}{\omega_n} = \frac{p_1 + p_2}{\sqrt[2]{p_1p_2}}$$

مخطط بود لهذا النظام موضح في الشكل رقم (١١,٣٥).



شكل رقم (١١,٣٥) مقدار وزاوية مخطط بود لزوج من الأقطاب المركبة من الدرجة الثانية.

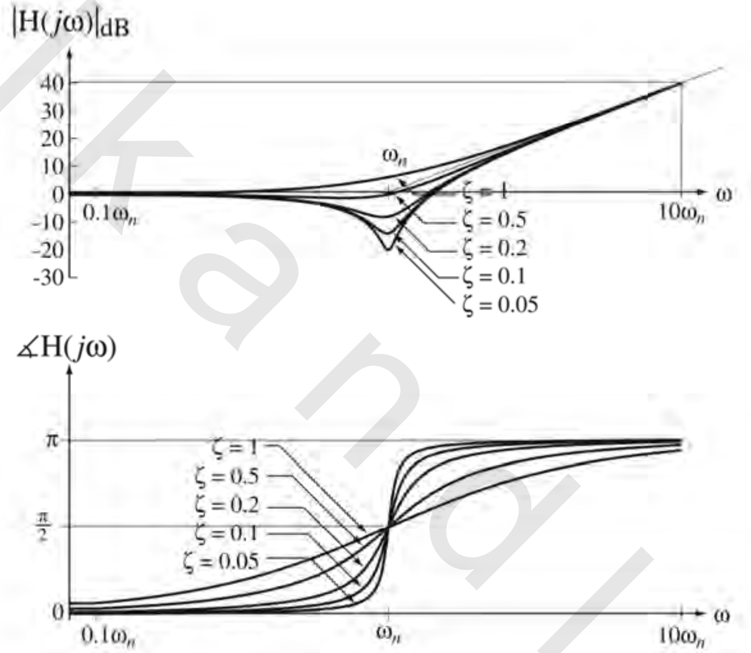
زوج من الأصفار المركبة يمكنها أن تشكل استجابة ترددية لنظام جانبي على الصورة التالية :

$$H(j\omega) = \left(1 - \frac{j\omega}{z_1}\right)\left(1 - \frac{j\omega}{z_2}\right) = 1 - j\omega\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_1{}^*}\right) + \frac{(j\omega)^2}{z_1 z_1{}^*} = 1 - j\omega\frac{2Re(z_1)}{|z_1|^2} + \frac{(j\omega)^2}{|z_1|^2}$$

يمكن أن نحدد التردد الزاوي الطبيعي ونسبة الإخماد لهذا النوع من الأنظمة كما يلي :

$$\zeta = \frac{Re_{(z_1)}}{\omega_n} = -\frac{z_1 + z_2}{\sqrt[2]{z_1 z_2}} \quad \text{و} \quad \omega_n^2 = |z_1|^2 = z_1 z_2$$

الشكل رقم (١١,٣٦) يبين مخطط بود لهذا النظام الجانبي



شكل رقم (١١,٣٦) مقدار وزاوية مخطط بود لزوج أصفار مركب من الدرجة الثانية

المرشحات العملية

المرشحات غير الفعالة

المرشح المنفذ للترددات المنخفضة

المرشحات المثالية التقريبية المنفذة للترددات المنخفضة والمنفذة لمجال من الترددات يمكن تنفيذها عن طريق أنواع معينة من الدوائر. أبسط التقريبات للمرشحات المثالية المنفذة للترددات المنخفضة هو المرشح الذي تم تحليله مسبقا أكثر من مرة، والذي يسمى المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة كما في الشكل رقم (١١.٣٧)، ولقد حسبنا استجابته لدالة الخطوة والدالة الجيبية. دعنا الآن نحلله مباشرة في المجال الترددي.

المعادلة التفاضلية التي تصف هذه الدائرة هي :

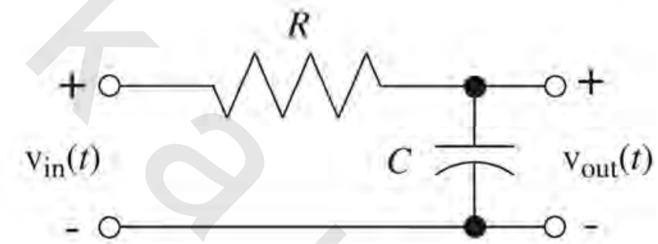
$$RCv'_{out}(t) + V_{out}(t) = V_{in}(t)$$

بإجراء تحويل لابلاس على الطرفين (بفرض عدم وجود أي شحنات ابتدائية على المكثفات)، نحصل على :

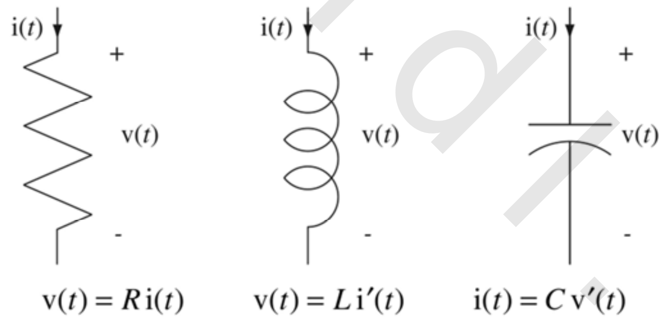
$$sRCV_{out}(s) + V_{out}(s) = V_{in}(s)$$

يمكننا الآن حل هذه المعادلة لإيجاد دالة العبور كما يلي :

$$H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{sRC + 1}$$



شكل رقم (١١,٣٧) مرشح RC عملي منفذ للترددات المنخفضة



شكل رقم (١١,٣٨) تحديد معادلات لكل من المقاومات والمكثفات والملفات

الطريقة الشائعة الاستخدام في أساسيات تحليل الدوائر للحصول على الاستجابة الترددية تعتمد على مفاهيم المعاوقة والزاوية. المعاوقة هي تعميم لفكرة المقاومة للتطبيق على المكثفات والملفات. تذكر علاقات الجهد والتيار للمقاومات والمكثفات والملفات كما في الشكل رقم (١١,٣٨).

إذا طبقنا تحويل لابلاس على هذه العلاقات نحصل على ما يلي :

$$V(s) = RI(s),\ V(s) = \mathrm{sLI}(s)\ \text{ and }\ \mathrm{I}(s) = \mathrm{sCV}(s)$$

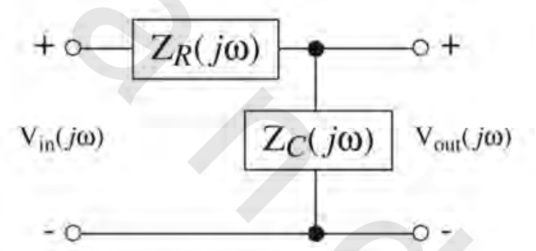
يأتي مفهوم المعاوقة من التشابه في معادلات المكثفات والملفات مع قانون أوم للمقاومات. يمكننا أن نضع نسب الجهد للتيار كما يلي :

$$\frac{V(s)}{I(s)} = R, \text{ و } \frac{V(s)}{I(s)} = sL \text{ و } \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC}$$

بالنسبة للمقاومات تسمى هذه النسبة معاوقة. في الحالة العامة تسمى هذه النسبة بالمعاوقة. في العادة يتم الرمز للمعاوقة بالرمز Z. باستخدام هذا الرمز يمكننا كتابة ما يلي :

$$Z_R(s) = R, \text{ و } Z_L(s) = sL \quad \text{ و } \quad Z_C(s) = 1/sC$$

إن ذلك يسمح لنا بتطبيق العديد من طرق تحليل دوائر المقاومات على الدوائر التي تحتوي الملفات والمكثفات ويتم تحليلها في النطاق الترددي. في حالة المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة يمكن النظر إليه على أنه مقسم جهد كما في الشكل رقم (١١,٣٩).



شكل رقم (١١,٣٩) التعبير عن المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة كمقسم جهد على المعاوقة

بالتالي يمكننا مباشرة كتابة دالة العبور في النطاق الترددي كما يلي :

$$H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{Z_C(s)}{Z_C(s)+Z_f(s)} = \frac{1/sC}{1/sC+R} = \frac{1}{sRC+1}$$

وستكون الاستجابة الترددية كما يلي :

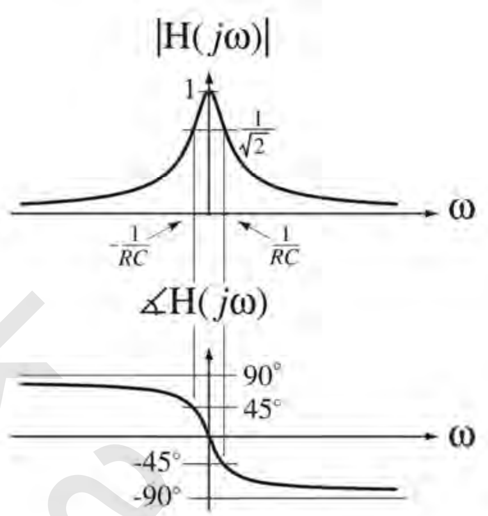
$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC+1} \text{ أو } H(f) = \frac{1}{j2\pi fRC+1}$$

وهو ما وصلنا إليه من النتيجة نفسها كما سبق بدون الرجوع المباشر إلى النطاق الزمني. مقدار وزاوية الاستجابة الترددية للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة موضحة في الشكل رقم (١١- ٤٠).

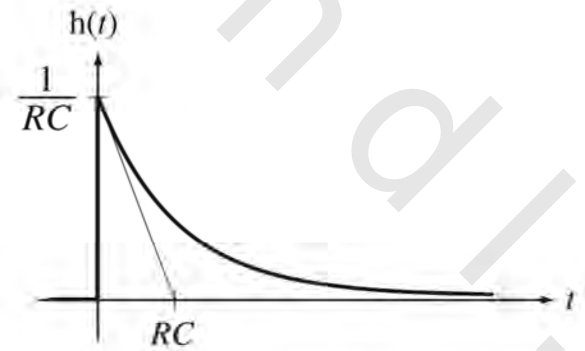
استجابة الصدمة للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة تساوي تحويل CTFT العكسي للاستجابة الترددية لهذا المرشح كما يلي وكما هو موضح في الشكل رقم (١١,٤١) :

$$h(t) = \frac{e^{-t/RC}}{RC}u(t)$$

استجابة الصدمة لهذا المرشح القابل للبناء طبيعياً تساوي صفراً قبل الزمن t=0، وبالتالي فالمرشح سببي.



شكل رقم (١١,٤٠) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لمرشح RC منفذ للترددات المنخفضة



شكل رقم (١١,٤١) استجابة الصدمة للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة

عند الترددات المنخفضة جداً (التي تقترب من الصفر) يكون مقدار معاوقة المكثف عالياً جدا عن معاوقة المقاومة، وبالتالي تقترب نسبة تقسيم الجهد إلى الواحد وسيكون جهد إشارة الخرج هو نفسه تقريبا جهد إشارة الدخل. عند الترددات العالية جداً تصبح معاوقة المكثف أقل جداً في المقدار عن معاوقة المقاومة وستقترب نسبة تقسيم الجهد إلى الصفر. وعلى ذلك يمكننا القول تقريباً إن الترددات المنخفضة تمر خلال المرشح والترددات العالية ستكبح. هذا التحليل الكمي للدائرة يتوافق مع الصورة الحسابية للاستجابة الترددية :

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC+1}$$

عند الترددات المنخفضة يمكننا كتابة ما يلي :

$$\lim_{\omega=0} H(j\omega) = 1$$

وعند الترددات العالية يمكننا كتابة ما يلي :

$$\lim_{\omega=0} H(j\omega) = 0$$

المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة يمرر فقط الترددات المنخفضة ؛ لأن الإثارة يتم تحديدها كجهد عند الدخل والاستجابة يتم تحديدها كجهد عند الخرج.

إذا تم تحديد الاستجابة على أنها التيار ، فإن طبيعة عملية الترشيح من الممكن أن تتغير بالكامل. في هذه الحالة ستصبح الاستجابة الترددية كما يلي :

$$H(j\omega) = \frac{I(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} = \frac{1}{Z_R(j\omega)+Z_c(j\omega)} = \frac{1}{1/j\omega C+R} = \frac{j\omega C}{j\omega RC+1}$$

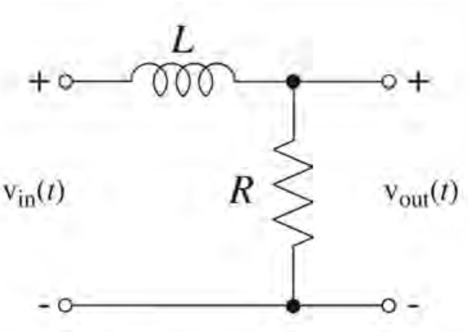
مع هذا التعريف ، فإنه عند الترددات المنخفضة تكون معاوقة المكثف مرتفعة جداً بحيث تمنع التيار من المرور وبالتالي فإن الاستجابة تقترب من الصفر. عند الترددات المرتفعة تقترب معاوقة المكثف من الصفر وبالتالي فإنه يسلك مسلك الموصل التام ويتحدد التيار المار بالمقاومة R. حسابياً فإن الاستجابة تقترب من الصفر عند الترددات المنخفضة وتقترب من قيمة ثابتة مقدارها 1/R عند الترددات العالية. إن ذلك يحدد مرشح منفذ للترددات المرتفعة كما يلي :

$$\lim_{\omega=0} H(j\omega) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{\omega=\infty} H(j\omega) = 1/R$$

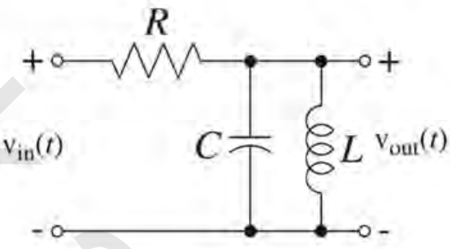
صورة أخرى (غير شائعة) للمرشح المنفذ للترددات المنخفضة موضحة في الشكل رقم (١١.٤٢).

$$H(S) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{R}{sL+R} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{R}{j\omega L+R}$$

باستخدام أفكار تقسيم الجهد والمعاوقة ، هل يمكنك الشرح بالكلمات لماذا تسلك هذه الدائرة مسلك المرشح المنفذ للترددات المنخفضة ؟



شكل رقم (١١,٤٢) صورة بديلة لمرشح عملي منفذ للترددات المنخفضة



شكل رقم (١١,٤٣) مرشح RLC عملي منفذ لمجال من الترددات

المرشح المنفذ لمجال من الترددات

واحد من أبسط الأشكال العملية للمرشح المنفذ لمجال من الترددات موضحة في الشكل رقم (١١,٤٣). دالة العبور والاستجابة الترددية لهذا المرشح ستكون كما يلي :

$$H(S) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{s/RC}{s^2+s/RC+1/LC} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{j\omega/RC}{(j\omega)^2+j\omega/RC+1/LC}$$

عند الترددات المنخفضة جداً يكون المكثف مفتوحاً ويكون الملف هو موصل تام. وبالتالي عند الترددات المنخفضة جداً تكون إشارة جهد الخرج عملياً تساوي صفراً. عند الترددات العالية جداً، يكون الملف مفتوحاً ويكون المكثف موصلاً تاماً، مما يجعل جهد الخرج يساوي صفر أيضاً. معاوقة المكثف المتوازي مع الملف يمكن كتابتها كما يلي :

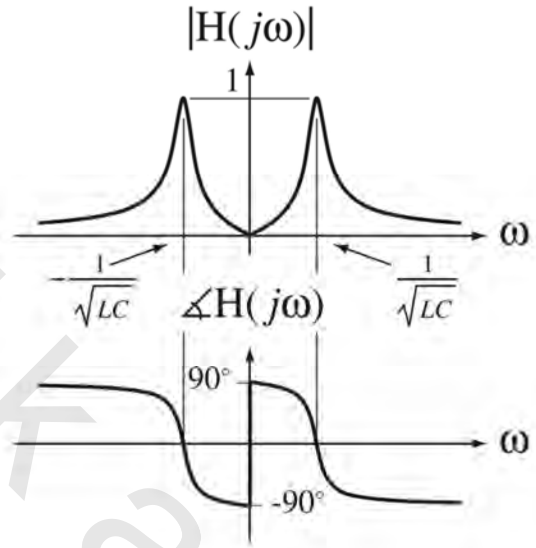
$$Z_{LC}(s) = \frac{sL/sC}{sL+1/sC} = \frac{sL}{s^2LC+1}$$

عندما يكون المقام :

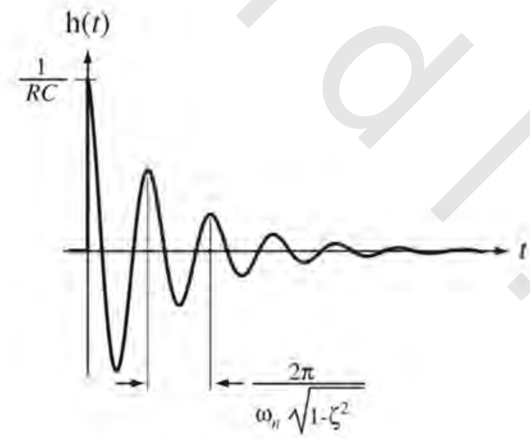
$$s^2LC + 1 = 0 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{1/LC} \Rightarrow \omega = \pm 1/\sqrt{LC}$$

فإن المعاوقة ستكون ما لا نهاية. هذا التردد يسمى تردد الرنين. وبالتالي فعند التردد الرنيني لدائرة المكثف المتوازي مع الملف، فإن معاوقة هذه التركيبة المتوازية تؤول إلى الما لانهاية وتكون إشارة جهد الخرج تساوي إشارة جهد الدخل. وبالتالي فإن السلوك العام للدائرة يعتبر سماح بمرور الترددات القريبة من هذا التردد الرنيني وحجب

الترددات الأخرى، وبالتالي فإنها تمثل مرشح منفذ لمجال من الترددات. الشكل رقم (١١,٤٤) يبين مقدار وزاوية الاستجابة الترددية التي تبين طبيعة المرشح المنفذ لمجال من الترددات عند الاختيار العملي لقيم المكونات.



شكل رقم (١١,٤٤) مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لمرشح RLC عملي منفذ لمجال من الترددات



شكل رقم (١١,٤٥) استجابة الصدمة للمرشح RLC العملي المنفذ لمجال من الترددات

استجابة الصدمة للمرشح RLC المنفذ لمجال من الترددات يمكن كتابتها كما يلي وهي موضحة في الشكل رقم (١١,٤٥):

$$h(t) = 2\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}\left[\cos(\omega_c t) - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_c t)\right]u(t)$$

حيث:

$$2\zeta\omega_n = 1/RC, \omega_n^2 = 1/LC \text{ and } \omega_c = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

لاحظ أن الاستجابة الصدمية لهذا المرشح القابل للبناء تكون سببية.

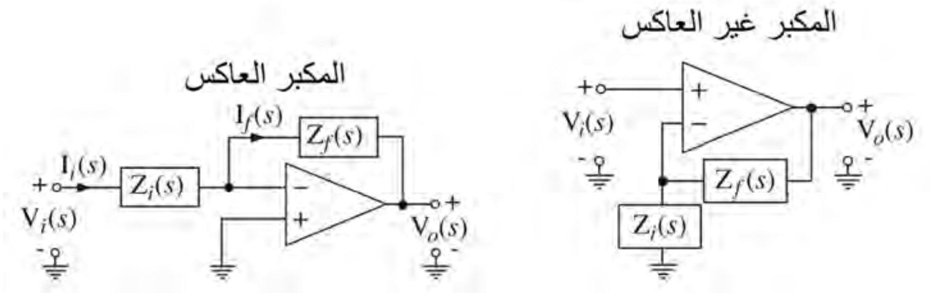
كل الأنظمة الطبيعية تعتبر مرشحات من حيث إن كل منها يكون له استجابة من خواصها التغير مع التردد. وهذا هو ما يعطي لكل جهاز من الأجهزة الموسيقية والصوت البشري المواصفات الخاصة به. لكي نرى أهمية ذلك، حاول اللعب على قطعة الفم لأي جهاز موسيقي هوائي. سيكون الصوت الناتج غير مريح حتى يتم إلحاق باقي الجهاز حيث عندها يصبح الصوت جيداً جداً (وبالذات عند اللعب عليه من خلال متخصص). إن الشمس تعمل على تسخين الأرض دورياً مع دوران الأرض وتعمل الأرض كمرشح منفذ للترددات المنخفضة، تعمل على تنعيم التغيرات اليومية وتستجيب بتغيرات موسمية متأخرة لدرجات الحرارة. في عصور ما قبل التاريخ كان البشر يعيشون في الكهوف؛ لأن الكتلة الحرارية للصخور حولهم تعمل على تنعيم التغيرات الفصلية لدرجة الحرارة بحيث تجعل الكهف أكثر برودة في الصيف وأكثر دفئاً في الشتاء، وهذا يعتبر مثالاً على عملية الترشيح المنفذ للترددات المنخفضة. سماعات الأذن المصنعة من المطاط الرغوي يتم تصميمها بحيث تسمح بمرور الترددات المنخفضة بحيث يستطيع مرتدوها التخاطب ولكنها تحجب الأصوات المكثفة ذات الترددات العالية التي قد تتلف الأذن. إن قائمة أمثلة الأنظمة التي نتعود عليها في حياتنا العملية واستخداماتنا اليومية التي تقوم بعملية الترشيح ليس لها نهاية.

المرشحات الفعالة

كل المرشحات التي تم فحصها حتى الآن كانت مرشحات غير فعالة. إن لفظة غير فعال تعني أن الدائرة لا تحتوي أجهزة قادرة على إنتاج إشارة خرج بطاقة أكبر (ليست طاقة الإشارة) من طاقة إشارة الدخل. العديد من المرشحات الحديثة تكون مرشحات فعالة. إنها تحتوي أجهزة فعالة مثل الترانزستورات و/أو مكبرات العمليات والتي تتطلب مصدر طاقة خارجي لكي تعمل بالطريقة السليمة. مع استخدام الإجهزة الفعالة فإن طاقة إشارة الخرج من الممكن أن تكون أكبر من طاقة إشارة الدخل. إن موضوع المرشحات الفعالة موضوعا كبيرا ونحن هنا سنقدم صور المرشحات الأكثر بساطة.

مكبرات العمليات

هناك صورتان شائعتان من دوائر مكبر العمليات، إنهما صورة مكبر العمليات العاكس وصورة مكبر العمليات غير العاكس كما في الشكل رقم (١١.٤٦). في التحليل هنا سنستخدم أبسط نموذج ممكن لمكبر العمليات وهو نموذج مكبر العمليات المثالي. مكبر العمليات المثالي له معاوقة دخل لا نهائية، ومعاوقة خرج تساوي صفراً، ومعامل تكبير لا نهائي وعرض مجال لانهائي.



شكل رقم (١١,٤٦) الصور الشائعة للمكبرات التي تستخدم مكبر العمليات

لكل نوع من المرشحات هناك معاوقتان وهما ال $Z_i(s)$ والـ $Z_f(s)$ يتحكمان في دالة العبور. دالة العبور للمكبر العاكس يمكن استنتاجها عن طريق ملاحظة أنه حيث إن مقاومة الدخل لمكبر العمليات تكون لا نهائية، فإن التيار الداخل للمكبر من أي واحد من دخليه سيكون صفراً وبالتالي يمكننا كتابة المعادلة التالية:

$$I_f(s)=I_i(s)$$ المعادلة رقم (١١,٥)

أيضاً حيث إن جهد الخرج يكون محدداً ومعامل التكبير لمكبر العمليات يكون لا نهائياً، فإن فرق الجهد بين دخلي المكبر يجب أن يساوي صفراً. ولذلك يمكننا كتابة تيار الدخل كما يلي:

$$I_i(s)=\frac{V_i(s)}{z_i(s)}$$ المعادلة رقم (١١,٦)

وأيضاً:

$$I_f(s)=\frac{V_f(s)}{z_i(s)}$$ المعادلة رقم (١١.٧)

بمساواة المعادلتين (١١,٦) و (١١,٧) تبعا للمعادلة (١١,٥) والحل للحصول على دالة العبور، نحصل على ما يلي:

$$H(s)=\frac{V_O(s)}{V_i(s)}=\frac{Z_f(s)}{Z_i(s)}$$ المعادلة رقم (١١,٨)

بالطريقة نفسها يمكننا توضيح أن دالة العبور للمكبر غير العاكس ستكون كما يلي:

$$H(s)=\frac{V_O(s)}{V_i(s)}=\frac{Z_f(s)+Z_i(s)}{Z_i(s)}=1+\frac{Z_f(s)}{Z_i(s)}$$ المعادلة رقم (١١,٩)

المكامل

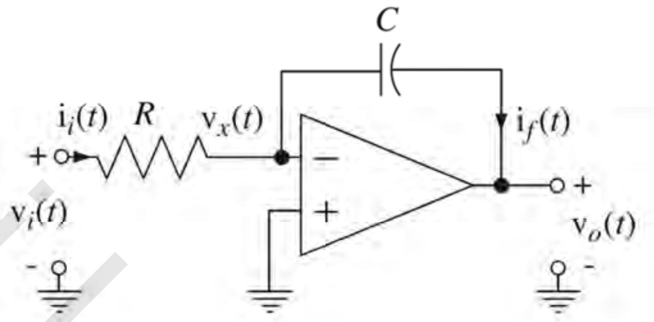
ربما يكون من أبسط المرشحات الفعالة وأكثرها شيوعاً هو المكامل كما في الشكل رقم (١١,٤٧). باستخدام معادلة المكبر العاكس (١١,٨) يمكننا الحصول على دالة العبور التالية:

$$H(s)=-\frac{Z_f(s)}{Z_i(s)}=-\frac{1/sC}{R}=-\frac{1}{sRC}\Rightarrow H(f)=-\frac{1}{j2\pi fRC}$$

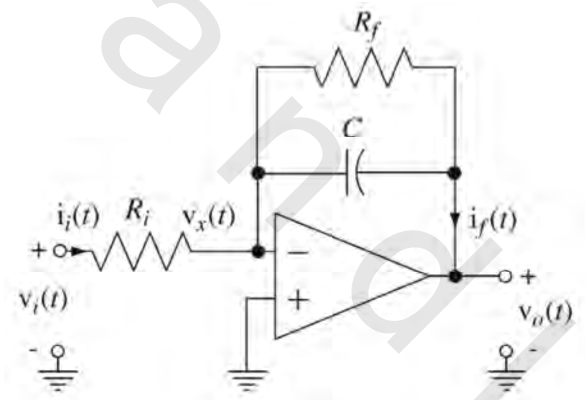
من السهل رؤية تأثير المكامل إذا تمت كتابة الاستجابة الترددية على الصورة التالية:

$$V_o(f)=-\frac{1}{RC}\frac{V_i(f)}{j2\pi f}\quad \text{or}\quad V_o(j\omega)=-\frac{1}{RC}\frac{V_i(j\omega)}{j\omega}$$

إن المكامل يعمل على تكامل الإشارة ولكنه في الوقت نفسه يضربها في 1/RC-. لاحظ أننا لم نقدم هنا مكاملاً عملياً غير فعال. إن المرشح RC الفعال المنفذ للترددات المنخفضة يعمل بدرجة كبيرة عمل المكامل عند الترددات الأعلى كثيراً من تردده الركني ولكن عند الترددات المنخفضة جداً فإن استجابته لا تكون استجابة المكامل. لذلك فقد أعطت الأجهزة الفعالة (مكبر العمليات في هذه الحالة) درجة أخرى من الحرية لمصمم المرشح.



شكل رقم (١١,٤٧) مكامل فعال.



شكل رقم (١١,٤٨) مرشح RC فعال منفذ للترددات المنخفضة.

المرشح المنفذ للترددات المنخفضة

بسهولة يتم تغيير المكامل إلى مرشح منفذ للترددات المنخفضة عن طريق إضافة مقاومة واحدة كما في الشكل رقم (١١,٤٨). بالنسبة لهذه الدائرة يمكن كتابة مايلي :

$$H(S)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=-\frac{R_f}{R_s}\frac{1}{sCR_f+1}\Rightarrow H(j\omega)=\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}=-\frac{R_f}{R_s}\frac{1}{j\omega CR_f+1}$$

هذه الاستجابة الترددية لها الصورة الوظيفية نفسها مثل المرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة فيما عدا المعامل $-R_f/R_s$. وبالتالي فإن ذلك يمثل مرشحاً مع التكبير. إنه يرشح ويكبر الإشارة في الوقت نفسه. في هذه الحالة كان معامل التكبير سالباً.

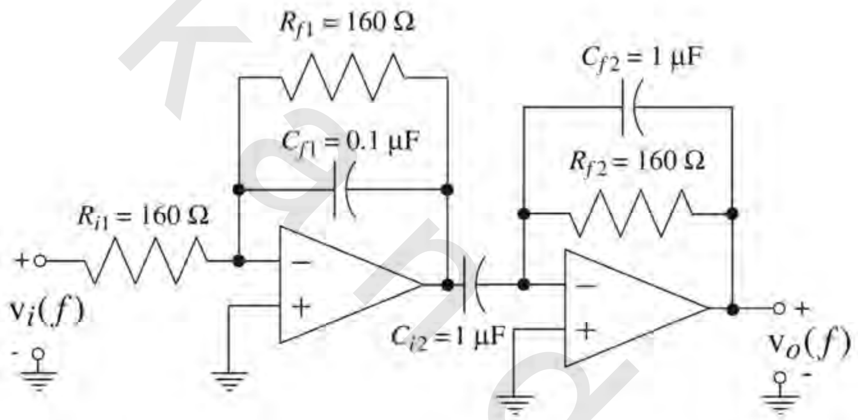
مثال ١١,٣

مخطط بود للاستجابة الترددية لمرشح فعال من مرحلتين

ارسم مقدار وزاوية مخططات بود للمرشح العال ذي المرحلتين الموضح في الشكل رقم (١١,٤٩).

دالة العبور للمرحلة الأولى ستكون كما يلي :

$$H_1(S) = \frac{Z_{f1}(s)}{Z_{i1}(s)} = -\frac{R_{f1}}{R_{i1}}\frac{1}{1+sC_{f1}R_{f1}}$$



شكل رقم (١١,٤٩) مرشح فعال من مرحلتين

دالة العبور للمرحلة الثانية ستكون كما يلي :

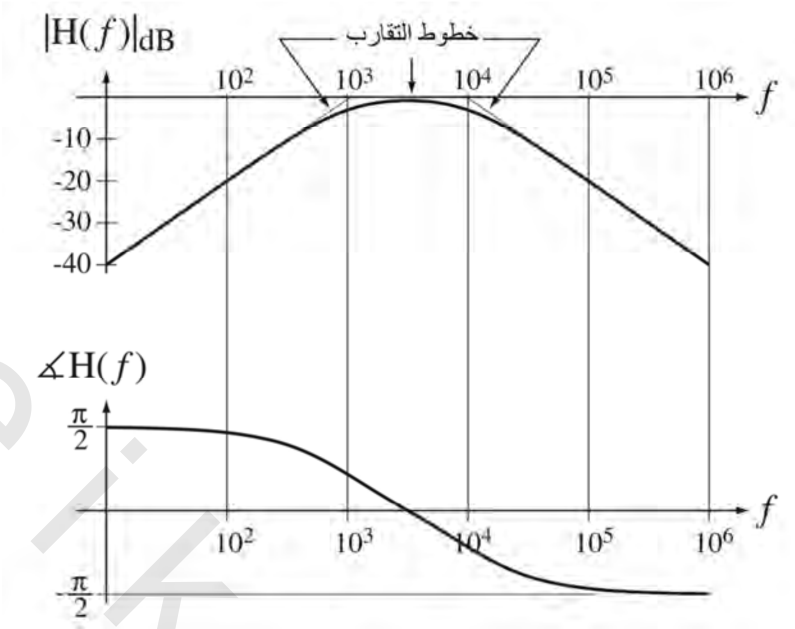
$$H_2(S) = \frac{Z_{f1}(s)}{Z_{i1}(s)} = -\frac{sR_{f1}C_{i2}}{1+sR_{f2}C_{f2}}$$

حيث إن مقاومة الخرج لمكبر العمليات المثالي تكون صفراً، فإن المرحلة الثانية لن تمثل حملاً على المرحلة الأولى ودالة العبور الكلية ستكون ببساطة حاصل ضرب دالتي العبور كما يلي :

$$H(S) = \frac{R_{f1}}{R_{i1}}\frac{sR_{f2}C_{i2}}{(1+sC_{f1}R_{f1})(1+sC_{f2}R_{f2})}$$

بالتعويض بقيم المعاملات ووضع $s \to j2\pi f$، نحصل على الاستجابة الترددية كما يلي وكما في الشكل رقم (١١,٥٠) وهذا بالطبع يمثل مرشحاً منفذاً لمجال من الترددات :

$$H(f) = \frac{j1000f}{(1000+jf/10)(1000+jf)}$$



شكل رقم (١١,٥٠) مخطط بود للاستجابة الترددية للمرشح ذي المرحلتين

مثال ١١,٤

تصميم مرشح فعال منفذ للترددات العالية

صمم مرشح فعال يحبط الإشارات عند الـ 60Hz وأقل منها بأكثر من 40dB ويكبر الإشارات عند 10kHz وأعلى منها بمعامل تكبير يتغير من الـ 20dB ليس بأكثر من 2dB.

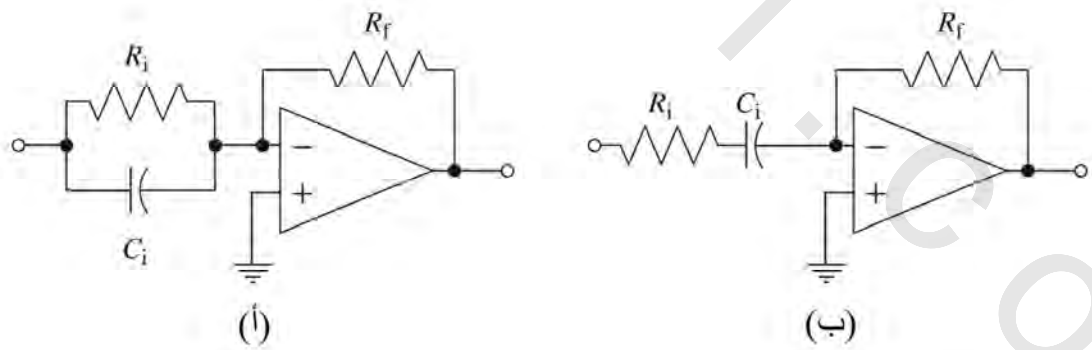
إن ذلك يحدد مرشح منفذ للترددات العالية. معامل التكبير يجب أن يكون موجباً. يمكن الحصول على معامل تكبير موجب وترشيح منفذ للترددات المرتفعة باستخدام مكبر غير عاكس. بالنظر على دالة العبور والاستجابة الترددية للمكبر غير العاكس التالية :

$$H(s)=\frac{V_O(s)}{V_i(s)}=\frac{Z_f(s)+Z_i(s)}{Z_i(s)}\Rightarrow H(j\omega)=\frac{Z_f(j\omega)+Z_i(j\omega)}{Z_i(j\omega)}$$

سنرى أنه إذا كانت المعاوقتان تتكونان من مقاومات ومكثفات فقط ، فإن معامل التكبير لا يمكن أن يكون أقل من الواحد ونحن نريد الإحباط أو التوهين أو التضعيف (معامل تكبير أقل من واحد) عند الترددات المنخفضة. (إذا كنا نريد استخدام كل من الملفات والمكثفات ، فإنه يمكننا جعل مقدار المجموع $Z_f(j\omega)+Z_i(j\omega)$ أقل من مقدار الـ $Z_i(j\omega)$ عند بعض الترددات وبذلك نحقق معامل تكبير أقل من الواحد. ولكننا لا نستطيع تحقيق ذلك عند كل الترددات الأقل من 60Hz ، كما أن استخدام الملف يتم تجنبه عادة عملياً إلا إذا كان ذلك مطلق الضرورة. هناك صعوبات عملية أخرى مع هذه الفكرة وهي استخدام مكبرات العمليات الحقيقية بدلاً من المكبرات المثالية).

إذا استخدمنا مكبراً عاكساً واحداً سنحصل على معامل تكبير سالب. ولكننا نستطيع أن نتبعه بمكبر عاكس آخر مما يجعل التكبير الكلي موجباً. (التكبير عكس الإحباط، بحيث إذا كان الإحباط يساوي 60dB، فإن التكبير يكون 60dB-). إذا كان التكبير عند الـ 60Hz يساوي 40dB-، وكانت الاستجابة تمثل مرشحاً ذا قطب واحد منفذ للترددات المرتفعة، فإن خطوط تقارب مخطط بود على مقدار الاستجابة الترددية ستمر خلال ال 20dB- عند ال 600Hz، وتكبير مقداره 0dB عند التردد 6kHz وتكبير مقداره 20dB عند التردد 60kHz. ولكننا نريد تكبير 20dB عند التردد 10kHz ولذلك فإن المرشح ذو القطب الواحد يكون غير مناسب لتحقيق هذه المتطلبات. لذلك نحن نريد مرشحاً منفذاً للترددات المرتفعة ذا قطبين. يمكننا أن نحقق ذلك عن طريق تتابع من مرشحين كل منهما ذو قطب واحد، وبذلك يمكننا أن نحقق متطلبات الإحباط والتكبير الموجب في الوقت نفسه.

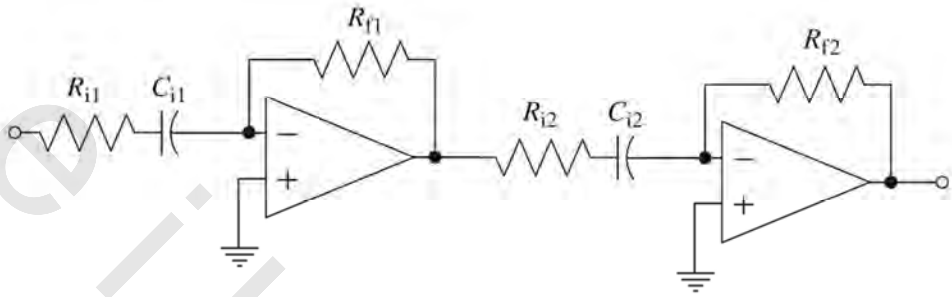
الآن يجب أن نختار كل من $Z_i(j\omega)$ و $Z_f(j\omega)$ لنجعل المكبر العاكس مرشح منفذ للترددات المرتفعة. الشكل رقم (١١.٤٨) يوضح مرشحاً فعالاً منفذاً للترددات المنخفضة. هذا المرشح منفذ للترددات المنخفضة ؛ لأن التكبير يساوي – $Z_f(j\omega)/Z_i(j\omega)$، و $Z_i(j\omega)$ ثابت، و $Z_f(j\omega)$ لها مقدار أكبر عند الترددات المنخفضة من مقدارها عند الترددات المرتفعة. هناك أكثر من طريقة للحصول على المرشح المنفذ للترددات المرتفعة بتشكيل المكبر العاكس نفسه. يمكننا أن نجعل مقدار $Z_f(j\omega)$ أقل عند الترددات المنخفضة وأكبر عند الترددات الأعلى. إن ذلك يتطلب استخدام ملف، ولكن للمرة الثانية ولأسباب عملية، فإنه يجب علينا أن نتجنب استخدام الملفات، إلا إذا كان هناك ضرورة لذلك. يمكننا أن نجعل مقدار $Z_f(j\omega)$ ثابتاً ونجعل $Z_i(j\omega)$ أكبر عند الترددات المنخفضة وأقل عند الترددات المرتفعة. بهذه الطريقة يمكن تحقيق الهدف العام عن طريق مقاومة ومكثف إما على التوالي أو التوازي كما في الشكل رقم (١١.٥١).



شكل رقم (١١.٥١) فكرة استخدام المكثفات والمقاومات فقط للحصول على المرشح المنفذ للترددات العالية

إذا فكرنا في السلوك المحدود لأفكار هذين التصميمين عند الترددات المنخفضة جداً والترددات المرتفعة جدا، سنرى فوراً أن واحداً منهما فقط سيحقق متطلبات هذا التصميم. التصميم (أ) له تكبير محدد عند الترددات

المنخفضة جداً وتكبير يزداد مع التردد عند الترددات العليا، ولن يصل أبداً إلى قيمة ثابتة. التصميم (ب) له تكبير يتناقص مع التردد عند الترددات المنخفضة، ويقترب من الصفر عند التردد صفر ويقترب من تكبير ثابت عند الترددات العالية. التصميم (ب) يمكن استخدامه لتحقيق المتطلبات المرغوبة. وبالتالي فإن التصميم الآن سيكون تتابعاً من مكبرين عاكسين متتالين كما في الشكل رقم (١١.٥٢).



شكل رقم (١١,٥٢) تتابع من مرشحين عاكسين كل منهما مرشح فعال منفذ للترددات المرتفعة

عند هذه النقطة علينا اختيار قيم المقاومات والمكثفات لتحقيق متطلبات التكبير والإحباط المطلوب، وهناك العديد من الطرق لعمل ذلك. مثل هذا التصميم لن يكون فريداً. يمكننا أن نبدأ باختيار المقاومات لتحقيق متطلبات التكبير عند الترددات العالية وهو 20dB. وهذا يعني تكبير كلي عند الترددات العالية يساوي 10، والذي يمكن تقسيمه بأي طريقة نريدها بين المكبرين. دعنا نفترض أن تكبير المرحلتين يكون متساوي تقريباً. وبالتالي فإن نسب المقاومات في كل مرحلة يجب أن تكون تقريباً 3.16. يجب أن نختار المقاومات كبيرة بدرجة كافية بحيث لا تسبب تحميلاً لخرج مكبرات العمليات وأن تكون صغيرة بما فيه الكفاية بحيث لا تسبب المكثفات الطفيلية أي مشاكل. اختيارات المقاومات في المدى من 500Ω حتى 50kΩ يعتبر اختياراً جيداً. ولكن إذا لم نكن على استعداد لدفع الكثير، فإننا لن نستطيع اختيار قيم المقاومات بحرية كاملة حيث إن المقاومات تأتي بقيم قياسية في التتابع التالي تماماً:

$$1,1.2,1.5,1.8,2.2,2.7,3.3,3.9,4.7,5.6,6.8,8.2 \times 10^{n}$$

حيث n تضع ديكاد قيمة المقاومة. بعض النسب القريبة من 3.16هي:

$$\frac{3.9}{1.2} = 3.25, \frac{4.7}{1.5} = 3.13, \frac{5.6}{1.8} = 3.11, \frac{6.8}{2.2} = 3.09, \frac{8.2}{2.7} = 3.03$$

لوضع التكبير الكلي أقرب ما يمكن من 10 سنختار نسبة المرحلة الأولى لتكون 3.9/1.2=3.25 ونسبة المرحلة الثانية لتكون 6.8/2.2=3.09 وذلك سيحقق تكبيراً كلياً يساوي 10.043. وعلى ذلك فإننا سنضع القيم التالية:

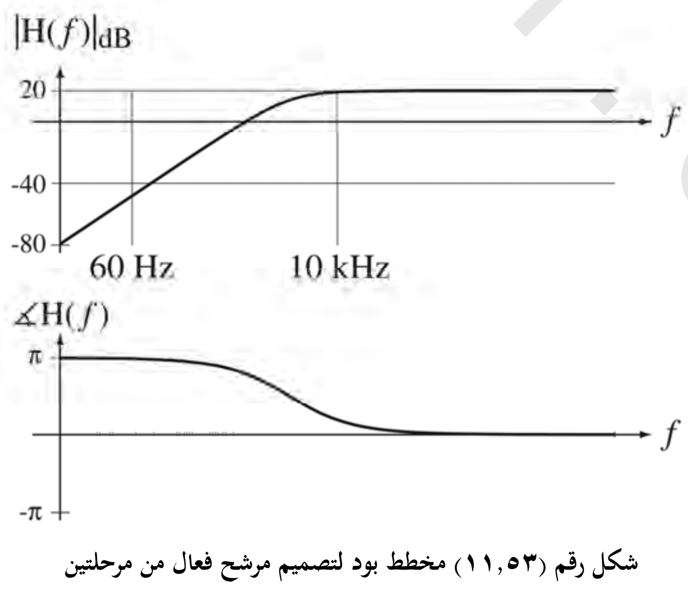
$$R_{f1} = 3.9k\Omega, R_{i1} = 1.2k\Omega, R_{f2} = 6.8k\Omega, R_{i2} = 2.2k\Omega$$

الآن علينا اختيار قيم المكثفات لتحقق الإحباط عند التردد 60Hz وتحته ، وتكبير عند التردد 10kHz وفوقها. لتبسيط التصميم دعنا نضع الترددين الركنيين للمرحلتين ب القيم نفسها. مع تساقط الترددات المنخفضة نتيجة قطبين بمعدل 40dB لكل ديكاد وتكبير الترددات المرتفعة الذي يساوي حوالي 20dB سنحصل على 60dB فرق بين مقدار الاستجابة الترددية عند الـ 60Hz والـ 10kHz. إذا كنا نريد جعل التكبير عند الـ 60Hzيساوي تماماً 40dB- ، بالتالي فإنه سيكون التكبير 0dB عند التردد 600Hz ، وعند الـ 6kHz يجب أن يكون التكبير يساوي 40dB ، ومن الممكن أن تكون أعلى من ذلك عند الـ 10kHz. إن ذلك لن يحقق المتطلبات.

يمكننا أن نبدأ بالترددات العالية ونضع التكبير عند ال 10kHz يساوي تقريبا 10 ، مما يعني أن الركن عند التردد المنخفض سيتناقص حتى تحت الـ 10kHz. إذا وضعنا ذلك عند الـ 1kHz ، فإن التكبير الكلي عند الـ 100Hz معتمدا على تقريبات الخطوط التقاربية سيكون 20dB- وعند الـ 10Hz سيكون 060dB. نحن نحتاج 40dB- عند الـ 60Hz. ولكننا سنحصل على حوالي 29dB- فقط عند الـ 60Hz. لذلك سنحتاج لوضع التردد الركني أعلى قليلا ، مثلا 3kHz. إذا وضعنا التردد الركني عند ال 3kHz ، فإن قيم المكثفات المحسوبة ستكون C_{i1}=46nF و C_{i2}=24nF. للمرة الثانية فإنه لا يمكننا اختيار قيم اختيارية للمكثفات حيث إنها توجد في قيم قياسية مسلسة بالفروق نفس مثل قيم المقاومات القياسية كالتالي :

$$1,1.2,1.5,1.8,2.2,2.7,3.3,3.9,4.7,5.6,6.8,8.2 \times 10^n$$

هناك بعض الفسحة في موضع التردد الركني ولذلك فإننا لا نحتاج إلى تحديد دقيق جدا لقيمة المكثف. يمكننا أن نختار C_{i1}=0.47nF و C_{i2}=22nFبحيث يكون أحدها أعلى قليلاً والأخرى أقل قليلا. إن ذلك سيفصل الأقطاب قليلا ولكنه لا يزال يحقق الـ 40dB لكل ديكاد المطلوبة عند الترددات المنخفضة. إن ذلك يبدو تصميماً جيداً ولكننا نريد أن نتحقق من أدائه عن طريق رسم مخطط بود كما في الشكل رقم (١١.٥٣).



شكل رقم (١١,٥٣) مخطط بود لتصميم مرشح فعال من مرحلتين

من الواضح من هذا المخطط أن الإحباط عند الـ 60Hz مناسب جداً. حسابات التكبير عند التردد 10kHz تعطي حوالي 19.2dB مما يتطابق مع المواصفات المطلوبة.

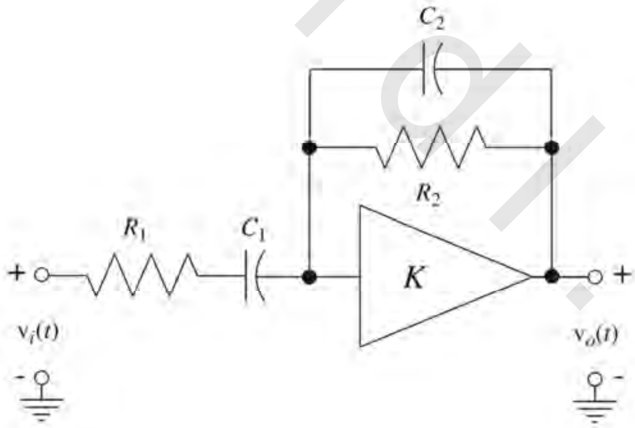
هذه النتائج تعتمد على القيم الدقيقة للمقاومات والمكثفات. في الحقيقة كل المقاومات والمكثفات تم اختيارها بالضبط اعتمادا على القيم الإسمية ولكن قيمها الحقيقية من الممكن أن تختلف عن قيمها الاسمية بنسب قليلة. لذلك فإن أي تصميم جيد يجب أن يكون له به بعض السماحية بحيث يسمح ببعض الحيود في قيم المكونات من قيمها المصممة.

مثال ١١,٥

مرشح مفتاح سالين المنفذ لنطاق من الترددات

من التصميمات المشهورة للمرشحات التي يمكن أن نجدها في العديد من كتب الإلكترونيات أو المرشحات، مرشح مفتاح سالين أو المرشح ذو الـ K الثابتة المكون من قطبين في مرحلة واحدة والمنفذ لمجال من الترددات كما في الشكل رقم (١١,٥٤).

رمز المثلث بداخله ال K يمثل مكبراً مثالياً غير عاكس بمعامل تكبير جهدي محدد K، ومعاوقة دخل لا نهائية، ومقاومة خرج تساوي صفراً وعرض مجال لا نهائي (ليس مكبر عمليات). دالة العبور الكلية والاستجابة الترددية للمرشح المنفذ للترددات المنخفضة:



شكل رقم (١١,٥٤) مرشح مفتاح سالين أو الـ K الثابتة المنفذ للترددات المنخفضة

$$H(s) = \frac{V_O(s)}{V_i(s)} = \frac{s\frac{K}{(1-K)}\frac{1}{R_1C_1}}{s^2 + \left[\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_1C_2(1-K)}\right]s + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

وبالتالي:

$$H(j\omega) = \frac{V_O(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{j\omega\frac{K}{(1-K)}\frac{1}{R_1C_1}}{(j\omega)^2 + j\omega\left[\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_1C_2(1-K)}\right] + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

هذه الاستجابة الترددية هي على الصورة التالية :

$$H(j\omega) = H_o \frac{j2\zeta\omega_0^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_0(j\omega)+\omega_0^2} = \frac{j\omega A}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_0(j\omega)+\omega_0^2}$$

حيث :

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{K}}{(1-\mathrm{K})}\frac{1}{\mathrm{R_1C_2}}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{\mathrm{R_1R_2C_1C_2}}$$

$$\zeta = \frac{\mathrm{R_1C_1+R_2C_2+\frac{R_2C_1}{1-K}}}{2\sqrt{\mathrm{R_1R_2C_1C_2}}}, \; Q = \frac{1}{2\zeta} = \frac{\sqrt{\mathrm{R_1R_2C_1C_2}}}{\mathrm{R_1C_1+R_2C_2+\frac{R_2C_1}{1-K}}}$$

وأيضاً :

$$\mathrm{H_0} = \frac{\mathrm{K}}{1+(1-\mathrm{K})\left(\frac{\mathrm{C_2}}{\mathrm{C_1}}+\frac{\mathrm{R_1}}{\mathrm{R_2}}\right)}$$

خطوات التصميم المقترحة هي اختيار Q ، والتردد الرنيني $f_0=\omega_0/2\pi$ ، واختيار $C_1=C_2=C$ بقيم مناسبة وبعد ذلك نحسب :

$$\mathrm{R_1} = \mathrm{R_2} = \frac{1}{2\pi f_0 C} \text{ and } \mathrm{K} = \frac{3Q-1}{2Q-1} \text{ and } |\mathrm{H_0}| = 3Q-1$$

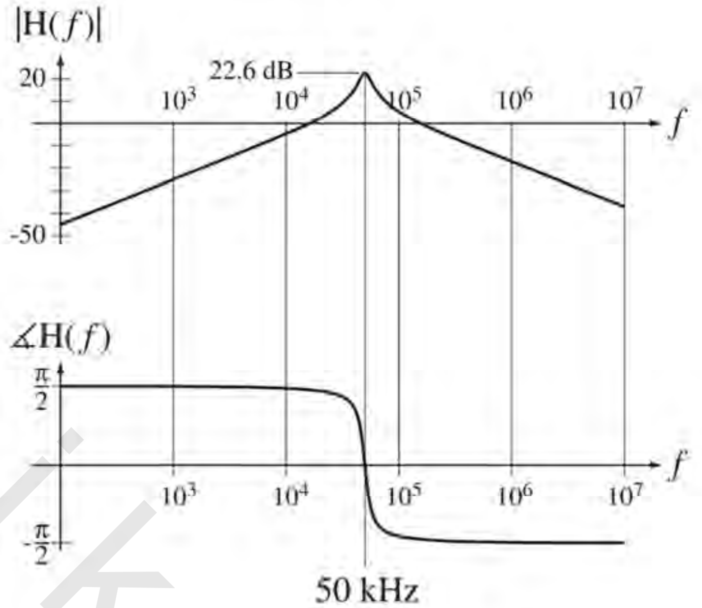
أيضاً ، نوصي بأن Q يجب أن تكون أقل من 10 لهذا التصميم. لذلك أصبحت المهمة تصميم مرشح من هذا النوع له $Q=5$ وتردد ركني مقداره 50kHz.

يمكننا أن نختار قيمة مناسبة للمكثف ، لذلك دعنا نضع $C_1=C_2=C=10nF$. وبعد ذلك نضع $R_1=R_2=318\Omega$ ، و $K=1.556$ و $|H_0|=14$. وهذا يجعل الاستجابة الترددية كما يلي :

$$\mathrm{H(j\omega)} = -\frac{\mathrm{j\omega}(8.792\times10^5)}{(\mathrm{j\omega})^2+(6.4\times10^4)\mathrm{j\omega}+9.86\times10^{10}}$$

أو يمكن كتابتها في صورة تردد دوري كما يلي وكما في الشكل رقم (١١,٥٥) :

$$H(f) = -\frac{j2\pi f(8.792\times10^5)}{(j2\pi f)^2+(6.4\times10^4)j2\pi f+9.86\times10^{10}}$$



شكل رقم (١١,٥٥) مخطط بود للاستجابة الترددية لمرشح مفتاح سالين المنفذ لمجال من الترددات.

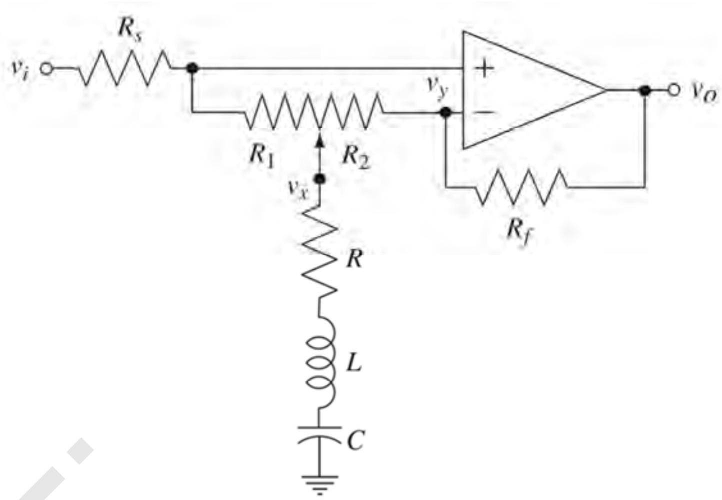
كما هو الحال في المثال السابق، فإننا لا يمكننا أن نختار قيم المكونات لكي تساوي تماماً القيم المحسوبة، ولكننا يمكننا أن نقترب منها. ربما يكون من المفروض أن نستخدم قيمة أسمية للمقاومات مقدارها 330Ω وهذا سيغير من الاستجابة الترددية قليلاً، اعتماداً على قيمها الحقيقية والقيم الحقيقية للمكثفات.

مثال ١١,٦

المرشح RLC المضاعف التربيع

المرشح ثنائي التعبير المقدم في الجزء ١١,٢ يمكن تنفيذه كمرشح فعال كما في الشكل رقم (١١,٥٦). مع فرض مكبر عمليات مثالي، فإن دالة العبور يمكن إيجادها باستخدام طرق تحليل الدوائر القياسية. يمكن كتابة هذه الدالة كما يلي:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s^2 + \frac{R(R_1+R_2)+R_1(R_f+R_2)}{L(R_1+R_2)}s + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R(R_1+R_2)+R_2(R_s+R_1)}{L(R_1+R_2)}s + \frac{1}{LC}}$$



شكل (١١,٥٦) تنفيذ المرشح RLC الفعال الثنائي التربيع

افترض الحالتين التاليتين: $R_1 \neq 0, R_2 = 0$، و $R_1=0, R_2 \neq 0$. في الحالة الأولى ستكون الاستجابة الترددية كما يلي:

$$H(j\omega) = -\frac{(j\omega)^2 + j\omega(R+R_f)/L + 1/LC}{(j\omega)^2 + j\omega R/L + 1/LC}$$

التردد الزاوي الطبيعي سيكون $w_n = 1/\sqrt{LC}$، وهناك أقطاب عند:

$$j\omega = -(R/2L) \pm \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}$$

وأصفار عند:

$$j\omega = -\frac{(R+R_f)}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R+R_f}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

وعند الترددات العالية والمنخفضة، وعند التردد الرنيني كما يلي:

$$\lim_{\omega \to 0} H(j\omega) = 1, \quad \lim_{\omega \to \infty} H(j\omega) = 1, \quad H(j\omega_n) = \frac{R+R_f}{R} > 1$$

إذا كانت $R < 2\sqrt{L/C}$ و $R + R_f \gg 2\sqrt{L/C}$، فإن الأقطاب تكون مركبة والأصفار حقيقية والتأثير المهيمن قريباً من w_n هو زيادة في مقدار الاستجابة الترددية. لاحظ أنه في هذه الحالة، فإن الاستجابة الترددية لا تعتمد على R_1. هذه الحالة تشابه أن يكون لدينا دائرة رنين RLC في مسار التغذية المرتدة مع التخلص من مقسم الجهد.

في الحالة الثانية إذا كانت $R_1=0, R_2 \neq 0$، فإن:

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + j\omega\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}{(j\omega)^2 + j\omega\frac{R+R_s}{L} + \frac{1}{LC}}$$

التردد الرنيني الطبيعي هو $\omega_n = 1/\sqrt{LC}$. هناك أصفار عند:

$$j\omega = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

وأقطاب عند:

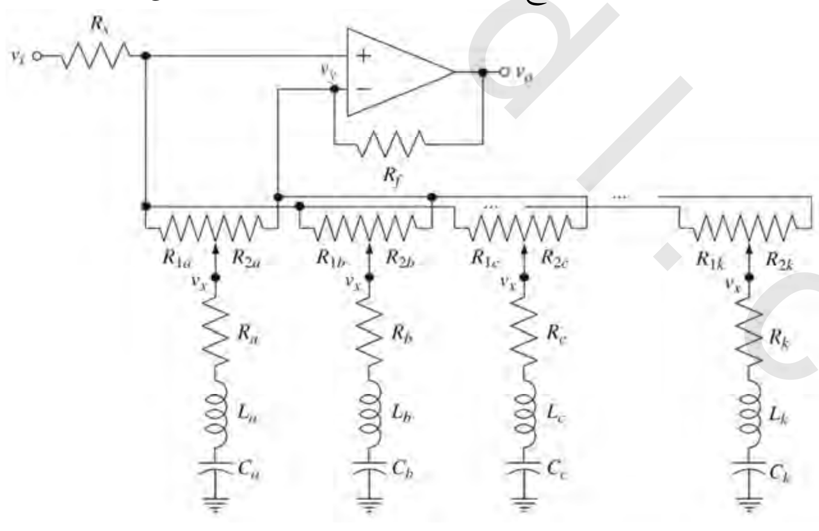
$$j\omega = -\frac{R+R_s}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R+R_s}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

وعند الترددات المنخفضة والعالية وعند التردد الرنيني يمكننا كتابة:

$$\lim_{\omega\to 0} H(j\omega) = 1, \quad \lim_{\omega\to\infty} H(j\omega) = 1, \quad H(j\omega_n) = \frac{R}{R+R_s} < 1$$

إذا كانت $R < 2\sqrt{L/C}$ و $R + R_s \gg 2\sqrt{L/C}$، فإن الأصفار ستكون مركبة وستكون الأقطاب حقيقية والتأثير المهيمن بالقرب من w_n سيكون تناقصاً في مقدار الاستجابة الترددية. لاحظ أنه في هذه الحالة لا تعتمد الاستجابة الترددية على R_2، وهذه الحالة تشبه أن يكون لدينا دائرة RLC رنينية على دخل المكبر مع التخلص من مقسم الجهد. إذا كانت $R_1=R_2$ و $R_f=R_s$ فإن الاستجابة الترددية ستكون $H(j\omega)=1$ وستكون إشارة الخرج هي نفسها إشارة الدخل.

لذلك فإن مقسم جهد واحد من الممكن أن يحدد إذا كان مقدار الاستجابة الترددية سيكون متناقصاً أو متزايداً بالقرب من التردد الرنيني. إن المعادل التخطيطي graphic equalizer المقدم في الجزء ١١.٢ يمكن بناؤه باستخدام تتابع من ٩ حتى ١١ من هذا المرشح الثنائي التربيع بحيث تكون الترددات الرنينية لها منفصلة بأوكتاف بين كل مرشح والتالي. يمكن أيضاً بناء هذا المرشح عن طريق استخدام مكبر عمليات واحد كما هو موضح في الشكل رقم (١١،٥٧). نتيجة التفاعل بين المكونات RLC غير الفعالة في الشبكة، فإن عمل هذه الدائرة لن يكون مساوياً تماماً للتتابع المتعدد من المرشحات الثنائية التربيع، ولكنها تحقق الهدف بمكونات أقل.



شكل رقم (١١،٥٧) دائرة المعدل التخطيطي مبنية باستخدام مكبر عمليات واحد فقط.

(١١,٤) المرشحات المتقطعة زمنياً

الرموز

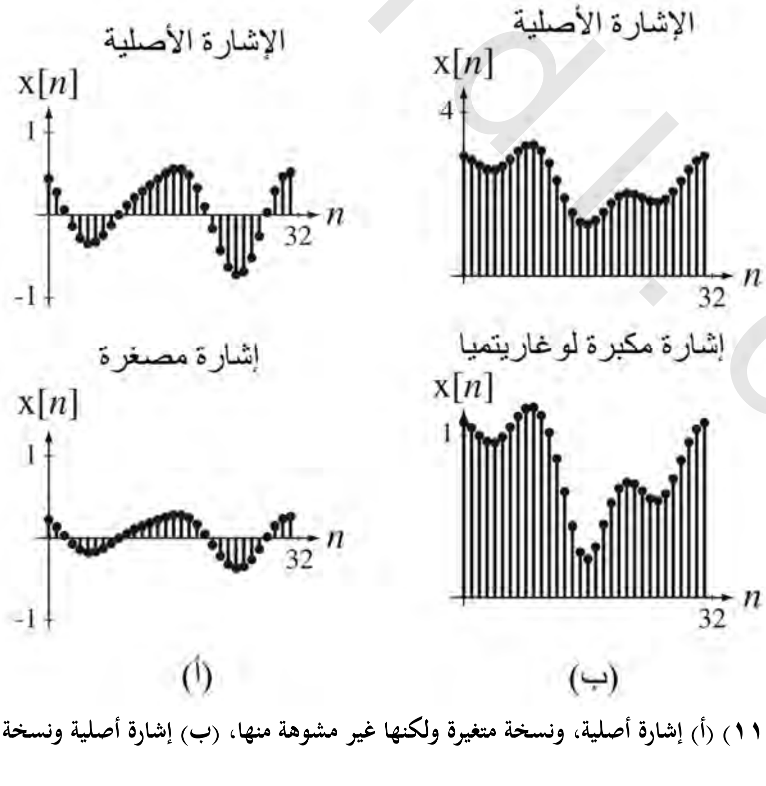
لقد تم استنتاج DTFT من تحويل z عن طريق تبديل المتغيرات التالي $z \to e^{j2\pi F}$ أو $z \to e^{j\Omega}$ حيث كل من F و Ω متغيرات حقيقية تمثل التردد الدوري والزاوي. في مطبوعات الأنظمة المتقطعة زمنياً (الرقمية) فإن المتغير الأكثر شيوعاً المستخدم في التردد هو Ω. ولذلك فإننا سنستخدم الرمز Ω باستمرار في الأجزاء التالية عن المرشحات المتقطعة زمنياً.

المرشحات المثالية

إن تحليل وتصميم المرشحات المتقطعة زمنياً لها العديد من المتوازيات مع تحليل وتصميم المرشحات المستمرة زمنياً. في هذا الجزء والتالي له سنستكشف خواص المرشحات المتقطعة زمنياً باستخدام العديد من الطرق والمصطلحات المستخدمة مع المرشحات المستمرة زمنياً.

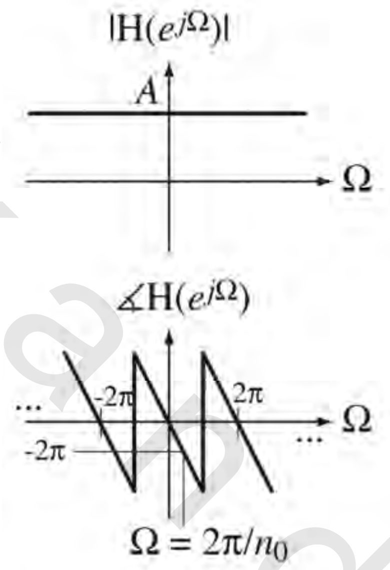
التشويه

إن مصطلح التشويه له المعنى نفسه مع المرشحات المتقطعة زمنياً مثل المرشحات المستمرة زمنياً، مع تغيير شكل الإشارة. افترض الإشارة x[n] التي لها الشكل الموضح في أعلى الشكل رقم (١١,٥٨أ). بالتالي فإن الإشارة الموجودة في أسفل الشكل رقم (١١,٥٨أ) هي صورة غير مشوهة من هذه الإشارة. الشكل رقم (١١,٥٨ب) يوضح أحد أنواع هذا التشويه.



شكل رقم (١١,٥٨) (أ) إشارة أصلية، ونسخة متغيرة ولكنها غير مشوهة منها، (ب) إشارة أصلية ونسخة مشوهة منها

تماماً كما كان الأمر حقيقياً مع المرشحات المستمرة زمنياً، فإن استجابة الصدمة التي لا تسبب تشويهاً تكون عبارة عن صدمة، ومن الممكن لهذه الصدمة أن تكون شدتها مختلفة عن الوحدة ومن الممكن أن تكون مزاحة زمنياً. من أشهر صور استجابات الصدمة لنظام غير مشوَّه هي $h[n]=A\delta[n-n_0]$. الاستجابة الترددية المقابلة هي DTFT لاستجابة الصدمة وهي $H(e^{j\Omega}) = Ae^{-j\Omega n_0}$ من الممكن وصف هذه الاستجابة الترددية بمقدارها وزاويتها كما يلي: $|H(e^{j\Omega})| = A$ و $\measuredangle H\left(e^{j\Omega}\right) = -\Omega n_0$. لذلك فإن النظام الخالي من التشويه يكون له مقدار استجابة ترددية ثابت مع التردد وزاوية تكون خطية مع التردد كما في الشكل رقم (١١.٥٩).



شكل رقم (١١,٥٩) مقدار وزاوية نظام خالي من التشويه

مقدار الاستجابة الترددية لنظام خالٍ من التشويه يكون ثابتاً وزاوية الاستجابة الترددية تكون خطية على المدى من $-\pi<\Omega<\pi$ وتتكرر دوريا خارج هذا المدى. حيث إن n_0 تكون صحيحة، فإن مقدار وزاوية المرشح الخالي من التشويه من المؤكد أنها ستتكرر كل مرة تتغير Ω بمقدار 2π.

تصنيفات المرشحات

إن اللفظين "مجال التمرير أو السماح passband" و "مجال الوقف أو المنع stopband " لهما المعنى نفسه مع المرشحات المتقطعة زمنياً مثل المرشحات المستمرة زمنياً. إن أوصاف المرشحات المتقطعة زمنياً تتشابه من حيث المفهوم ولكن يجب تعديلها قليلا نتيجة وجود حقيقة أن كل الأنظمة المتقطعة لها استجابات ترددية دورية. إنها تكون دورية لأنه في الإشارة $A\cos(\Omega_0 n)$ إذا كانت Ω_0 ستتغير بإضافة $2\pi m$، حيث m رقم صحيح، فإن الإشارة تصبح $A\cos((\Omega_0+2\pi m)n)$ وبالتالي فإن الإشارة لن تتغير.

$$A\,cos(\Omega_0 n) = A\,cos\big((\Omega_0 + 2\pi m)n\big) = A\,cos(\Omega_0 n + 2\pi mn),\ \mathrm{m}\ an\ integer$$

لذلك فإن أي مرشح متقطع زمنياً يتم وصفه عن طريق استجابته الترددية على الدورة الأساسية $-\pi<\Omega<\pi$.

أي مرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة يسمح بمرور طاقة الإشارة للترددات $0<|\Omega|<\Omega_m<\pi$ بدون أي تشويه ويوقف طاقة الإشارة عند الترددات الأخرى في المدى $-\pi<\Omega<\pi$.

أي مرشح مثالي منفذ للترددات المرتفعة يوقف طاقة الإشارة للترددات $0<|\Omega|<\Omega_m<\pi$ ويسمح بمرور طاقة الإشارة عند الترددات الأخرى في المدى $-\pi<\Omega<\pi$ بدون أي تشويه.

أي مرشح مثالي منفذ لمجال من الترددات يسمح بمرور طاقة الإشارة للترددات $0<\Omega_L<|\Omega|<\Omega_H<\pi$ بدون أي تشويه ويوقف طاقة الإشارة عند الترددات الأخرى في المدى $-\pi<\Omega<\pi$.

أي مرشح مثالي موقف لمجال من الترددات يوقف مرور طاقة الإشارة للترددات $0<\Omega_L<|\Omega|<\Omega_H<\pi$ ويسمح بمرور طاقة الإشارة عند الترددات الأخرى في المدى $-\pi<\Omega<\pi$ بدون أي تشويه.

الاستجابات الترددية

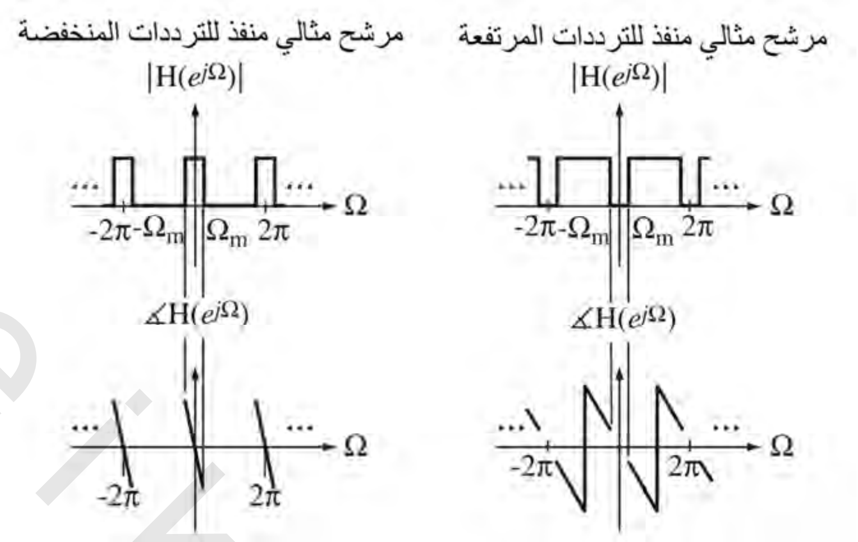
في الشكل رقم (١١.٦٠) والشكل رقم (١١.٦١) نرى استجابتي المقدار والزاوية للأربعة أنواع الأساسية للمرشحات المثالية.

استجابات الصدمة والسببية

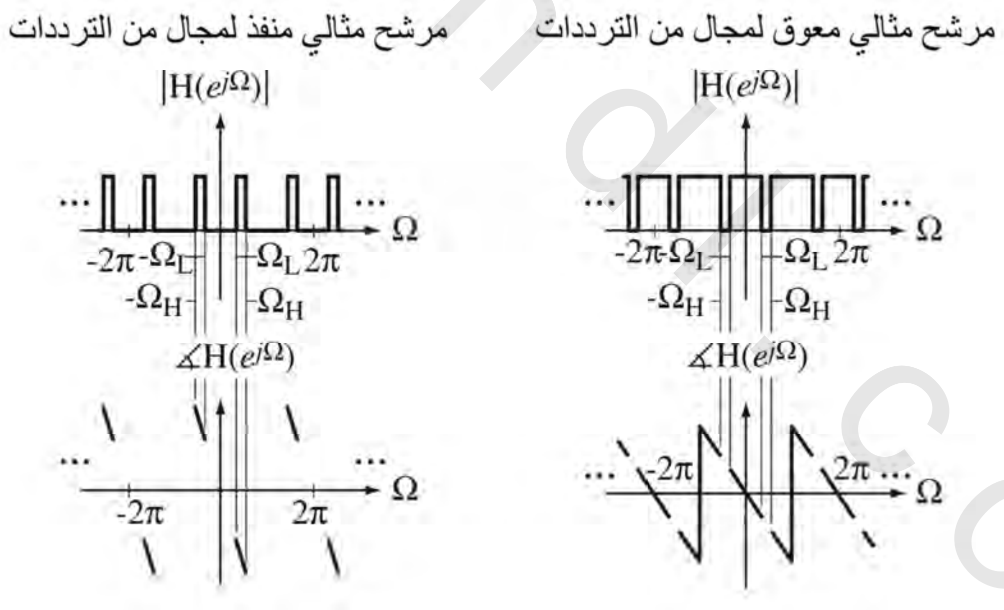
استجابات الصدمة للمرشحات المثالية هي التحويل العكسي لاستجاباتهم الترددية. استجابات الصدمة والاستجابات الترددية للأربعة أنواع الأساسية للمرشحات المثالية تم تلخيصها في الشكل رقم (١١.٦٢). هذه المواصفات تعتبر مواصفات عامة بمهوم أنها تشتمل على معامل تكبير ثابت A اختياري وأيضاً زمن تأخير اختياري n_0.

الشكل رقم (١١.٦٣) يبين بعض الأشكال المثالية لاستجابات الصدمة للأربعة أنواع الأساسية للمرشحات المثالية.

إن افتراض السببية يكون هو نفسه في حالة المرشحات المتقطعة مثل المرشحات المستمرة زمنياً. مثل المرشحات المثالية المستمرة زمنياً ، فإن المرشحات المثالية المتقطعة زمنياً يكون لها استجابات صدمة غير سببية وبذلك تكون غير قابلة للبناء بصورة طبيعية.



شكل رقم (١١,٦٠) الاستجابات الترددية للمقدار والزاوية للمرشحات المنفذة للترددات المنخفضة والترددات المنفذة للترددات العالية.



شكل رقم (١١,٦١) الاستجابات الترددية للمقدار والزاوية للمرشحات المنفذة والمرشحات المعوقة لمجال من الترددات.

نوع المرشح	الاستجابة الترددية
منفذ للترددات المنخفضة	$H(e^{j\Omega}) = A\,rect(\Omega/2\Omega_m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n_0} * \delta_{2\pi}(\Omega)$
منفذ للترددات المرتفعة	$H(e^{j\Omega}) = A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n_0}\,[1 - rect(\Omega/2\Omega_m) * \delta_{2\pi}(\Omega)]$
منفذ لمجال من الترددات	$H(e^{j\Omega}) = A\left[rect\left(\frac{\Omega-\Omega_0}{\Delta\Omega}\right) + rect\left(\frac{\Omega-\Omega_0}{\Delta\Omega}\right)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n_0} * \delta_{2\pi}(\Omega)$
معوق لمجال من الترددات	$H(e^{j\Omega}) = A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n_0}\left\{1 - \left[rect\left(\frac{\Omega-\Omega_0}{\Delta\Omega}\right) + rect\left(\frac{\Omega-\Omega_0}{\Delta\Omega}\right)\right] * \delta_{2\pi}(\Omega)\right\}$
نوع المرشح المثالي	الاستجابة الصدمية
منفذ للترددات المنخفضة	$h[n] = (A\Omega_m/\pi)sinc(\Omega_m(\mathrm{n} - n_0))$
منفذ للترددات المرتفعة	$h[n] = A\delta[\mathrm{n} - n_0] - (A\Omega_m/\pi)sinc(\Omega_m\,(\mathrm{n} - n_0)/\pi)$
منفذ لمجال من الترددات	$h[n] = 2A\Delta f sinc(\Delta f(\mathrm{t} - t_0))cos(2\pi f_0(\mathrm{t} - t_0))$
معوق لمجال من الترددات	$h[n] = A\delta[\mathrm{n} - n_0] - (A\Delta\Omega/\pi)sinc(\Delta\Omega\,(\mathrm{n} - n_0)/2\pi)cos(\Omega_0(\mathrm{n} - n_0))$
	$\Delta\Omega = \Omega_H - \Omega_L \;,\;\; \Omega_0 = (\Omega_H - \Omega_L)/2$

شكل (١١,٦٢) الاستجابة الترددية واستجابة الصدمة للأنواع الأربعة الأساسية من المرشحات

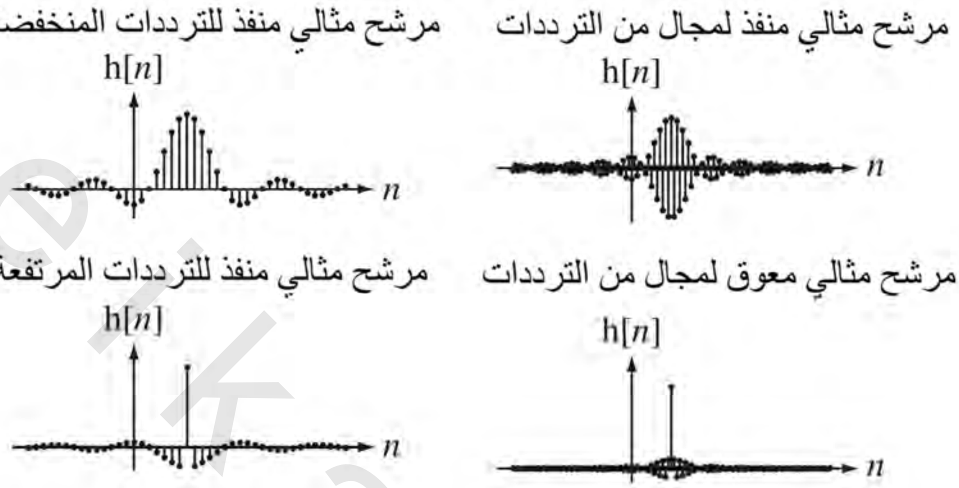
في الشكل رقم (١١.٦٤) والشكل رقم (١١.٦٥) يوجد بعض الأمثلة على استجابات الصدمة، والاستجابات الترددية، والاستجابات للموجة المستطيلة لبعض المرشحات غير المثالية والسببية، التي تمثل الأربعة أنواع الأساسية من المرشحات. في كل حالة تم رسم الاستجابة الترددية في الدورة الأساسية فقط $-\pi<\Omega<\pi$.

تأثير هذه الأنواع العملية من المرشحات على الموجة المستطيلة يشابه تماماً الاستجابات المقابلة للمرشحات المستمرة زمنياً.

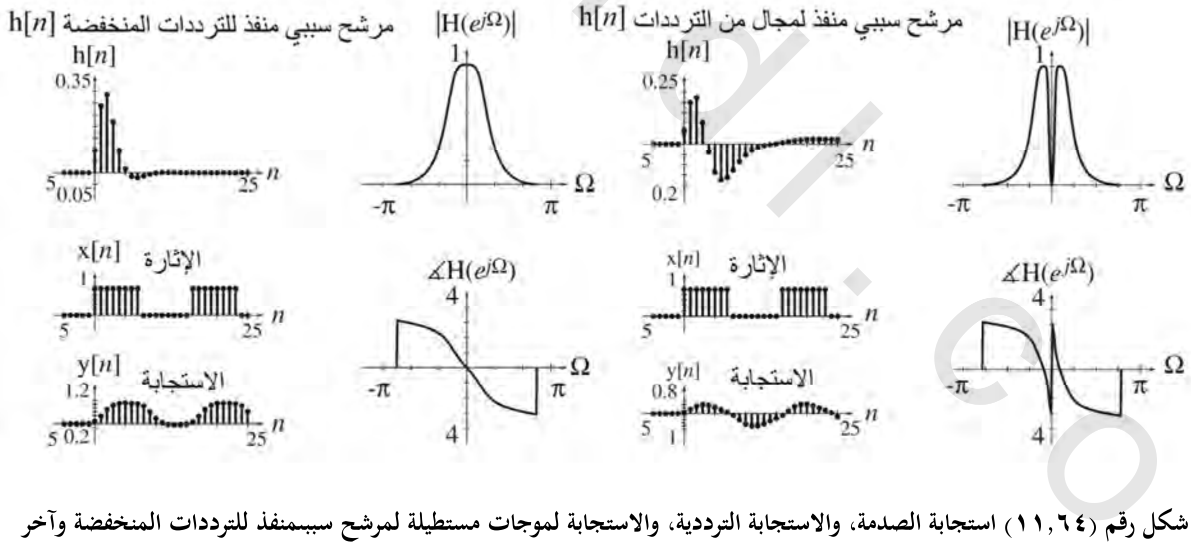
ترشيح الصور

أحد الطرق الظريفة لإظهار تأثير ما تفعله هذه المرشحات هو أن نقوم بترشيح صورة. الصورة هي إشارة ثنائية الأبعاد. يمكن اكتساب الصور بطرق مختلفة. كاميرا الفيلم تعرض الفيلم الحساس للضوء للمنظر من خلال نظام العدسات، التي تضع صورة ضوئية للمنظر على الفيلم. الصورة من الممكن أن تكون صورة ملونة أو صورة أبيض وأسود (أحادية اللون). هذا سنقتصر في هذا الشرح على الصور أحادية اللون. الكاميرا الرقمية تكتسب عن طريق تصوير المنظر على مصفوفة مستطيلة من الكشفات، التي تحول الطاقة الضوئية إلى شحنات كهربية. كل

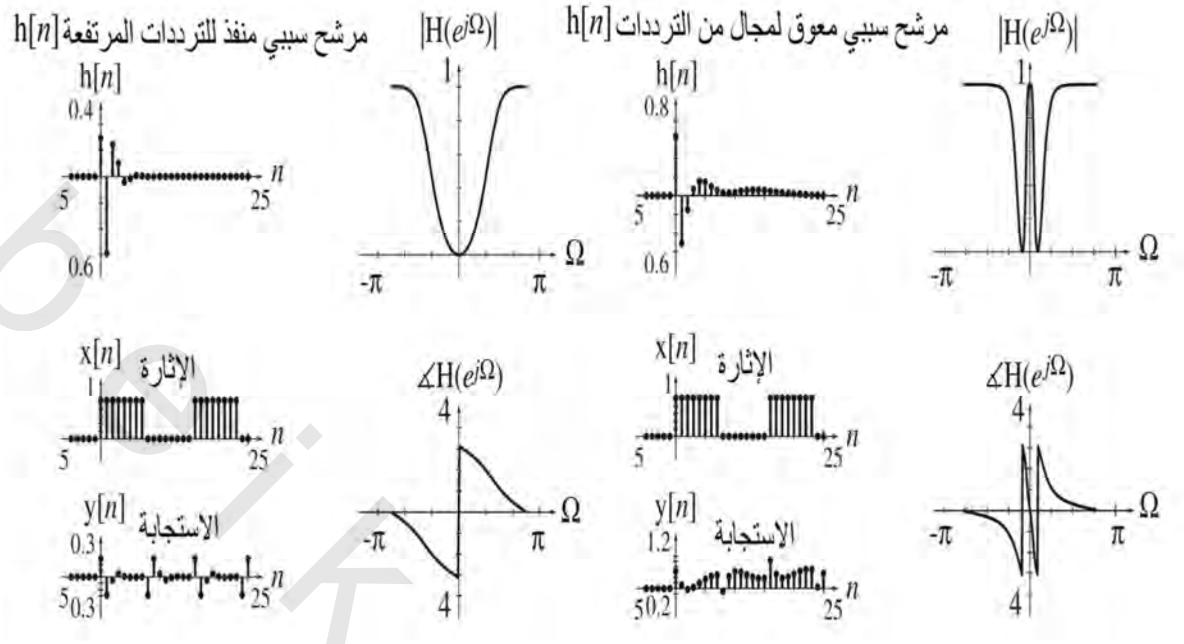
كاشف يرى جزءاً صغيراً جداً من الصورة يسمى البكسل pixel (وهي اختصار لكلمة عنصر صورة picture element). هذه الصورة المكتسبة عن طريق الكاميرا الرقمية تتكون بالتالي من مصفوفة من الأرقام، رقم لكل بكسل، يمثل شدة الضوء عند هذه النقطة (نؤكد على فرض الصورة أحادية اللون).



شكل رقم (١١,٦٣) استجابات صدمة مثالية لمرشح منفذ للترددات المنخفضة، وآخر منفذ للترددات المرتفعة، وآخر منفذ لمجال من الترددات، وآخر معوق لمجال من الترددات.



شكل رقم (١١,٦٤) استجابة الصدمة، والاستجابة الترددية، والاستجابة لموجات مستطيلة لمرشح سببمنفذ للترددات المنخفضة وآخر منفذ لمجال من الترددات.

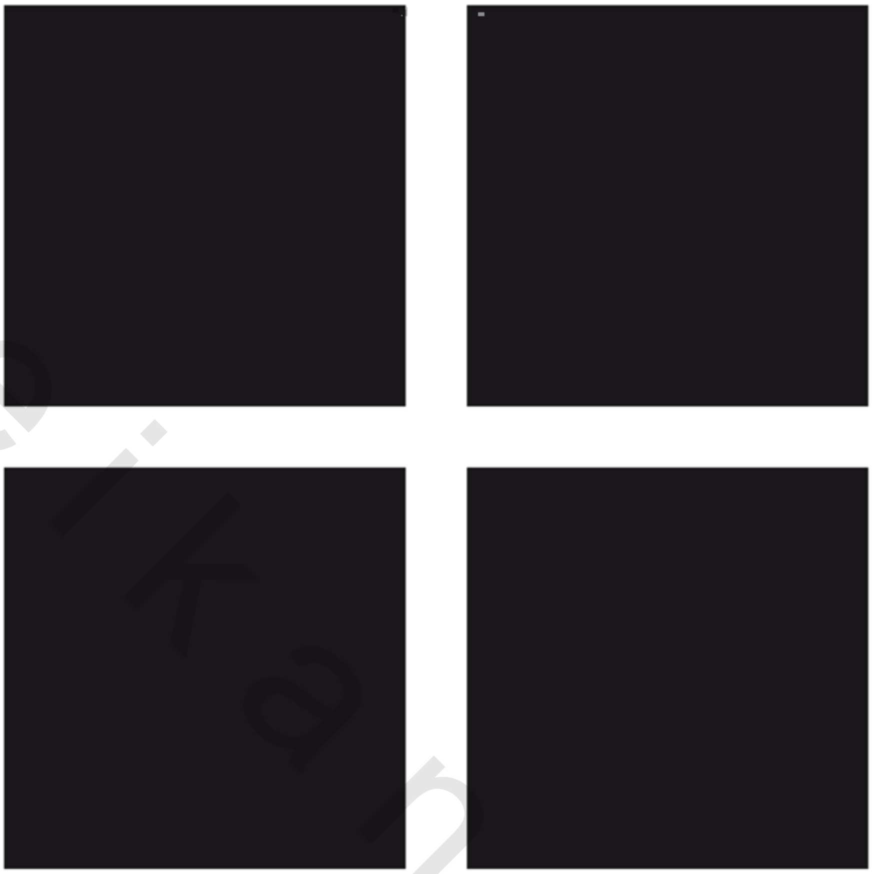


شكل رقم (١١,٦٥) استجابة الصدمة، والاستجابة الترددية، والاستجابة لموجات مستطيلة لمرشح سببمنفذ للترددات المرتفعة وآخر معوق لمجال من الترددات

تعتبر الصورة دالة فراغ مستمر من محورين أو بعدين مساحيين يسميان عادة x و y. الصورة الرقمية المكتسبة هي دالة فراغ متقطع من محورين مساحيين متقطعين n_x ، n_y. عموماً، أو في الأساس، فإن أي صورة يمكن ترشيحها مباشرة. في الحقيقة، هناك طرق ضوئية التي تقوم بالترشيح الضوئي فقط. ولكن حتى الآن، فإن معظم أنواع مرشحات الصور الشائعة تكون رقمية، مما يعني أن الصورة المكتسبة رقميا يتم ترشيحها عن طريق الحاسب باستخدام طرق عددية.

الطرق المستخدمة في ترشيح الصور تشبه إلى حد كبير الطرق المستخدمة لترشيح الإشارات، فيما عدا أنها تتم في بعدين. افترض مثال الصورة البسيط الموضح في الشكل رقم (١١.٦٦).

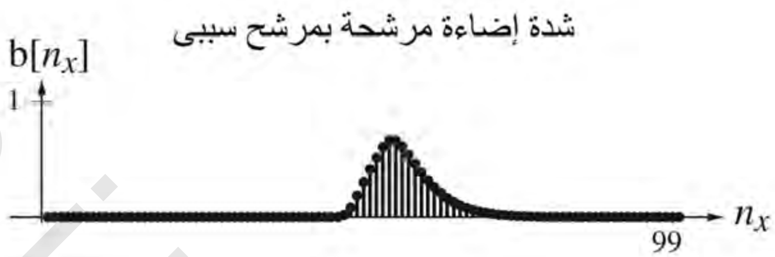
أحد الطرق لترشيح الصورة هي أن نعامل صفاً واحداً من بكسلات الصورة كإشارة أحادية البعد ثم يتم ترشيحها تماماً كإشارة متقطعة زمنياً. الشكل رقم (١١.٦٧) هو رسم لشدة الإضاءة لبكسلات الصف الذي في قمة الصورة مع المحور الأفقي المتقطع n_x.



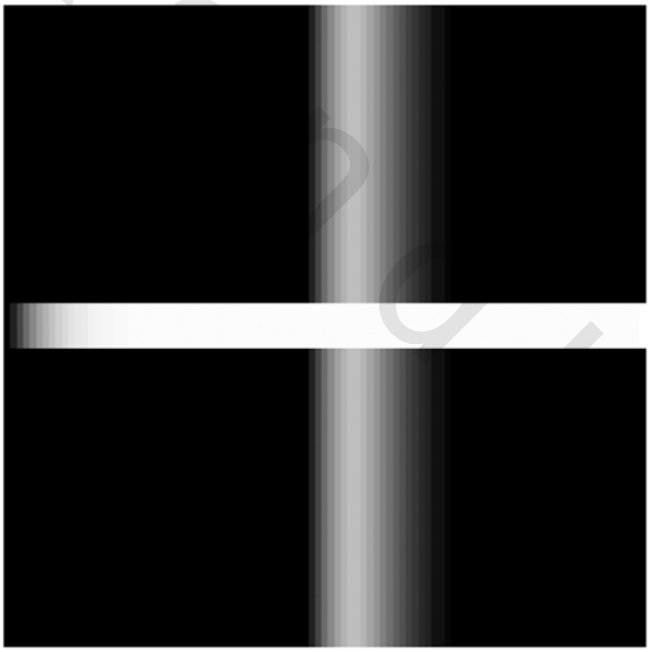
شكل رقم (١١,٦٦) صليب أبيض على خلفية سوداء.

شكل رقم (١١.٦٧) شدة الإضاءة لصف البكسلات الذي في قمة صورة الصليب الأبيض

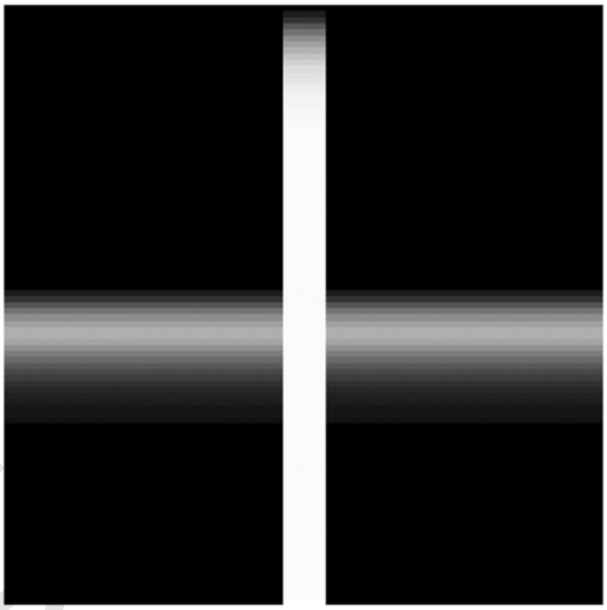
إذا كانت الإشارة دالة في الزمن المتقطع وكنا نرشحها في الزمن الحقيقي (مما يعني أننا قد لا يكون لدينا القيم المستقبلية متاحة أثناء عملية الترشيح)، فإن الإشارة المرشحة بمرشح منفذ للترددات المنخفضة ستكون كما هو مبين في الشكل رقم (١١.٦٨).



شكل رقم (١١,٦٨) شدة إضاءة الصف الأول من البكسلات بعد ترشيحه بمرشح سببي منفذ للترددات المنخفضة.



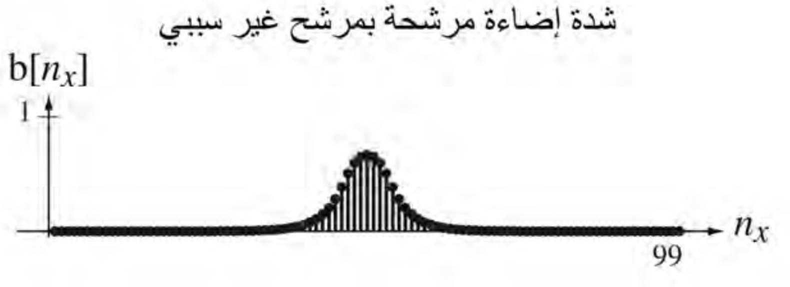
شكل رقم (١١,٦٩) صورة الصليب الأبيض بعد ترشيح جميع صفوفها بمرشح سببي منفذ للترددات المنخفضة



شكل رقم (١١,٧٠) صورة الصليب الأبيض بعد ترشيح جميع أعمدتها بمرشح سببي منفذ للترددات المنخفضة.

بعد ترشيح جميع صفوف الصورة بمرشح منفذ للترددات المنخفضة فإن الصورة تبدو مضببة أو منعمة في الاتجاه الأفقي ولم تتغير في الاتجاه الرأسي كما في الشكل رقم (١١.٦٩). إذا قمنا بترشيح الأعمدة بدلاً من الصفوف، فإن التأثير سيكون كما هو واضح في الشكل رقم (١١.٧٠).

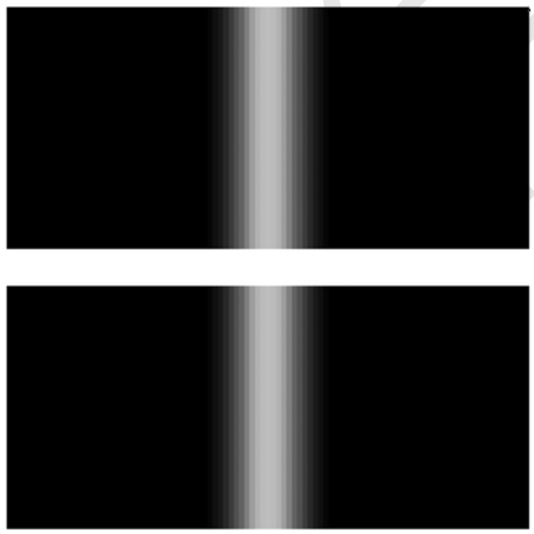
أحد الأشياء الظريفة عن ترشيح الصور هي أن السببية لا يجب أن تكون دائماً محققة أثناء عملية الترشيح. في العادة يتم اكتساب الصورة كلها أولاً، ثم تتم معالجتها. باتباع التطابق بين الزمن والمساحة، فإنه أثناء الترشيح الأفقي، فإن قيم الإشارة السابقة ستقع على اليسار والقيم المستقبلية ستكون على اليمين. أثناء الترشيح في الزمن الحقيقي للإشارات الزمنية لا نستطيع استخدام القيم المستقبلية؛ لأننا لا نعرفها. في ترشيح الصورة تكون الصورة كلها متاحة لنا قبل البدء في عملية الترشيح ولذلك فإن القيم المستقبلية تكون متاحة. إذا قمنا بترشيح الصف الأول الأفقي من الصورة باستخدام مرشح غير سببي منفذ للترددات المنخفضة، فإن التأثير سيبدو كما هو موضح في الشكل رقم (١١.٧١).



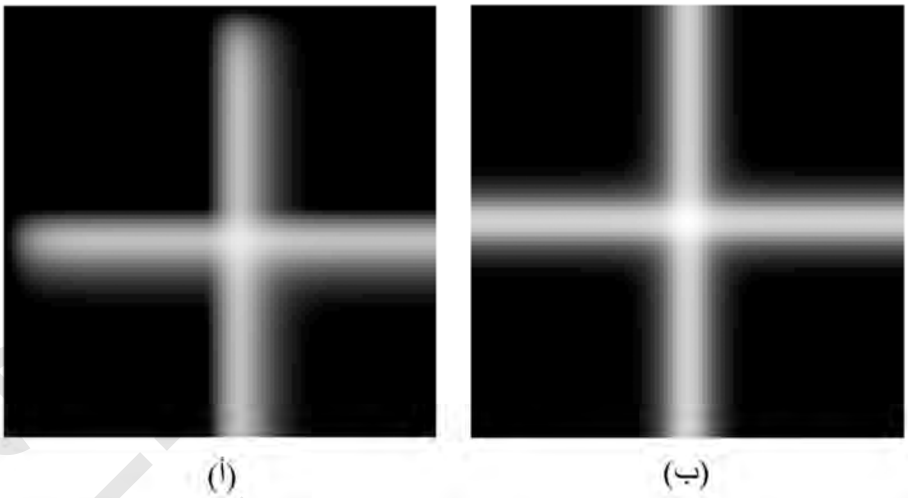
شكل رقم (١١,٧١) شدة إضاءة الصف الأول من البكسلات بعد ترشيحة بمرشح غير سببي منفذ للترددات المنخفضة

إذا رشحنا أفقياً الصورة كلها بمرشح غير سببي منفذ للترددات المنخفضة، فإن النتيجة ستكون كما هو موضح في الشكل رقم (١١.٧٢). التأثير الكلي لهذا النوع من المرشحات من الممكن رؤيته في الشكل رقم (١١.٧٣)، حيث تم ترشيح صفوف وأعمدة الصورة بمرشح منفذ للترددات المنخفضة.

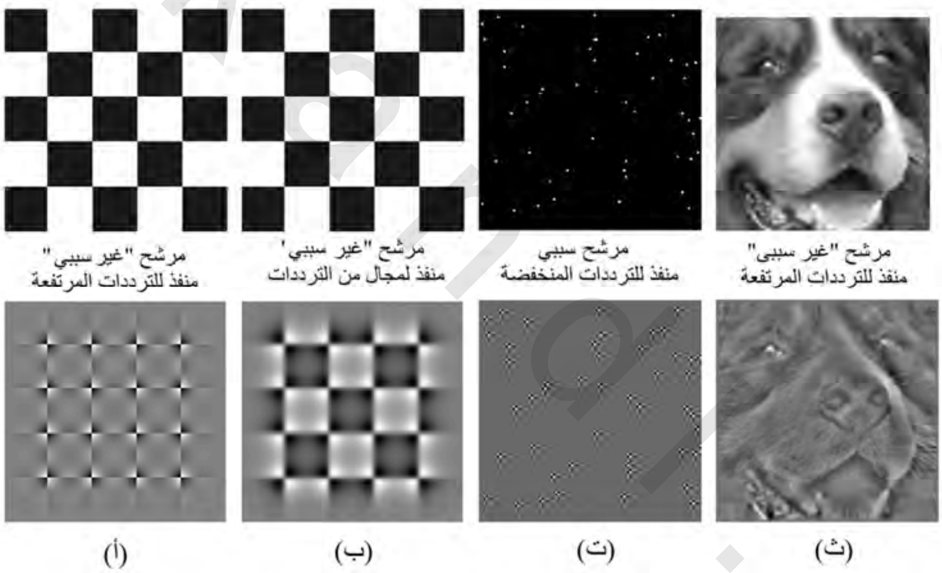
بالطبع، فإن المرشح المشار إليه مسبقاً على أنه غير سببي يكون في الحقيقة مرشحاً سببياً لأن كل بيانات الصورة تم اكتسابها قبل إجراء عملية الترشيح، وعلى ذلك فلا حاجة لمعرفة قيم مستقبلية. إننا نسميه فقط بأنه غير سببي لأنه في حالة وجود محاور مساحية بدلاً من الزمنية، وكنا نقوم بعملية ترشيح في الزمن الحقيقي، فإن الترشيح من الممكن أن يكون غير سببي. الشكل رقم (١١.٧٤) يوضح بعض الصور الأخرى وبعض عمليات الترشيح الأخرى.



شكل رقم (١١,٧٢) صورة الصليب الأبيض بعد ترشيح جميع الصفوف بمرشح غير سببي منفذ للترددات المنخفضة



شكل رقم (١١,٧٣) صورة الصليب الأبيض مرشحة بمرشح منفذ للترددات المنخفضة (أ) سببي (ب) غير سببي.



شكل رقم (١١,٧٤) أمثلة على الأنواع المختلفة من مرشحات الصور

في كل صورة من صور الشكل (١١.٧٤) تتراوح قيم البكسلات من الأسود إلى الأبيض مع المستويات الرمادية بينهما. لكي نفهم تأثيرات الترشيح دعنا نفكر في البكسل السوداء على أن قيمتها تساوي صفراً، والبكسل البيضاء تكون قيمتها تساوي 1+. وعلى ذلك فإن المستوى الرمادي المتوسط ستكون قيمة أي بكسل فيه تساوي 0.5.

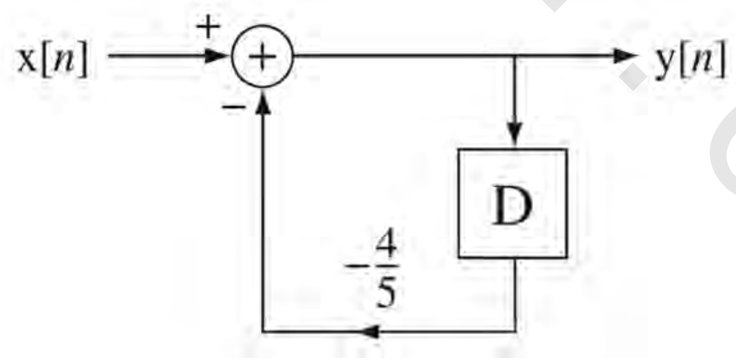
الصورة (أ) هو نموذج للوحة شطرنج تم ترشيحها باستخدام مرشح منفذ للترددات المرتفعة في البعدين. تأثير المرشح المنفذ للترددات المرتفعة هو تأكيد أو تقوية الحواف وتوهين أو إضعاف القيم المتوسطة بين الحواف. تحتوي الحواف على معلومات "الترددات المساحية العالية" في الصورة. لذلك فإن الصورة المرشحة بمرشح منفذ

للترددات المرتفعة يكون لها قيمة متوسطة تساوي 0.5 (المستوى الرمادي المتوسط) والمربعات السوداء والبيضاء، التي كانت مختلفة جداً في الصورة الأصلية، أصبحت تبدو هي نفسها تقريباً في الصورة المرشحة. لوحة الشطرنج في الصورة (ب) تم ترشيحها بمرشح منفذ لمجال من الترددات. هذا المرشح يعمل على تنعيم الحواف؛ لأنه له استجابة قليلة عند الترددات العالية. إنه أيضاً يوهن القيم المتوسطة؛ لأنه له قيمة استجابة قليلة عند الترددات المنخفضة جدا بما في ذلك التردد صفر. الصورة (ت) هي صورة لنموذج من النقاط العشوائية تم ترشيحها بمرشح سببي منفذ للترددات المنخفضة. يمكننا أن نرى أن المرشح سببي نتيجة أن التنعيم يحدث عادة على يمين وأسفل النقاط، والذي يعني أنها تقابل أزمنة متأخرة إذا كانت الإشارات إشارات زمنية. استجابة المرشح لنقطة ضوئية صغيرة جداً في الصورة تسمى دالة انتشار النقطة. دالة انتشار النقطة تناظر استجابة الصدمة في نطاق الأنظمة الزمنية. النقطة الضوئية الصغيرة تقارب صدمة ثنائية البعد ودالة انتشار النقطة تقابل استجابة الصدمة الثنائية البعد. الصورة الأخيرة (ث) هي صورة وجه لكلب. لقد تم ترشيح هذه الصورة بمرشح منفذ للترددات المرتفعة. تأثير ذلك هو تشكيل صورة من الخطوط الخارجية في الصورة الأصلية؛ لأن هذا المرشح يؤكد أو يقوي التغيرات المفاجئة (الحواف) ويوهن من التغيرات البطيئة في أجزاء الصورة.

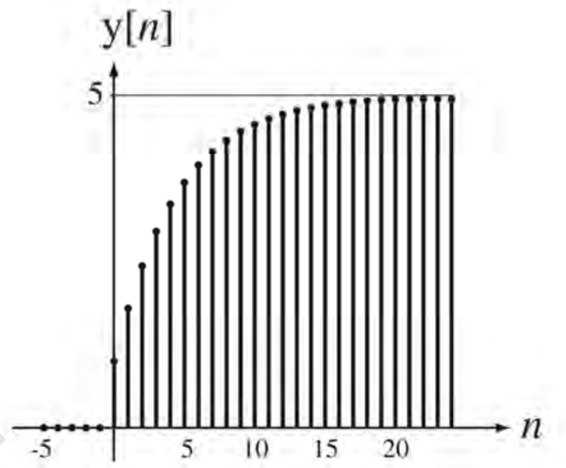
المرشحات العملية

مقارنة مع المرشحات المستمرة زمنياً

الشكل رقم (١١.٧٥) عبارة عن مثال لمرشح LTI منفذ للترددات المنخفضة. استجابة تتابع الوحدة هي $[5-4(0.8)^n]u[n]$ كما في الشكل رقم (١١.٧٦).



شكل رقم (١١,٧٥) مرشح منفذ للترددات المنخفضة



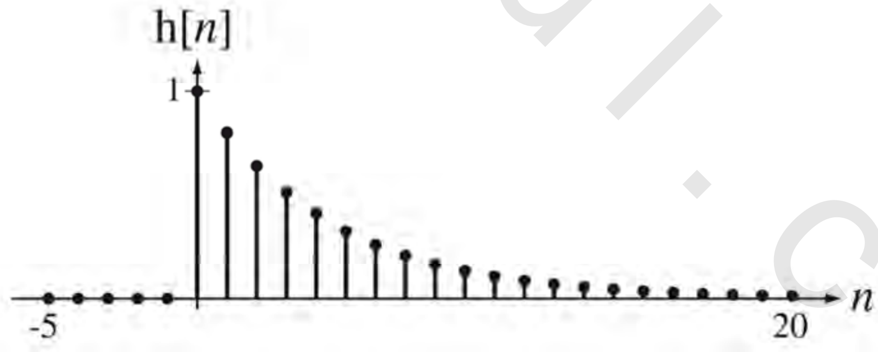
شكل رقم (١١,٧٦) استجابة تتابع الوحدة للمرشح المنفذ للترددات المنخفضة.

استجابة الصدمة لأي نظام متقطع زمنياً هي الفرق العكسي الأول لاستجابته لوحدة التتابع. في هذه الحالة يمكن كتابة المعادلة التالية:

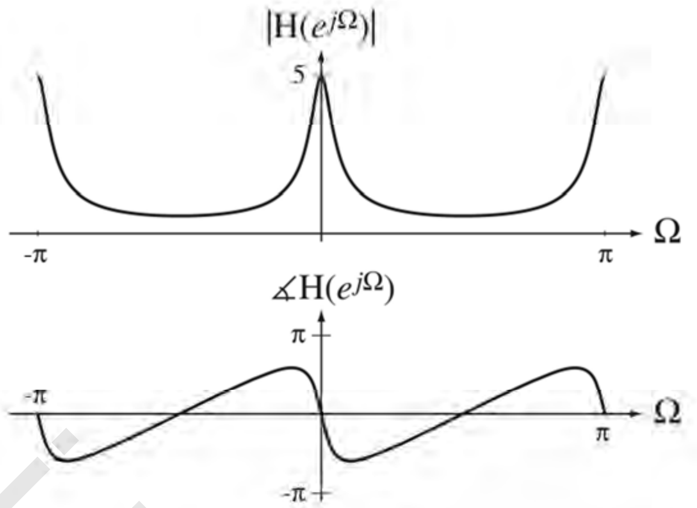
$$h[n] = [5 - 4(4/5)^n]u[n] - [5 - 4(4/5)^{n-1}]u[n-1]$$

والتي تؤول إلى $h[n]=(0.8)^n u[n]$ كما في الشكل رقم (١١.٧٧). دالة العبور والاستجابة الترددية ستكون كما يلي وكما في الشكل رقم (١١.٧٧) والشكل رقم (١١.٧٨):

$$H(z) = \frac{z}{z-0.8} \Rightarrow H(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - 0.8}$$

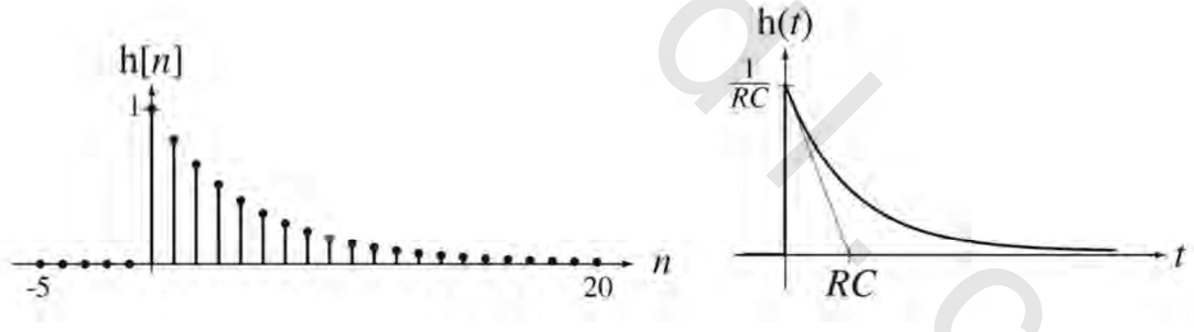


شكل رقم (١١,٧٧) استجابة الصدمة لمرشح منفذ للترددات المنخفضة.

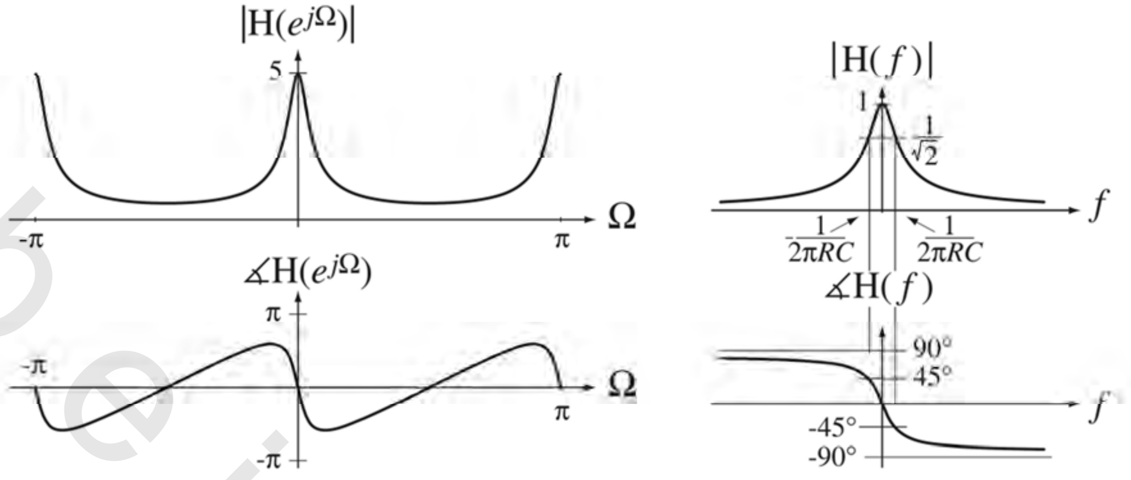


شكل رقم (١١,٧٨) الاستجابة الترددية لمرشح منفذ للترددات المنخفضة.

من المفيد أن نقارن استجابة الصدمة والاستجابة الترددية لهذا المرشح المنفذ للترددات المنخفضة واستجابة الصدمة والاستجابة الترددية للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة. استجابة الصدمة للمرشح المتقطع زمنياً والمنفذ للترددات المنخفضة يبدو كنسخة معيننة من استجابة الصدمة للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة كما في الشكل رقم (١١.٧٠). الاستجابة الترددية لكل من المرشحين لها أيضاً التشابه نفسه كما في الشكل رقم (١١.٨٠).



شكل رقم (١١,٧٩) مقارنة لاستجابة الصدمة للمرشح المتقطع زمنياً والمرشح RC المنفذين للترددات المنخفضة.



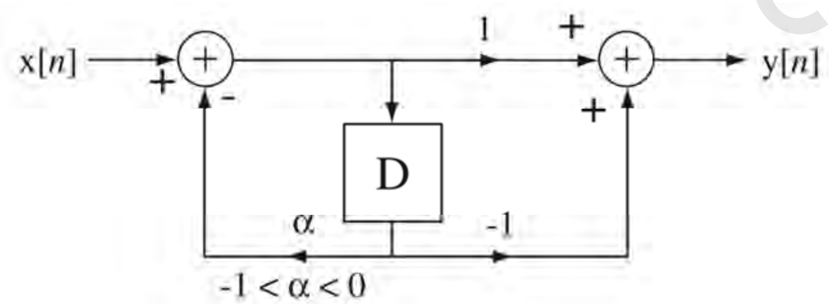
شكل رقم (١١,٨٠) الاستجابة الترددية للمرشح المتقطع زمنياً والمرشح المستمر زمنياً المنفذين للترددات المنخفضة.

إذا قارنا أشكال مقدار وزاوية الاستجابة الترددية على المدى الترددي $-\pi<\Omega<\pi$، سنجد أنها تتشابه لدرجة كبيرة (المقادير تتشابه أكثر من الزوايا). ولكن الاستجابة الترددية المتقطعة زمنياً تكون دائماً دورية ولا يمكن أن تكون منفذة للترددات المنخفضة بمفهوم الاستجابة الترددية نفسه للمرشح RC المنفذ للترددات المنخفضة. إن اسم "منفذ للترددات المنخفضة" تتطبق بدقة على سلوك الاستجابة الترددية في المدى $-\pi<\Omega<\pi$ وهذا هو المفهوم الوحيد الذي يتم معه استخدام العبارة "منفذ للترددات المنخفضة" بطريقة صحيحة مع الأنظمة المتقطعة زمنياً.

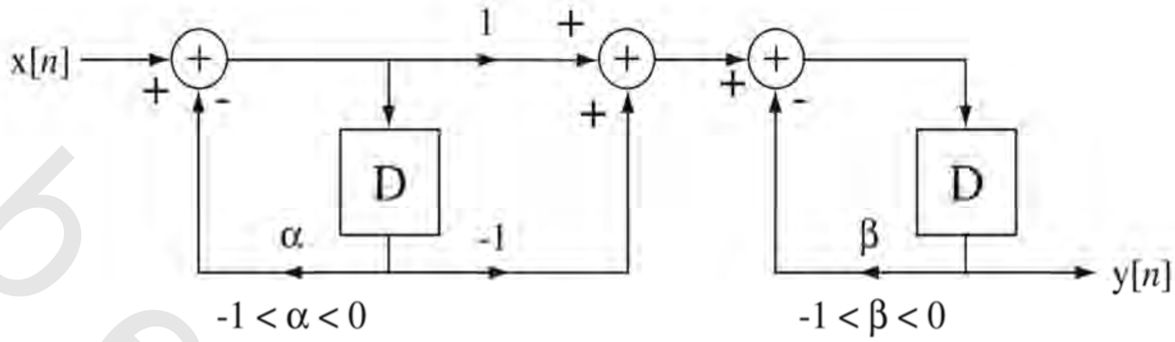
المرشحات المنفذة للترددات العالية، والمنفذة والمعوقة لمجال من الترددات

بالطبع، يمكننا أن نصمم مرشحات متقطعة زمنياً منفذة للترددات المنخفضة ومنفذة لمجال من الترددات، كما في الشكل رقم (١١.٨١) حتى الشكل رقم (١١.٨٣). دوال العبور للمرشح المنفذ للترددات العالية ستكون:

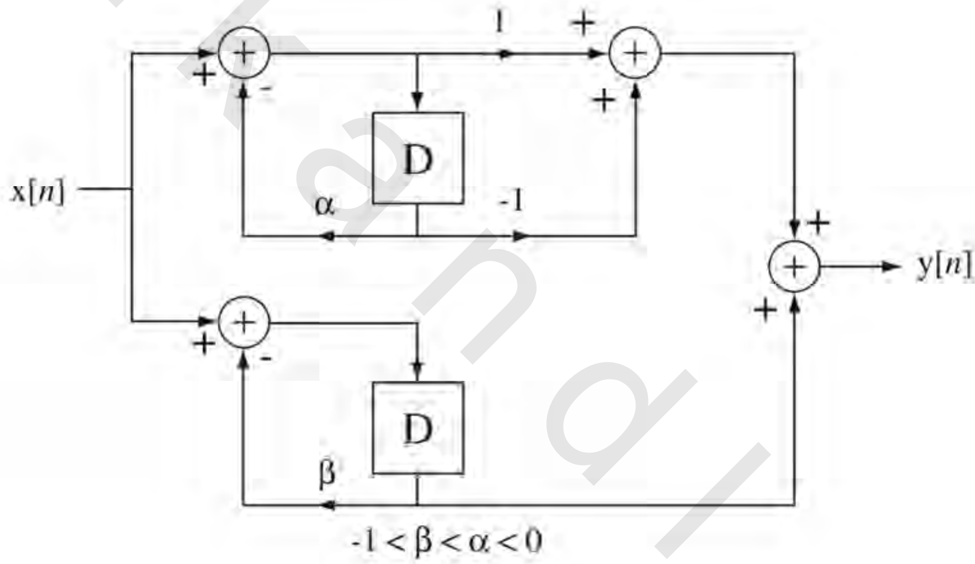
$$H(z)=\frac{z-1}{z+a}\Rightarrow H(e^{j\Omega})=\frac{e^{j\Omega}-1}{e^{j\Omega}-a}$$



شكل رقم (١١,٨١) مرشح منفذ للترددات المرتفعة.



شكل رقم (١١,٨٢) مرشح منفذ لمجال من الترددات.



شكل رقم(١١,٨٣) مرشح معوق لمجال من الترددات.

وبالنسبة للمرشح المنفذ لمجال من الترددات ستكون الاستجابة الترددية كما يلي :

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{z(z-1)}{z^2+(a+\beta)z+a\beta} \Rightarrow H(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}(e^{j\Omega}-1)}{e^{j2\Omega}(a+\beta)e^{j\Omega}+a\beta}$$

بالنسبة للمرشح المعوق لمجال من الترددات ستكون الاستجابة الترددية كما يلي :

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{2z^2-(1-\beta-a)z-\beta}{z^2+(a+\beta)z+a\beta} \Rightarrow H(e^{j\Omega}) = \frac{2e^{j2\Omega}-(1-\beta-a)e^{j\Omega}-\beta}{e^{j2\Omega}(a+\beta)e^{j\Omega}+a\beta}, -1<\beta<a<0$$

مثال ١١,٧

استجابة مرشح منفذ للترددات العالية لإشارة جيبية

الإشارة الجيبية التالية $x[n]=5\sin(2\pi n/18)$ تمثل دخلاً للمرشح المنفذ للترددات العالية الذي له دالة العبور التالية :

$$H(z)=\frac{z-1}{z-0.7}$$

ارسم الاستجابة $y[n]$.

الاستجابة الترددية للمرشح ستكون :

$$H(e^{j\Omega})=\frac{e^{j\Omega}-1}{e^{j\Omega}-0.7}$$

DTFT لإشارة الدخل ستكون :

$$X(e^{j\Omega})=j5\pi[\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9)-\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9)]$$

DTFT للخرج سيكون حاصلاً لهذين الاثنين :

$$Y(e^{j\Omega})=\frac{e^{j\Omega}-1}{e^{j\Omega}-0.7}\times j5\pi[\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9)-\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9)]$$

باستخدام خاصية التكافؤ للصدمة وحقيقة أن كلاً منهما يكون دورياً بدورة مقدارها 2π :

$$Y\left(e^{j\Omega}\right)=j5\pi\left[\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9)\frac{e^{-j\pi/9}-1}{e^{-j\pi/9}-0.7}-\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9)\frac{e^{-j\pi/9}-1}{e^{-j\pi/9}-0.7}\right]$$

$$Y(e^{j\Omega})=j5\pi\left[\frac{\left(e^{-j\pi/9}-1\right)\left(e^{-j\pi/9}-0.7\right)\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9)-\left(e^{-j\pi/9}-1\right)\left(e^{-j\pi/9}-0.7\right)\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9)}{(e^{-j\pi/9}-1)(e^{-j\pi/9}-0.7)}\right]$$

$$Y(e^{j\Omega})=j5\pi\left[\frac{\left(1.7-e^{-j\pi/9}-0.7e^{-j\pi/9}\right)\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9)-\left(1.7-e^{-j\pi/9}-0.7e^{-j\pi/9}\right)\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9)}{1.49-1.4cos(\pi/9)}\right]$$

$$Y(e^{j\Omega})=j28.67\pi\left\{\begin{matrix}1.7[\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9)-\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9)]\\+0.7e^{j\pi/9}\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9)-e^{j\pi/9}\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9)\\+e^{j\pi/9}\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9)-0.7e^{j\pi/9}\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9)\end{matrix}\right\}$$

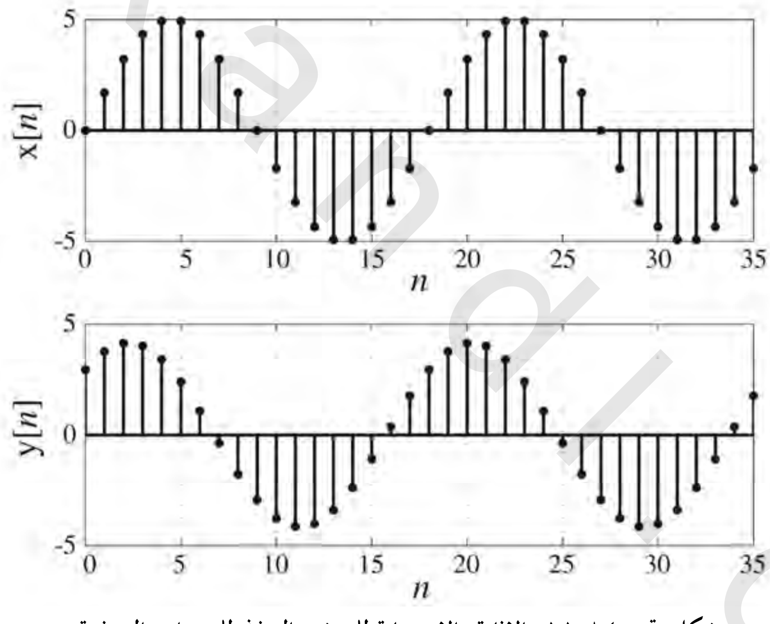
$$Y(e^{j\Omega}) = j28.67\pi \begin{Bmatrix} 1.7[\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9) - \delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9)] \\ +\big(0.7cos(\pi/9) - j0.7sin(\pi/9)\big)\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9) \\ -\big(cos(\pi/9) - jsin(\pi/9)\big)\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9) \\ +\big(cos(\pi/9) - jsin(\pi/9)\big)\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9) \\ -\big(0.7cos(\pi/9) - j0.7sin(\pi/9)\big)\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9) \\ 1.7\big(1-cos(\pi/9)\big)[\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9) - \delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9)] \\ j0.3sin(\pi/9)[\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9) - \delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9)] \end{Bmatrix}$$

$$Y(e^{j\Omega}) = j28.67\pi \begin{Bmatrix} 1.7\big(1-cos(\pi/9)\big)[\delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9) - \delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9)] \\ j0.3sin(\pi/9)[\delta_{2\pi}(\Omega-\pi/9) - \delta_{2\pi}(\Omega+\pi/9)] \end{Bmatrix}$$

بأخذ التحويل العكسي :

$$y[n] = 28.67 \times 1.7\big(1-cos(\pi/9)\big)sin(2\pi n/18) + 28.67 \times 0.3sin(\pi/9)cos(2\pi n/18)$$
$$y[n] = 2.939sin(2\pi n/18) + 2.939cos(2\pi n/18) = 4.158sin(2\pi n/18 + 0.786)$$

الشكل رقم (١١.٨٤) يوضح الإثارة والاستجابة لهذا المرشح.



شكل رقم (١١.٨٤) الإثارة والاستجابة للمرشح المنفذ للترددات المرتفعة.

مثال ١١,٨

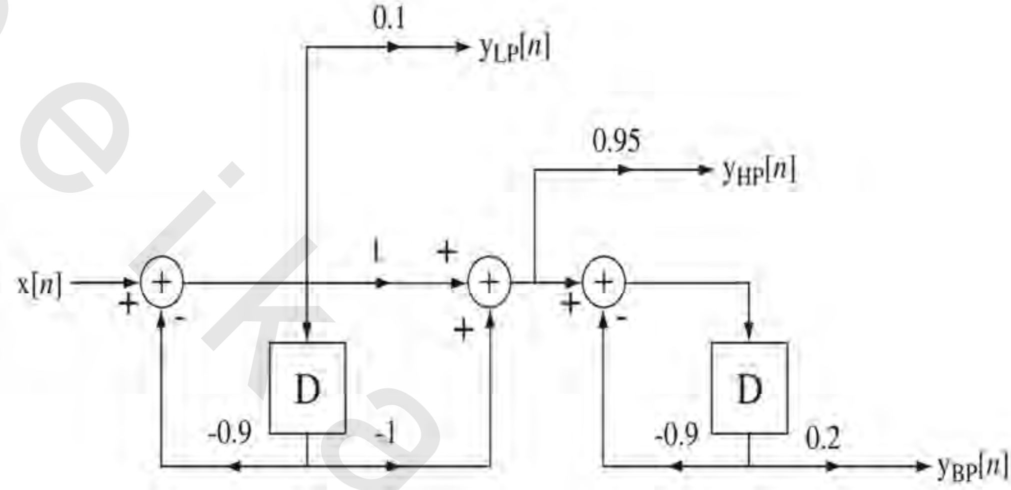
تأثيرات المرشحات على أمثلة من الإشارات

اختبر المرشح الموجود في الشكل رقم (١١.٨٥) باستخدام إشارات وحدة صدمة، ووحدة تتابع، وإشارة عشوائية لتوضح تأثيرات هذا المرشح عند المخارج الثلاثة :

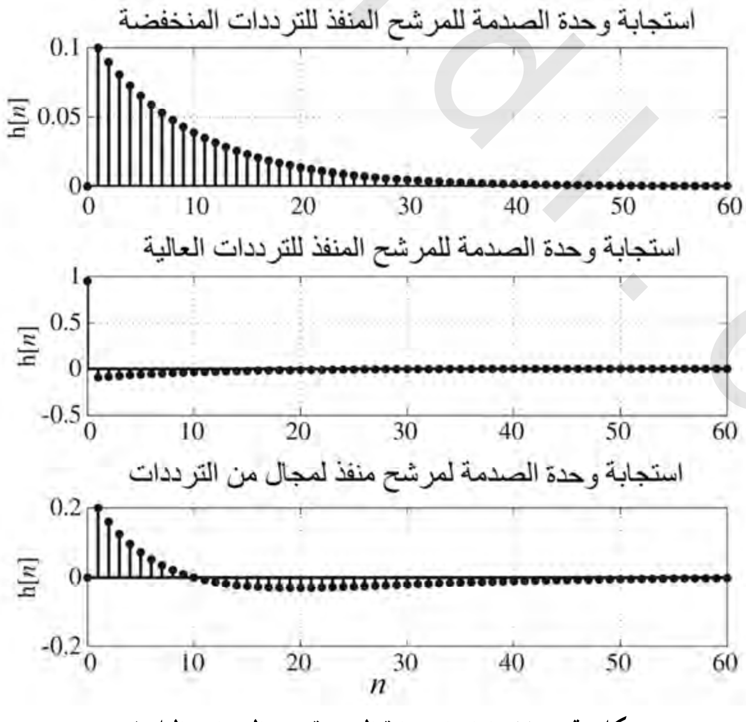
$$H_{LP}(e^{j\Omega}) = \frac{Y_{LP}(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} = \frac{0.1}{1-0.9e^{-j\Omega}}$$

$$H_{HP}(e^{j\Omega}) = \frac{Y_{HP}(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} = 0.95\frac{1-e^{-j\Omega}}{1-0.9e^{-j\Omega}}$$

$$H_{BP}(e^{j\Omega}) = \frac{Y_{BP}(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} = 0.2\frac{1-e^{-j\Omega}}{1-1.8e^{-j\Omega}+0.81e^{-j2\Omega}}$$

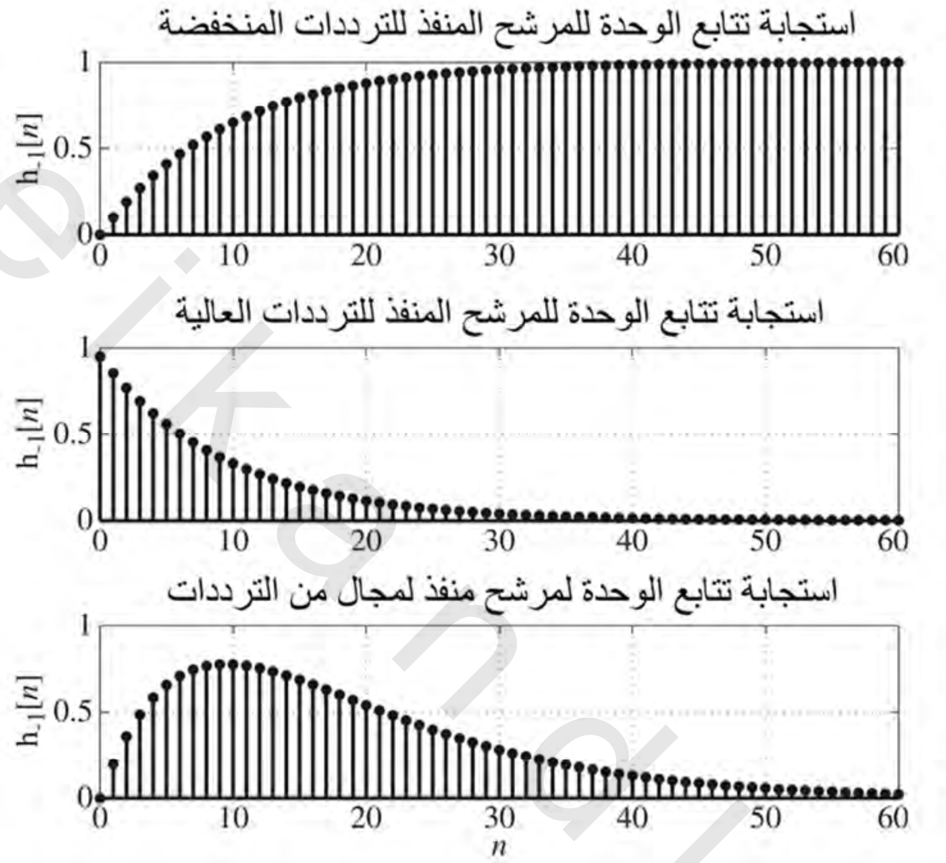


شكل رقم (١١,٨٥) مرشح له خرج منفذ للترددات المنخفضة، وخرج منفذ للترددات العالية، وخرج منفذ لمجال من الترددات.



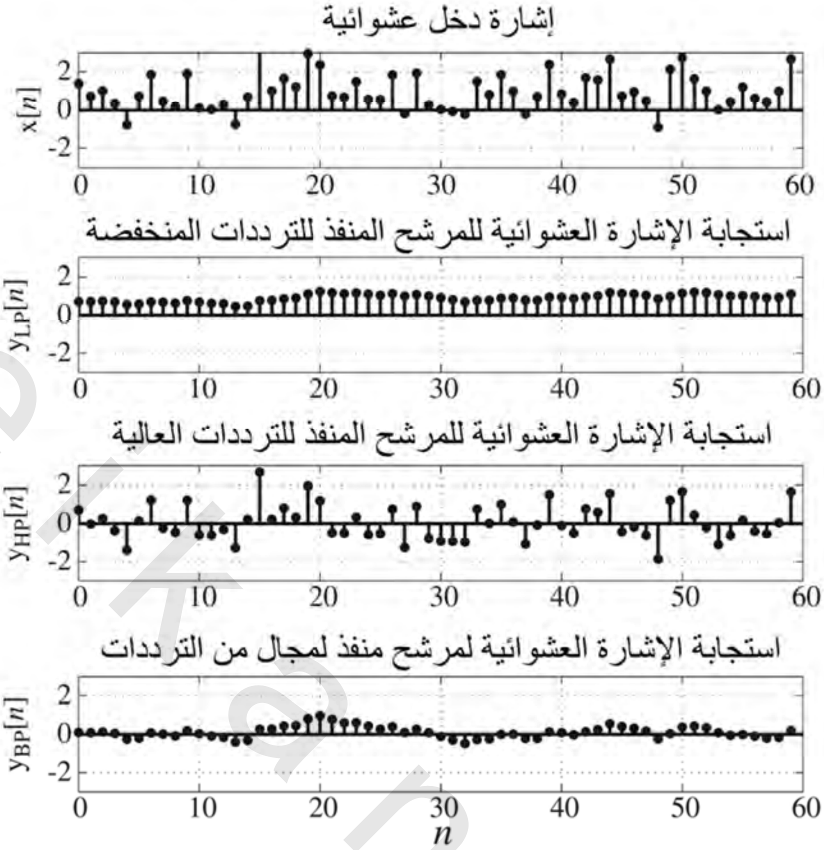
شكل رقم (١١,٨٦) استجابة الصدمة عند المخارج الثلاث.

لاحظ في الشكل (١١.٨٦) أن مجموع الاستجابات الصدمية تكون صفراً لأن الاستجابة الترددية تساوي صفراً عند $\Omega=0$.



شكل رقم (١١,٨٧) استجابة تتابع الوحدة عند الثلاث مخارج

استجابة المرشح المنفذ للترددات المنخفضة لتتابع الوحدة كما في الشكل رقم (١١.٨٧) تتقارب من قيمة لا نهائية غير مساوية للصفر؛ لأن المرشح يمرر القيمة المتوسطة لتتابع الوحدة. استجابات تتابع الوحدة للمرشح المنفذ للترددات المرتفعة ولمجال من الترددات كليهما يقترب من الصفر. أيضاً فإن استجابة المرشح المنفذ للترددات المرتفعة يقفز فجأة عند تطبيق تتابع الوحدة ولكن المرشح المنفذ للترددات المنخفضة والمنفذ لمجال من الترددات، يتجاوب كل منهما ببطء كبير، مما يعني أنهما لا يسمحان بمرور الترددات العالية.



شكل رقم (١١،٨٨) استجابة الثلاث مخارج للإشارة العشوائية.

إشارة خرج المرشح المنفذ للترددات المنخفضة كما في الشكل رقم (١١.٨٨) هي نسخة منعمة من إشارة الدخل. المحتويات سريعة التغير (الترددات العالية) قد تم التخلص منها عن طريق المرشح. استجابة المرشح المنفذ للترددات المرتفعة لها قيمة متوسطة تساوي الصفر، وكل التغيرات السريعة في إشارة الدخل تظهر في الخرج أيضاً كتغيرات سريعة. المرشح المنفذ لمجال من الترددات يتخلص من القيمة المتوسطة للإشارة ويعمل أيضاً على تنعيمها بدرجة ما؛ لأنه يتخلص من كل من الترددات المنخفضة جداً والترددات المرتفعة جداً.

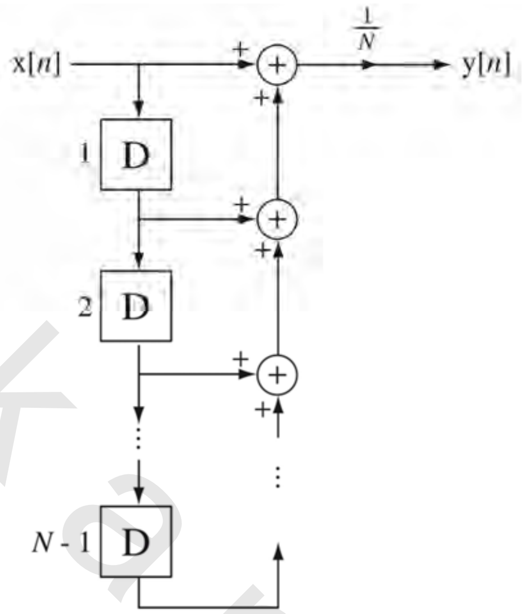
مرشح المتوسط المتحرك

من أنواع المرشحات المنفذة للترددات المنخفضة، الذي يعرض لنا بعض أساسيات تصميم المرشحات المتقطعة زمنياً وتحليلها هو مرشح المتوسط المتحرك، كما في الشكل رقم (١١.٨٩). المعادلة الفرقية التي تصف هذا المرشح، هي كما يلي:

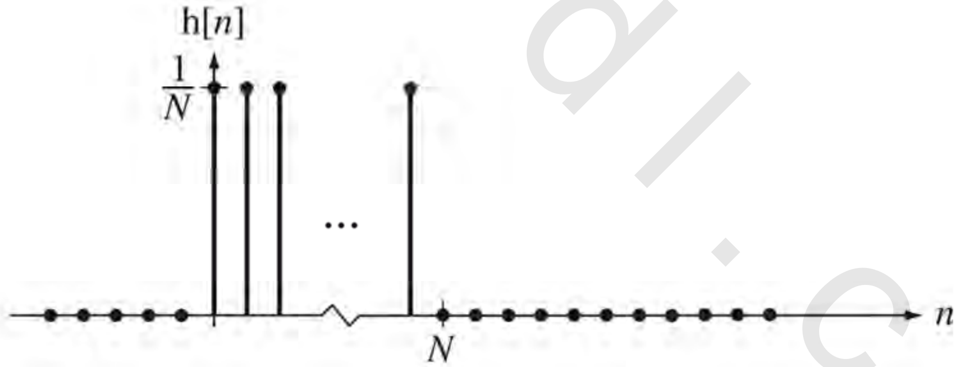
$$y[n] = \frac{X[n] + X[n-1] + X[n-2] + \cdots + X[n-(n-1)]}{\mathrm{N}}$$

واستجابة الصدمة له ستكون كما يلي وكما هو موضح في الشكل رقم (١١.٩٠):

$$h[n] = (u[n] - u[n-N])/N$$



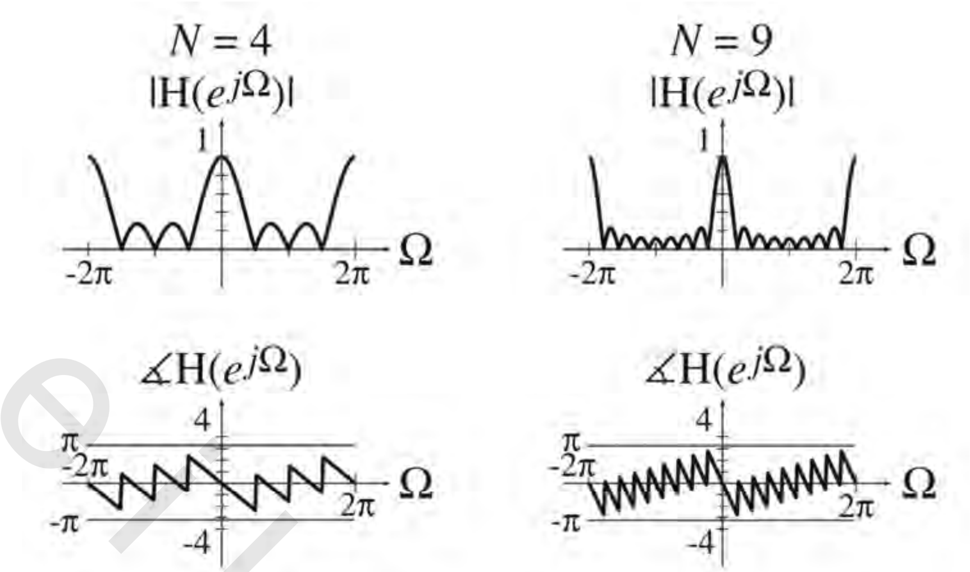
شكل رقم (١١,٨٩) مرشح المتوسط المتحرك.



شكل رقم (١١,٩٠) استجابة الصدمة لمرشح المتوسط المتحرك

الاستجابة الترددية لهذا المرشح، ستكون كما يلي وكما هو موضح في الشكل رقم (١١.٩١):

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{e^{-j(N-1)\Omega/2}}{N} \frac{\sin(N\Omega/2)}{\sin(N\Omega/2)} = e^{-j(N-1)\Omega/2} \mathrm{drcl}(\Omega/2\pi, N)$$



شكل رقم (١١,٩١) الاستجابة الترددية لمرشح المتوسط المتحرك لقيمتين مختلفتين لزمن إجراء المتوسط

هذا المرشح يوصف عادة بأنه مرشح تنعيم؛ لأنه عادة يعمل على إضعاف، أو توهين الترددات العالية، وهذا يتفق مع كونه مرشحاً منفذاً للترددات المنخفضة. على الرغم من ذلك، فإنه بملاحظة الأصفار في مقدار الاستجابة الترددية فإن البعض قد يسميه مرشحاً معوقاً لمجال من الترددات متعدد المجالات. وهذا يوضح أن تصنيف أي مرشح كمرشح منفذ للترددات المنخفضة أو الترددات العالية أو لمجال من الترددات أو معوق لمجال من الترددات لا يكون واضحا في الغالب. ولكن نتيجة الاستخدام الشائع لهذه المرشح في تنعيم مجموعة من البيانات، فإنه يصنف عادة كمرشح منفذ للترددات المنخفضة.

مثال ١١,٩

ترشيح نبضة باستخدام مرشح المتوسط المتحرك

مطلوب ترشيح الإشارة x[n]=u[n]-u[n-9] :

(أ) باستخدام مرشح المتوسط المتحرك باستخدام N=6

(ب) باستخدام المرشح المنفذ لمجال من الترددات في الشكل رقم (١١.٨٢) مع اعتبار α=0.8 و β=0.5.

باستخدام ماتلاب، ارسم استجابة الحالة صفر y[n] من كل مرشح.

استجابة الحالة صفر هي الالتفاف بين استجابة الصدمة مع الدخل. استجابة الصدمة لمرشح المتوسط المتحرك هي:

$$h[n] = (1/6)(u[n] - u[n-6])$$

والاستجابة الترددية للمرشح المنفذ لمجال من الترددات ، هي :

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} = \frac{1 - e^{-j\Omega}}{1 - 1.3e^{-j\Omega} + 0.4e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1 - 0.8e^{-j\Omega}} \times \frac{1 - e^{-j\Omega}}{1 - 0.5e^{-j\Omega}}$$

لذلك ستكون استجابة الصدمة له كما يلي :

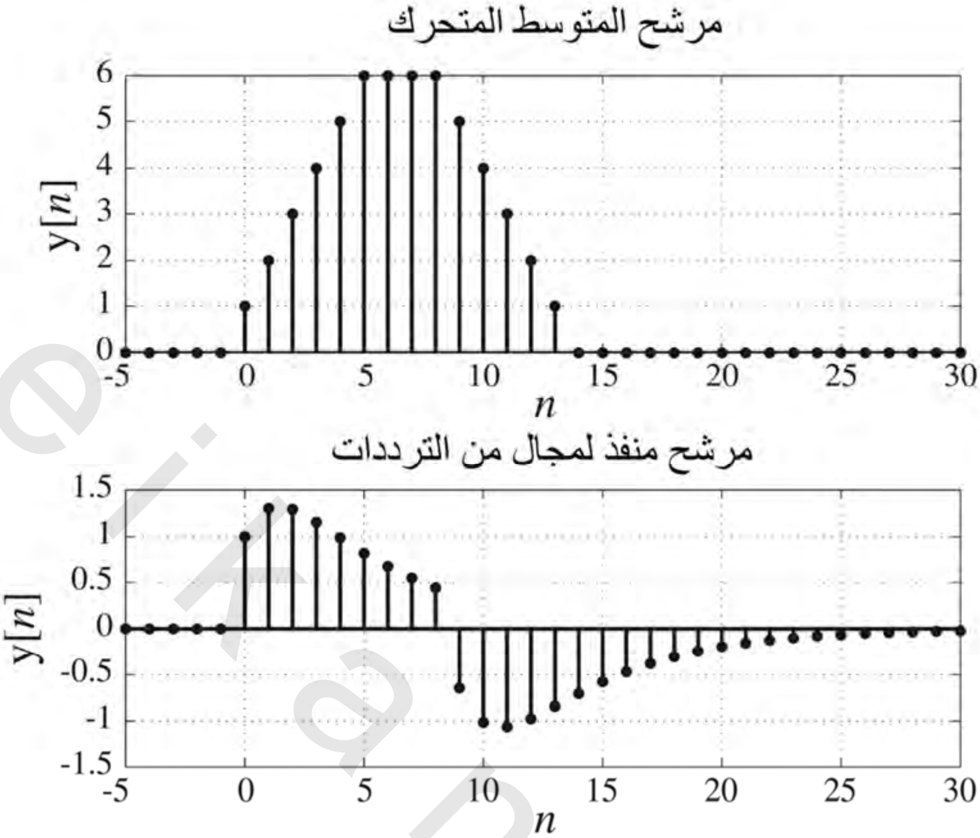
$$h[n] = (0.8)^n u[n] * \{(0.5)^n u[n] - (0.5)^{n-1} u[n-1]\}$$

برنامج ماتلاب سيكون ملف سكربت أساسياً ينادي على دالة تسمى convD تجري الالتفاف المتقطع زمنياً.

```
% برنامج لرسم استجابة مرشح المتوسط المتحرك ومرشح متقطع زمنياً منفذ لمجال من الترددات
% لنبضة مستطيلة
close all ; % إغلاق كل نوافذ الرسم المفتوحة
figure('Position',[20,20,800,600]) ; % فتح نافذة رسم جديدة
n = [-5:30]' ; % وضع متجه زمني للاستجابة
x = uD(n) - uD(n-9) ; % متجه الدخل
%استجابة مرشح المتوسط المتحرك
h = uD(n) - uD(n-6) ; % استجابة الصدمة لمرشح المتوسط المتحرك
[y,n] = convDT(x,n,h,n,n) ; % خرج مرشح المتوسط المتحرك
% رسم هذا الخرج
subplot(2,1,1) ; p = stem(n,y,'k','fi lled') ;
set(p,'LineWidth',2,'MarkerSize',4) ; grid on ;
xlabel('\itn','FontName','Times','FontSize',18) ;
ylabel('y[{\itn}]','FontName','Times','FontSize',18) ;
title('Moving-Average Filter','FontName','Times','FontSize',24) ;
% استجابة المرشح المنفذ لمجال من الترددات
% حساب استجابة الصدمة للمرشح المنفذ لمجال من الترددات
h1 = 0.8.^n.*uD(n) ; h2 = 0.5.^n.*uD(n) - 0.5.^(n-1).*uD(n-1) ;
[h,n] = convD(h1,n,h2,n,n) ;
[y,n] = convD(x,n,h,n,n) ; % خرج المرشح المنفذ لمجال من الترددات
% رسم الخرج
subplot(2,1,2) ; p = stem(n,y,'k','fi lled') ; set(p,'LineWidth',2,'
MarkerSize',4) ; grid on ;
xlabel('\itn','FontName','Times','FontSize',18) ;
ylabel('y[{\itn}]','FontName','Times','FontSize',18) ;
title('Bandpass Filter','FontName','Times','FontSize',24) ;
```

```
% دالة لأداء الالتفاف المتقطع زمنياً على إشارتين
% وتعطي الالتفاف عند أزمنة متقطعة محددة. الإشارتان هما متجهاً أعمدة
% x1, x2, وأزمنتهما محددة في متجهي الأعمدة
% n1, n2.الأزمنة المتقطعة التي نريد حساب الالتفاف عندها هي متجه العمود
% n12.متجه الالتفاف الناتج سيكون متجه العمود
% x12, وزمنه سيكون في متجه العمود
% n12.إذا كان المتجه
% n12 غير موجود في النداء على الدا ، لة فإنه يتولد في الدالة
% كزمن كلي يتم تحديده بمتجهات الأزمنة المنفردة
%
% [x12,n12] = convD(x1,n1,x2,n2,n12)
function [x12,n12] = convD(x1,n1,x2,n2,n12)
%conv إجراء الالتفاف على المتجهين باستخدام الدالة الضمنية في ماتلاب
xtmp = conv(x1,x2) ;
% وضع متجه مؤقت للأزمنة لعملية الالتفاف اعتماداً على متجهات أزمنة الدخل
ntmp = n1(1) + n2(1) + [0:length(n1)+length(n2)-2]' ;
% وضع الزمن الأول والأخير في المتجه المؤقت
nmin = ntmp(1) ; nmax = ntmp(length(ntmp)) ;
if nargin < 5, %ntmp إذا لم يتحدد متجه زمن الدخل استخدم
x12 = xtmp ; n12 = ntmp ;
else
% إذا تم تحديد متجه الزمن ، احسب الالتفاف عند هذه الأزمنة
x12 = 0*n12 ; % ابدأ خرج الالتفاف بصفر
% أوجد مؤشرات الأزمنة المطلوبة التي تقع بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى في متجه الزمن المؤقت
I12intmp = find(n12 >= nmin & n12 <= nmax) ;
% حول هذه المؤشرات إلى المؤشرات التي في متجه الزمن المؤقت
Itmp = (n12(I12intmp) - nmin) + 1 ;
% استبدل قيم الالتفاف عند هذه الأزمنة بهذه الأزمنة في متجه الزمن المطلوب
x12(I12intmp) = xtmp(Itmp) ;
end
```

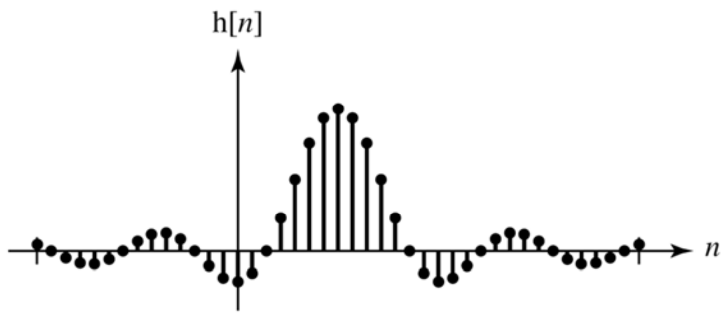
المخططات الناتجة موضحة في الشكل رقم (١١.٩٢).



شكل رقم (١١,٩٢) استجابة المرشحين.

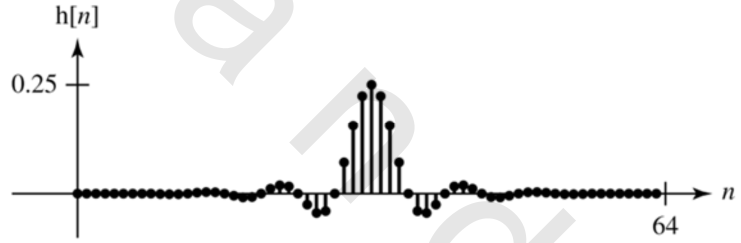
المرشح المنفذ للترددات المنخفضة القريب من المثالية

إذا كنا نريد الاقتراب من أداء النطاق الترددي للمرشح المنفذ للترددات المنخفضة، فإنه علينا تصميم مرشح متقطع زمنياً له استجابة صدمة تقارب بدرجة كبيرة تحويل الـ DTFT العكسي للاستجابة الترددية المثالية. لقد وضحنا مسبقاً أن المرشح المنفذ للترددات المنخفضة يكون غير سببي ولا يمكن تحقيقه عملياً، ولكن على الرغم من ذلك، فإننا يمكننا الاقتراب منه بدرجة كبيرة. الاستجابة الترددية للمرشح المنفذ للترددات المنخفضة موضحة في الشكل رقم (١١.٩٣).

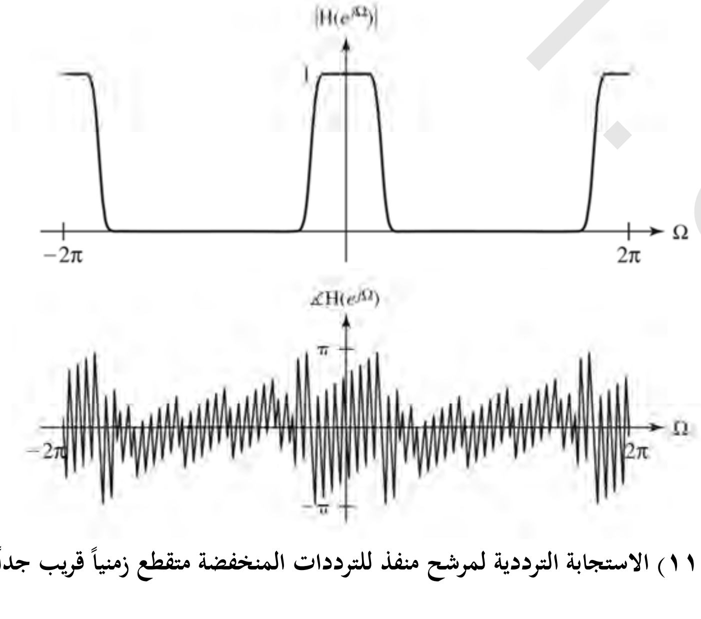


شكل رقم (١١,٩٣) استجابة الصدمة لمرشح مثالي متقطع زمنياً منفذ للترددات المنخفضة.

المشكلة في بناء هذا المرشح هي الجزء من استجابة الصدمة التي تحدث قبل الزمن n=0. إذا حاولنا تأخير استجابة الصدمة بفترة زمنية كبيرة، فإن طاقة الإشارة من استجابة الصدمة التي تقع قبل الزمن n=0 ستصبح صغيرة جداً ويمكننا الاستغناء عنها والاقتراب بدرجة كبيرة من الاستجابة الترددية المثالية، كما في الشكل رقم (١١.٩٤) والشكل رقم (١١.٩٥).

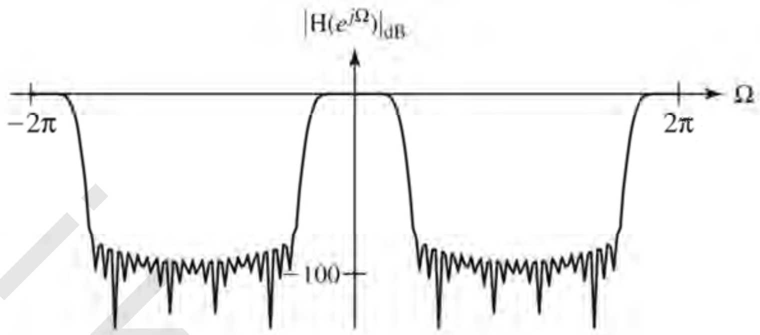


شكل رقم (١١.٩٤) استجابة الصدمة لمرشح منفذ للترددات المنخفضة متقطع زمنياً قريب جداً من المثالية



شكل رقم (١١,٩٥) الاستجابة الترددية لمرشح منفذ للترددات المنخفضة متقطع زمنياً قريب جداً من المثالية.

مقدار الاستجابة في مجال الإعاقة صغير جداً بحيث لا يمكن رؤيته عند رسمه على التدريج الخطي كما في الشكل رقم (١١.٩٥). في مثل هذه الحالات، فإن رسم لوغريتم المقدار يكون أفضل ويساعد في رؤية المقدار الضعيف في مجال الإعاقة كما في الشكل رقم (١١.٩٦).



شكل رقم (١١,٩٦) الاستجابة الترددية لمرشح منفذ للترددات المنخفضة متقطع زمنياً وقريب من المثالية مرسوم على تدريج بال dB.

هذا المرشح له مقدار استجابة ظريف منفذة للترددات المنخفضة ولكن ذلك يكون بتكلفة. علينا الانتظار لهذا المرشح لكي يستجيب. اقترب المرشح من المثالية، كان زمن التأخير المطلوب في استجابة الصدمة أكبر. يتضح ذلك في زمن التأخير لاستجابة الصدمة والإزاحة الزاوية للاستجابة الترددية. إن حقيقة أن زمن التأخير يكون كبيراً للمرشحات التي تقترب من المثالية يكون حقيقي أيضاً لباقي أنواع المرشحات مثل المنفذة للترددات المرتفعة والمنفذة لمجال من الترددات والمعوقة لمجال من الترددات وهو حقيقي لكل من المرشحات المستمرة والمتقطعة زمنياً. من أساسيات التصميم العامة للمرشحات، أن أي مرشح يتم تصميمه ليكون قادراً بين ترددين متقاربين ويسمح بمرور أحدها ويعوق الأخرى يجب أن يلاحظهم لفترة زمنية طويلة لكي يكون قادر على تمييز واحدة منهما. كلما كان الترددان متقاربين، كان زمن الملاحظة من المرشح أطول لكي يستطيع التمييز بينهما. وهذا هو السبب الأساسي لمتطلبات زمن التأخير الكبير في استجابة المرشح لكي يقترب من الحالة المثالية.

المميزات بالمقارنة مع المرشحات المستمرة زمنياً

قد يتعجب البعض لماذا علينا أن نستخدم المرشحات المتقطعة زمنياً بدلاً من المرشحات المستمرة زمنياً. هناك العديد من الأسباب لذلك. المرشحات المتقطعة زمنياً تكون مبنية من ثلاثة عناصر أساسية: عنصر تأخير، ضارب، وجامع. يمكن تنفيذ هذه العناصر باستخدام المكونات الرقمية. طالما أننا نظل في المدى المقصود للتشغيل، فإن هذه الأجهزة تقوم بأداء مهمتها نفسها بدقة. لا يمكننا أن نقول نفس الشيء على مكونات مثل المقاومات، أو المكثفات، أو مكبرات العمليات التي تستخدم في تركيب المرشح المستمر زمنياً. أي مقاومة يكون لها قيمة أسمية معينة لا يمكن

أن تكون قيمتها الحقيقية هي هذه القيمة الأسمية نفسها ، لأن التأثيرات الحرارية أو الوسط المحيط بها من الممكن أن يغير من قيمتها. الشيء نفسه من الممكن أن يقال عن المكثفات، والملفات، والترانزستورات، وهكذا. لذلك فإن المرشحات المتقطعة زمنياً تكون أكثر استقراراً وقابلة لإعادة الإنتاجية أكثر من المرشحات المستمرة زمنياً.

عادة يكون من الصعب تنفيذ المرشحات المستمرة زمنياً عند الترددات المنخفضة جداً ؛ لأن حجم المكونات المستخدمة يصبح كبيراً جداً، لأنه مثلاً قد نحتاج قيم مكثفات عالية جدا. أيضاً، عند الترددات المنخفضة جدا فإن التأثيرات الحرارية على المكونات تصبح مشكلة كبيرة جداً، لأنها لا يمكن تفريقها من تأثيرات تغير الإشارة في المدى الترددي نفسه. المرشحات المتقطعة زمنياً لا تعاني من هذه المشكلة.

المرشحات المتقطعة زمنياً يتم تنفيذها عادة باستخدام مكونات قابلة للبرمجة، وهذا يعني أن هذا النوع من المرشحات المتقطعة زمنياً يمكن إعادة برمجتها لأداء وظيفة أخرى بدون تغيير هذه المكونات. المرشحات المستمرة زمنياً ليس لها هذه المرونة. أيضاً، فإن بعض أنواع المرشحات المتقطعة زمنياً تكون متطورة حسابياً بدرجة كبيرة بحيث لا يمكن تنفيذها عمليا مثل المرشحات المستمرة زمنياً.

الإشارات المتقطعة زمنياً يمكن تخزينها بكفاءة لأزمنة طويلة جداً بدون أي تدهور ملحوظ على شريط التسجيل أو الـ CD-ROM. الإشارات المستمرة زمنياً يمكن تخزينها على شريط مغناطيسي تماثلي ولكن مع مرور الزمن تتدهور هذه القيم.

عن طريق التعدد أو الاختيار الزمني للإشارات، فإن المرشح الواحد يمكنه أن يستوعب العديد من الإشارات بطريقة تبدو كما لو كان يتعامل مع هذه الإشارات في الوقت وبنفس الكفاءة نفسها. لا يمكن للمرشحات المستمرة زمنياً أن تفعل ذلك لأنها لكي تعمل بطريقة صحيحة، فإنها تتطلب وجود إشارة الدخل بصورة دائمة.

(١١,٥) ملخص للنقاط المهمة

١- الاستجابة الترددية واستجابة الصدمة للأنظمة LTI تتعلق ببعضها بعضاً من خلال تحويل فورير.

٢- توصيف الأنظمة في النطاق الترددي يسمح بخطوات تصميم عامة للأنظمة لمعالجة أنواع معينة من الإشارات.

٣- المرشح المثالي يكون خالياً من التشويه في مجال المرور أو السماح الخاص به.

٤- كل المرشحات المثالية تكون غير سببية ولذلك لا يمكن بناؤها.

٥- طرق الترشيح يمكن تطبيقها على الصور مثل الإشارات.

٦- المرشحات العملية المتقطعة زمنياً يمكن بناؤها كأنظمة متقطعة زمنياً باستخدام المكبرات، ونقاط تجميع، وأزمنة التأخير فقط.

٧- كل الأفكار المطبقة على المرشحات المستمرة زمنياً يمكن تطبيقها على المرشحات المتقطعة زمنياً بالطريقة نفس.

٨- المرشحات المتقطعة زمنياً لديها مميزات على المرشحات المستمرة زمنياً.

تمارين وإجاباتها

(في كل تمرين، تكون الإجابات مدونة بطريقة عشوائية)

الاستجابة الترددية المستمرة زمنياً

١- نظام له استجابة الصدمة التالية :

$$h_1(t) = 3e^{-10t}\,u(t)$$

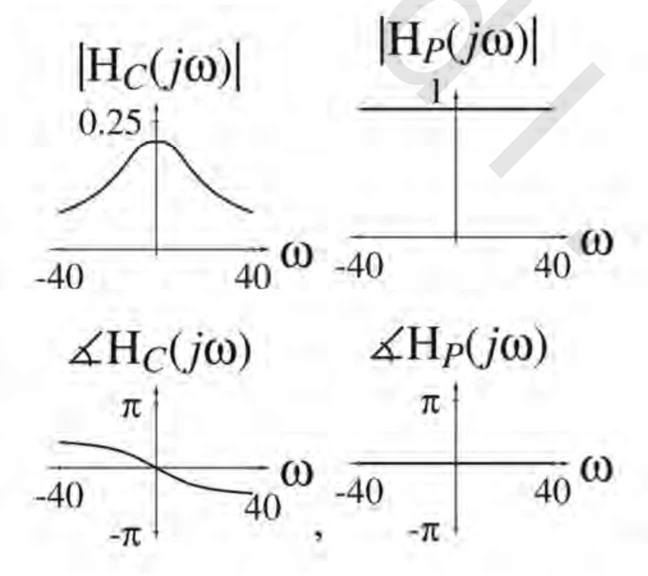
ونظام آخر له استجابة الصدمة التالية :

$$h_2(t) = \delta(t) - 3e^{-10t}\,u(t)$$

(أ) ارسم مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لهذين النظامين عند توصيلهما على التوازي.

(ب) ارسم مقدار وزاوية الاستجابة الترددية لهذين النظامين عند توصيلهما على التوالي.

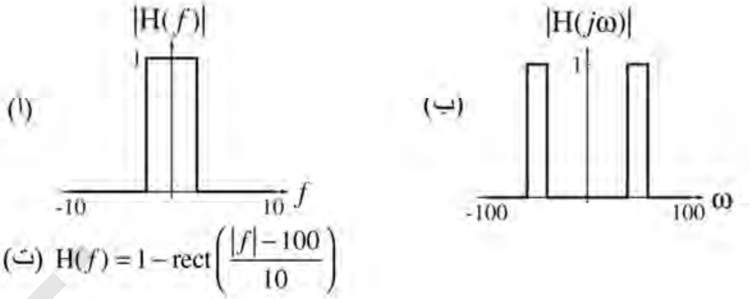
الإجابة :



شكل رقم (ج–ت١)<

المرشحات المثالية المستمرة زمنياً

٢- صنف الاستجابات الترددية في الشكل رقم (ت- ٢) على أنها منفذة للترددات المنخفضة، أم منفذة للترددات المرتفعة، أم منفذة لمجال من الترددات، أم معوقة لمجال من الترددات.



شكل رقم (ت-٢)

الإجابة:

واحدة منفذة للترددات المنخفضة — وواحدة منفذة لمجال من الترددات — وواحدة معوقة لمجال من الترددات.

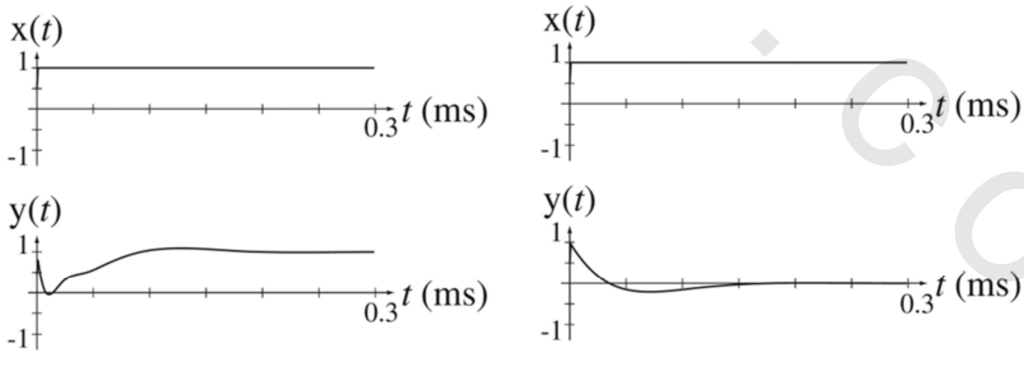
٣- نظام له استجابة الصدمة التالية:

$$h(t) = 10rect\,\frac{t-0.01}{0.02}$$

ما هو عرض المجال الصفري له ؟

الإجابة: 50

٤- في الشكل رقم (ت- ٤) أزواج من إشارات الدخل وإشارات الخرج. لكل زوج حدد نوع الذي تم على إشارة الدخل: هل هو ترشيح منفذ للترددات المنخفضة، أم منفذ للترددات العالية، أم منفذ لمجال من الترددات، أم معوق لمجال من الترددات.



شكل رقم (ت-٤)

الإجابة: أحدهما منفذ للترددات العالية والآخر معوق لمجال من الترددات.

السببية المستمرة زمنياً

٥- حدد إذا كانت الأنظمة التي لها الاستجابات الترددية التالية سببية :

(أ) $H(f) = sinc(f)$

(ب) $H(f) = sinc(f)e^{-j\pi t}$

(ت) $H(f) = rect(\omega)$

(ث) $H(f) = rect(\omega)e^{-j\omega}$

(ج) $H(f) = A$

(ح) $H(f) = Ae^{j2\pi t}$

الإجابة : اثنان سببية – وأربعة أنظمة غير سببية

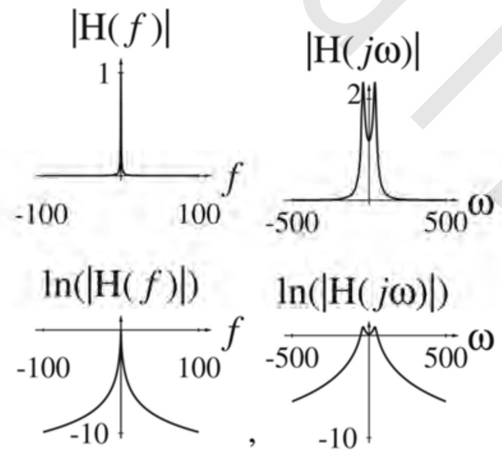
الرسم اللوغاريتمي ومخططات بود

٦- ارسم مقدار الاستجابة الترددية، على تدريج خطي وعلى تدريج لوغاريتمي، للأنظمة التي لها الاستجابات الترددية التالية وعلى المدى الترددي الموضح في كل حالة :

(أ) $H(f) = \frac{20}{20-4\pi^2 f^2+j42\pi f}, -100 < f < 100$

(ب) $H(j\omega) = \frac{2\times10^5}{(100+j\omega)(1700-\omega^2+j20\omega)}, -500 < \omega < 500$

الإجابة :

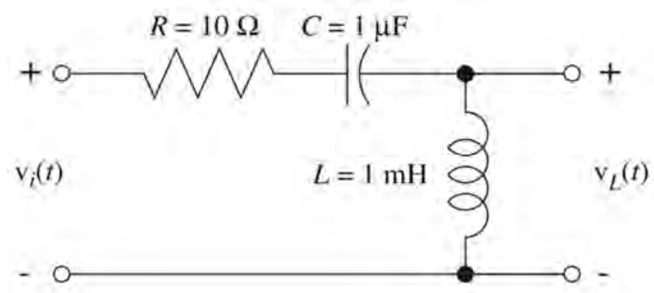


شكل رقم (ج–ت–٦)

٧- ارسم خطوط التقارب ومخططات بود الدقيقة للمقدار والزاوية للاستجابات الترددية للدوائر والأنظمة التالية :

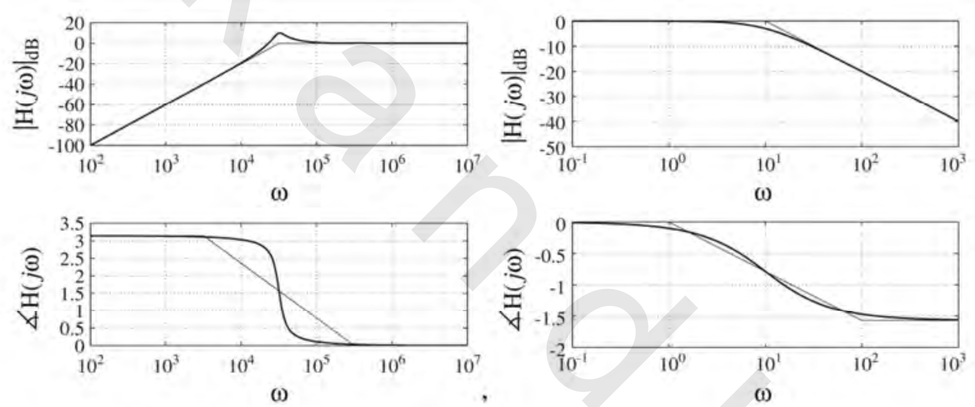
(أ) مرشح RCمنفذ للترددات المنخفضة مع $R=1M\Omega$ و $C=0.1\mu F$

الدائرة التي في الشكل رقم ٧



شكل رقم (ت–٧)

الإجابة:

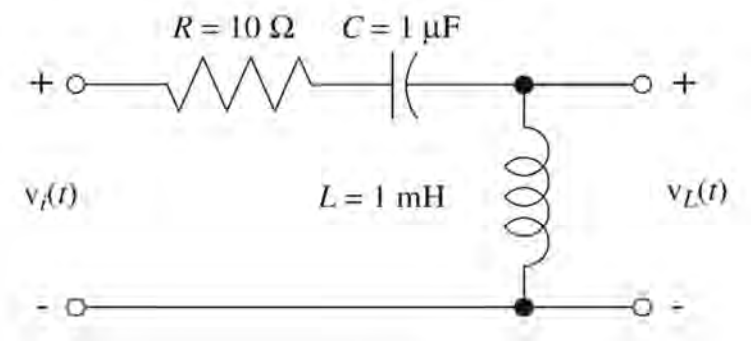


شكل رقم (ج–ت–٧)

المرشحات غير الفعالة المستمرة زمنياً

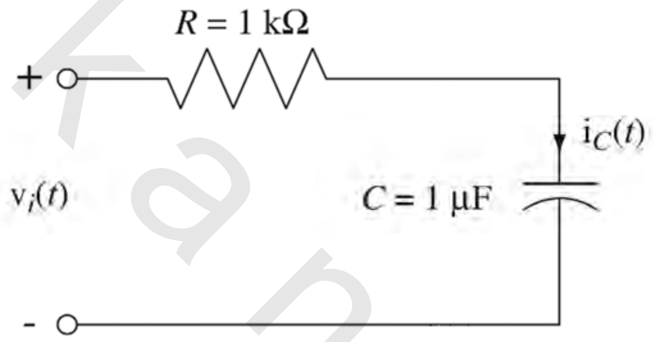
٨- أوجد وارسم الاستجابة الترددية لكل من الدوائر الموجودة في الشكل رقم (ت- ٨) بمعلومية الإثارة والاستجابة الموضحة في كل حالة:

(أ) الإثارة هي $v_i(t)$، والاستجابة هي $v_L(t)$



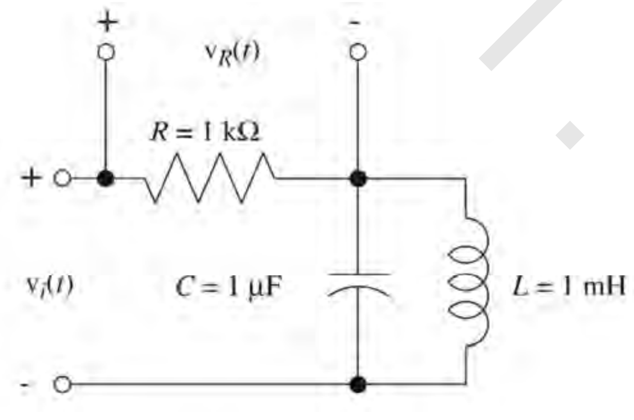
شكل رقم (ت–٨أ)

(ب) الإثارة هي $v_i(t)$، والاستجابة $i_c(t)$



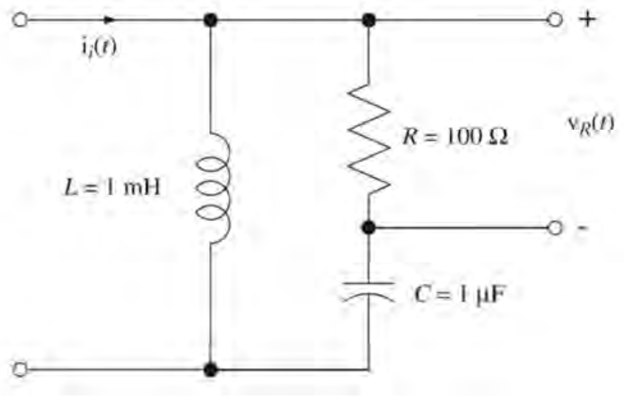
شكل رقم (ت–٨ب)

(ت) الإثارة $v_i(t)$، والاستجابة $v_R(t)$



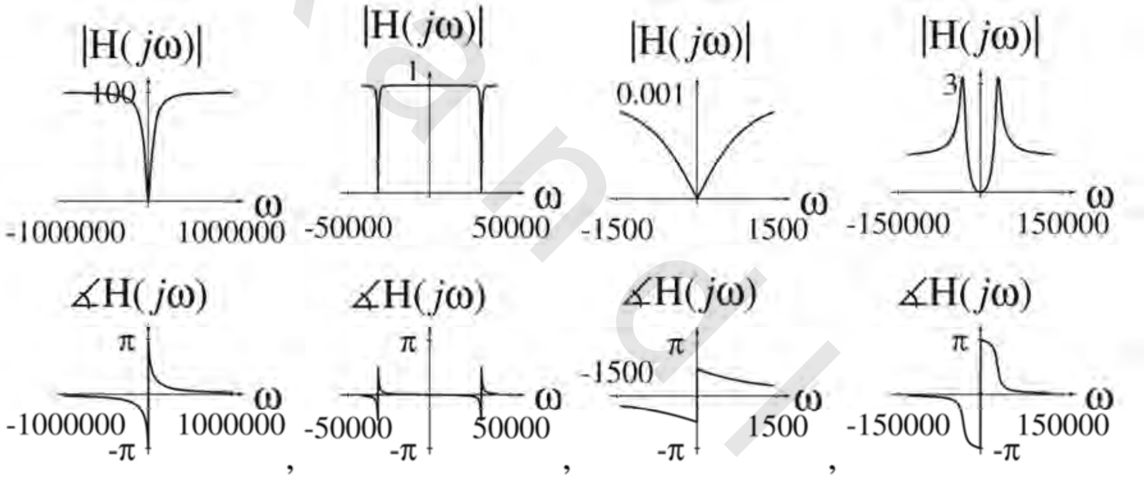
شكل رقم (ت–٨ت)

(ث) الإثارة $i_i(t)$، والاستجابة $v_R(t)$



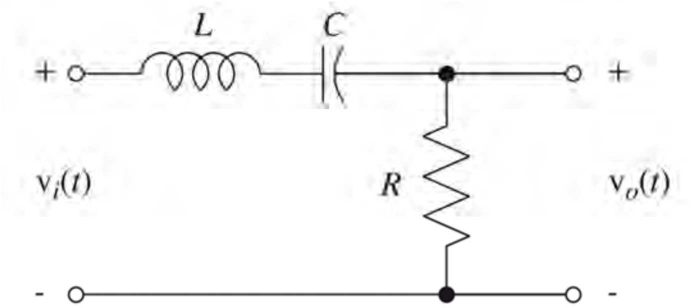
شكل رقم (ت–٨ث).

الإجابة:



شكل رقم (ج–ت–٨)

٩- الدائرة الموجودة في الشكل رقم (ت- ٩) تمت إثارتها بالجهد $v_i(t)$ والاستجابة هي $v_0(t)$. قيم المكونات هي $R=50\Omega$، و $L=100mH$، و $C=5\mu F$.



شكل رقم (ت–٩)

(أ) ما هو نوع المرشح المثالي الذي تمثله هذه الدائرة العملية غير الفعالة .

(ب) اكتب تعبير الاستجابة الترددية $H(f)=V_0(f)/V_i(f)$.

(ج) ما هو التردد العددي f_{max} الذي ستكون عنده الاستجابة H(f) قيمة عظمى وما هي زاوية H(f) عند هذا التردد ؟

(د) أوجد القيمة العددية لمقدار الاستجابة الترددية عند الترددات 0Hz ، و 100Hz ، وعند التردد الذي يقارب الما لانهاية.

الإجابة: 0، و 0، و 0، و 0.192، منفذ لمجال من الترددات، و 225

١٠- لكل دائرة في الشكل رقم (ت- ١٠) تكون الاستجابة الترددية هي $H(f)=V_0(f)/V_i(f)$، ما هي الدائرة التي يكون لها :

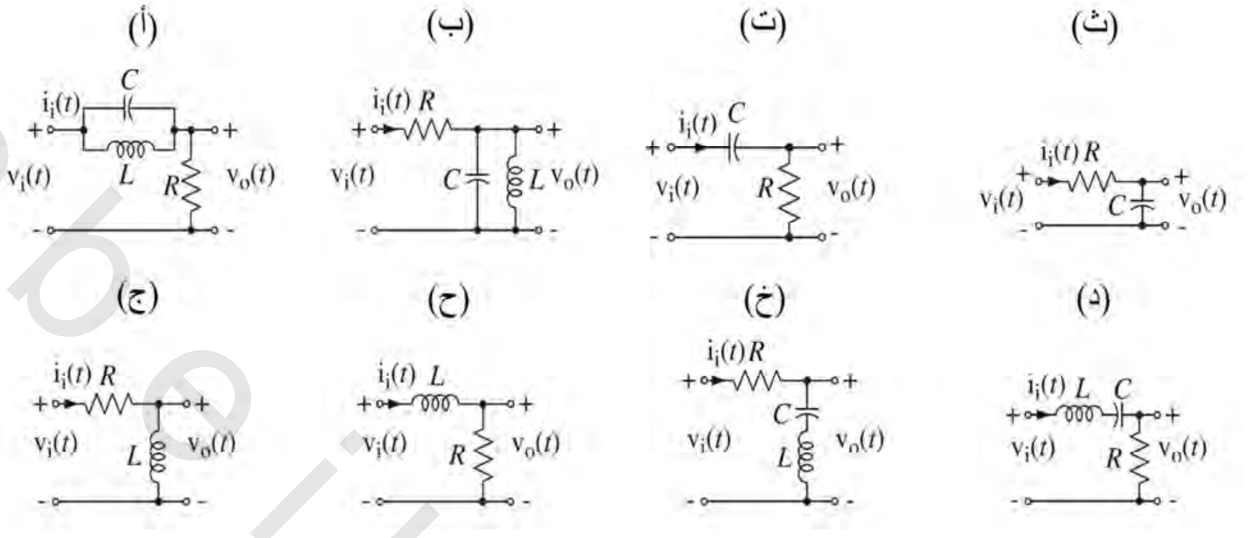
(أ) استجابة ترددية تساوي صفراً عند التردد $f=0$ ؟

(ب) استجابة ترددية تساوي صفراً عند $f\to+\infty$ ؟

(ج) مقدار للاستجابة الترددية يساوي واحداً عند التردد $f=0$ ؟

(د) مقدار للاستجابة الترددية يساوي واحداً عند $f\to+\infty$ ؟

(ه) مقدار للاستجابة الترددية مختلف عن الصفر وزاوية تساوي صفراً عند تردد ما في المجال $0<f<\infty$ (بمعنى تردد محدد مختلف عن الصفر)



شكل رقم (ت–١٠)

١١- صنف كل من الاستجابات الترددية التالية كمنفذة للترددات المنخفضة، أو منفذة للترددات المرتفعة، أو منفذة لمجال من الترددات، أو معوقة لمجال من الترددات:

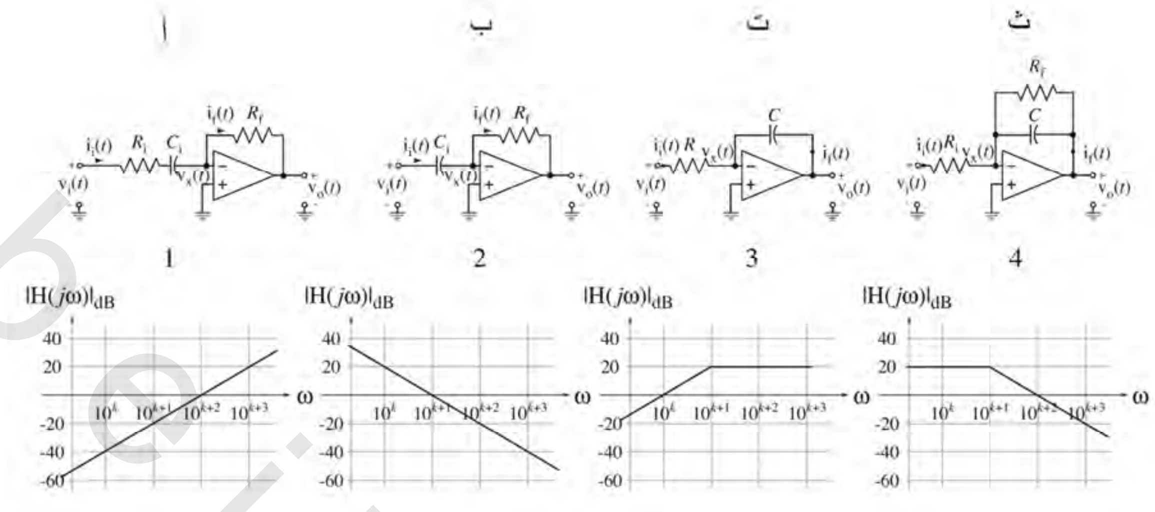
(أ) $H(f) = \frac{1}{1+jf}$

(ب) $H(f) = \frac{jf}{1+jf}$

(ت) $H(j\omega) = \frac{j10\omega}{100-\omega^2+j10\omega}$

الإجابة: منفذ للترددات المنخفضة، ومنفذ لمجال من الترددات، و منفذ للترددات المرتفعة

١٢- طابق كل دائرة في الشكل رقم (ت- ١٢) مع خطوط تقارب مخطط بود للاستجابة الترددية $H(j\omega)=V_0(j\omega)/V_i(j\omega)$:

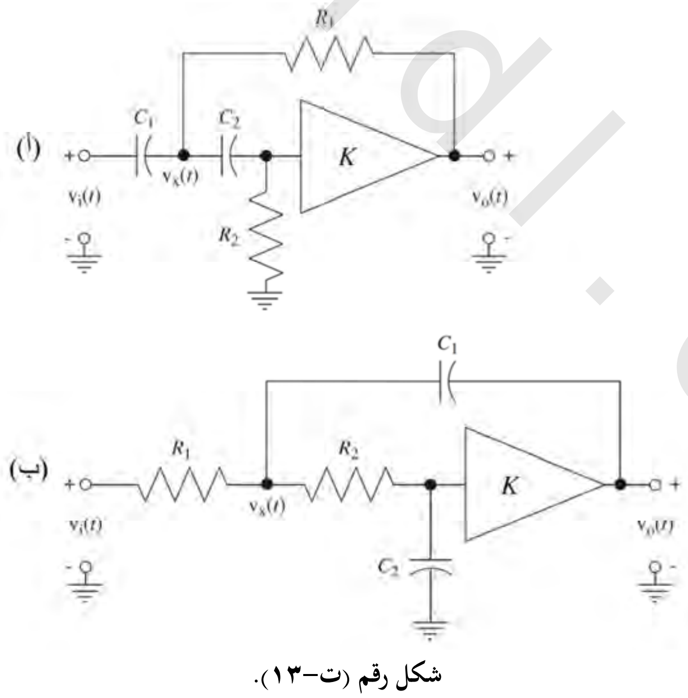


شكل رقم (ت–١٢)

الإجابة: A-3 ، B-1 ، C-2 ، D-4.

المرشحات الفعالة العملية المستمرة زمنياً

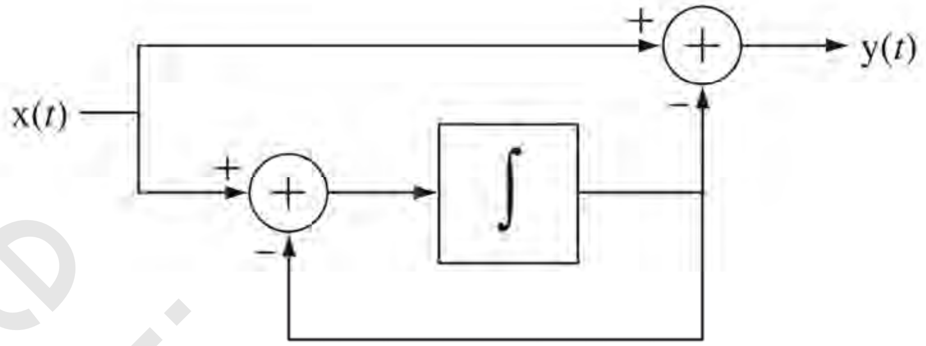
١٣- أوجد الاستجابة الترددية $H(f)=V_0(f)/V_i(f)$ لكل من الدوائر الفعالة في الشكل رقم (ت- ١٣) وعرف كل واحدة منهم إذا كانت منفذة للترددات المنخفضة ، أم منفذة لمجال من الترددات ، أم معوقة لمجال من الترددات :



شكل رقم (ت–١٣).

الإجابة: منفذ للترددات العالية ، منفذ للترددات المنخفضة

١٤- وضح أن النظام في الشكل رقم (ت- ١٤) سيكون له استجابة ترددية منفذة للرددات العالية :



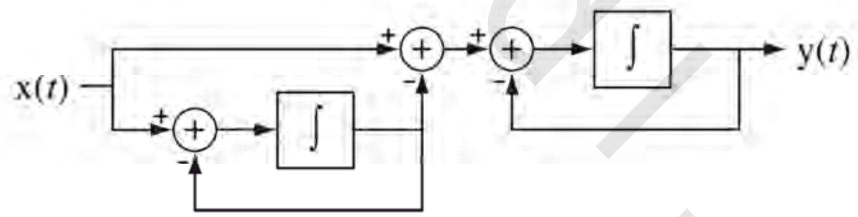
شكل رقم (ت–١٤)

الإجابة:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{j\omega}{j\omega + 1}$$

١٥- ارسم رسماً صندوقياً لنظام يكون له استجابة ترددية منفذة لمجال من الترددات باستخدام اثنين من المكاملات كبلوكات وظيفية. ثم بعد ذلك أوجد الاستجابة الترددية وتحقق من أنها منفذة لمجال من الترددات.

الإجابة:



الشكل رقم (ج–ت–١٥)

الاستجابة الترددية المتقطعة زمنياً

١٦- نظام له استجابة الصدمة التالية :

$$h[n] = (7/8)^n u[n]$$

ما هو عرض مجال نصف القدرة له ؟

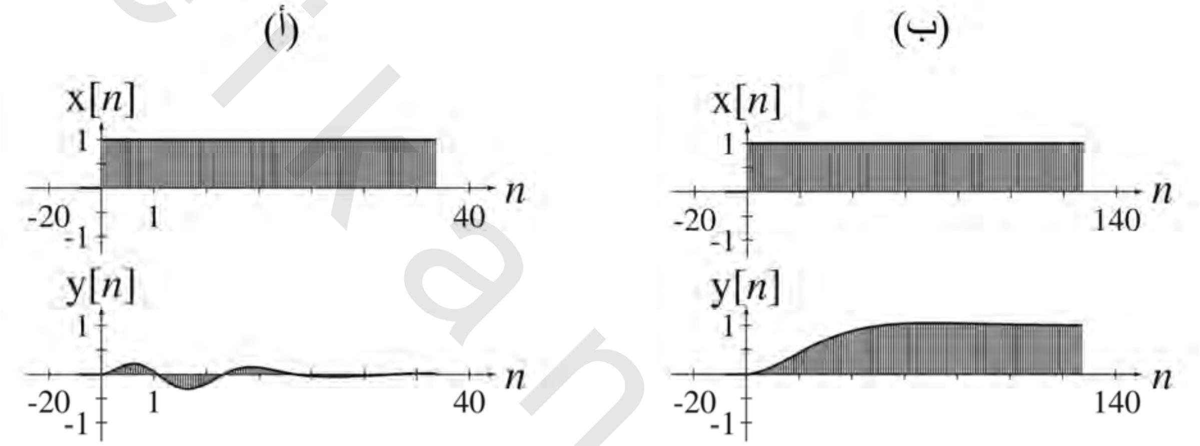
الإجابة: 0.1337 راديان

١٧- صنف كلاً من الاستجابات الترددية التالية كمنفذة للترددات المنخفضة، أو منفذة للترددات المرتفعة، أو منفذة أو معوقة لمجال من الترددات.

(أ) $H(e^{j\Omega}) = \dfrac{sin(3\Omega/2)}{sin(\Omega/2)}$ (ب) $H(e^{j\Omega}) = j[sin(\Omega) + sin(2\Omega)]$

الإجابة: منفذ للترددات المنخفضة، ومنفذ لمجال من الترددات

١٨- في الشكل رقم (ت- ١٨) توجد أزواج من الإثارات x والاستجابات y. لكل زوج منها حدد نوع الترشيح الذي حدث عليها إذا كان: منفذاً للترددات المنخفضة، أم منفذاً للترددات المرتفعة، أم منفذاً، أم معوقاً لمجال من الترددات:

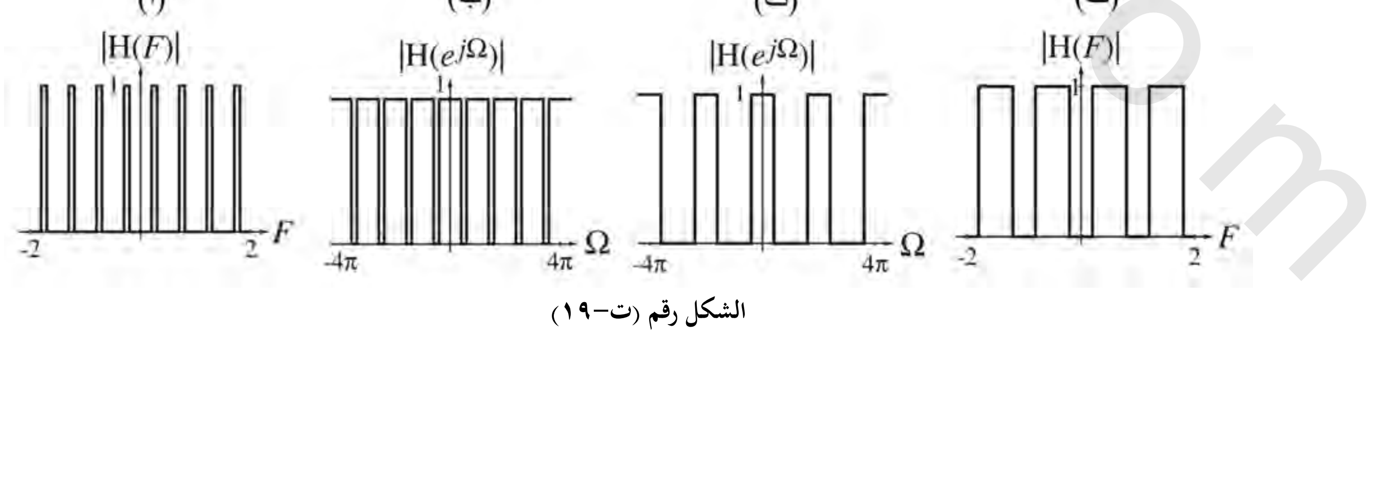


شكل رقم (ت-١٨)

الإجابة: منفذ واحد لمجال من الترددات، و منفذ واحد للترددات المنخفضة.

المرشحات المثالية المتقطعة زمنياً

١٩- صنفْ كلاً من الاستجابات الترددية الموضحة في الشكل رقم (ت- ١٩) كمنفذة للترددات المنخفضة، أو منفذة للترددات المرتفعة، أو منفذة أو معوقة لمجال من الترددات؟



الشكل رقم (ت-١٩)

الإجابة: واحد من كل نوع.

٢٠- صنف كلاً من الاستجابات الترددية التالية كمنفذة للترددات المنخفضة، أو الترددات المرتفعة، أو منفذة أو معوقة لمجال من الترددات:

(أ) $H(f) = rect(10F) * \delta_1(F)$

(ب) $H(e^{j\Omega}) = [rect(20\pi(\Omega - \pi/4)) + rect(20\pi(\Omega + \pi/4))] * \delta_1(\Omega/2\pi)$

الإجابة: واحد منفذ لمجال من الترددات وواحد منفذ للترددات المنخفضة

السببية المتقطعة زمنياً

٢١- حدد إذا كانت الأنظمة التالية بالاستجابة الترددية الموضحة سببية أم لا:

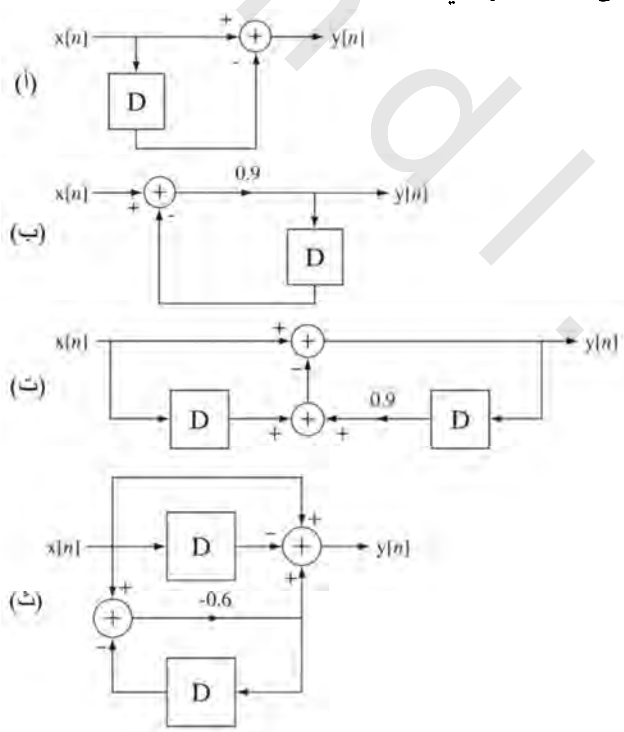
(أ) $H(e^{j\Omega}) = \frac{sin(7\Omega/2)}{sin(\Omega/2)}$ (ب) $H(e^{j\Omega}) = \frac{sin(7\Omega/2)}{sin(\Omega/2)} e^{-j\Omega}$

(ت) $H(e^{j\Omega}) = \frac{sin(7\Omega/2)}{sin(\Omega/2)} e^{-j\Omega}$ (ث) $H(e^{j\Omega}) = rect(5\Omega/\pi) * \delta_{2\pi}(\Omega)$

الإجابة: واحدة سببية، وثلاثة غير سببية

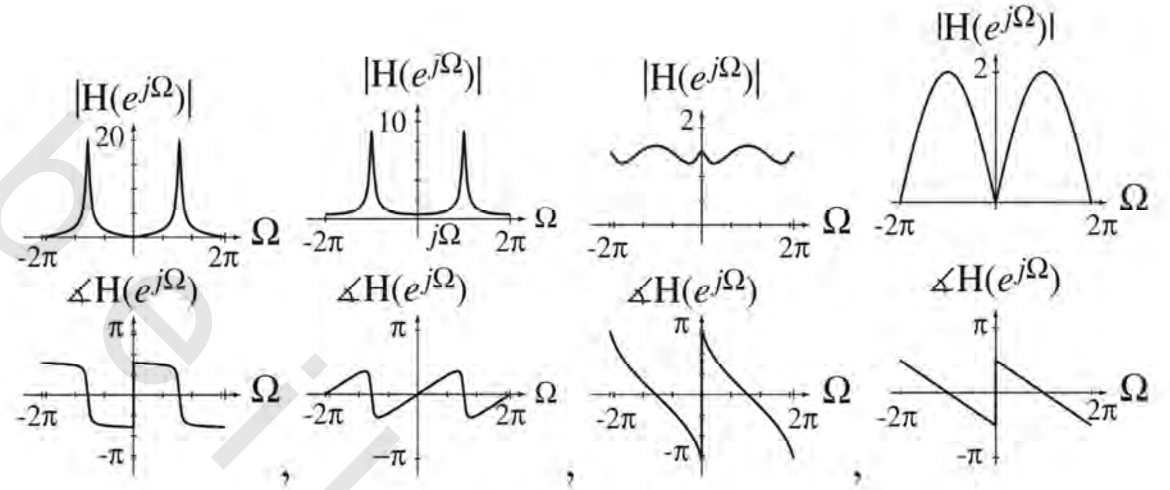
المرشحات العملية المتقطعة زمنياً

٢٢- أوجد الاستجابة الترددية $H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})}$ وارسمها لكل مرشح من المرشحات الموجودة في الشكل رقم (ت- ٢٢) على المدى الترددي $-2\pi<\Omega<2\pi$.



شكل رقم (ت-٢٢)

الإجابة :



شكل رقم (ج–ت–٢٢)

٢٣- أوجد أقل إحباط أو توهين للمرشح ذي المتوسط المتحرك الذي له N=3. حدد مجال المعاوقة على أنه المدى الترددي $\Omega_C<\Omega<\pi$ حيث Ω_C هي تردد أول صفر في الاستجابة الترددية.

الإجابة : توهين مقداره 9.54dB

تمارين بدون إجابات

الاستجابة الترددية المستمرة زمنياً

٢٤- إحدى المشاكل مع المرشحات السببية هي أن إشارة الخرج للمرشح تتأخر في العادة عن إشارة الدخل. هذه المشكلة لا يمكن التخلص منها إذا كان الترشيح يتم في الزمن الحقيقي، ولكن إذا تم تسجيل الإشارة للاستخدام فيما بعد خارج الزمن الحقيقي، فإن أحد الطرق البسيطة للتخلص من تأثير التأخير هي ترشيح الإشارة، ثم تسجيل الاستجابة وبعد ذلك يتم ترشيح هذه الاستجابة ب المرشح نفسه ولكن مع تشغيل الإشارة مرة ثانية خلال النظام. افترض أن المرشح هو مرشح من قطب واحد مع استجابة ترددية على الصورة :

$$H(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega/\omega_c}$$

حيث ω_c هي تردد القطع (تردد نصف القدرة) للمرشح.

(أ) ما هي الاستجابة الترددية الفعلية لعملية الترشيح الكلية للإشارة الأمامية، ثم الإشارة العكسية ؟

(ب) ما هي استجابة الصدمة الفعلية ؟

المرشحات المثالية المستمرة زمنياً

٢٥- إشارة x(t) موصوفة بالمعادلة التالية :

$$x(t) = rect(1000t) * \delta_{0.002}(t)$$

(أ) إذا كانت x(t) هي إشارة دخل لمرشح مثالي منفذ للترددات المنخفضة وتردد القطع له هو 3kHz، إرسم إشارة الدخل x(t) وإشارة الخرج y(t) على التدريج نفسه وقارن بينهما.

(ب) إذا كانت x(t) هي إشارة الدخل لمرشح مثالي منفذ لمجال من الترددات وتردد القطع الأسفل له هو 1kHz، وتردد القطع العلوي هو 5kHz، ارسم إشارة الدخل x(t) وإشارة الخرج y(t) على نفس التدريج وقارن بينهما.

السببية المستمرة زمنياً

٢٦- حدد إذا كانت الأنظمة التي لها الاستجابات الترددية التالية سببية أم لا :

(أ) $H(j\omega) = \frac{2}{j\omega}$

(ب) $H(j\omega) = \frac{10}{6+j4\omega}$

(ت) $H(j\omega) = \frac{4}{25-\omega^2+j6\omega}$

(ث) $H(j\omega) = \frac{4}{25-\omega^2+j6\omega}e^{j\omega}$

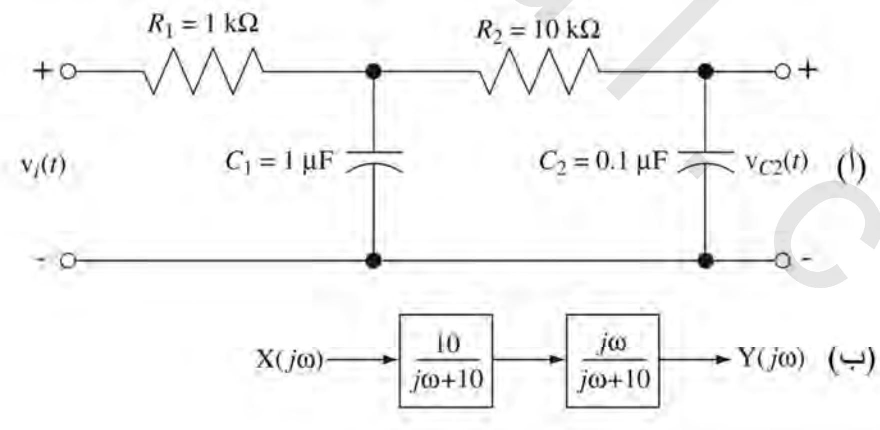
(ج) $H(j\omega) = \frac{4}{25-\omega^2+j6\omega}e^{-j\omega}$

(ح) $H(j\omega) = \frac{j\omega+9}{45-\omega^2+j6\omega}$

(خ) $H(j\omega) = \frac{49}{49+\omega^2}$

مخططات بود

٢٧- ارسم خطوط التقارب ومخططات بود للمقدار والزاوية للاستجابات الترددية للدوائر والأنظمة الموضحة في الشكل رقم (ت- ٢٧).



(ت) نظام له استجابة ترددية $H(j\omega) = \frac{j20\omega}{10{,}000 - \omega^2 + j20\omega}$

شكل رقم (ت–٢٧)

٢٨- نظام LTI له الاستجابة الترددية التالية :

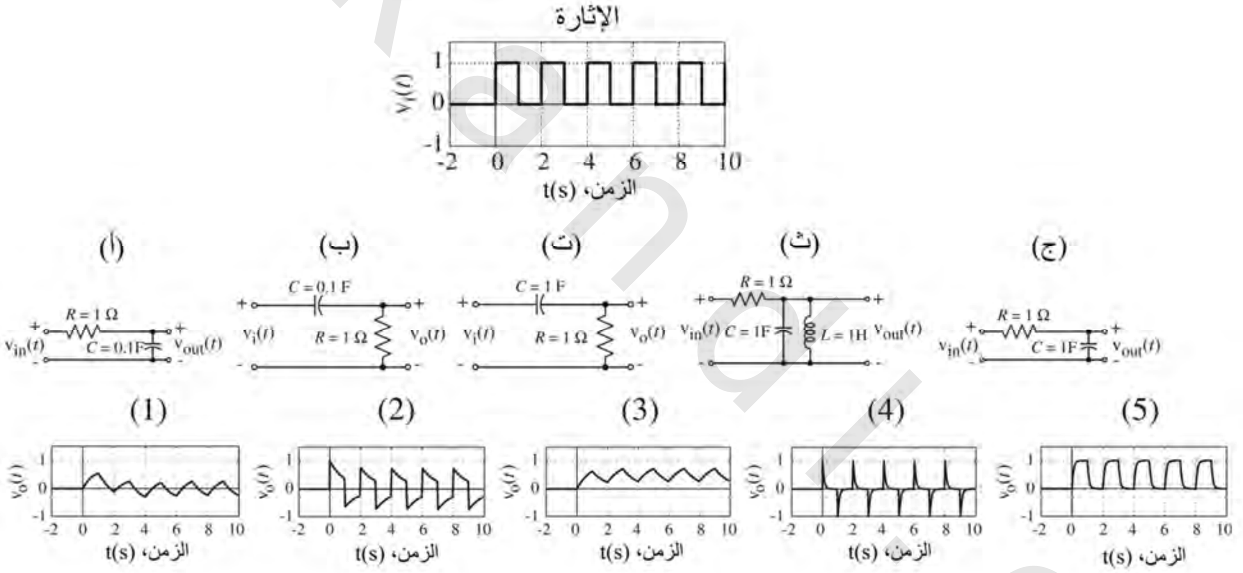
$$H(j\omega) = \frac{j3\omega - \omega^2}{1000 - 10\omega^2 + j250\omega}$$

(أ) أوجد كل الترددات الركنية (بالراديان في الثانية) في مخطط بود للمقدار لهذه الاستجابة الترددية.

(ب) ما هو مقدار ميل مخطط بود للمقدار بال dB على الأوكتاف عند الترددات المنخفضة جداً والترددات المرتفعة جداً.

المرشحات العملية غير الفعالة المستمرة زمنياً

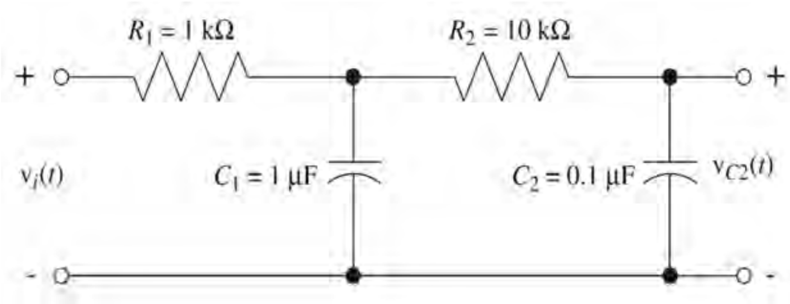
٢٩- إشارة الجهد السببية المربعة الشكل الموضحة في الشكل رقم (ت- ٢٩) تم استخدامها في إثارة خمسة مرشحات غير فعالة (أ) حتى (ج) في الشكل نفسه. استجابة هذه المرشحات الخمسة مبينة في الأسفل بطريقة عشوائية. طابق هذه الاستجابات مع المرشحات.



شكل رقم (ت–٢٩)

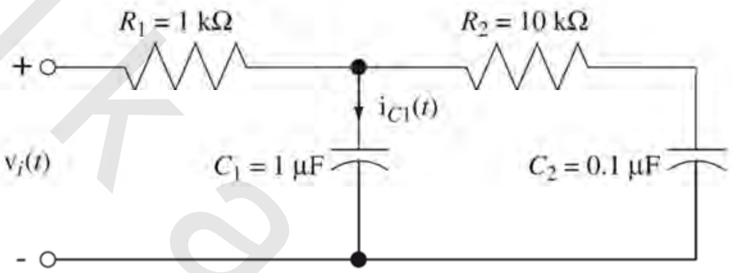
٣٠- أوجد وارسم الاستجابة الترددية لكل دائرة من الدوائر الموضحة في الشكل رقم (ت- ٣٠) بمعلومية الإثارة والاستجابة المعطاة.

(أ) الإثارة $v_i(t)$ ، والاستجابة $v_{C2}(t)$



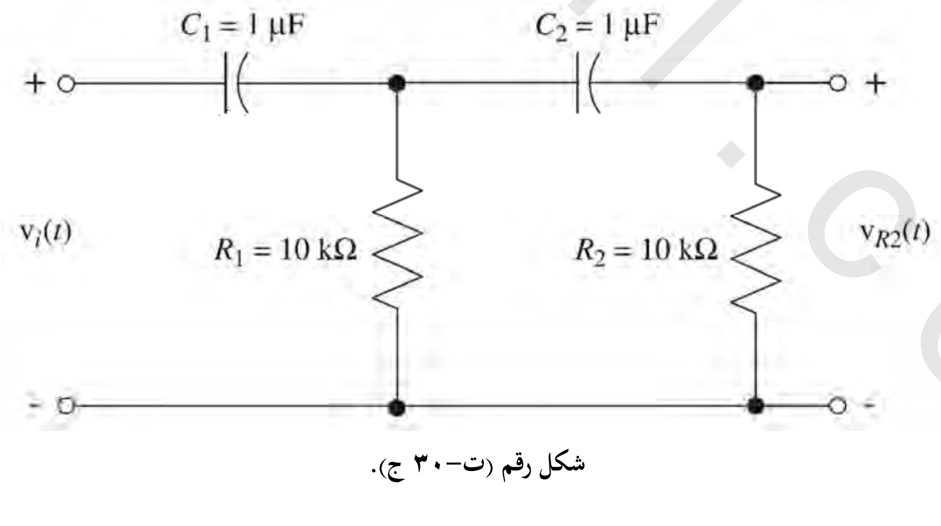
شكل رقم (ت-٣٠ أ)

(ب) الإثارة $v_i(t)$، والاستجابة $i_{C1}(t)$



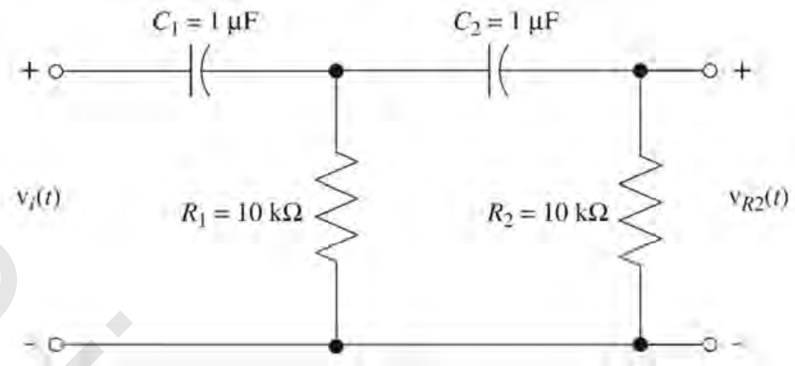
شكل رقم (ت-٣٠ ب).

(ج) الإثارة $v_i(t)$، والاستجابة $v_{R2}(t)$



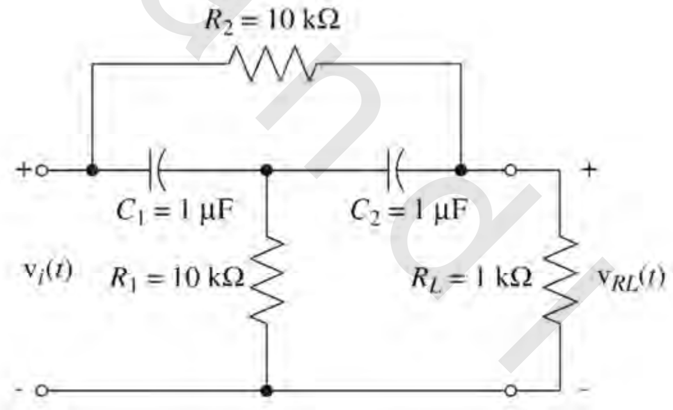
شكل رقم (ت-٣٠ ج).

(د) الإثارة $i_i(t)$، والاستجابة $v_{R1}(t)$



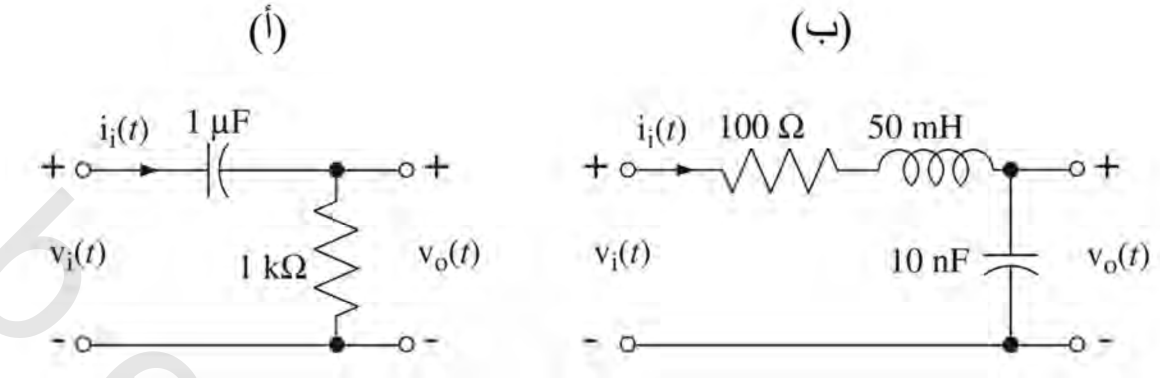
شكل رقم (ت-٣٠ د)

(ه) الإثارة $v_i(t)$، والاستجابة $v_{RL}(t)$



شكل رقم (ت-٣٠ ه)

٣١- أوجد وارسم مع التردد مقدار وزاوية معاوقة الدخل $Z_{in}(j\omega)=V_i(j\omega)/I_i(j\omega)$ والاستجابة الترددية $H(j\omega)=V_0(j\omega)/V_i(j\omega)$ لكل من المرشحات في الشكل رقم (ت- ٣١).

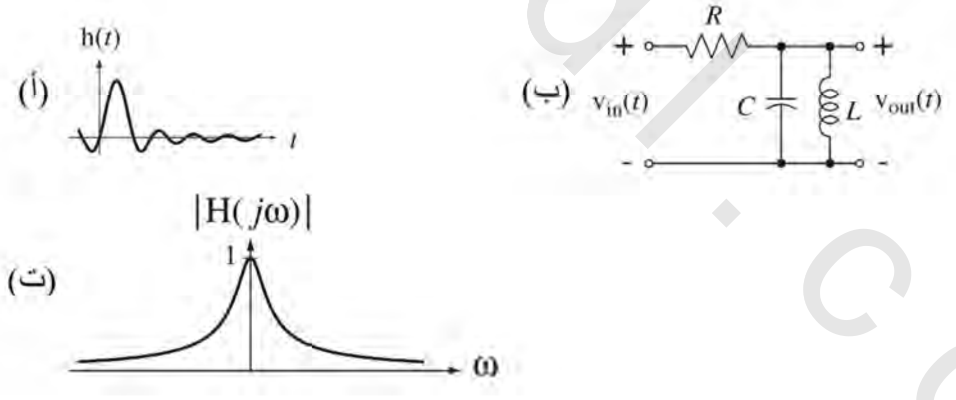


شكل رقم (ت–٣١)

٣٢- الإشارة x(t) في تمرين ٢٥ هي إشارة جهد الدخل لمرشح RC منفذ للترددات المنخفضة مع R=1kΩ و C=0.3μF. ارسم إشارات جهد الدخل والخرج مع الزمن على التدريج نفسه.

المرشحات المستمرة زمنياً

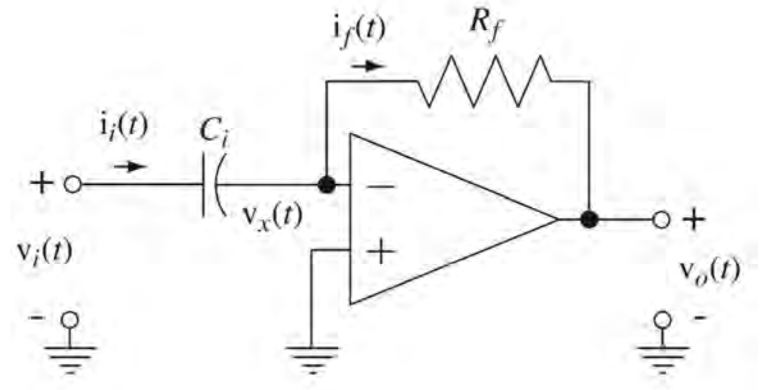
٣٣- يوجد في الشكل (ت- ٣٣) بعض الأوصاف لمرشحات في صورة استجابة الصدمة، ومقدار استجابة ترددية، ومخطط دائرة. لكل واحدة منها، وبقدر المستطاع، صنف هذه المرشحات كمثالية أو عملية، وسببية أو غير سببية، ومنفذة للترددات المنخفضة، أو للترددات العالية، أو منفذة أو معوقة لمجال من التردد.



شكل رقم (ت–٣٣)

المرشحات العملية الفعالة المستمرة زمنياً

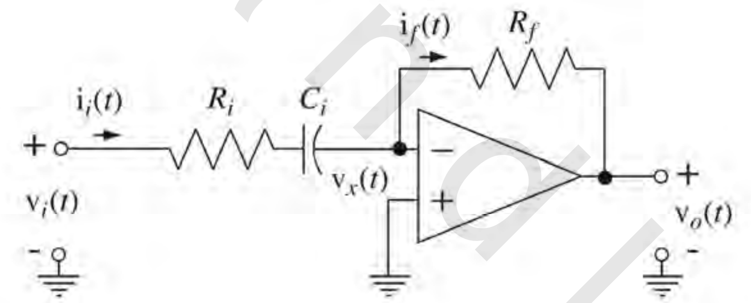
٣٤- أوجد الاستجابة الترددية للدائرة الموضحة في الشكل رقم (ت- ٣٤). ما هي الوظيفة التي تؤديها هذه الدائرة.



شكل رقم (ت-٣٤)

٣٥- صَمِّمْ مرشحاً فعالاً منفذاً للترددات المرتفعة باستخدام مكبر عمليات مثالي، ومقاومتين، ومكثف واحد، واستنتج استجابته الترددية لتتحقق أنه منفذ للترددات المرتفعة.

٣٦- أوجد الاستجابة الترددية $H(j\omega)=V_0(j\omega)/V_i(j\omega)$ للمرشح الفعال في الشكل رقم (ت- ٣٦) مع $R_i=1000\Omega$، و $C_i=1\mu F$، و $R_f=5000\Omega$.

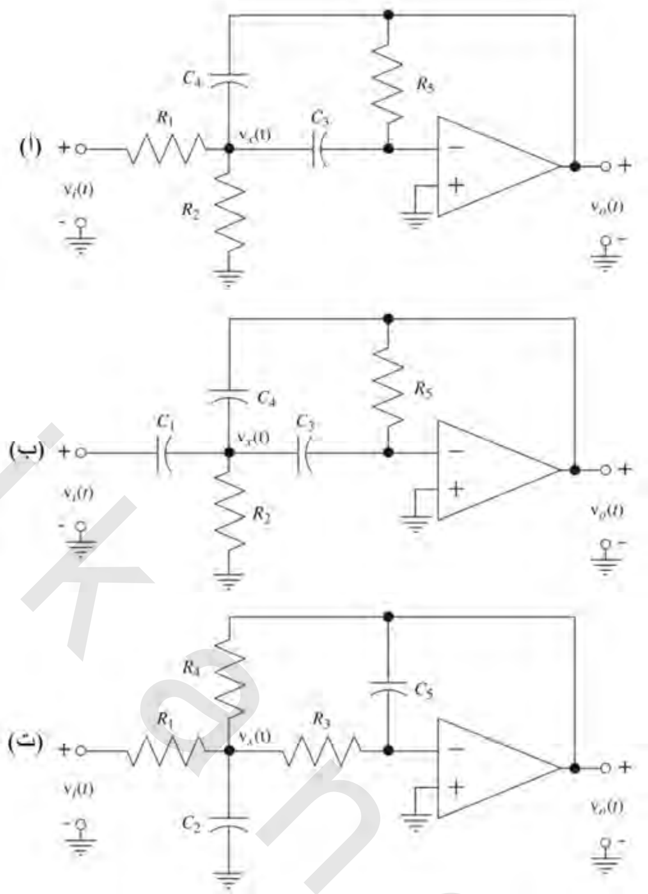


شكل رقم (ت-٣٦)

(أ) أوجد كل الترددات الركنية (راديان على الثانية) في مخطط مقدار بود لهذه الاستجابة الترددية؟

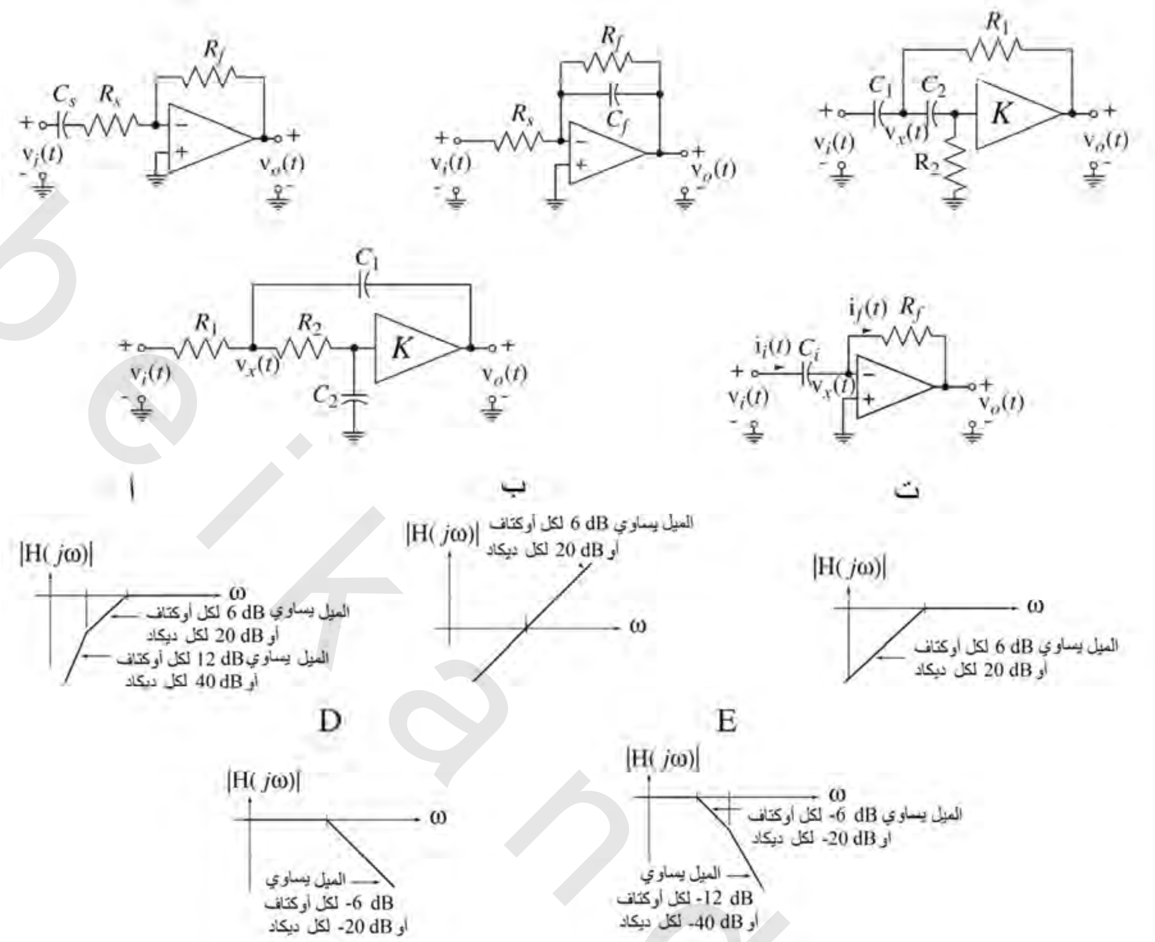
(ب) ما هو ميل مخطط بود للمقدار بالديسبل لكل ديكاد عند الترددات المنخفضة جداً والترددات المرتفعة جدا؟

٣٧- أوجد الاستجابة الترددية $H(f)=V_0(f)/V_i(f)$ للمرشحات الفعالة في الشكل رقم (ت- ٣٧) وحدد كل واحدٍ منها إذا كان منفذاً للترددات المنخفضة، أم للترددات العالية، أم منفذاً أم معوقاً لمجال من الترددات.



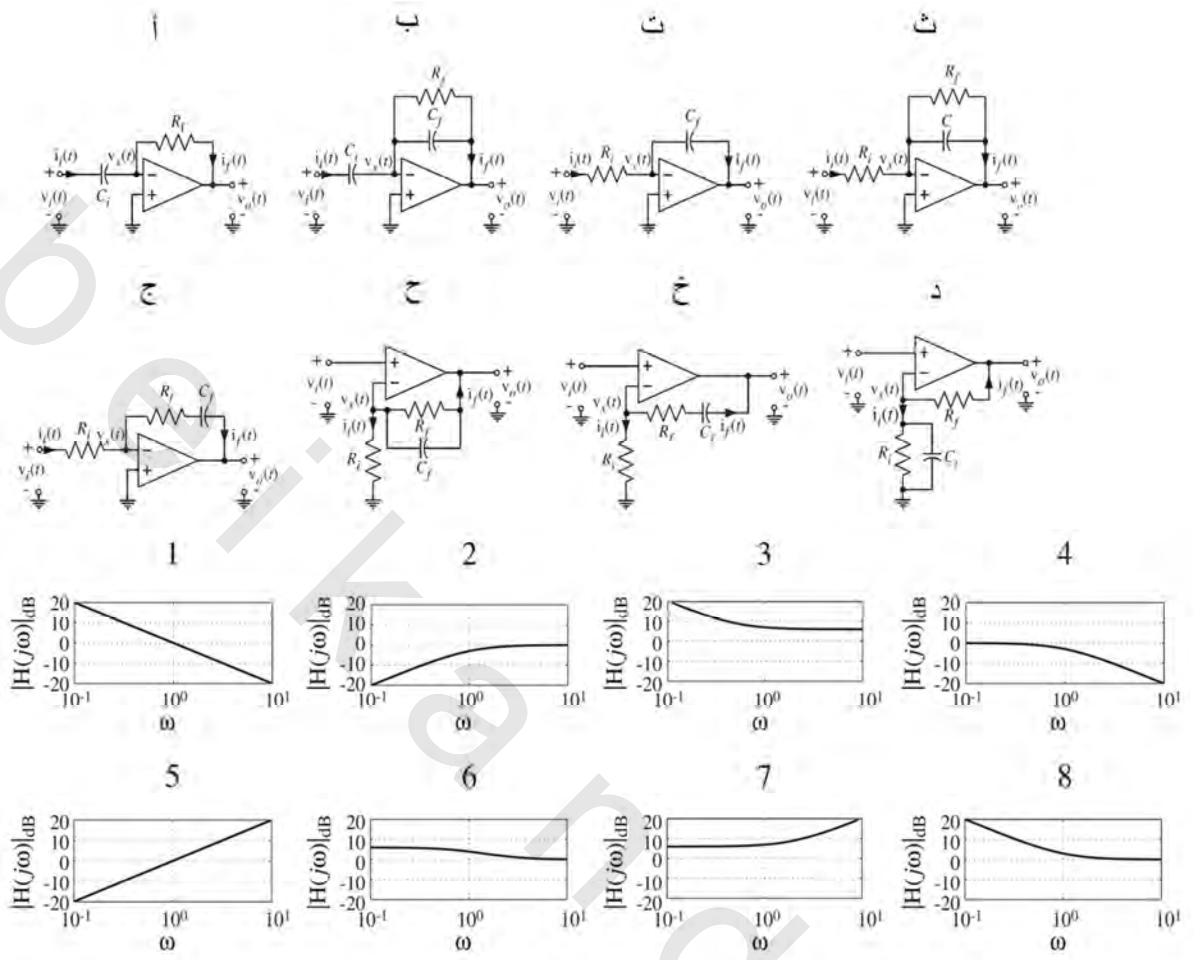
شكل رقم (**ت–٣٧**).

٣٨- في الشكل رقم (ت- ٣٨) يوجد بعض المرشحات الفعّالة وخطوط التقارب لمخططات بود للاستجابة الترددية $\left|\frac{V_0(j\omega)}{V_i(j\omega)}\right|$. لكل مرشح أوجد مقدار مخطط بود الذي يتطابق معه؟



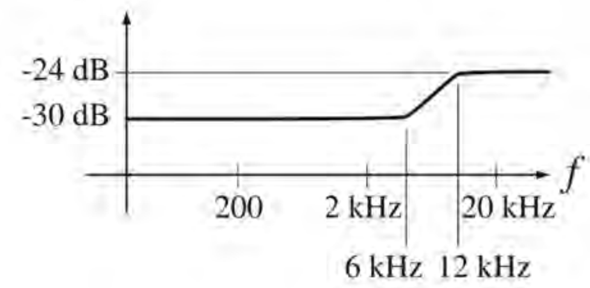
شكل رقم (ت–٣٨)

٣٩- في المرشحات الموضحة في الشكل رقم (ت- ٣٩) كل المقاومات تساوي واحد أوم وكل المكثفات تساوي واحد فاراد. لكل مرشح الاستجابة الترددية هي $H(j\omega)=V_0(j\omega)/V_i(j\omega)$. حدد مخطط بود لمقدار دالة العبور لكل دائرة؟



شكل رقم (ت–٣٩)

٤٠- عند تسجيل الموسيقي على شريط مغناطيسي تماثلي ثم تشغيله بعد ذلك، سنجد مركبة ضوضاء عالية التردد تسمى "صفيراً". الشريط يتم إضافتها على الموسيقي. افتراض من أجل التحليل أن طيف الموسيقي يستوي عند 30dB- خلال الطيف الصوتي من 20Hz حتى 20kHz. افتراض أيضاً أن طيف الإشارة الناتجة من تشغيل الإشارة بها مكونات مضافة تجعل الإشارة الناتجة من تشغيل الشريط لها مخطط بود كما هو موضح في الشكل رقم (ت- ٤٠).



شكل رقم (ت–٤٠) مخطط بود للإشارة الناتجة من تشغيل الشريط.

يمكن توهين الضوضاء العالية التردد المضافة عن طريق مرشح منفذ للترددات المنخفضة ولكن ذلك أيضاً سيوهن المركبات العالية التردد في الموسيقي، مما يقلل من أمانة النظام. أحد حلول هذه المشكلة هو عن طريق التكبير المبدئي لجزء الترددات العالية في الموسيقي أثناء عملية التسجيل بحيث عندما يتم تطبيق المرشح المنفذ للترددات المنخفضة، فإن التأثير النهائي على الموسيقي يكون صفراً مع توهين الصفارة المضافة. صَمِّمْ مرشحاً فعالاً يمكن استخدامه أثناء عملية التكبير ليقوم بعملية التكبير المبدئي.

السببية المتقطعة زمنياً

٤١- حدد إذا كانت الأنظمة التي لها استجابات الصدمة التالية سببية أم لا :

(أ) $H(e^{j\Omega}) = [rect(5\Omega/\pi) * \delta_{2\pi}(\Omega)]e^{-j10\Omega}$

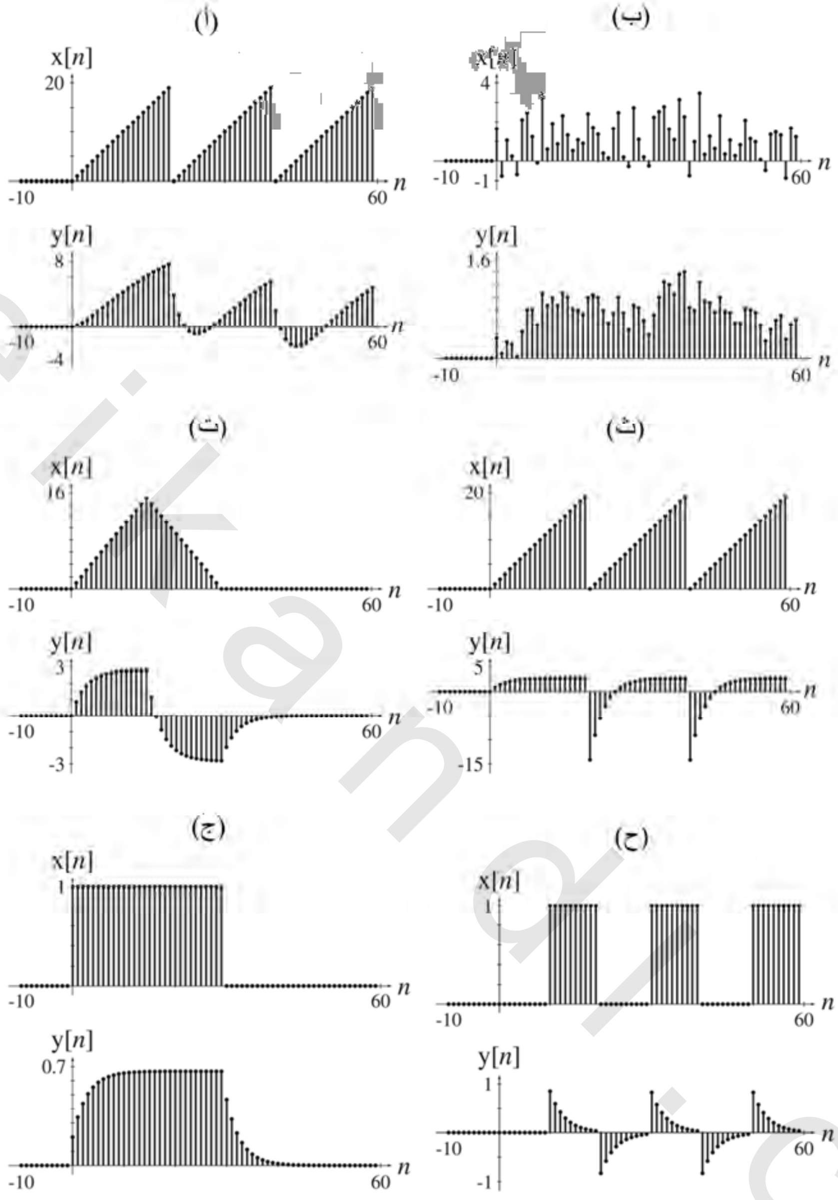
(ب) $H(e^{j\Omega}) = jsin(\Omega)$

(ت) $H(e^{j\Omega}) = 1 - e^{-j10\Omega}$

(ث) $H(e^{j\Omega}) = \frac{8e^{j\Omega}}{8-5e^{-j\Omega}}$

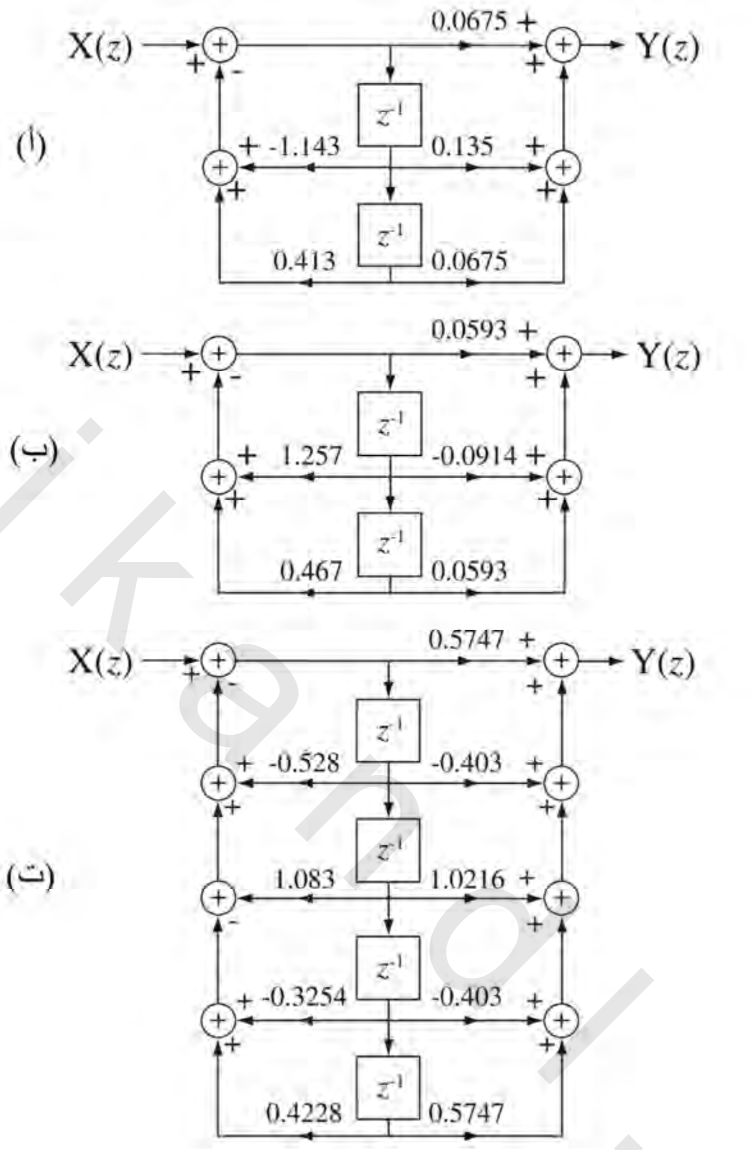
المرشحات المتقطعة زمنياً

٤٢- في الشكل رقم (ت- ٤٢) يوجد أزواج من الإثارات x والاستجابات y. لكل زوج حَدِّدَ نوع المرشح المستخدم، هل هو منفذ للترددات المنخفضة، أم للترددات العالية، أم منفذ أم معوق لمجال من الترددات.



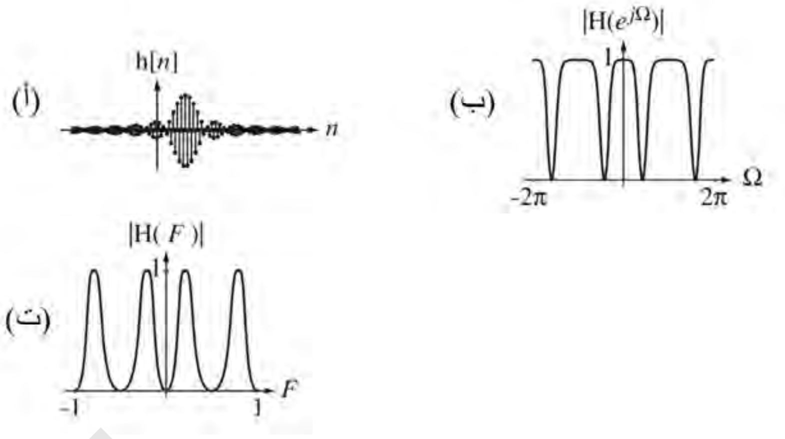
شكل رقم رقم (ت–٤٢)

٤٣- أوجد الاستجابة الترددية $H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})}$ وارسمها لكل مرشح من المرشحات الموجودة في الشكل رقم (ت- ٤٣) على المدى الترددي $-\pi<\Omega<\pi$؟



شكل رقم (ت–٤٣)

٤٤- في الشكل رقم (ت- ٤٤) يوجد بعض أوصاف لمرشحات في صورة استجابة صدمة واثنتين لمقدار الاستجابة الترددية. لكل واحدة من هذه المرشحات، وبقدر الإمكان، صنف هذه المرشحات على أنها مثالية أم عملية، سببية أم غير سببية، منفذة للترددات المنخفضة، أم للترددات المرتفعة، أم منفذة أم معوقة لمجال من الترددات.



شكل رقم (ت-٤٤)

ترشيح الصور

٤٥- ولد صورة في الفراغ المتقطع تتكون من 96×96 من البكسلات. افتراض أن الصورة تمثل لوحة شطرنج تتكون من 8×8 من المربعات البيضاء والسوداء التبادلية:

(أ) رشح هذه الصورة صفاً بصف وبعد ذلك عمود بعمود باستخدام مرشح تكون استجابة الصدمة له كما يلي:

(ب) $h[n] = 0.2(0.8)^n u[n]$

واعرض الصورة على الشاشة باستخدام الأمر imagesc في ماتلاب.

(ت) رشح هذه الصورة صفاً بصف وبعد ذلك عموداً بعمود باستخدام مرشح تكون استجابة الصدمة له كما يلي:

$$h[n] = \delta[n] - 0.2(0.8)^n u[n]$$

واعرض الصورة على الشاشة باستخدام الأمر imagesc في ماتلاب.