

تحليل أنظمة لابلاس

(١٣.١) المقدمة والأهداف

لقد اخترع بيير لابلاس Pierre Laplace تحويل لابلاس كطريقة لحل المعادلات التفاضلية الخطية الثابتة المعاملات. معظم الأنظمة LTI يتم وصفها، على الأقل تقريباً، بمعادلات تفاضلية من هذا النوع. تحويل لابلاس يصف أيضاً استجابة الصدمة للأنظمة LTI كمجموع خطي من الدوال المميزة للمعادلات التفاضلية التي تصف هذه الأنظمة. نتيجة لذلك فإن تحويل لابلاس يغلف خواص أي نظام بطريقة قوية وفعالة. العديد من طرق تحليل وتصميم الأنظمة تعتمد على استخدام محول لابلاس بدون أي رجوع مباشر إلى المعادلات التفاضلية التي تصف هذه الأنظمة. سنستكشف في هذا الفصل بعضاً من التطبيقات الأكثر شيوعاً لتحويل لابلاس في تحليل الأنظمة.

أهداف الفصل

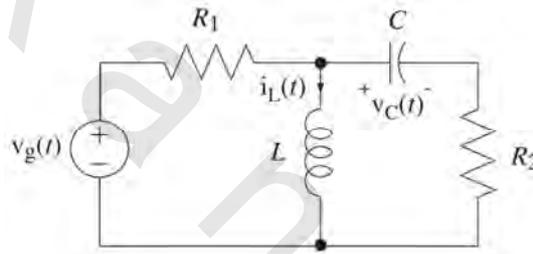
- ١- تطبيق تحويل لابلاس على التحليل العام للأنظمة LTI، بما في ذلك أنظمة التغذية العكسية، بغرض دراسة الاستقرار، والاستجابة في النطاق الزمني للإشارات القياسية، والاستجابة الترددية.
- ٢- تطوير طرق لبناء الأنظمة في صور مختلفة.

(١٣.٢) التعبير عن النظام

تشتمل قواعد الأنظمة على أنظمة من أنواع متعددة منها، الكهربائية، والهيدروليكية، والنيوماتية، والكيميائية، وهكذا. أنظمة LTI يمكن وصفها عن طريق المعادلات التفاضلية أو المخططات الصندوقية. يمكن تحويل المعادلات التفاضلية إلى معادلات جبرية باستخدام تحويل لابلاس وهذه المعادلات المحولة تمثل طريقة بديلة لوصف الأنظمة.

يمكن وصف الأنظمة الكهربائية عن طريق مخططات الدوائر. يمكن تحليل هذه الدوائر في النطاق الزمني، ولكن ذلك يحدث عادة في النطاق الترددي نتيجة قوة الجبر الخطي في التعبير عن علاقات الأنظمة بدلالة المعادلات الجبرية بدلاً من التفاضلية. الدوائر الكهربائية هي توصيلات بينية بين عناصر هذه الدوائر مثل المقاومات، والمكثفات، والملفات، والترانستورات، والدايودات، والمحولات، ومصادر الجهد، ومصادر التيار، وهكذا. على مدى إمكانية توصيف هذه المكونات بعلاقات خطية في النطاق الترددي الخطي، فإن الدائرة الكهربائية يمكن تحليلها بطرق في النطاق الترددي. العناصر غير الخطية مثل الترانستورات والدايودات (الصمامات الثنائية) والمحولات يمكن في العادة نمذجتها تقريبياً على مدى الإشارات الصغيرة كعناصر خطية. تتكون هذه النماذج من مقاومات، ومكثفات، ومحولات، زائد مصادر جهد والتيار معتمدة، وكلها يمكن وصفها بدوال عبور لأنظمة LTI.

كمثال على تحليل الدوائر باستخدام طرق لابلاس، افترض الدائرة التي في شكل (١٣.١)، التي تبين وصف لدائرة في النطاق الزمني. يمكن وصف هذه الدائرة بمعادلتين تفاضليتين مقترنتين كما يلي:



شكل (١٣.١) مخطط دائرة RLC في النطاق الزمني

$$\begin{aligned} -V_g(t) + R_1 \left[i_L + C \frac{d}{dt} (V_C(t)) \right] + L \frac{d}{dt} (i_L(t)) &= 0 \\ -L \frac{d}{dt} (i_L(t)) + V_C(t) + R_2 C \frac{d}{dt} (V_C(t)) &= 0 \end{aligned}$$

إذا تم إجراء تحويل لابلاس على المعادلتين السابقتين نحصل على ما يلي:

$$\begin{aligned} -V_g(s) + R_1 \{ I_L(s) + C [sV_C(s) - V_C(0^+)] \} + sL I_L(s) - i_L(0^+) &= 0 \\ -[sL I_L(s) - i_L(0^+)] + V_C(s) + R_2 C [sV_C(s) - V_C(0^+)] &= 0 \end{aligned}$$

إذا افترضنا أنه ليست هناك أي طاقة ابتدائية مخزنة على المكثفات (أي أنها في حالتها الصفرية)، فإن هذه

المعادلات يمكن تبسيطها كما يلي:

$$\begin{aligned} -V_g(s) + R_1 I_L(s) + sR_1 C V_C(s) + sL I_L(s) &= 0 \\ -sL I_L(s) + V_C(s) + sR_2 C V_C(s) &= 0 \end{aligned}$$

من الشائع أن نكتب مثل هذه المعادلات على الصورة التالية:

$$\begin{bmatrix} R_1 + sL & sR_1C \\ -sL & 1 + sR_2C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L(s) \\ V_C(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو:

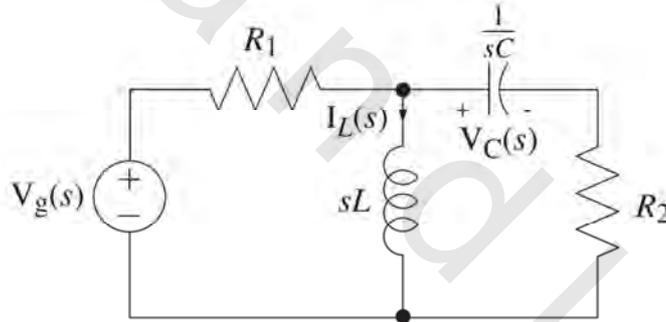
$$\begin{bmatrix} Z_{R_1}(s) + Z_L(s) & Z_{R_1}(s)/Z_C(s) \\ -Z_L(s) & 1 + Z_{R_2}(s)/Z_C(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L(s) \\ V_C(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث:

$$Z_{R_1}(s) = R_1, \quad Z_{R_2}(s) = R_2, \quad Z_L(s) = sL, \quad Z_C(s) = 1/sC$$

لقد تمت كتابة هذه المعادلات على هذه الصورة لكي نؤكد على مفهوم المعاوقة في تحليل الدوائر الكمية. الكمية sL و $1/sC$ تمثل معاوقة الملف والمكثف، على التوالي. المعاوقة هي تعميم لمفهوم المقاومة. باستخدام هذا المفهوم يمكن كتابة المعادلات مباشرة من مخطط الدائرة باستخدام علاقات مشابهة لقانون أوم للمقاومات. $V_R(s) = Z_R I(s) = R I(s)$, $V_L(s) = Z_L I(s) = sL I(s)$, $V_C(s) = Z_C I(s) = (1/sC) I(s)$

والآن يمكن أن ننظر للدائرة الموجودة في شكل (١٣.١) كما في شكل (١٣.٢).



شكل رقم (١٣.٢) مخطط دائرة RLC في النطاق الترددي

معادلات الدائرة يمكن كتابتها الآن مباشرة من شكل (١٣.٢) كمعادلتين في النطاق الترددي المركب بدون

أي كتابة لمعادلات النطاق الزمني (للمرة الثانية بفرض عدم وجود طاقة ابتدائية مخزنة في الدائرة) كما يلي:

$$\begin{aligned} -V_g(s) + R_1[I_L(s) + sCV_C(s)] + sL I_L(s) &= 0 \\ -sL I_L(s) + V_C(s) + sR_2CV_C(s) &= 0 \end{aligned}$$

هذه المعادلات يمكن تفسيرها بمفهوم الأنظمة كتناضيل، و/أو ضرب في ثابت وتجميع إشارات، لـ $I_L(s)$ و

$V_C(s)$ في هذه الحالة:

$$\underbrace{\frac{R_1 I_L(s)}{\text{التفاضل والضرب في ثابت}} + \frac{s R_1 C V_C(s)}{\text{التفاضل والضرب في ثابت}} + \frac{s L I_L(s)}{\text{التفاضل والضرب في ثابت}}}_{\text{المجموع}} = V_g(s)$$

$$\underbrace{-\frac{s L I_L(s)}{\text{التفاضل والضرب في ثابت}} + V_C(s)}_{\text{المجموع}} + \frac{s R_2 C V_C(s)}{\text{التفاضل والضرب في ثابت}} = V_g(s)$$

يمكن رسم مخطط صندوقي لهذا النظام باستخدام المكاملات، والمكبرات، ونقاط التجميع. أنواع أخرى من الأنظمة يمكن نمذجتها أيضاً عن طريق الاتصالات البينية للمكاملات، والمكبرات، ونقاط التجميع. هذه العناصر يمكنها أن تمثل أنظمة طبيعية مختلفة يكون لها العلاقات الرياضية نفسها بين الإثارة والاستجابة أو الدخل والخرج. كمثال بسيط جداً، افترض أن كتلة m تم التأثير عليها بقوة $f(t)$ (تمثل الإثارة)، حيث تستجيب هذه الكتلة بالحركة. إن الاستجابة من الممكن أن تكون الموضع $p(t)$ للكتلة على أى نظام محاور مناسب. تبعا لقوانين نيوتن الكلاسيكية، فإن عجلة أى جسم تساوى القوة المطبقة على الجسم في هذا الاتجاه مقسومة على كتلة الجسم،

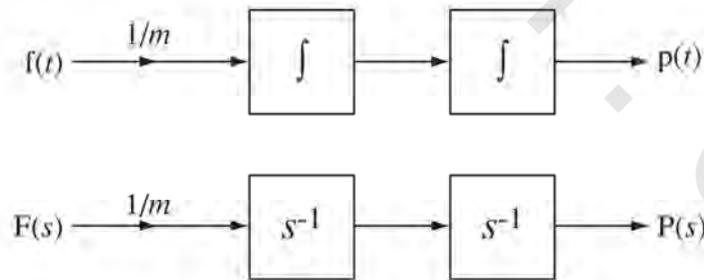
$$\frac{d^2}{dt^2}(P(t)) = \frac{f(t)}{m}$$

يمكن التعبير عن ذلك في نطاق لابلاس (بفرض الموضع والسرعة الابتدائية تساوى صفراً) كما يلي:

$$s^2 P(s) = \frac{F(s)}{m}$$

وعلى ذلك فهذا النظام البسيط جداً يمكن نمذجته عن طريق الضرب في ثابت واثنين من المكاملات كما في

شكل (١٣.٣).



شكل رقم (١٣.٣) مخطط صندوقي للمعادلة:

يمكننا أيضاً أن نمثل أنظمة أكثر تعقيداً باستخدام المخططات الصندوقية مثلما في شكل (١٣.٤). في هذا الشكل تمثل $x_1(t)$ و $x_2(t)$ المسافات من نقطة الاستقرار للكتل m_1 و m_2 على التوالي. بتجميع القوى على الكتلة m_1 ، نحصل على:

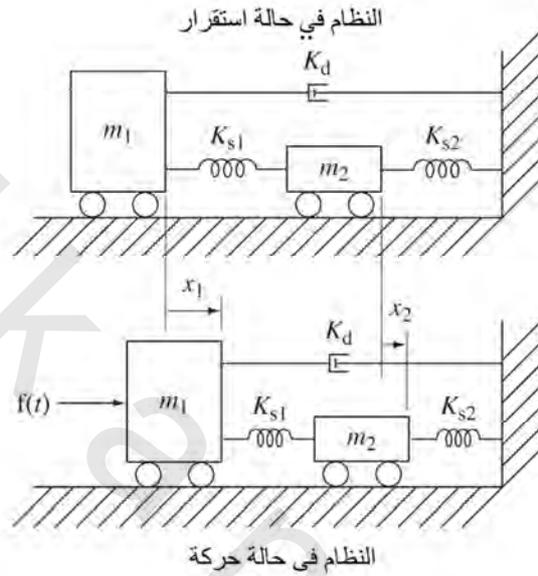
$$d^2P(t)/dt = f(t)/m \text{ and } s^2P(s) = F(s)/m$$

$$f(t) - K_d X'_1 - K_{S1}[x_1(t) - x_2(t)] = m_1 X''_1(t)$$

وبتجميع القوى على الكتلة m_2 ، نحصل على:

$$K_{S1}[x_1(t) - x_2(t)] - K_{S2} x_2(t) = m_2 X''_2(t)$$

$f(t)$ هي إشارة الإثارة للنظام



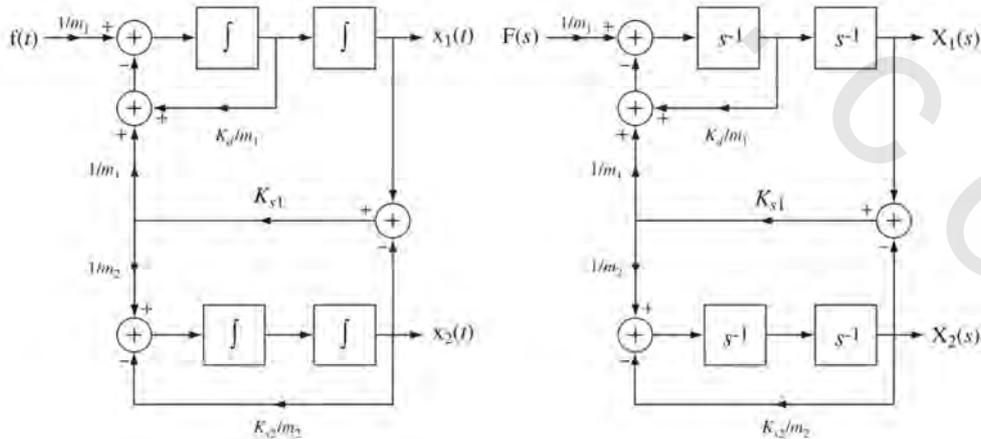
شكل رقم (١٣.٤) نظام ميكانيكي

بإجراء تحويل لابلاس للمعادلتين:

$$F(s) = K_d s X_1(s) - K_{d1}[X_1(s) - X_2(s)] = m_1 s^2 X_1(s)$$

$$K_{S1}[X_1(s) - X_2(s)] - K_{S2} X_2(s) = m_2 s^2 X_2(s)$$

يمكن أيضاً أن نضع نموذجاً للنظام الميكانيكي باستخدام المخططات الصندوقية كما في شكل (١٣.٥).



شكل رقم (١٣.٥) مخطط صندوقي للنطاق الترددي والنطاق الزمني للنظام الميكانيكي في شكل (١٣.٤)

(١٣.٣) استقرار النظام

استقرار الأنظمة من الاعتبارات المهمة جداً في تحليل الأنظمة. كما أوضحنا في الفصل ٥، فإن النظام المستمر زمنياً يكون مستقراً محدود الدخل محدود الخرج BIBO إذا كانت استجابة الصدمة يمكن تكاملها إطلاقاً. تحويل لابلاس لاستجابة الصدمة هو دالة العبور. بالنسبة للأنظمة التي يمكن وصفها بمعادلات تفاضلية على الصورة التالية:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} (y(t)) = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k}{dt^k} (x(t))$$

حيث $a_N=1$ ، وبدون فقد في العمومية فإن دالة العبور ستكون على الصورة التالية:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

في العادة يمكن تحليل المقام (عددياً إذا كان ضرورياً)، بحيث إن دالة العبور يمكن كتابتها أيضاً على الصورة

التالية:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_N)}$$

إذا كان هناك أى أزواج من الأقطاب والأصفار التي تقع تماماً عند الموضع نفسه في المستوى s ، فإنها تتلاشى في دالة العبور ويجب التخلص منها قبل فحص دالة العبور بغرض الاستقرار. إذا كان $M < N$ ، ولا يوجد أقطاب متكررة، فإن دالة العبور يمكن التعبير عنها في صورة كسور جزئية كما يلي:

$$H(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \dots + \frac{K_N}{s-p_N}$$

وبالتالي ستكون استجابة الصدمة على الصورة التالية:

$$h(s) = (K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \dots + K_N e^{p_N t}) u(t)$$

حيث الرموز p تمثل أقطاب دالة العبور. لكي تكون $h(t)$ قابلة للتكامل المطلق، فإن كل واحد من هذه الكميات يجب أن يكون بنفسه قابلاً للتكامل المطلق. إن تكامل أى واحد من هذه الكميات سيكون على الصورة التالية:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |K e^{p t} u(t)| dt = |K| \int_0^{\infty} |e^{Re(p)t} e^{jIm(p)t}| dt$$

$$I = |K| \int_0^{\infty} |e^{Re(p)t}| \underbrace{|e^{jIm(p)t}|}_{=1} dt = |K| \int_0^{\infty} |e^{Re(p)t}| dt$$

في التكامل السابق تكون الكمية $e^{Re(p)t}$ تكون موجبة على مدى التكامل. لذلك فإن:

$$I = |K| \int_0^{\infty} e^{Re(p)t} dt$$

لكي يتقارب هذا التكامل، فإن الجزء الحقيقي من القطب p يجب أن يكون سالباً.

لكي يكون النظام مستقراً BIBO، فإن كل أقطاب دالة العبور للنظام LTI يجب أن تقع في النصف الأيسر من المستوى s المفتوح.

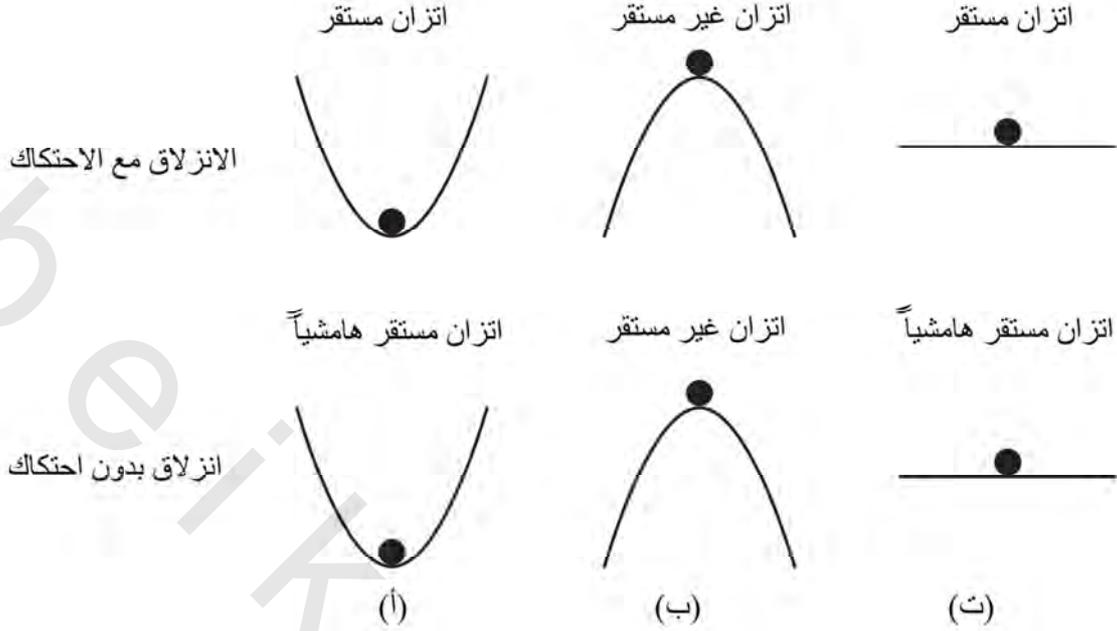
إن تعبير النصف الأيسر من المستوى s يعني النصف الأيسر من هذا المستوى، الذي لا يشتمل على المحور w . إذا كانت هناك أقطاب بسيطة (غير متكررة) على المحور w ولا يوجد أقطاب في النصف الأيمن من المستوى s ، فإن النظام يسمى نظاماً مستقراً هامشياً؛ لأنه على الرغم من أن استجابة الصدمة لا تتناقص مع الزمن، إلا أنها لا تتزايد. الاستقرار الهامشي يعتبر حالة خاصة من عدم الاستقرار BIBO؛ لأنه في هذه الحالات من الممكن أن نجد إشارة دخل محدودة، يمكنها أن تعطى إشارة خرج غير محدودة. (على الرغم من أن ذلك قد يبدو غريباً، فإن النظام المستقر هامشياً يكون أيضاً غير مستقر BIBO).

إذا كان هناك قطب متكرر من الدرجة n في دالة العبور، فإن استجابة الصدمة سيكون بها كميات على الصورة العامة التالية $t^{n-1}e^{pt}$ حيث p هي موضع القطب المتكرر. إذا كان الجزء الحقيقي من p ليس سالباً، فإن الكميات التي من هذا النوع ستتمو بدون حدود في النطاق الزمني الموجب، مما يعنى استجابة غير محدودة لإثارة محدودة وأن النظام سيكون غير مستقر BIBO. لذلك، إذا كانت دالة العبور لأي نظام لها أقطاب متكررة فإن القانون لا يتغير. يجب أن تكون جميع الأقطاب في النصف الأيسر المفتوح من المستوى s لكي يكون النظام مستقراً. إذا كان هناك أقطاب متكررة على المحور w ولا يوجد أقطاب في النصف الأيمن، فإن النظام لن يكون مستقراً هامشياً، إنه ببساطة سيكون غير مستقر. هذه الشروط ملخصة في جدول ١٣.١.

جدول رقم ١٣.١ شروط الاستقرار، أو الاستقرار الهامشي، أو عدم الاستقرار للنظام (والتي تشتمل على استقرار هامشي كحالة خاصة).

الاستقرار	الاستقرار الهامشي	عدم الاستقرار
جميع الأقطاب تكون في النصف الأيسر من المستوى s المفتوح	وأحد أو أكثر من الأقطاب البسيطة على المحور w ولكن لا يوجد أقطاب متكررة على المحور w ولا يوجد أقطاب في النصف الأيمن من المستوى.	واحد أو أكثر من الأقطاب في النصف الأيمن من المستوى s أو على المحور w (بما في ذلك الاستقرار الهامشي)

هناك تشابه قد يكون مفيداً أحياناً في تذكر الأوصاف المختلفة لاستقرار أو عدم استقرار النظام هي افتراض حركة كرة موضوعة على أنواع مختلفة من الأسطح، كما في شكل (١٣.٦).



شكل رقم (١٣.٦) توضيح لثلاثة أنواع من الاستقرار.

إذا قمنا بإثارة النظام في شكل (١٣.٦ أ) بتطبيق صدمة من القوة الأفقية على الكرة، فإنها ستتحرك وبعد ذلك تنزلق للأمام والخلف. إذا كان هناك أي كمية من الاحتكاك ولو قليلة جداً (أو أي آلية أخرى لفقد الحركة مثل مقاومة الهواء)، فإن الكرة بالطبع سترجع إلى موضع استقرارها الأصلي وهذا يعتبر مثالا على الأنظمة المستقرة. إذا لم يكن هناك أي احتكاك (أو أي آلية فقد أخرى)، فإن الكرة ستندبذ للأمام والخلف دائماً ولكنها ستظل حول نقطة الاستقرار السفلي. هذه الاستجابة لا تنمو مع الزمن، ولكنها أيضاً لا تتناقص. في هذه الحالة يكون النظام مستقراً هامشياً.

إذا قمنا بإثارة الكرة التي في شكل (١٣.٦ ب) بأضعف ما يمكن من إثارة، فإن الكرة ستنتقل لأسفل ولن تعود لموضعها الأصلي. إذا كان التل الذي تسقط الكرة من فوقه عالي جداً ويقترب من المالا نهاية، فإن سرعة الكرة ستقترب من المالا نهاية، مما يمثل استجابة غير محدودة لإثارة محدودة. وهذا يمثل نظام غير مستقر. في شكل (١٣.٦ ت) إذا أثرتنا الكرة بوحدة صدمة عبارة عن قوة أفقية، فإنها تستجيب بالانزلاق. إذا كان هناك أي آلية للفقد، فإن الكرة ستؤول إلى استقرار ولكن عند موضع غير موضعها الأصلي. إن ذلك يعتبر استجابة محددة لإثارة محددة والنظام يعتبر مستقراً. إذا لم تكن هناك آلية للفقد، فإن الكرة ستنتقل إلى ما لانهاية بدون عجلة، وذلك يعتبر استقراراً هامشياً.

مثال ١٣.١

قطب متكرر على المحور ω

من أبسط الأمثلة على نظام له قطب متكرر على المحور ω هو المكامل المزدوج الذي له دالة عبور كالتالي:

$$H(s) = A/s^2 \text{ حيث } A \text{ ثابت. أوجد استجابة الصدمة لهذا النظام.}$$

باستخدام تحويل لابلاس التالي:

$$t^n u(t) \stackrel{l}{\leftrightarrow} n!/s^{n+1}$$

يمكننا أن نحصل زوج التحويل التالي:

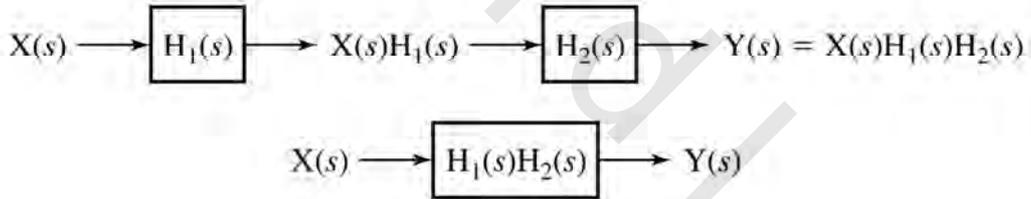
$$Atu(t) \stackrel{l}{\leftrightarrow} A/s^2$$

وهي دالة متزايدة بدون حدود على المحور الزمني الموجب مما يعني أن النظام غير مستقر (وليس مستقراً هامشياً).

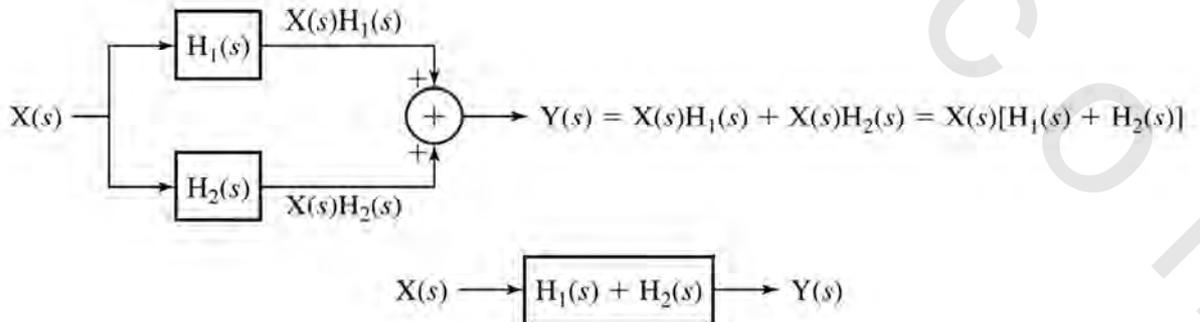
(١٣.٤) توصيلات الأنظمة

التوصيلات على التوالي وعلى التوازي

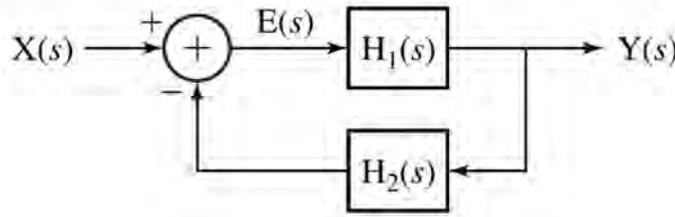
لقد رأينا فيما سبق استجابة الصدمة والاستجابة الترددية لتوصيلات من الأنظمة على التوالي وعلى التوازي. نتائج هذه الأنواع من الأنظمة تكون هي نفسها بالنسبة لدوال العبور كما كانت بالنسبة للاستجابات الترددية كما في شكل (١٣.٧) وشكل (١٣.٨).



شكل رقم (١٣.٧) التوصيل على التوالي للأنظمة.



شكل رقم (١٣.٨) التوصيل على التوازي للأنظمة.



شكل رقم (١٣.٩) توصيلات التغذية المرتدة للأنظمة.

توصيلات التغذية العكسية

المصطلحات والعلاقات الأساسية

نوع آخر من التوصيلات المهمة جداً في تحليل الأنظمة هي توصيلات التغذية العكسية، كما في شكل (١٣.٩). دالة العبور $H_1(s)$ توجد في المسار الأمامي ودالة العبور $H_2(s)$ توجد في المسار العكسي أو المرتد. في مطبوعات أنظمة التحكم من الشائع أن نسمي دالة العبور في المسار الأمامي $H_1(s)$ المصنع أو المحطة plant لأنها تكون عادة نظاماً مصمماً لإنتاج شيء، وتسمى دالة العبور في المسار العكسي أو المرتد $H_2(s)$ بأنها المستشعر أو الحساس؛ لأنها عادة تكون نظاماً مضافاً للمصنع للمساعدة في التحكم فيه أو تثبيته عن طريق استشعار استجابة المصنع وتغذيتها عكسياً إلى نقطة التجميع عند دخل المصنع. الآن أصبحت الإشارة أو الدخل إلى المصنع تسمى إشارة الخطأ وهي تساوي $E(s) = X(s) - H_2(s)Y(s)$ واستجابة ال $H_1(s)$ ، وهي $Y(s) = H_1(s)E(s)$ ، تمثل الإشارة للحساس أو المستشعر $H_2(s)$. بتجميع هذه المعادلات والحل لدالة العبور الكلية نحصل على ما يلي:

المعادلة رقم (١٣.١)

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

في المخطط الصندوقي الذي يوضح التغذية العكسية في شكل (١٣.٩) تم طرح إشارة التغذية العكسية من إشارة الدخل. إن ذلك يعتبر تقليدياً شائعاً في تحليل أنظمة التغذية العكسية والذي ينبع من تاريخ استخدام التغذية العكسية السالبة في تثبيت النظام. الفكرة الأساسية وراء كلمة "سالبة" هي أنه إذا كانت إشارة خرج المصنع ستذهب بعيداً في اتجاه معين، فإن المستشعر سيغذي إشارة عكسية تتناسب مع إشارة خرج المصنع، ويتم طرحها من إشارة الدخل وبالتالي تحاول إرجاع إشارة خرج المصنع في الاتجاه المعاكس، وبالتالي تعديلها. إن ذلك بالطبع يفترض أن الإشارة المغذاة عكسياً عن طريق المستشعر تكون لها الجودة الكافية لتثبيت النظام. سواء كانت إشارة المستشعر ستثبت النظام في الحقيقة أم لا سيعتمد على استجابة هذا الحساس الديناميكية واستجابة المصنع الديناميكية.

من المعتاد في تحليل الأنظمة أن يتم إعطاء حاصل ضرب دالتي العبور في المسار الأمامي والمسار العكسي الاسم الخاص وهو دالة عبور الحلقة $T(s) = H_1(s)H_2(s)$ ، لأنها توضح الكثير جداً في تحليل أنظمة التغذية العكسية. في

تصميم مكبرات التغذية العكسية الإلكترونية يكون هذا الإسم هو حلقة الانتقال. إنها تسمى دالة عبور الحلقة أو حلقة الانتظام، لأنها تمثل ما يحدث للإشارة أثناء عبورها عند أي نقطة في الحلقة، وحول الحلقة عند زمن معين والعودة مرة ثانية إلى نقطة البداية (فيما عدا تأثير الإشارة السالبة عند نقطة التجميع). لذلك فإن دالة العبور لنظام التغذية العكسية تساوي دالة العبور الأمامية $H_1(s)$ مقسومة على واحد زائد دالة عبور الحلقة أو:

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1+T(s)}$$

لاحظ أنه عندما تكون $H_2(s)$ تساوي صفراً (مما يعني عدم وجود تغذية مرتدة) فإن $T(s)$ أيضاً تساوي صفراً

وتصبح دالة عبور النظام $H(s)$ هي نفسها مثل دالة العبور الأمامية $H_1(s)$.

تأثيرات التغذية العكسية على الاستقرار

من المهم جداً أن نفهم أن التغذية العكسية من الممكن أن يكون لها تأثير سيء جداً على استجابة النظام، بحيث تحوله من نظام بطيء إلى سريع، أو سريع إلى بطيء، أو مستقر إلى غير مستقر، أو غير مستقر إلى مستقر. أبسط نوع من التغذية العكسية هو التغذية العكسية لإشارة تتناسب مباشرة مع إشارة الخرج، وهذا يعني أن $H_2(s)=K$ حيث K ثابت. في هذه الحالة تصبح دالة العبور الكلية كما يلي:

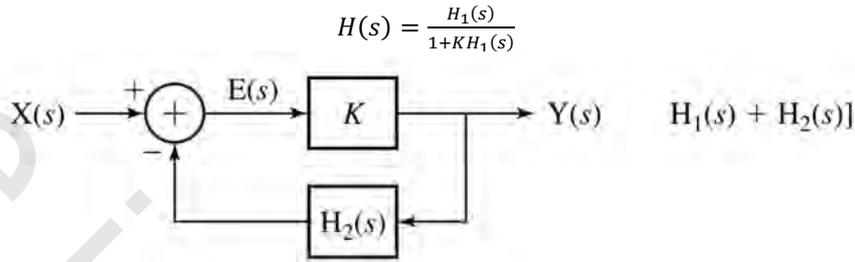
$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1+KH_1(s)}$$

افترض أن النظام الموجود في المسار الأمامي مكامل له دالة العبور التالية: $H_1(s)=1/s$ ، وهذا النظام مستقر هامشياً. بالتالي فإن $H(s) = \frac{1/s}{1+K/s} = \frac{1}{s+K}$. دالة العبور في المسار الأمامي $H_1(s)$ لها قطب عند $s=0$ ، ولكن $H(s)$ أصبح لها الآن قطب عند $s=-K$. إذا كانت K موجبة فإن نظام التغذية العكسية الكلي أصبح مستقراً، له قطب واحد في النصف الأيسر المفتوح من المستوى s . إذا كانت K سالبة فإن نظام التغذية العكسية الكلي سيكون غير مستقر وله قطب واحد في النصف الأيمن من المستوى s . مع جعل K قيمة موجبة وكبيرة فإن القطب يتحرك أكثر بعيداً عن نقطة الأصل في داخل المستوى s ويستجيب النظام بسرعة أكبر لإشارة الدخل. إن ذلك يعتبر توضيحاً بسيطاً لتأثير التغذية العكسية. هناك الكثير مما يمكن أن نتعلمه عن التغذية العكسية وعادة يحتاج الأمر لمقرر على مدار فصل دراسي كامل لتدريس تأثيرات التغذية العكسية على ديناميكية النظام.

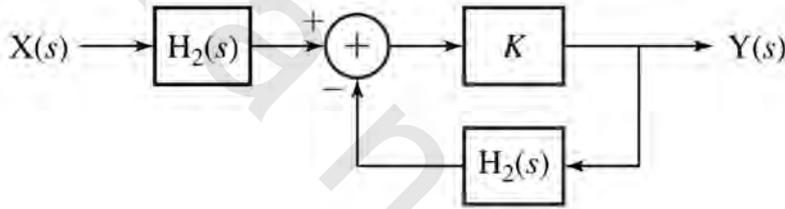
إن تغذية خرج المسار الأمامي عكسياً لتغير من دخله يسمى عادة "إغلاق أو قفل الحلقة" كما هو واضح، وإذا لم يكن هناك مساراً للتغذية العكسية فإن مثل هذا النظام يسمى نظام "مفتوح الحلقة". إن السياسيين ورجال الأعمال وآخرين من المحركين لشئون المجتمع يريدون دائماً أن يكونوا داخل الحلقة. هذا المصطلح ربما يكون قد جاء من مفهوم حلقة التغذية العكسية؛ لأن الشخص الموجود داخل الحلقة تكون لديه الفرصة دائماً في التأثير في أداء النظام وبالتالي تكون لديه القوة والفعالية في التأثير السياسي والاقتصادي والاجتماعي.

التأثيرات المفيدة للتغذية العكسية

تستخدم التغذية العكسية في الكثير من الأغراض. واحد من هذه التأثيرات الممتعة للتغذية العكسية يمكن رؤيته في نظام كالموضح في شكل (١٣.١٠). دالة العبور الكلية لهذا النظام ستكون كما يلي:



شكل رقم (١٣.١٠) نظام تغذية مرتدة.



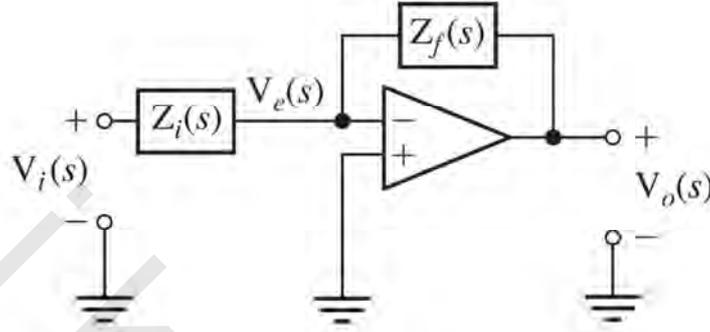
شكل رقم (١٣.١١) نظام متبوع بنظام آخر مصمم ليكون النظام العكسي له تقريباً.

إذا كانت K كبيرة بما فيه الكفاية، فإن بعض قيم s ستجعل $KH_2(s) \gg 1$ وبالتالي يصبح $H(s) \approx 1/H_2(s)$ وبالتالي فإن دالة العبور الكلية لنظام التغذية العكسية تؤدي تقريباً دور العملية نفسه العكسية لمسار التغذية العكسية تقريباً. إن ذلك يعني أننا إذا كنا سنوصل على التوالي نظاماً له دالة العبور $H_2(s)$ لهذا النظام ذو التغذية العكسية، فإن دالة العبور الكلية ستساوي واحداً تقريباً على مدى بعض القيم لـ s كما هو موضح في شكل (١٣.١١).

إنه من الطبيعي أن نتعجب عند هذه النقطة عن ما حققه هذا النظام الموجود في شكل (١٣.١١) لأنه يبدو أنه ليس له أي تأثير عام أو كلي. هناك بعض المواقف الحقيقية التي قد تتغير فيها الإشارة بسبب تأثير نظام لا يمكن تجنبه، ونحن نريد استرجاع هذه الإشارة الحقيقية. وهذا شائع جداً في أنظمة الاتصالات التي يتم فيها إرسال الإشارة على إحدى قنوات الاتصالات التي قد لا تغير من طبيعة الإشارة مثالياً، ولكن في الواقع يحدث هذا التغيير للإشارة لأسباب تكون خارج تحكم مصمم هذه القناة. يمكن استخدام مرشح معادل لاسترجاع هذه الإشارة الأصلية. هذا المرشح يتم تصميمه ليكون له التأثير العكسي لتأثير القناة على الإشارة بقدر الإمكان. بعض الأنظمة التي يتم تصميمها لقياس الظواهر الطبيعية تستخدم الحساسات التي تكون لها دالة عبور ضمنية لتمرير الترددات المنخفضة، ويكون ذلك عادة بسبب خواص ميكانيكية وحرارية لا يمكن تجنبها في هذه الحساسات. يمكن تصميم نظام القياس

لتكون له سرعة استجابة عالية عن طريق التوصيل على التوالي مع الحساس نظام معالجة إلكتروني للإشارة له دالة عبور تكون تقريباً لها التأثير العكسي لدالة عبور الحساس.

تأثير آخر مفيد للتغذية العكسية هو تقليل حساسية النظام للتغيرات في معاملاته. مثال شائع جداً لهذه الفائدة هو استخدام التغذية العكسية في مكبر العمليات كما هو موضح في شكل (١٣.١٢).



شكل (١٣.١٢) مكبر عاكس للجهد باستخدام مكبر عمليات مع التغذية المرتدة.

التعبير التقريبي لمعامل تكبير مكبر العمليات الذي تم توصيل الدخل غير العاكس فيه إلى الأرضي ($H_1(s)$) في مخطط التغذية العكسية الصندوقي) سيكون:

$$H_1(s) = \frac{V_o(s)}{V_e(s)} = -\frac{A_0}{1-s/p}$$

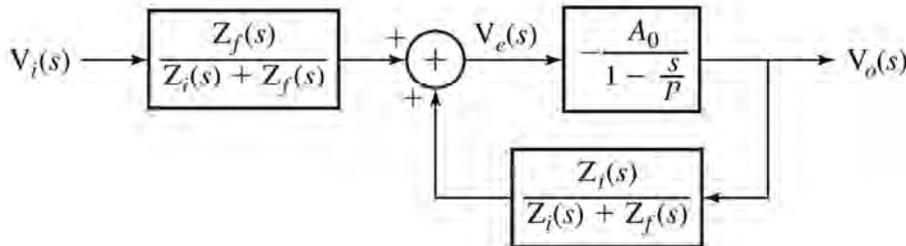
حيث A_0 هو مقدار معامل تكبير الجهد لمكبر العمليات عند الترددات المنخفضة و p هو قطب وحيد على المحور الحقيقي السالب للمستوى s . يمكن إيجاد دالة العبور الكلية باستخدام طرق تحليل الدوائر القياسية، ويمكن إيجادها أيضاً باستخدام مفاهيم التغذية العكسية. جهد الخطأ $V_e(s)$ دالة في $V_i(s)$ و $V_o(s)$. حيث إن معاوقة الدخل لمكبر العمليات تكون كبيرة جداً بالمقارنة مع المعاوقتين الخارجيتين $Z_i(s)$ و $Z_f(s)$ ، فإن جهد الخطأ سيكون:

$$V_e(s) = V_o(s) + [V_i(s) - V_o(s)] \frac{Z_f(s)}{Z_i(s) + Z_f(s)}$$

أو:

$$V_e(s) = V_o(s) \frac{Z_i(s)}{Z_i(s) + Z_f(s)} - V_i(s) \left[\frac{Z_f(s)}{Z_i(s) + Z_f(s)} \right]$$

وبالتالي يمكننا نمذجة هذا النظام باستخدام المخطط الصندوقي الموضح في شكل (١٣.١٣).



شكل (١٣.١٣) مخطط صندوقي لمكبر عاكس للجهد باستخدام تغذية مرتدة على مكبر العمليات.

تبعاً لدالة العبور العامة لنظم التغذية العكسية:

$$X(s) = 1 + H_1(s)H_2(s)$$

فإن دالة العبور للمكبر يجب أن تكون على الصورة التالية:

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s) \frac{Z_f(s)}{Z_i(s) + Z_f(s)}} = \frac{-A_0}{1 + \left(\frac{-A_0}{1-s/P} \right) \left(\frac{Z_i(s)}{Z_i(s) + Z_f(s)} \right)}$$

بتبسيط هذه المعادلة وحساب النسبة $V_0(s)$ إلى $V_i(s)$ كدالة عبور كلية للنظام:

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{-A_0 Z_f(s)}{(1-s/P + A_0) Z_i(s) + (1-s/P) Z_f(s)}$$

إذا كان مقدار معامل التكبير عند الترددات المنخفضة A_0 كبيراً جداً (وهو في العادة كذلك)، فإنه يمكن

تقريب دالة العبور عند الترددات المنخفضة كما يلي:

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} \approx -\frac{Z_f(s)}{Z_i(s)}$$

وهذه هي المعادلة المعروفة لمعامل تكبير المكبر العاكس للجهد باستخدام مكبر العمليات المثالي. في هذه

الحالة لفظة كبير تعني أن A_0 كبير بما فيه الكفاية بحيث يكون المقام لدالة العبور يساوي $A_0 Z_i(s)$ ، وهذا يعني أن:

$$|A_0| \gg \left| 1 - \frac{s}{p} \right| \quad \text{و} \quad |A_0| \gg \left| 1 - \frac{s}{p} \right| \left| \frac{Z_f(s)}{Z_i(s)} \right|$$

قيمة هذا التكبير الحقيقية ليست مهمة طالما أنها كبيرة جداً وأنها تمثل حقيقة تقليل حساسية النظام للتغيرات

في قيم المعاملات التي تؤثر في A_0 و p .

لتوضيح تأثيرات التغذية العكسية على أداء المكبر سنفترض الآتي:

$$A_0 = 10^7 \quad \text{و}$$

$$p = -100$$

سنفترض أيضاً أن $Z_f(s)$ ستكون مقاومة تساوي $10k\Omega$ و $Z_i(s)$ مقاومة تساوي $1k\Omega$. بالتالي فإن دالة العبور

الكلية للنظام ستكون:

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{-10^8}{11(1+s/100)+10^7}$$

القيمة العددية لدالة العبور عند التردد الزاوي $\omega=100$ (تساوي تردد دوري $f=100/2\pi \approx 15.9\text{Hz}$) ستكون:

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{-10^8}{11+j11+10^7} = -9.99989 + j0.000011$$

الآن سنفترض أن معمل تكبير مكبر العمليات عند الترددات المنخفضة سيقبل بمقدار المعامل 10 ليصبح

$A_0=10^6$. عند إعادة حساب دالة العبور عند 15.9Hz سنحصل على ما يلي:

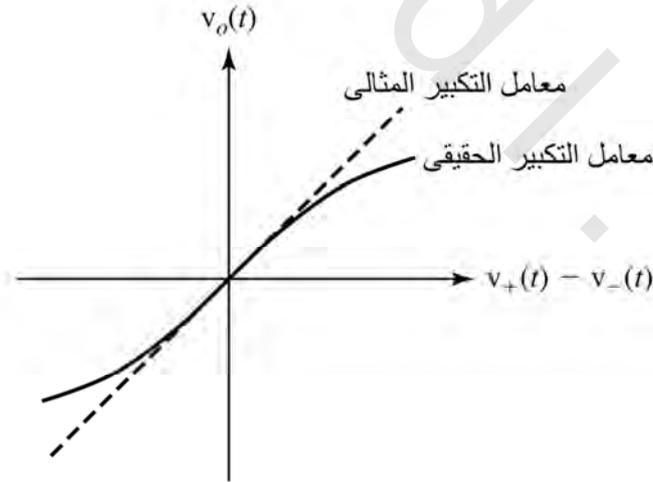
$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{-10^8}{11+j11+10^6} = -9.99989 + j0.00011$$

وهذا يمثل تغيراً يساوي 0.001% تقريباً في مقدار دالة العبور. ولذلك فإن تغير في دالة عبور المسار الأمامي بمعامل مقداره 10 سيعطي تغير في مقدار دالة العبور الكلية حوالي 0.001%. إن توصيل التغذية العكسية جعلت دالة العبور الكلية غير حساسة بدرجة جيدة للتغيرات في معامل تكبير مكبر العمليات، حتى التغيرات الكبيرة. هذه النتيجة تعتبر مفيدة جداً في تصميم المكبرات لأن المقاومات، وبالذات نسبة المقاومات يمكن جعلها غير حساسة للمعاملات المحيطة ويمكنها أن تجعل دالة عبور النظام ثابتة تقريباً، حتى لو تغيرت المكونات في مكبر العمليات بنسبة كبيرة من قيمها الأسمية.

نتيجة أخرى لعدم الحساسية النسبية لدالة عبور النظام للتغيرات في معامل التكبير A_0 لمكبر العمليات هي أنه إذا كان A_0 دالة في مستوى الإشارة، مما يجعل معامل تكبير المكبر غير خطي، فإنه طالما أن A_0 كبيراً، فإن دالة عبور النظام ستظل دقيقة وخطية عملياً كما في شكل (١٣.١٤).

تأثير آخر مفيد للتغذية العكسية يمكن رؤيته عن طريق حساب عرض المجال لمكبر العمليات نفسه ومقارنة ذلك مع عرض المجال للمكبر العاكس مع التغذية العكسية. التردد الركني لمكبر العمليات نفسه في هذا المثال كان 15.9Hz. التردد الركني للمكبر العاكس مع التغذية العكسية هو التردد الذي يتساوي عنده مقدار الجزء الحقيقي والجزء التخيلي في مقام دالة العبور الكلية.

إن ذلك يحدث عند التردد الدوري $f \cong 14.5\text{MHz}$ ، وذلك يعتبر زيادة هائلة في عرض المجال تقارب 910000. من الصعب أن نبالغ في أهمية أساسيات التغذية العكسية في تحسين أداء الأنظمة بالعديد من الطرق.



شكل رقم (١٣.١٤) معامل تكبير مكبر العمليات الخطي وغير الخطي

دالة العبور لمكبر العمليات تكون رقم كبير جداً عند الترددات المنخفضة، وبالتالي فإن مكبر العمليات يكون له معامل تكبير جهدي كبير جداً عند الترددات المنخفضة. معامل التكبير الجهدي لمكبر التغذية العكسية يكون

أصغر كثيراً. وبالتالي فإنه باستخدام التغذية العكسية، نفقد جزءاً كبيراً جداً من معامل التكبير الجهدي ولكننا كسبنا استقرار معامل التكبير وعرض المجال (بالإضافة إلى مميزات أخرى). فعليا، نحن قايننا معامل التكبير مع التحسن في خواص المكبر الأخرى.

يمكن استخدام التغذية العكسية في استقرار الأنظمة غير المستقرة. طائرة التسلسل F-117 تعتبر ضمناً غير مستقرة. إنها تستطيع الطيران تحت تحكم القائد فقط مع المساعدة من نظام تغذية مرتدة يتحكم فيها الحاسب تقوم باستشعار موضع الطائرة، وسرعتها وارتفاعها وتقوم باستمرار بتعويض هذه المتغيرات كلما بدأت في الانحراف في اتجاه عدم الاستقرار. مثال بسيط جداً على استقرار نظام يكون غير مستقر، وباستخدام التغذية العكسية من الممكن أن يكون نظاماً مستقر، نفترض نظام كالذي له دالة العبور التالية:

$$H_1(s) = \frac{1}{s-p}, p > 0$$

مع وجود القطب في النصف الأيمن من المستوى s فإن النظام يكون غير مستقر. إذا استخدمنا مسار تغذية مرتدة له دالة عبور هي الثابت K سنحصل على دالة العبور الكلية التالية:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{s-p}}{1 + \frac{K}{s-p}} = \frac{1}{s-p+K}$$

ومنها نجد أنه لأي قيمة للثابت K تحقق $K > p$ ، فإن نظام التغذية العكسية سيكون مستقراً.
عدم الاستقرار بسبب التغذية العكسية

على الرغم من أن التغذية العكسية من الممكن أن يكون لها العديد من التأثيرات المهمة، إلا أن هناك تأثيرات أخرى للتغذية العكسية على الأنظمة تكون غاية في الأهمية ومن الممكن أن تسبب مشاكل بدلاً من أن تسبب في فوائد للنظام. إن إضافة تغذية مرتدة لنظام مستقر من الممكن أن تسبب في عدم استقراره. دالة العبور الكلية لأي نظام تغذية مرتدة هي:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

على الرغم من أن أقطاب كل من $H_1(s)$ و $H_2(s)$ من الممكن أن يقع في النصف الأيسر المفتوح من المستوى s ، إلا أن أقطاب $H(s)$ من الممكن ألا تحقق ذلك. افترض أن دالة العبور الأمامية والعكسية ستكون على الصورة التالية:

$$H_1(s) = \frac{K}{(s+3)(s+5)} \quad \text{و} \quad H_2(s) = \frac{1}{s+4}$$

حيث كل من $H_1(s)$ و $H_2(s)$ مستقر BIBO. ولكن إذا وضعناهما في نظام تغذية مرتدة كالتالي:

$$H(s) = \frac{K(s+4)}{(s+3)(s+4)(s+5) + K} = \frac{K(s+4)}{s^3 + 12s^2 + 47s + 60 + K}$$

هل سيكون هذا النظام مستقرًا أم لا ، سيعتمد ذلك على قيم K . إذا كانت K تساوي 5، فإن الأقطاب ستقع عند -5.904 و $-3.048 \pm j1.311$ ، وكلها تقع في النصف الأيسر المفتوح من المستوى s وبالتالي فإن نظام التغذية العكسية سيكون مستقرًا. ولكن إذا كانت K تساوي 700، فإن الأقطاب ستقع عند -12.917 و $0.4583 \pm j7.657$ ، مما يعني أن قطبين سيكونين في النصف الأيمن من المستوى s وبالتالي سيكون النظام غير مستقر.

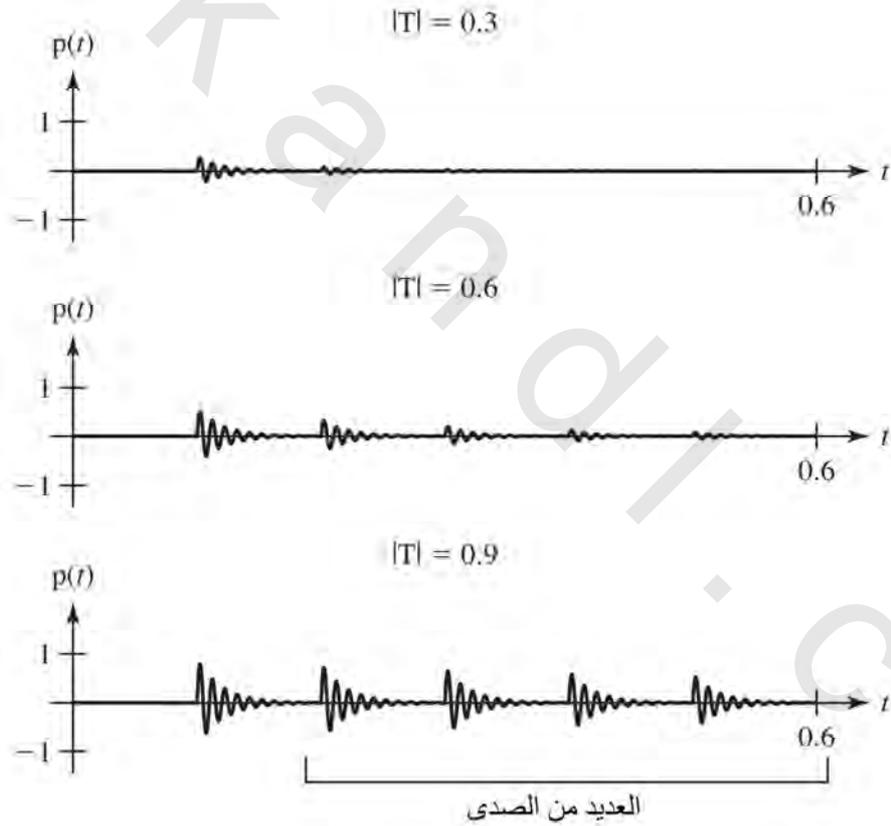
تقريباً كل واحد منا قد تعامل مع نظام أصبح غير مستقر بسبب التغذية العكسية. في العادة عندما يكون هناك زحام كبير للاستماع إلى أحد المتكلمين، فإنه يتم استخدام نظام صوتي عام. في هذا النظام يستخدم المتكلم الميكروفون، يتم تكبير الصوت وتغذيته إلى واحد أو أكثر من مكبرات الصوت بحيث يستطيع كل الحضور السماع إلى الصوت. بالطبع فإن الصوت الذي تم تكبيره وخرج من هذه السماعات سيتم استشعاره مرة ثانية عن طريق الميكروفون وتكبيره ثم توزيعه على مكبرات الصوت، وهذا مثال على التغذية العكسية، لأن إشارة الخرج من مكبرات الصوت تغذي مرة ثانية إلى الدخل من خلال الميكروفون. أي واحد لن ينسى أبداً عندما يصبح هذا النظام غير مستقر، حيث يتم سماع صفارة عالية جداً. وربما نحن نعلم الحل المعتاد لذلك، إنه تقليل معامل التكبير للمكبر. إن هذه الصفارة من الممكن أن تحدث حتى لو لم يكن هناك متحدث في الميكروفون. إذن لماذا يصبح النظام غير مستقر بدون أي إشارة للدخل، ولماذا عندما نقلل معامل التكبير للمكبر، فإن الصفارة لا تقل فقط، بل ربما تتلاشي؟

يمكننا أن نفهم ظاهرة التغذية العكسية من خلال تجربة للتفكير. تخيل أن لدينا ميكروفوناً، ومكبراً، وسماعة في وسط الصحراء ولا يوجد هناك أي شخص ولا يوجد هناك أي ريح أو أي مؤثرات صوتية وأن معامل تكبير المكبر تم وضعه يساوي صفراً في البداية. إذا نظرنا الآن على الميكروفون، فإننا سنسمع فقط صوت النقر المباشر ولن نسمع أي شيء من السماعة. الآن سنفتح المكبر ونزيد معامل التكبير قليلاً. ابداً الآن في النقر على الميكروفون حيث سنسمع صوت النقر المباشر ولكن بعض الصوت القليل من السماعة، متأخر قليلاً نتيجة المسافة التي يقطعها الصوت للانتقال من السماعة للأذن (بفرض أن السماعة بعيدة من الأذن كثيراً عن الميكروفون). مع زيادة معامل التكبير أكثر وأكثر، فإننا نزيد دالة عبور الحلقة T ، وسيرتفع صوت النقر من السماعة كما في شكل (١٣.١٥). (في شكل (١٣.١٥)، $p(t)$ تمثل الضغط الصوتي كدالة في الزمن).

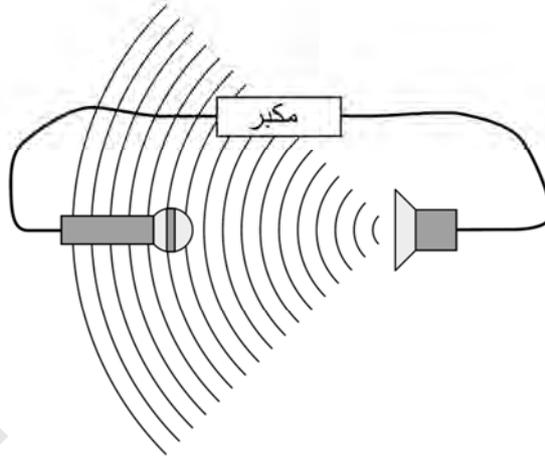
مع زيادة مقدار دالة عبور الحلقة T عن طريق زيادة معامل التكبير، فإنه مع النقر على الميكروفون نلاحظ تغيراً تدريجياً، ليس فقط في درجة الصوت، ولكن أيضاً في طبيعة الصوت الصادر من السماعة. إننا لانسمع فقط صوت النقر ولكننا نسمع أيضاً ما يسمى بالصدى، أو تعدد صدى النقر. هذا الصدى المتعدد يكون سببه صوت النقر الذي يأتي من السماعة للميكروفون، حيث يتم تكبيره ليذهب للسماعة مرة أخرى، ثم يرجع للميكروفون مرة ثانية وهكذا العديد من المرات. مع زيادة معامل التكبير تتضح هذه الظاهرة أكثر وأكثر، وعند قيمة معينة للتكبير

يبدأ سماع صفارة عالية ومستمرة بدون النقر على الميكروفون وبدون أي مصدر آخر للصوت عند الميكروفون، حتى تقلل معامل التكبير مرة أخرى.

عند مستوى معين لمعامل تكبير المكبر، فإن أي إشارة تأتي من الميكروفون، مهما كانت ضعيفة، يتم تكبيرها، ثم تغذيها للسماعة، ثم تعود مرة ثانية للميكروفون فتكون بمثابة إشارة دخل جديدة، تكون لها الشدة نفسها مثل الإشارة الأصلية. عند هذا التكبير، فإن الإشارة لن تموت أبداً، بل إنها ستظل تدور. إذا تم زيادة معامل التكبير قليلاً، فإن الإشارة ستتم مع كل دورة من الميكروفون للسماعة والعكس. إذا كان هذا النظام خطي حقاً، فإن الإشارة ستزداد بدون حدود. ولكن لا يوجد نظام صوتي حقيقي خطي، وعند مستوى معين، فإن المكبر سيدفع السماعات بقوة بقدر الإمكان حتى يصل الصوت إلى مستوى معين لا يرتفع عنه.



شكل رقم (١٣.١٥) صوت من نظام صوتي عام نتيجة النقر على الميكروفون عند ثلاث قيم مختلفة لدالة عبور الحلقة للنظام.



شكل رقم (١٣.١٦) نظام صوتي عام

من الطبيعي أن نتعجب كيف تبدأ هذه العملية بدون أي دخل صوتي للميكروفون. أولاً، من الناحية العملية من غير الممكن أن نعتقد أنه لا توجد أصوات محيطية على الإطلاق تدخل إلى الميكروفون. ثانياً، حتى لو كان ذلك ممكناً فإن المكبر تكون به ضوضاء ضمنية تسبب إشارة صوتية من السماعات تكون كافية لبدء حلقة التغذية العكسية. الآن سننتقل بالتجربة السابقة إلى مرحلة أخرى. سنترك معامل التكبير عالياً بدرجة كافية تتسبب في وجود الصفارة ونتحرك بالسماعة بعيداً أكثر من الميكروفون. مع تحريك السماعة بعيداً عن الميكروفون، فإن نغمة الصوت الناتج تتغير، وعند مسافة معينة ستتوقف الصفارة. إن نغمة الصوت تتغير نتيجة أن تردد الصفارة يعتمد على الزمن الذي يأخذه الصوت من السماعة إلى الميكروفون. أيضاً فإن الصفارة ستتوقف عند مسافة معينة؛ لأن شدة الصوت من السماعة تتناقص مع إبعادها عن الميكروفون، وبالتالي فإن الإشارة الراجعة نتيجة التغذية العكسية تكون أقل من الإشارة الأساسية، وبالتالي فإن قدرة الإشارة تبدأ في التلاشي بدلاً من الزيادة.

الآن سنضع نموذجاً رياضياً للنظام الصوتي العام السابق باستخدام الأدوات التي تعلمناها وسنرى تماماً كيف يحدث عدم الاستقرار نتيجة التغذية العكسية كما في شكل (١٣.١٦). لكي نحافظ على النموذج بسيطاً، وتوضيحاً في الوقت نفسه، سنفترض أن دوال العبور للميكروفون، والمكبر، والسماعة كلها مقادير ثابتة وهي K_m ، و K_A ، و K_S . وسنفترض أن انتشار الصوت من السماعة للميكروفون سيكون تأخيراً زمنياً بسيطاً مع معامل تكبير يتناسب عكسياً مع مربع المسافة d من السماعة للميكروفون كما يلي:

المعادلة رقم (١٣.٢)

$$p_m(t) = K \frac{p_s(t - \frac{d}{v})}{d^2}$$

حيث $P_s(t)$ هي ضغط الصوت من السماعة، و $p_m(t)$ هي الصوت الواصل إلى الميكروفون، و v هي سرعة الصوت في الهواء و K ثابت. بإجراء تحويل لابلاس على طرفي المعادلة (١٣.٢):

$$p_m(s) = \frac{K}{d^2} P_s(s) e^{-ds/v}$$

بالتالي يمكننا أن نفترض نموذج النظام الصوتي العام كنظام تغذية مرتدة له دالة العبور الأمامية التالية:

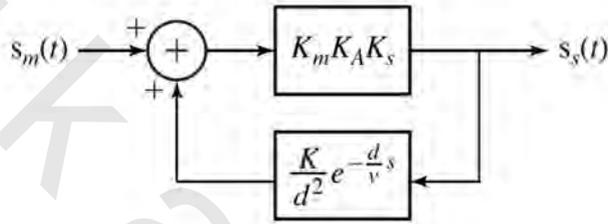
$$H_1(s) = K_m K_A K_S$$

ودالة عبور مسار التغذية العكسية ستكون كما يلي وكما في شكل (١٣.١٧):

$$H_2(s) = \frac{K}{d^2} e^{-ds/v}$$

دالة العبور الكلية للنظام ستكون كما يلي:

$$H_1(s) = \frac{K_m K_A K_S}{1 - \frac{K_m K_A K_S K}{d^2} e^{-ds/v}}$$



شكل رقم (١٣.١٧) مخطط صندوق للنظام الصوتي العام.

الأقطاب p لدالة العبور لهذا النظام تقع عند أصفار المعادلة التالية:

$$1 - (K_m K_A K_S K / d^2) e^{-dp/v}$$

بمكنا أن نحل هذه المعادلة كما يلي:

$$1 - \frac{K_m K_A K_S K}{d^2} e^{-dp/v} = 0$$

أو:

$$e^{-dp/v} = \frac{d^2}{K_m K_A K_S K}$$

أي قيمة p تحل هذه المعادلة ستعتبر موضعاً لقطب. إذا أخذنا لوغاريتم طرفي المعادلة السابقة ونحل المعادلة

لإيجاد قيمة p سنحصل على:

$$p = -\frac{v}{d} \ln\left(\frac{d^2}{K_m K_A K_S K}\right)$$

وبالتالي فإن ذلك يعتبر حلاً للمعادلة (١٣.٣)، ولكنه ليس الحل الوحيد. إنه فقط الحل ذو القيم الحقيقية.

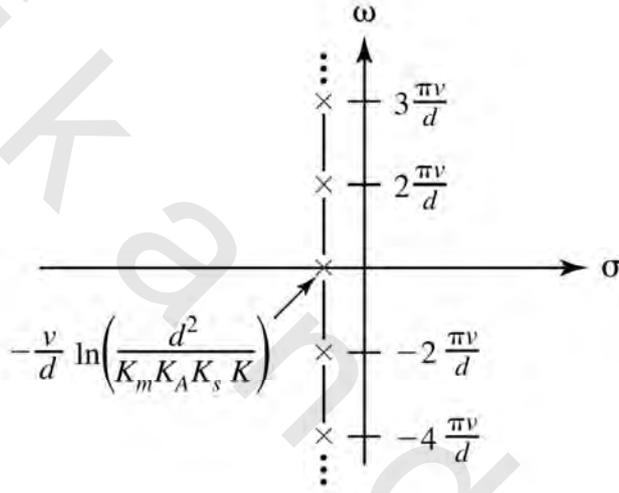
إذا أضفنا أي مضاعف صحيح للكمية $j2\pi v/d$ على p سنحصل على حل آخر؛ لأن:

$$e^{-d(p+j2\pi v/d)/v} = e^{-dp/v} \underbrace{e^{-j2\pi}}_1 = e^{-dp/v}$$

حيث n هي أي رقم صحيح. إن ذلك يعني أن هناك عدداً من الأقطاب غير محدود، وكلها لها الجزء الحقيقي التالي نفسه كما في شكل (١٣.١٨):

$$-\frac{v}{d} \ln \left(\frac{d^2}{K_m K_A K_S K} \right)$$

إن هذا النظام يختلف قليلاً من الأنظمة التي قمنا بتحليلها؛ لأن هذا النظام له العديد من الأقطاب غير المحدودة، واحد لكل قيمة لـ n . ولكن هذا لا يمثل مشكلة في هذا التحليل؛ لأننا نحاول فقط الوصول إلى الشروط التي عندها سيكون النظام مستقرًا. كما رأينا مسبقاً، فإن الاستقرار يتطلب أن تكون كل الأقطاب واقعة في النصف الأيسر المفتوح من المستوى s . وهذا يعني ما يلي:



شكل رقم (١٣.١٨) مخطط الأقطاب والأصفار للنظام الصوتي المفتوح

$$-\frac{v}{d} \ln \left(\frac{d^2}{K_m K_A K_S K} \right) < 0$$

أو:

$$\ln \left(\frac{d^2}{K_m K_A K_S K} \right) > 0$$

المعادلة رقم (١٣.٤)

$$\frac{K_m K_A K_S K}{d^2} < 1$$

نصاً، فإن حاصل ضرب مقادير كل دوال العبور حول حلقة التغذية العكسية يجب أن تكون أقل من الواحد. إن ذلك يكون طبيعياً جداً لأنه إذا كان حاصل الضرب لكل هذه المقادير يزيد على الواحد، فإن ذلك يعني أنه عندما تقوم الإشارة بدورة كاملة خلال حلقة التغذية العكسية، فإنها ستزيد باستمرار وبدون حدود. ولذلك فعندما نقلل معامل تكبير المكبر K_A لوقف الصفارة الحادثة بسبب التغذية العكسية، فإننا في الحقيقة نحقق المعادلة (١٣.٤).

افترض أننا رفعنا من مقدار دالة عبور الحلقة $K_m K_A K_S K/d^2$ عن طريق زيادة معامل تكبير المكبر K_A ، في هذه الحالة ستتحرك الأقطاب ناحية اليمين، بالتوازي مع المحور σ الحقيقي للمستوى s ، وعند قيمة معينة لهذا التكبير، ستصل الأقطاب إلى المحور w . الآن افترض أننا بدلاً من ذلك رفعنا من مقدار دالة عبور الحلقة عن طريق تحريك الميكروفون والسماعة ليكونا بالقرب من بعضهما بعضاً. إن ذلك سيحرك الأقطاب ناحية اليمين ولكن أيضاً مع الابتعاد عن المحور σ بحيث عندما نصل إلى الاستقرار الهامشي فإن الأقطاب كلها ستكون عند تردد زاوي عالي.

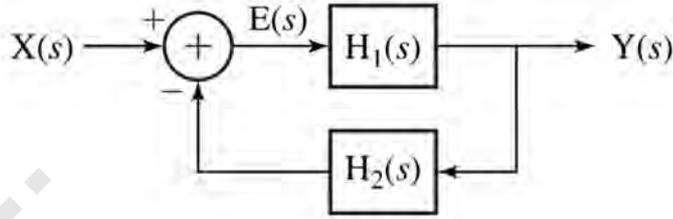
أي نظام يتوافق مع هذا النموذج من الممكن أن يدخل في حالة رنينية عند العديد من الترددات في الوقت نفسه، ولكن في الحقيقة فإن ذلك نادر الحدوث. إن النظام الصوتي العام المكون من ميكروفون، ومكبر، وسماعة من الممكن أن يكون له دوال عبور تكون دالة في التردد ومن الممكن أن تغير من مواضع الأقطاب بحيث أن يكون زوج واحد فقط من الأقطاب هو الواقع على المحور w عند الاستقرار الهامشي. إذا ارتفع معامل التكبير أكثر من معامل التكبير عند الاستقرار الهامشي فإن النظام سيندفع في حالة عدم خطية من التشغيل وتصبح الطرق الخطية لتحليل الأنظمة فاشلة في التوقع الدقيق لكيفية تصرف هذه الأنظمة. ولكن الطرق الخطية للأنظمة ستوقع بدقة بأنها ستكون في حالة رنين وهذا في حد ذاته مهم جداً.

الذبذبات المستقرة باستخدام التغذية العكسية

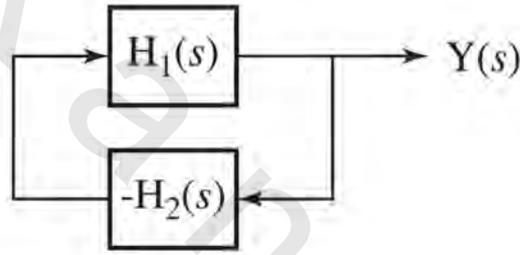
لقد كان الذبذبات في النظام الصوتي العام في الجزء السابق استجابة غير مرغوبة للنظام، ولكن بعض الأنظمة يتم تصميمها لكي تكون رنينية أو متذبذبة. من أمثلة ذلك مولدات الدوال العملية، ساعة الحاسب، المذبذبات المحلية في أجهزة استقبال الراديو، بللورات الكوارتز في ساعات اليد، البندول في بعض ساعات الحائط، وهكذا. يتم تصميم بعض الأنظمة لتذبذب في حالة غير خطية يتردد فيها النظام بين اثنين أو أكثر من الحالات غير المستقرة وإشارات الخرج لهذه الأنظمة ليست بالضرورة أن تكون جيبة، وساعة الحاسب تعتبر مثلاً جيداً على ذلك. ولكن بعض الأنظمة يتم تصميمها كأنظمة LTI تعمل في حالة الاستقرار الهامشي وتعطي تذبذبات جيبة حقيقية. حيث أن الاستقرار الهامشي يتطلب أن تكون أقطاب النظام على المحور w في المستوى s ، فإن هذه الحالة من التشغيل تكون غاية في الصرامة. إن أي تحرك ولو كان قليلاً لأقطاب النظام نتيجة أي تغير في أي واحد من المعاملات سيتسبب في أن هذه الذبذبات إما أن تتزايد أو تتناقص مع الزمن. ولذلك فإن الأنظمة التي تعمل في هذه الحالة يجب أن تكون بها آلية للحفاظ على هذه الأقطاب على المحور w .

النموذج المبني لمخطط التغذية العكسية في شكل (١٣.١٩) له إثارة واستجابة. إن النظام المصمم ليتذبذب لا يكون له دخل ظاهري، بمعنى $X(s)=0$ كما في شكل (١٣.٢٠). (لقد تم تغيير الإشارة في $H_2(s)$ لجعل النظام في شكل (١٣.٢٠) يكون مثل النظام في شكل (١٣.١٩) مع $X(s)=0$). كيف سنحصل على استجابة أو خرج إذا لم

يكن هناك إثارة أو دخل ؟ الإجابة السريعة على ذلك هي لا يمكن. على الرغم من ذلك ، فإنه من المهم أن نفهم أن كل نظام يكون له إثارة دائمة ، سواء رضينا بذلك أم لم نرض. كل نظام يكون له عملية ضوضاء عشوائية تتسبب في تأرجح أو تقلب في الإشارة ، والنظام يستجيب لهذه التأرجحات الضوضائية كما لو كانت إشارة دخل متعمدة.



شكل رقم (١٣.١٩) نموذج أولي لنظام تغذية مرتدة



شكل رقم (١٣.٢٠) نظام مذبذب بالتغذية المرتدة

المفتاح للحصول على تذبذبات مستقرة هو الحصول على دالة عبور تكون أقطابها على المحور ω على

الصورة التالية :

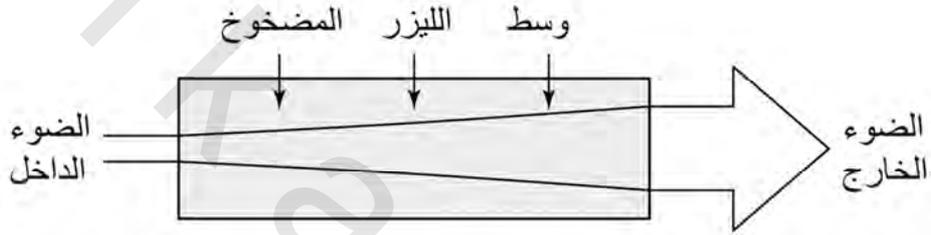
$$H(s) = \frac{A}{s^2 + \omega_0^2}$$

بالتالي سيكون معامل التكبير عند التردد الزاوي $\omega_0(s = \pm j\omega_0)$ لا نهائي ، مما يعني أن الاستجابة تكون كبيرة جداً عن الإثارة. إن ذلك قد يعني أن الإثارة المحددة تنتج استجابة غير محدودة ، أو أن إثارة صفرية تنتج استجابة محدودة. لذلك فإن أي نظام تكون أقطابه على المحور ω يمكنها أن تعطي استجابة غير صفرية وبدون إثارة.

أحد الأمثلة المهمة لنظام مصمم ليتذبذب في الحالة الهامشية المستقرة هي الليزر. إن اللفظ LASER يعني التضخيم الضوئي عن طريق الانبعاث المثار light amplification by stimulated emission of radiation. الليزر ليست في الحقيقة مكبراً ضوئياً (على الرغم من حدوث التكبير الضوئي داخلياً) ، إنها مذبذب ضوئي.

على الرغم من أن الليزر هو مذبذب، فإن التكبير الضوئي يكون عملية ضمنية في تشغيلها. الليزر يكون مملوءاً بوسط يتم ضخه عن طريق مصدر طاقة بحيث ينتشر الضوء الذي له الطول الموجي المناسب عبر الوسط متأثراً بزيادة في طاقته أثناء انتشاره كما في شكل (١٣.٢١).

الجهاز الموضح في شكل (١٣.٢١) عبارة عن مرور - أحادي، أو مضخم ضوئي للموجة العابرة، وليس الليزر. إن التذبذب الضوئي في الليزر يحدث عن طريق وضع مرابا في المكبر الضوئي ذي الموجة العابر أحادية المرور على كل نهاية بحيث تقوم بعكس بعض أو كل الضوء الساقط عليها. عند كل مرآة يتم عكس بعض أو كل الضوء في وسط الليزر للتكبير مرة أخرى كما في شكل (١٣.٢٢).



شكل رقم (١٣.٢١) مكبر ضوئي لموجة عابرة ذات المرور الواحد



شكل رقم (١٣.٢٢) الليزر

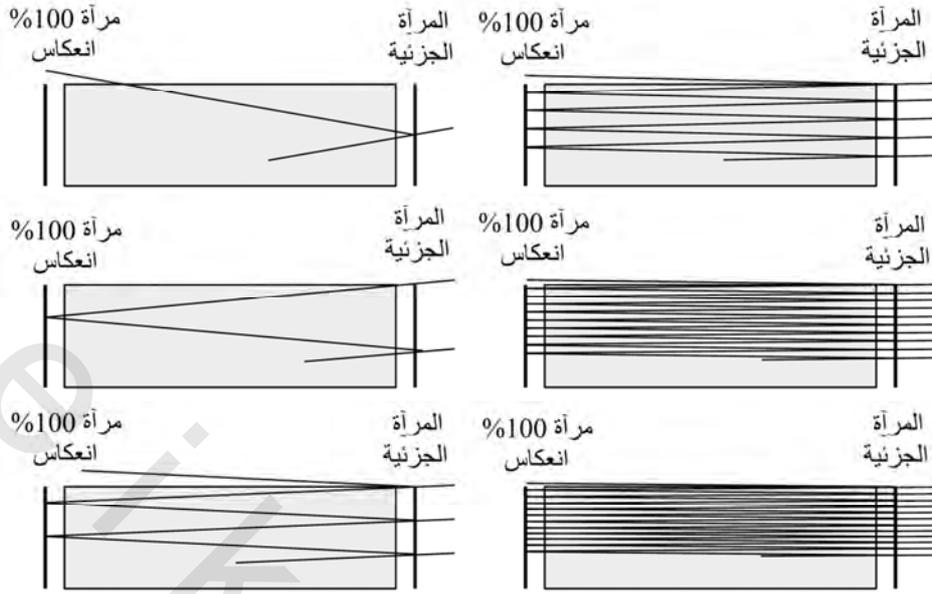
قد يكون من الممكن أساساً أن ندخل الضوء عند إحدى النهايات لهذا الجهاز من خلال مرآة جزئية وتكبيره. مثل هذا الجهاز يسمى مضخم ضوء الموجة العابرة المتجددة. من الشائع جداً أن يتم وضع المرآة عند إحدى النهايات بحيث تعكس بقدر الإمكان، وفعالياً تعكس كل الضوء الساقط عليها، وجعل المرآة عند الطرف الآخر مرآة عاكسة جزئياً، تعكس بعض الضوء الساقط عليها وتسمح بمرور الباقي.

يعمل الليزر بدون أي مصدر ضوئي خارجي كدخل. الضوء المنبعث يبدأ في وسط الليزر المضخوخ نفسه. هناك ظاهرة تسمى الانبعاث العفوي أو التلقائي تتسبب في انبعاث الضوء عند أزمنة عشوائية وفي اتجاهات عشوائية

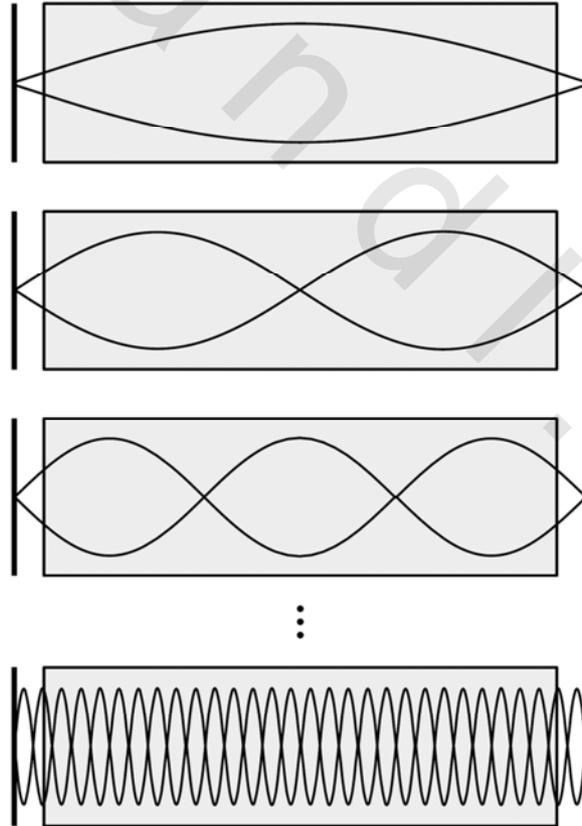
في وسط الليزر. أي ضوء من هذا ينتشر عمودياً على المرايا يتم تكبيره وهو في طريقه إلى المرآة، ثم ينعكس ويتم تكبيره مرة أخرى مع تأرجحه بين المرايا. كلما كان الانتشار عمودياً على المرايا، فإنه سيتأرجح أكثر وأكثر ويتم تكبيره أكبر وأكبر بالمرور المتعدد في الوسط الليزري بين المرايا. في حالة الاستقرار، يكون الضوء العمودي على المرايا له الطاقة الأكبر في كل الضوء المنتشر داخل حجرة الليزر؛ لأنه يكون له ميزة معامل التكبير الأكبر. إحدي المرايا تكون مرآة جزئية بحيث تبعث بعض الضوء مع انعكاسة من هذه المرآة، وهذا يمثل الشعاع الضوئي الخارج من حجرة الليزر كما في شكل (١٣.٢٣).

لكي تكون هذه الذبذبات الضوئية مستمرة، فإن دالة عبور الحلقة للنظام يجب أن تكون حقيقية وتساوي -1 مع افتراض إشارة التغذية العكسية في نظام النموذج الأولي للتغذية العكسية كما في شكل (١٣.١٩) أو يجب أن تكون رقماً حقيقياً يساوي +1 مع افتراض نظام الذبذبة كما في شكل (١٣.٢٠). مع أي واحد من هذين الافتراضيين، وللحصول على ذبذبة مستقرة، فإن الضوء ومع انتقاله من نقطة البداية إلى أحد المرايا ثم الانعكاس للمرآة الأخرى ثم العودة لنقطة البداية، يجب أن يكون مقدار معامل تكبيره يساوي وإحدى الإزاحة الطورية تكون عدد صحيح من ال 2π . إن ذلك يعني ببساطة أن الطول الموجي للضوء يجب أن يتناسب مع طول حجرة الليزر بعدد صحيح تماماً من الموجات في مساري الذهاب والعودة.

من المهم هنا أن نفهم أن الطول الموجي للضوء في الليزر يجب أن يكون في المدى من 100nm حتى العديد من الميكرونات (الفوق بنفسجي حت تحت الحمراء)، والطول المثالي لحجرة الليزر يكون في المدى من 100µm بالنسبة لدايود الليزر إلى أكثر من المتر في بعض الأحوال. ولذلك، مع انتشار الضوء بين المرايا، فإن الإزاحة الطورية المصاحبة قد تكون أكثر من مليون راديان، حتى في أقصر الحجرات الليزرية، فإن الإزاحة الطورية تكون عدداً صحيحاً كبيراً من ال 2π راديان. لذلك ففي الليزر يكون الطول الموجي للتذبذبات محدد بواحد من الأطوال الموجية المرئية التي يجب أن تتناسب مع طول مسار رحلة الذهاب والعودة بعدد صحيح من الموجات. هناك العديد من الأطوال الموجية اللانهائية التي تحقق هذا الشرط، وهي الموجات المتناسبة مع مسار رحلة الذهاب والعودة تماماً زائد كل توافقاتها كما في شكل (١٣.٢٤).

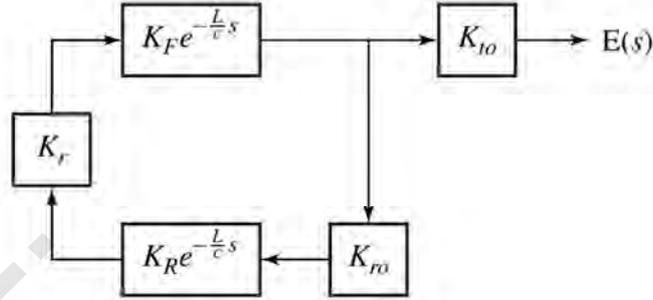


شكل رقم (١٣.٢٣) العديد من الانعكاسات الضوئية عند زوايا ابتدائية مختلفة.



شكل رقم (١٣.٢٤) توضيحات للطول الموجي المناسب مع حجرة الليزر عدد صحيح من المرات.

على الرغم من أن كل هذه الأطوال الموجية من الممكن أن تتذبذب نظرياً، إلا أن هناك آليات أخرى (الرنين الذري أو الجزيئي، المرايا المتتقية للأطوال الموجية، وهكذا) يمكن أن تحد من التذبذبات الحقيقية إلى رقم صغير من هذه الأطوال الموجية التي يكون لها تكبير كافٍ للتذبذب.



شكل رقم (١٣.٢٥) مخطط صندوق الليزر.

يمكن نمذجة الليزر بمخطط صندوقي له مسار أمامي وآخر عكسي كما في شكل (١٣.٢٥). الثوابت K_F و K_R تمثل مقدار معامل التكبير الناتج بالمجال الكهربائي للضوء مع انتشارها من إحدى المرايا للمراة الأخرى من خلال المسارين الأمامي والعكسي على التوالي. المعاملات $e^{-(L/c)s}$ تأخذ في الحسبان الإزاحة الطورية نتيجة زمن الانتشار حيث L هي المسافة بين المرايا و c هي سرعة الضوء في حجرة الليزر. الثابت K_{t0} هو معامل انتشار المجال الكهربائي للضوء الخارج من حجرة الليزر من خلال مرآة الخرج الجزيئية والثابت K_{r0} هو معامل انعكاس المجال الكهربائي للضوء المنعكس عند خرج المرآة الجزيئية منعكساً في اتجاه حجرة الليزر. الثابت K_r هو معامل انعكاس المجال الكهربائي للضوء المنعكس من المرآة العاكسة 100% للرجوع مرة أخرى لحجرة الليزر. الثوابت K_{t0} ، K_{r0} ، و K_r تكون كلها في العادة ثوابت مركبة مما يبين أنه سيكون هناك إزاحة طورية للمجال الكهربائي أثناء الانعكاس والانتشار. دالة عبور الحلقة ستكون (باستخدام التعريف الناتج اعتماداً على العرف الموجود في شكل (١٣.١٩)):

$$T(s) = K_F K_{r0} K_R K_r e^{-(2L/c)s}$$

قيمته تكون 1- عندما:

$$|K_F K_{r0} K_R K_r| = 1$$

و:

$$e^{-(2L/c)s} = 1$$

أو بالتكافؤ:

$$s = -j2\pi n \left(\frac{c}{2L} \right) = -j \frac{\pi c}{L} n, \quad n \text{ رقم صحيح}$$

حيث أن الكمية $c/2L$ هي زمن السفر ذهاباً وعودة لموجة الضوء المنتشر. إنها قيم s على المحور ω عند توافقات التردد الزاوي $\pi c/L$. حيث إن هذه هي التردد الأساسي، فإنها تكون أيضاً التباعد بين الترددات، التي تعرف عادة بأنها تباعد الحالة المحورية $\Delta\omega_{ax}$.

عند بداية تشغيل الليزر، فإنه يتم ضخ الوسط ويبدأ أي شعاع ضوئي في الانبعاث التلقائي. إنه يبدأ في التنامي لأنه، في البداية، يكون تكبير مسار الذهاب والعودة أكبر من الواحد ($|K_F K_{F0} K_R K_{R0}| > 1$). ولكن مع نموها، فإنها تسحب طاقة من وسط الضخ، وهذا يقلل التكبير K_F و K_R . يتم الوصول إلى حالة اتزان عندما تكون شدة الشعاع تساوي تماماً المقدار المناسب الذي يحافظ على مقدار دالة عبور الحلقة، $|K_F K_{F0} K_R K_{R0}|$ ، يساوي واحداً تماماً. إن آلية الضخ وآلية التكبير في الليزر كليهما يكون عملية تحديد ذاتي تعمل على استقرار مقدار دالة عبور الحلقة. وبالتالي، طالما يكون هناك طاقة ضخ كافية وانعكاس كافي للمرآيا لتحقيق مقدار دالة عبور الحلقة الذي يساوي واحداً عند بعض الطاقة المنخفضة جداً، فإن الليزر سيتذبذب باستقرار.

طريقة المواضع الجذرية

أحد الطرق الشائعة في تحليل أنظمة التغذية العكسية هي الأنظمة التي يكون فيها معامل تكبير المسار الأمامي $H_1(s)$ يحتوي ثابت تكبير K يمكن ضبطه كالتالي:

$$H_1(s) = K \frac{p_1(s)}{q_1(s)}$$

هذا المعامل القابل للضبط K (من المعروف أنه لا يكون سالبا) يكون له تأثير قوي على ديناميكية النظام.

دالة عبور النظام الكلية ستكون كما يلي:

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

ودالة عبور الحلقة ستكون:

$$T(s) = H_1(s)H_2(s)$$

أقطاب $H(s)$ هي أصفار ال $1 + T(s)$. يمكن كتابة دالة عبور الحلقة على الصورة K مضروبة في البسط

ومقسومة على المقام:

المعادلة رقم (١٣.٥)

$$T(s) = K \frac{p_1(s) p_2(s)}{q_1(s) q_2(s)} = K \frac{P(s)}{Q(s)}$$

وبالتالي فإن أقطاب $H(s)$ ستكون عندما:

$$1 + K \frac{P(s)}{Q(s)} = 0$$

والتي يمكن التعبير عنها في صورتين تبادليتين كما يلي:

لمعادلة رقم (١٣.٦)

$$Q(s) + KP(s) = 0$$

و:

المعادلة رقم (١٣.٧)

$$\frac{Q(s)}{K} + P(s) = 0$$

من المعادلة (١٣.٥)، نرى أنه إذا كانت $T(s)$ كسراً حقيقياً $Q(s)$ لها درجة أعلى من $P(s)$ ، فإن أصفار $Q(s)$ تكون كل أقطاب $T(s)$ وأصفار $P(s)$ تكون كلها أصفار محددة ل $T(s)$ ، ولكن حيث إن درجة $P(s)$ أقل من درجة $Q(s)$ سيكون هناك أيضاً أصفاراً ل $T(s)$ عند الما لانهاية.

المدى الكامل والممكن لضبط K يكون من الصفر إلى الما لانهاية. سنفترض أولاً أن K تقترب من الصفر، عند هذا الحد، من (١٣.٦)، ستكون أصفار $1+T(s)$ ، والتي تمثل أقطاب $H(s)$ ، ستكون أصفاراً ل $Q(s)$ وستكون أصفار $H(s)$ بالتالي أقطاباً ل $T(s)$ لأن $T(s)=KP(s)/Q(s)$. الآن نفترض الحالة العكسية، وهي عندما تقترب K من الما لانهاية. عند هذا الحد، من المعادلة (١٣.٧)، ستكون أصفار $1+T(s)$ أصفاراً ل $P(s)$ وأقطاب $H(s)$ هي أصفار $T(s)$ (بما في ذلك أي أصفار عند الما لانهاية). وبالتالي فإن أقطاب دالة عبور الحلقة وأصفارها تكون مهمة جداً في تحليل أنظمة التغذية العكسية.

مع تحرك معامل التكبير K من الصفر إلى الما لانهاية، فإن أقطاب نظام التغذية العكسية تتحرك من أقطاب لدالة عبور الحلقة إلى أصفار لدالة عبور الحلقة (التي قد يكون بعضها عند الما لانهاية). رسم الموضع الجذري هو رسم لمواضع أقطاب نظام التغذية العكسية مع تغير معامل التكبير K من الصفر إلى الما لانهاية. إن الاسم "الموضع الجذري" يأتي من تغير مواضع جذور ال $1+T(s)$ مع تغير معامل التكبير K .

سنفحص مثالين مبسطين على طريقة الموضع الجذري وبعد ذلك نضع بعض القوانين العامة لرسم الموضع الجذري لأي نظام. سنفترض أولاً نظاماً تكون له دالة عبور المسار الأمامي كما يلي:

$$H_1(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$$

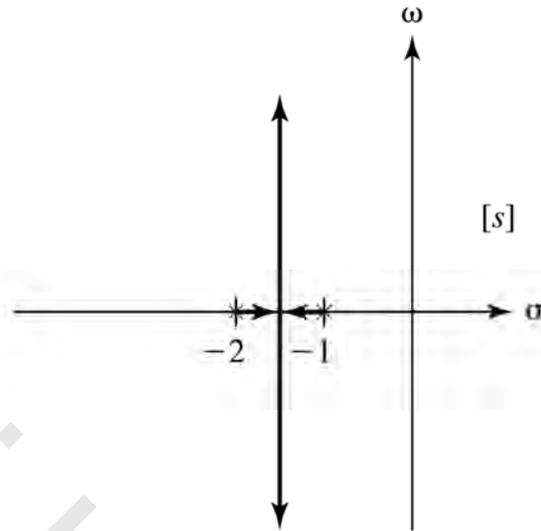
والتي يكون لها معامل تكبير المسار العكسي $H_2(s)=1$. وبالتالي فإن:

$$T(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$$

ويبدأ رسم الموضع الجذري عند $s=-1$ و $s=-2$ ، التي تمثل موضع أقطاب $T(s)$. كل أصفار $T(s)$ تكون عند الما لانهاية وهذه هي الأصفار التي يقترب منها الموضع الجذري مع زيادة معامل التكبير K كما في شكل (١٣.٢٦). جذور ال $1+T(s)$ هي جذور المعادلة التالية:

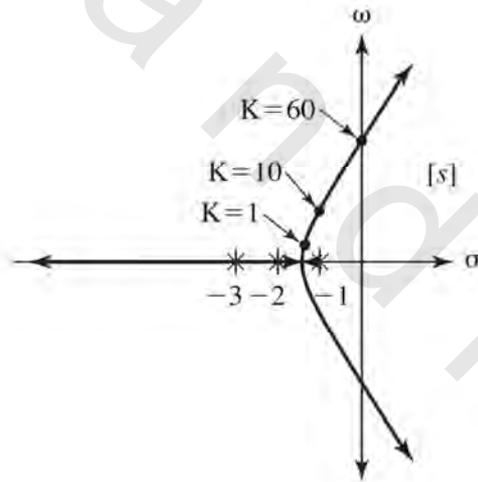
$$(s+1)(s+2) + K = s^2 + 3s + 2 + K = 0$$

وباستخدام المعادلة التربيعية ستكون الجذور عند $(-3 \pm \sqrt{1-4K})/2$. عندما $K=0$ سنحصل على الجذور عند $s=-1$ و $s=-2$ ، وهي أقطاب ال $T(s)$. عندما $K=1/4$ سنحصل على قطب متكرر عند $-3/2$. عندما $K>1/4$ سنحصل على جذور مركبة مترافقة تذهب فيها الأجزاء التخيلية إلى زائد وناقص ما لانهاية مع زيادة K ولكن أجزاءها الحقيقية تظل عند $-3/2$. حيث إن هذا الموضع الجذري يمتد إلى الما لانهاية في البعد التخيلي مع جزء حقيقي يضع الجذور دائماً في النصف الأيسر من المستوى s ، بالتالي فهذا النظام يكون مستقراً لأي قيمة للثابت K .



شكل رقم (١٣.٢٦) المحل الجذري للمعادلة:

$$1 + T(s) = 1 + \frac{K}{(s+1)(s+2)}$$



شكل رقم (١٣.٢٧) الموضع الجذري للمعادلة:

$$1 + T(s) = 1 + \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

الآن بإضافة قطب في المسار الأمامي لدالة العبور لنجعلها على الصورة:

$$H_1(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

الموضع الجذري الجديد سيكون هو موضع حلول المعادلة التالية كما هو موضح في شكل (١٣.٢٧).

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + K = 0$$

عند أو فوق قيمة K التي عندها سيعبر فرعاً الموضع الجذري المحور w ، سيكون هذا النظام غير مستقر. وعلى ذلك فهذا النظام، الذي هو نظام حلقة مفتوحة مستقرة، يمكن أن تكون غير مستقرة باستخدام التغذية العكسية. ستكون الأقطاب عند جذور المعادلة التالية:

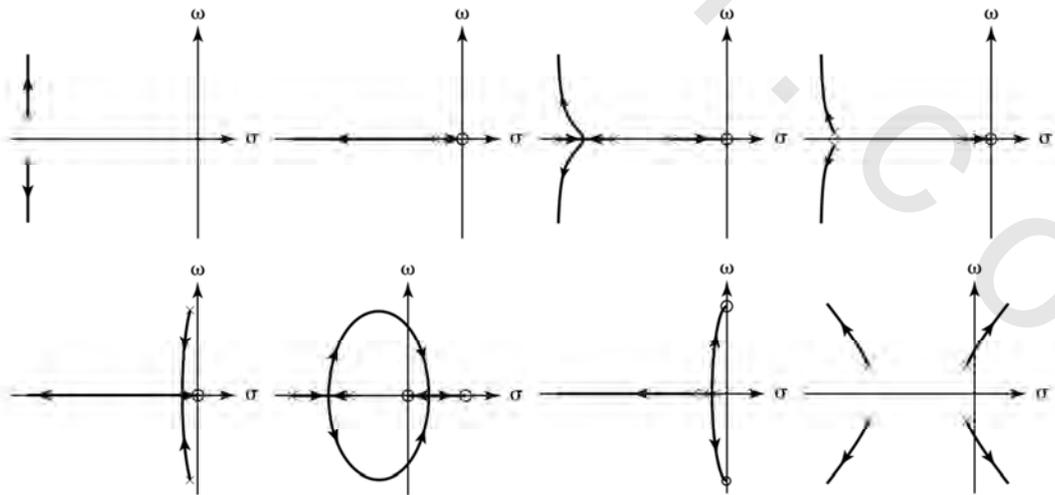
$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + K = 0$$

من الممكن أن نجد حل عام للمعادلة المكعبة من هذا الشكل، ولكنها تكون مملة. من السهل جداً أن نولد العديد من قيم K والحل لإيجاد الجذور العددية لإيجاد قيمة K التي تتسبب في تحريك أقطاب $H(s)$ إلى النصف الأيمن من المستوى s .

يمكننا أن نرى أن القيمة $K=60$ في شكل (١٣.٢٨) ستضع القطبين على المحور w تماماً. وعلى ذلك فأي قيمة لـ K أكبر من أو تساوي 60 ستجعل هذا النظام ذا التغذية العكسية غير مستقر.

K	→ الجذور		
0	-3	-2	-1
0.25	-3.11	-1.73	-1.16
0.5	-3.19	$-1.4 + j0.25$	$-1.4 - j0.25$
1	-3.32	$-1.34 + j0.56$	$-1.34 - j0.56$
2	-3.52	$-1.24 + j0.86$	$-1.24 - j0.86$
10	-4.31	$-0.85 + j1.73$	$-0.85 - j1.73$
30	-5.21	$-0.39 + j2.60$	$-0.39 - j2.60$
60	-6.00	$0.00 + j3.32$	$0.00 - j3.32$
100	-6.71	$0.36 + j3.96$	$0.36 - j3.96$

شكل رقم (١٣.٢٨) جذور المعادلة $s^3 + 6s^2 + 11s + K = 0$ للعديد من قيم K .



شكل رقم (١٣.٢٩) مثال على مخططات الموضع الجذري

شكل (١٣.٢٩) توضح بعض مخططات الموضع الجذري لأعداد مختلفة ومواضع مختلفة للأقطاب والأصفار لـ $T(s)$. هناك العديد من القوانين لرسم مخططات الموضع الجذري. هذه القوانين تأتي من القوانين الجبرية عن طريق قوانين استنتاجها الرياضيون عن مواضع جذور معادلات كثيرة الحدود.

١- عدد الأفرع في الموضع الجذري يكون هو الدرجة الأعلى لكثيرة الحدود في البسط وكثيرة الحدود في المقام لـ $T(s)$.

٢- كل فرع في الموضع الجذري يبدأ من قطب لـ $T(s)$ وينتهي عند صفر في الـ $T(s)$.

٣- أي منطقة على المحور الحقيقي يكون عندها مجموع عدد الأقطاب الحقيقية و/أو الأصفار الحقيقية التي تقع على يمين هذه المنطقة على المحور الحقيقي فردياً، تكون جزءاً من الموضع الجذري، وكل المناطق الأخرى على المحور الحقيقي لا تكون جزءاً من الموضع الجذري. المناطق التي تكون جزءاً من الموضع الجذري تسمى المناطق "المسموح لها".

٤- الموضع الجذري يكون متماثلاً حول المحور الجذري.

٥- عدد الأقطاب المحددة لـ $T(s)$ لو زاد عن عدد الأصفار المحددة لها برقم صحيح m ، وبالتالي فإن m من الفروع للموضع الجذري تنتهي عند أصفار لـ $T(s)$ تقع عند الما لانهاية. كل واحد من هذه الخطوط يقترب من خط مستقيم من خطوط التقارب وزوايا هذه الخطوط التقاربية تكون $(2k+1)\pi/m$ حيث $k=0, 1, \dots, m-1$ بالنسبة للمحور الحقيقي الموجب. هذه الخطوط التقاربية تتقاطع مع بعضها بعضاً على المحور الحقيقي عند الموضع،

$$\sigma = \frac{1}{m} (\sum \text{finite poles} - \sum \text{finite zeros})$$

وهذا الموضع يسمى مركز الموضع الجذري. (إنها تساوي مجموع كل الأقطاب المحددة وكل الأصفار المحددة، وليس فقط التي تقع على المحور الحقيقي).

٦- نقاط الافتراق؛ أو نقاط الالتقاء التي تتقاطع عندها أفرع الموضع الجذري تحدث عند:

$$\frac{d}{ds} = \left(\frac{1}{T(s)} \right) = 0$$

مثال ١٣.٢

الموضع الجذري ١

ارسم الموضع الجذري للنظام الذي له دالة عبور الحلقة كما يلي:

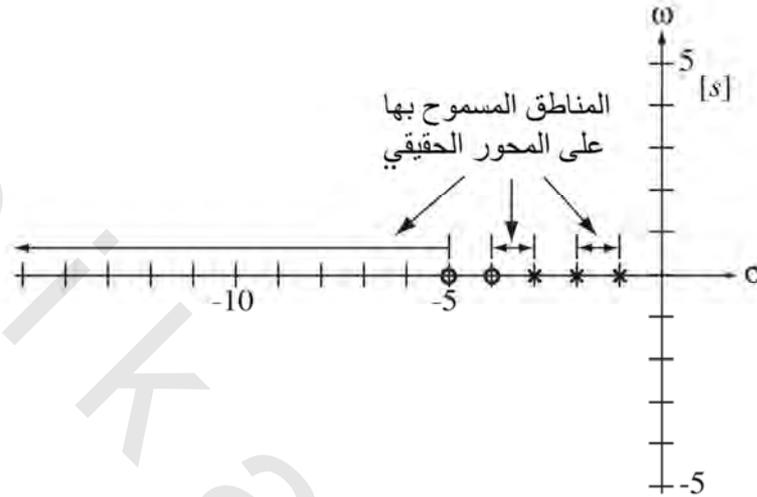
$$T(s) = \frac{(s+4)(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

خطوات التفكير في معرفة أين تتفرع فروع الموضع الجذري ستكون كما يلي:

١- الدالة $T(s)$ لها أقطاب عند $\sigma=-1$ ، و $\sigma=-2$ ، و $\sigma=-3$ ، وأصفار عند $\sigma=-4$ ، و $\sigma=-5$ ، و $\sigma \rightarrow \infty$.

٢- عدد أفرع الموضع الجذري سيكون ٣ (القانون ١).

٣- المناطق المسموح بها على المحور الحقيقي ستكون $-2 < \sigma < -1$ ، و $-4 < \sigma < -3$ ، و $\sigma < -5$ كما في شكل (١٣.٣٠) (القانون ٣).



شكل رقم (١٣.٣٠) المناطق المسموح بها على المحور الحقيقي



شكل رقم (١٣.٣١) المرحلة الابتدائية لرسم الموضع الجذري

٤- أفرع الموضع الجذري يجب أن تبدأ عند $\sigma = -1$ ، و $\sigma = -2$ ، و $\sigma = -3$ (القانون ٢).

٥- اثنان من أفرع الموضع الجذري ستنتهي عند $\sigma = -4$ و $\sigma = -5$ والفرع الثالث يجب أن ينتهي عند الصفر الذي عند الما لانهاية (القانون ٢).

٦- فرعاً الموضع الجذري اللذان يبدأان عند $\sigma=-1$ ، و $\sigma=-2$ يتحركان مبدئياً في اتجاه كل منهما للآخر ويجب أن يظلا في منطقة مسموحة (القانون ٣). عندما يتقاطعا سيصبحان مركبين وسيكون كل منهما مرافقاً للآخر (القانون ٤).

٧- فرع الموضع الجذري الثالث الذي يبدأ عند $\sigma=-3$ يجب أن يتحرك في اتجاه اليسار ناحية الصفر الذي عند $\sigma=-4$ (القانون ٣). هذا الفرع لا يمكن أن يذهب في أي اتجاه آخر، وفي الوقت نفسه يحافظ على التماثل حول المحور الحقيقي. ولذلك فإن هذا الفرع ينتهي عند الصفر الذي عند $\sigma=-4$ كما في شكل (١٣.٣١) (القانون ٢).

٨- نحن نعرف الآن أن الفروع الأخرى للموضع الجذري يجب أن تنتهي عند الصفر عند $\sigma=-5$ والصفر الذي عند $|s| \rightarrow \infty$. إنها في الأصل مركبة، لذلك فإنها يجب أن تتحرك ناحية اليسار ثم مرة أخرى لأسفل إلى المحور σ وبعد ذلك يتجه أحد ما ناحية اليمين لينتهي عند الصفر $\sigma=-5$ ، بينما يتجه الآخر ناحية اليسار في اتجاه الما لانهاية السالبة (القانون ٢).

٩- هناك ثلاثة أقطاب محددة وصفران محدودان، وهذا يعني أن هناك فقط فرعاً واحداً للموضع الجذري سيذهب إلى صفر عند الما لانهاية كما رأينا. الزاوية التي سيتقارب بها هذا الفرع يجب أن تكون π مع المحور الحقيقي السالب (القانون ٥). إن هذا يتوافق مع الخلاصة السابقة (رقم ٨).

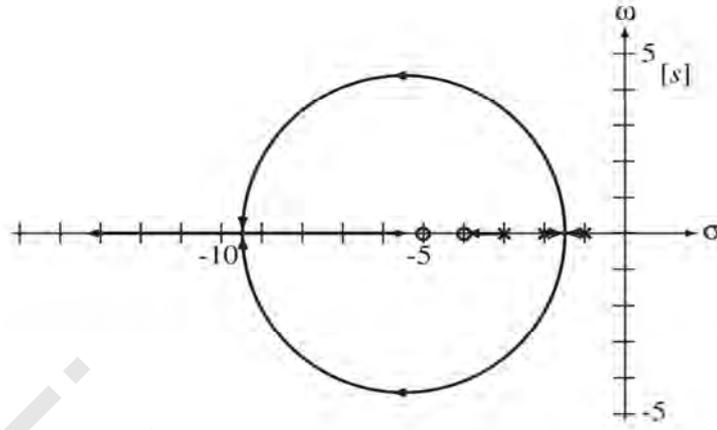
١٠- النقطة التي سيفترق عندها الفرعان على المحور الحقيقي والنقطة التي سيلتقي عندها الفرعان مرة أخرى في اتجاه المحور الحقيقي يجب أن يحدثا عند $(d/ds)(1/T(s))=0$ (القانون ٦).

$$\frac{d}{ds} = \left(\frac{1}{T(s)} \right) = \frac{d}{ds} \left[\frac{(s+1)(s+2)(s+3)}{(s+4)(s+5)} \right] = 0$$

بالتفاضل والمساواة للصفر نحصل على:

$$s^4 + 18s^3 + 10s^2 + 228s + 166 = 0$$

جذور هذه المعادلة ستكون عند $s=-9.47$ ، و $s=-4.34$ ، و $s=-2.69$ ، و $s=-1.50$. وبالتالي فإن نقطة الافتراق ستكون عند $\sigma=-1.50$ ونقطة الالتقاء ستكون عند $\sigma=-9.47$. الموضع الجذري لن يدخل على الإطلاق إلى النصف الأيمن من المستوى s ، وعلى ذلك فهذا النظام سيكون مستقراً لأي قيمة موجبة لمعامل التكبير K كما في شكل (١٣.٣٢).



شكل (١٣.٣٢) الموضع الجذري الكامل

الحلان الآخران للمعادلة:

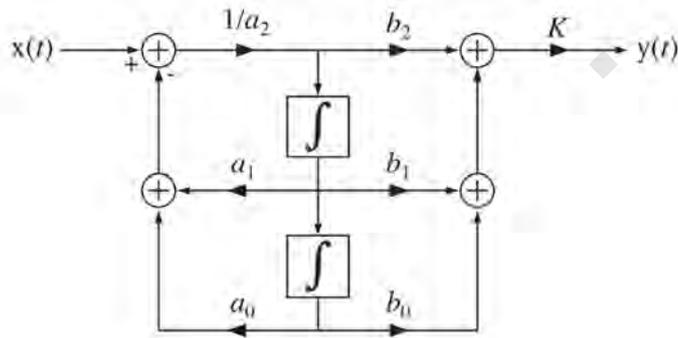
$$s^4 + 18s^3 + 10s^2 + 228s + 166 = 0,$$

هما $s = -2.69$ و $s = -4.34$ هما نقاط الافتراق والالتقاء لما يسمى الموضع الجذري الكامل. الجذر الموضعي الكامل هو تغير موضع الأقطاب لـ $H(s)$ مع تغير K من صفر حتى سالب ما لانهاية).

مثال ١٣.٣

الموضع الجذري ٢

ارسم الموضع الجذري للنظام الذي له مساره الأمامي (المصنع) هو النظام الموضح في شكل (١٣.٣٣) حيث $a_2=1$ و $a_1=-2$ و $a_0=2$ ، و $b_2=0$ و $b_1=1$ و $b_0=0$ ، والمسار العكسي له (الاستشعار) هو النظام الموضح في شكل (١٣.٣٣) حيث $a_2=1$ و $a_1=2$ و $a_0=0$ ، و $b_2=1$ و $b_1=1$ و $b_0=0$ ، و $K=1$.

شكل رقم (١٣.٣٣) نظام من الدرجة الثانية مع معامل تكبير K

دالة عبور المسار الأمامي $H_1(s)$ ودالة عبور المسار العكسي $H_2(s)$ ستكونان كما يلي:

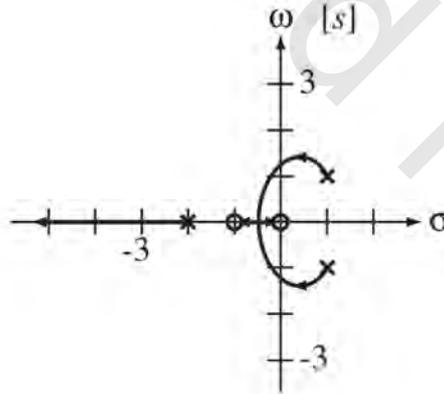
$$H_1(s) = \frac{Ks}{s^2-2s+2} \quad \text{و} \quad H_2(s) = \frac{s^2+s}{s^2+2s} = \frac{s+1}{s+2}$$

دالة عبور الحلقة ستكون:

$$T(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{Ks(s+1)}{(s^2-2s+2)(s+2)}$$

أقطاب T ستكون عند $s=1 \pm j$ و $s=-2$ ، والأصفار ستكون عند $s=0$ ، و $s=-1$ ، و $|s| \rightarrow \infty$. حيث إن $H_1(s)$ لها أقطاب في النصف الأيمن من المستوى s ، فإن نظام المسار الأمامي سيكون غير مستقر.

- ١- الموضع الجذري له ثلاث أفرع (القانون ١).
- ٢- المناطق المسموحة على المحور الحقيقي ستكون هي $-1 < \sigma < 0$ ، و $\sigma < -2$ (القانون ٣).
- ٣- يبدأ الموضع الجذري عند أقطاب الـ $T(s)$. لذلك فإن الفرع الذي يبدأ عند $s=-2$ يمكنه أن يتجه فقط ناحية الشمال ويبقى في منطقة مسموحة على المحور الحقيقي. إنه لا يمكن أن يترك المحور الحقيقي نتيجة متطلبات التماثل (القانون ٤). لذلك فإن هذا المسار ينتهي عند الصفر عند الما لانهاية.
- ٤- الفرعان الآخران يبدأان عند القطبين المركبين المترافقين عند $s=1 \pm j$. إنهما يجب أن ينتهيا عند الصفرين الباقيين عند $s=0$ ، و $s=-2$. للوصول لهذين الصفرين مع الاحتفاظ بالتماثل في الوقت نفسه حول المحور الحقيقي (القانون ٤)، فإنهما يجب أن يتحركا لليسار ولأسفل في المنطقة المسموحة $-1 < \sigma < 0$.
- ٥- نقطة الالتقاء يمكن إيجادها عن طريق وضع $(d/ds)(1/T(s))=0$. الحل لهذه المعادلة سيعطينا نقطة الالتقاء عند $s=-0.4652$ كما في شكل (١٣.٣٤).

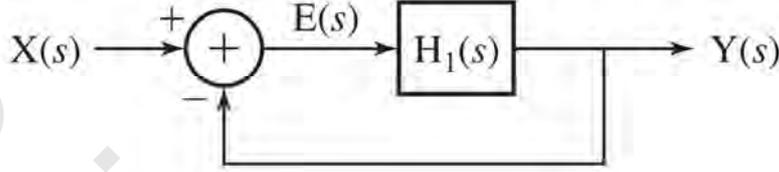


شكل رقم (١٣.٣٤) الموضع الجذري الكامل

في هذا المثال، رأينا أن نظام التغذية العكسية بدأ غير مستقر عند قيمة منخفضة لـ K ، ولكن مع زيادة K فإن الأقطاب التي تكون في البداية في النصف الأيمن من المستوى s تتحرك إلى النصف الأيسر من المستوى s . لذلك إذا كانت K كبيرة بما فيه، فإن نظام التغذية العكسية الكلي يصبح مستقرًا، على الرغم من أن نظام المسار الأمامي فيه غير مستقر.

تتبع الأخطاء في أنظمة التغذية العكسية التي لها معامل تكبير الوحدة

من الأنواع الشائعة جداً من أنظمة التغذية العكسية هي الأنواع التي يكون الغرض منها أن نجعل إشارة الخرج تتبع إشارة الدخل باستخدام مسار تغذية مرتدة بمعامل تكبير يساوي الواحد، بمعنى $H_1(s)=1$ ، كما في شكل (١٣.٣٥).



شكل رقم (١٣.٣٥) نظام تغذية عكسية بمعامل تكبير الوحدة

هذا النوع من الأنظمة يسمى "معامل تكبير الوحدة"؛ لأن إشارة الخرج تتم مقارنتها مباشرة مع إشارة الدخل، وإذا كان هناك أي فرق (إشارة خطأ)، يتم تكبيرها بواسطة معامل تكبير المسار الأمامي للنظام في محاولة لجعل إشارة الخرج أقرب ما يمكن لإشارة الدخل. إذا كان معامل تكبير المسار الأمامي للنظام كبيراً، فإن ذلك سيدفع إشارة الخطأ لأن تكون صغيرة، مما يجعل إشارتي الخرج والدخل أقرب ما يكون من بعضهما بعضاً. سواء كانت إشارة الخطأ يمكن دفعها لأن تكون صفرًا أم لا سيعتمد ذلك على دالة عبور المسار الأمامي $H_1(s)$ ونوع الإثارة.

من الطبيعي أن نتعجب هنا عما هو الغرض من نظام تكون إشارة خرجه تساوي إشارة دخله. ماذا سنكسب من ذلك؟ إذا كان هذا النظام سيكون مكبراً إلكترونياً، والإشارات هي جهود، فإنه سيكون لدينا معامل تكبير يساوي واحد، ولكن معاوقة (مقاومة) الدخل ستكون مرتفعة جداً ويمكن لجهد الخرج أن يشغل معاوقة صغيرة جداً بحيث إن الطاقة الحقيقية بالوات المسحوبة عن طريق إشارة الخرج ستكون أكبر كثيراً من الطاقة الحقيقية القادمة من إشارة الدخل. في الأنظمة الأخرى من الممكن أن تكون إشارة الدخل هي جهد موضوع عن طريق مكبر منخفض القدرة أو مقسم جهد، ومن الممكن أن تكون إشارة الخرج عبارة عن جهد يبين موضع جهاز ميكانيكي كبير مثل رافعة ميكانيكية أو قطعة مدفع أو تليسكوب فلكي.

الآن سنبين طبيعة إشارة الخطأ عند حالة الاستقرار حسابياً. إن كلمة حالة الاستقرار تعني سلوك هذه الإشارة عندما يقترب الزمن من الما لانهاية. يمكن كتابة إشارة الخطأ كما يلي:

$$E(s) = X(s) - Y(s) = X(s) - H_1(s)E(s).$$

بالحل لإيجاد $E(s)$ كما يلي:

$$E(s) = \frac{X(s)}{1+H_1(s)}$$

يمكننا إيجاد قيمة حالة الاستقرار لإشارة الخطأ باستخدام نظرية القيمة النهائية كما يلي:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{X(s)}{1+H_1(s)}$$

إذا كانت إشارة الدخل هي دالة خطوة على الصورة، $x(t)=Au(t)$ ، وبالتالي $X(s)=A/s$ ويمكننا كتابة ما يلي:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{1+H_1(s)}$$

وسيكون الخطأ المستقر يساوي صفر إذا كانت الدالة التالية تساوي صفراً:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+H_1(s)}$$

إذا كانت الدالة $H_1(s)$ على الصورة المعروفة عبارة عن نسبة كثيرتي حدود في s كما يلي:

المعادلة رقم (١٣.٨)

$$H_1(s) = \frac{b_N s^N + b_{N-1} s^{N-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_D s^D + a_{D-1} s^{D-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

بالتالي سنحصل على:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{b_N s^N + b_{N-1} s^{N-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_D s^D + a_{D-1} s^{D-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}} = \frac{a_0}{a_0 + b_0}$$

وإذا كانت $a_0=0$ و $b_0 \neq 0$ ، فإن الخطأ المستقر سيكون صفراً. إذا كانت $a_0=0$ ، ففي هذه الحالة يمكن كتابة

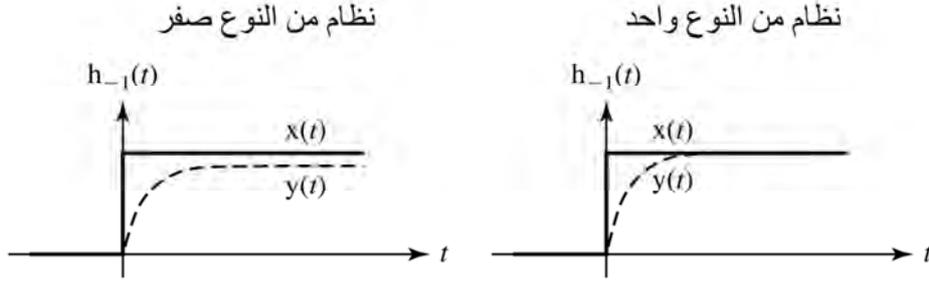
$H_1(s)$ على الصورة التالية:

$$H_1(s) = \frac{b_N s^N + b_{N-1} s^{N-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s(a_D s^D + a_{D-1} s^{D-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)}$$

من الواضح فوراً أن $H_1(s)$ لها قطب عند $s=0$. يمكننا أن نلخص ما سبق بأن نقول إذا كان أي نظام تغذية مرتدة له معامل تكبير يساوي واحداً وكانت دالة عبور المسار الأمامي بها قطب عند $s=0$ ، فإن الخطأ المستقر لإثارة عبارة عن وحدة الخطوة سيكون صفراً. إذا لم يكن هناك قطب عند $s=0$ ، سيكون الخطأ المستقر يساوي $a_0/(a_0+b_0)$ وكلما كانت b_0 كبيرة بالمقارنة مع a_0 ، كلما كان الخطأ المستقر أصغر. سيكون ذلك واضحاً من وجهة نظر أخرى لأنه إذا كان معامل تكبير المسار الأمامي على الصورة الموجودة في المعادلة (١٣.٨) فإن معامل تكبير نظام التغذية العكسية عند الترددات المنخفضة سيكون $b_0/(a_0+b_0)$ ، الذي يقترب من الواحد عندما $b_0 \gg a_0$ مما يوضح أن إشارتي الدخل والخرج تقتربان من القيمة نفسها.

نظام التغذية العكسية الذي له معامل تكبير يساوي الواحد والذي به دالة عبور المسار الأمامي ليس لها أقطاب عند $s=0$ يسمى نظاماً من النوع صفر. إذا كان له قطب واحد عند $s=0$ سيمى هذا النظام نظاماً من النوع واحد. عموماً، أي نظام تغذية مرتدة بمعامل تكبير الوحدة يكون من النوع n حيث n هي عدد الأقطاب عند $s=0$ في $H_1(s)$. تلخيصاً لما سبق باستخدام هذه المصطلحات يمكننا أن نقول:

- ١- أي نظام مستقر من النوع صفر يكون له خطأ محدد عند الحالة المستقرة لإثارة الخطوة.
 - ٢- أي نظام مستقر من النوع n ، حيث $n \geq 1$ ، له خطأ حالة مستقرة يساوي صفراً لإثارة الخطوة.
- يوضح شكل (١٣.٣٦) استجابات الحالة المستقرة لإثارة الخطوة للأنظمة من النوع صفر ومن النوع واحد.



شكل رقم (١٣.٣٦) استجابة الخطوة للأنظمة من النوع صفر والنوع واحد

سنفترض الآن الإثارة من النوع التصاعدي الخطي $x(t)=Aramp(t)=Atu(t)$ والتي سيكون لها تحويل لابلاس

كما يلي $X(s)=A/s^2$. سيكون خطأ الحالة المستقرة كما يلي :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s[1+H_1(s)]}$$

للمرة الثانية إذا كانت $H_1(s)$ عبارة عن نسبة من كثيرتي حدود في s كما يلي :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{1}{1 + \frac{b_N s^N + b_{N-1} s^{N-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_D s^D + a_{D-1} s^{D-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}}$$

أو :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a_D s^D + a_{D-1} s^{D-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s \left[a_D s^D + a_{D-1} s^{D-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 + \frac{b_N s^N + b_{N-1} s^{N-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_D s^D + a_{D-1} s^{D-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \right]}$$

هذا الحد سيعتمد على قيم الـ a 's والـ b 's. إذا كانت $a_0 \neq 0$ ، فإن خطأ الحالة المستقرة سيكون غير محدد. إذا كانت $a_0 = 0$ و $b_0 \neq 0$ ، سيكون الحد يساوي a_1/b_0 مما يوضح أن خطأ الحالة المستقرة سيكون مختلفاً عن الصفر. إذا كانت $a_0 = 0$ و $a_1 = 0$ و $b_0 \neq 0$ ، فإن خطأ الحالة المستقرة سيكون صفراً. الشرط $a_0 = 0$ و $a_1 = 0$ ، مما يعني وجود أقطاب متكررة عند $s=0$ في دالة عبور المسار الأمامي. لذلك، بالنسبة للنظام من النوع الثاني المستقر سيكون خطأ الحالة المستقرة مع وجود الإثارة التصاعدي يساوي صفراً. نلخص ذلك فيما يلي :

١- النظام المستقر من النوع صفر سيكون له خطأ حالة مستقرة غير محدد بالنسبة للإثارة التصاعدي الخطية.

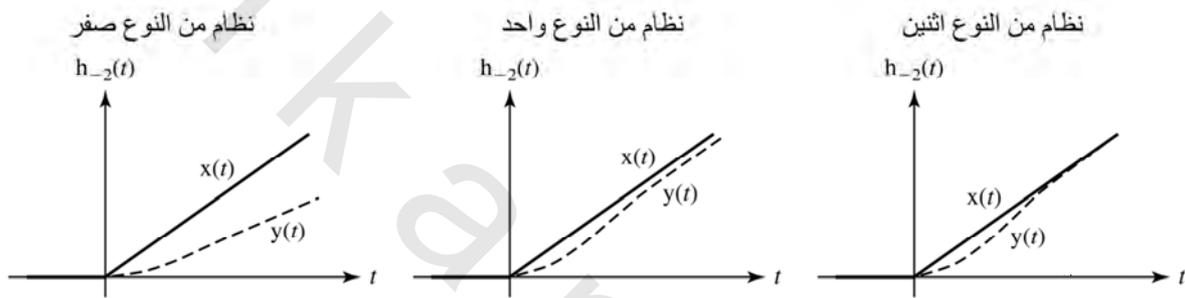
٢- النظام المستقر من النوع واحد له خطأ حالة مستقرة محدد للإثارة الخطية.

٣- النظام المستقر من النوع n حيث $n \geq 2$ له خطأ حالة صفر لإثارة الدخل الخطية.

شكل (١٣.٣٧) يبين استجابات الحالة المستقرة للإثارة الخطية للأنظمة المستقرة من النوع صفر وواحد

واثنين. هذه النتائج يمكن استقراؤها للإثارات من الدرجات الأعلى مثل $At^2u(t)$ ، و $At^3u(t)$ ، وهكذا. عندما تكون

الدرجة العليا لـ s في مقام تحويل الإثارة هي نفسها، أو أقل من عدد نوع (صفر، وواحد، واثنين، وهكذا) النظام، وكان النظام مستقرًا، فإن خطأ حالة الاستقرار سيكون صفرًا. لقد تم توضيح ذلك مع دوال عبور المسار الأمامي التي في صورة نسبة من كثيرتي حدود ولكن يمكن توضيح أن النتيجة تكون صحيحة لأي شكل من أشكال دالة العبور اعتماداً فقط على عدد الأقطاب عند $s=0$. قد يبدو أن الأقطاب الأكثر في دالة عبور المسار الأمامي عند $s=0$ تكون عادة مرغوبة؛ لأنها تقلل خطأ الحالة المستقرة في نظام التغذية العكسية الكلي. ولكن عموماً، كلما كانت الأقطاب أكثر في دالة عبور المسار الأمامي، فإنه يكون من الصعب جعل نظام التغذية العكسية مستقرًا. ولذلك ربما نقايض مشكلة مع أخرى عن طريق وضع أقطاب عند $s=0$ في دالة عبور المسار الأمامي.



شكل رقم (١٣.٣٧) استجابة أنظمة من النوع صفر وواحد واثنين للدالة الخطية التصاعدية

مثال ١٣.٤

عدم الاستقرار بسبب إضافة الأقطاب عند الصفر في دالة عبور المسار الأمامي

افترض أن دالة العبور الأمامية لنظام تغذية مرتدة معامل تكبيره يساوي الوحدة هي $H_1(s)=100/s(s+4)$. دالة

العبور الكلية ستكون كما يلي:

$$H(s) = \frac{100}{s^2+4s+100}$$

حيث الأقطاب ستكون عند $s=-2\pm j9.798$ ، حيث كل من القطبين يقع في النصف الأيسر من المستوى s

وبالتالي، فإن النظام سيكون مستقرًا. الآن سنضيف قطباً عند الصفر للدالة $H_1(s)$ ونعيد تقييم استقرار هذا النظام.

الدالة الجديدة $H_1(s)$ ستصبح كما يلي:

$$H_1(s) = \frac{100}{s^2(s+4)}$$

ودالة العبور الكلية الجديدة ستصبح:

$$H(s) = \frac{100}{s^3+4s^2+100}$$

وستصبح أقطابها عند $s=-6.4235$ و $s=1.212\pm j3.755$. حيث أصبح اثنان من الأقطاب في النصف الأيمن من

المستوى s وأصبح النظام الكلي غير مستقر.

(١٣.٥) تحليل الأنظمة باستخدام ماتلاب

لقد تم تقديم الهدف نظام "system" في الفصل ٦. شكل الأمر لتوليد هذا الهدف بالأمر tf هو:

$$.sys = tf(num, den)$$

الشكل لتوليد الهدف نظام باستخدام الأمر zpk هو:

$$.sys = zpk(z,p,k)$$

تضمن القوة الحقيقية لصندوق أدوات toolbox "التحكم في الأنظمة control system" في التوصيل البياني لهذه الأنظمة. افترض أننا نريد دالة العبور الكلية التي على الصورة $H(s)=H_1(s)H_2(s)$ للنظامين التاليين في توصيلة على التوالي:

$$H_1(s) = \frac{s^2 + 4}{s^5 + 4s^4 + 7s^3 + 15s^2 + 31s + 75}$$

و:

$$H_2(s) = 20 \frac{s+4}{(s+3)(s+10)}$$

يمكن تنفيذ ذلك باستخدام ماتلاب كما يلي:

```
»num = [1 0 4];
»den = [1 4 7 15 31 75];
»H1 = tf(num,den);
```

```
»z = [-4];
»p = [-3 -10];
»k = 20
»H2 = zpk(z,p,k);
```

```
»Hc = H1 * H2 ;
»Hc
```

Zero/pole/gain:

$$20 (s+4) (s^2 + 4)$$

$$(s+3.081)(s+3)(s+10)(s^2+2.901s+5.45)(s^2-1.982s+4.467)$$

```
»tf(Hc)
```

Transfer function:

$$20 s^3 + 80 s^2 + 80 s + 320$$

$$s^7+17s^6+89s^5+226s^4+436s^3+928s^2+1905s+2250$$

إذا كنا نريد معرفة دالة العبور لهذين النظامين عند توصيلهما على التوازي يمكننا تنفيذ ذلك كما يلي:

```
»Hp = H1 + H2 ;
```

```
»Hp
```

Zero/pole/gain:

$$20(s+4.023)(s+3.077)(s^2+2.881s+5.486)(s^2-1.982s+4.505)$$

```
-----
(s+3.081)(s+3)(s+10)(s^2+2.901s+5.45)(s^2-1.982s+4.467)
```

```
>>tf(Hp)
```

```
Transfer function:
```

```
20s^6+160s^5+461s^4+873s^3+1854s^2+4032s+6120
```

```
-----
s^7+17s^6+89s^5+226s^4+436s^3+928s^2+1905s+2250
```

هناك أيضاً الأمر feedback لتكون دالة العبور الكلية لأي نظام تغذية مرتدة:

```
>> Hf = feedback(H1,H2) ;
```

```
>> Hf
```

```
Zero/pole/gain:
```

```
(s+3)(s+10)(s^2+4)
```

```
-----
(s+9.973)(s^2+6.465s+10.69)(s^2+2.587s+5.163)(s^2-2.025s+4.669)
```

عند التعامل أحياناً مع أهداف النظام، فإن النتيجة لن تكون في الصورة المثالية. قد يكون لها قطب وصفر عند الموضع نفسه. على الرغم من أنه ليس هناك أي خطأ حسابي في ذلك، فإنه على العموم يكون من المفضل التخلص من هذا القطب وهذا الصفر لتبسيط دالة العبور. يمكن عمل ذلك باستخدام الأمر mineral (والتي تعني أقل تنفيذ minimum realization).

بمجرد أن يتم وصف النظام، يمكننا أن نرسم استجابة الخطوة له باستخدام الأمر step، واستجابة الصدمة باستخدام الأمر impulse، ومخطط بود للاستجابة الترددية له بالأمر bode. يمكننا أيضاً أن نرسم مخطط الأقطاب والأصفار باستخدام الأمر pzmap. يوجد أيضاً في ماتلاب دالة تسمى freqresp تقوم برسم الاستجابة الترددية للنظام، والصورة العامة لهذه الدالة هي:

$$H = \text{freqresp}(\text{sys}, \omega)$$

حيث sys هو هدف النظام في ماتلاب، و ω هي متجه الترددات، و H هي الاستجابة الترددية للنظام عند هذه الترددات الزاوية. يحتوي ماتلاب أيضاً في صندوق أدوات التحكم في الأنظمة أمراً لرسم الموضع الجذري لدالة عبور الحلقة للنظام. الشكل العام لذلك هو:

$$R\text{locus}(\text{sys})$$

حيث sys هو هدف النظام في ماتلاب. هناك العديد من الأوامر المفيدة الأخرى في صندوق أدوات التحكم والتي يمكن فحصها بالأمر help control.

(١٣.٦) استجابات الأنظمة للإشارات القياسية

لقد رأينا في تحليل الإشارات والأنظمة فيما سبق أن أي نظام LTI يكون موصوفاً بالكامل باستجابته للصدمة. في اختبار الأنظمة الحقيقية، يكون تطبيق الصدمة لإيجاد استجابة الصدمة لأي نظام غير عملي. أولاً، لأن الصدمة الحقيقية لا يمكن توليدها، ثانياً حتى لو أمكن توليد الصدمة الحقيقية، وحيث إنها لها مقدار غير محدود،

فإنها حتماً يمكنها أن تدفع النظام إلى حالة غير خطية من التشغيل. يمكننا توليد نسخة مقربة لوحدة الصدمة الحقيقية في صورة نبضة قصيرة جداً زمنياً وطويلة جداً في المقدار بحيث تكون مساحتها تساوي دائماً الوحدة. يجب أن تكون الفترة الزمنية لهذه النبضة بحيث أن تصغيرها لن يغير في أي واحدة من إشارات النظام. على الرغم من أن هذا النوع من الاختبار ممكن، إلا أن النبضة الطويلة جداً من الممكن أن تدفع النظام أيضاً في الاتجاه غير الخطي. من السهل جداً توليد تقريب جيد لوحدة الخطوة عن التقريب لوحدة الصدمة، ومن الممكن أن نجعل مقدار الخطوة صغيراً بما فيه الكفاية بحيث لا تسبب عدم خطية للنظام.

الدوال الجيبية أيضاً من السهل توليدها ومن الممكن ضبطها لتتغير بين حدود معروفة وهذه الحدود من الممكن جعلها صغيرة بما فيه الكفاية بحيث لا تدفع النظام في اتجاه عدم الخطية. يمكن تغيير تردد هذه الدوال الجيبية بحيث يمكن تحديد الاستجابة الترددية للنظام. حيث إن الدوال الجيبية تكون على علاقة وثيقة بالأسس المركبة، فإن هذا النوع من الاختبار من الممكن أن يعطي معلومات عن خواص النظام.

استجابة وحدة الخطوة

افترض أن دالة العبور لنظام LTI ستكون على الصورة:

$$H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$

حيث $N_H(s)$ تكون درجة الـ s لها أقل من $D_H(s)$. بالتالي فإن تحويل لابلاس لاستجابة الحالة صفر $Y(s)$

كاستجابة للدخل $X(s)$ ستكون على الصورة:

$$Y(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)} X(s)$$

افترض أن دالة الخطوة هي $x(t)$ ، بالتالي فإن تحويل لابلاس لاستجابة الحالة صفر ستكون:

$$Y(s) = H_{-1}(s) \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$

باستخدام طريقة التحليل بالكسور الجزئية، يمكن فصل المعادلة السابقة إلى جزأين:

$$Y(s) = \frac{N_{H1}(s)}{D_H(s)} + \frac{H(0)}{s}$$

إذا كان النظام مستقراً BIBO، فإن جذور $D_H(s)$ ستكون كلها في النصف الأيسر المفتوح من المستوى s

وتحويل لابلاس العكسي لـ $N_{H1}(s)/D_H(s)$ يسمى الاستجابة الطبيعية natural response أو الاستجابة العابرة transient response

لأنها تتناقص إلى الصفر مع اقتراب الزمن للما لانهاية. الاستجابة المدفوعة forced response للنظام لوحدة

الخطوة هي تحويل لابلاس العكسي لـ $H(0)/s$ وهي تساوي $H(0)u(t)$. التعبير التالي:

$$Y(s) = \frac{N_{H1}(s)}{D_H(s)} + \frac{H(0)}{s}$$

يتكون من مقدارين. المقدار الأول له أقطاب مماثلة تماماً لأقطاب النظام، والمقدار الثاني له قطب عند الموضع نفسه مثل تحويل لابلاس لوحدة الخطوة.

يمكن تعميم هذه النتيجة على أي إثارة اختيارية. إذا كان تحويل لابلاس للإثارة هو:

$$X(s) = \frac{N_x(s)}{D_x(s)}$$

فإن تحويل لابلاس لاستجابة النظام سيكون:

$$Y(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)} X(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)} \frac{N_x(s)}{D_x(s)} = \frac{N_{H1}(s)}{D_H(s)} + \frac{N_{x1}(s)}{D_x(s)}$$

نفس الأقطاب مثل الإثارة نفس الأقطاب مثل النظام

دعنا الآن نفحص استجابة وحدة الخطوة لبعض الأنظمة البسيطة. أبسط نظام ديناميكي هي نظام من

الدرجة الأولى له دالة العبور التالية:

$$H(s) = \frac{A}{1-s/p} = \frac{Ap}{s-p}$$

حيث A هي دالة عبور النظام عند الترددات المنخفضة و p هي موضع القطب في المستوى s . تحويل لابلاس لدالة الخطوة هو:

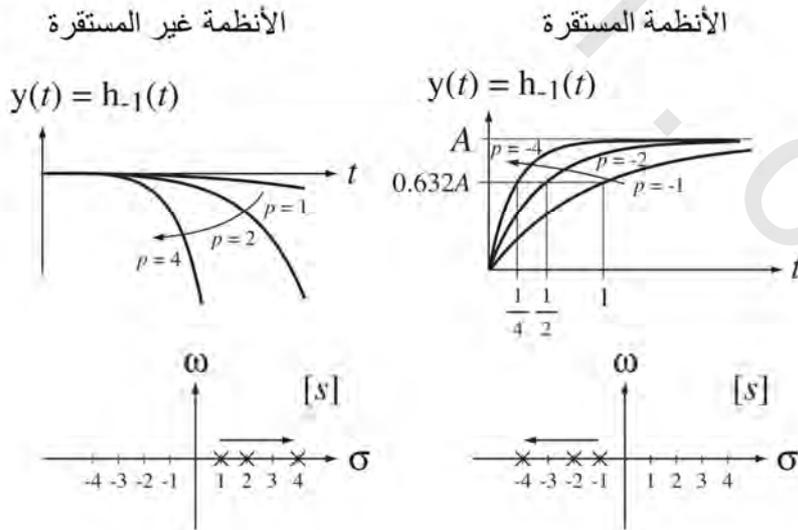
$$Y(s) = H_{-1}(s) = \frac{A}{(1-s/p)s} = \frac{A/p}{1-s/p} + \frac{A}{s} = \frac{A}{s} - \frac{A}{s-p}$$

بأخذ تحويل لابلاس للمعادلة السابقة، نحصل على:

$$y(t) = A(1 - e^{pt})u(t)$$

إذا كانت p موجبة، فإن النظام سيكون غير مستقر ومقدار الاستجابة لوحدة الخطوة سيتزايد أسياً مع

الزمن كما في شكل (١٣.٣٨).



شكل رقم (١٣.٣٨) استجابة نظام من الدرجة الأولى لوحدة الخطوة ومخطط الأقطاب والأصفار المقابل

سرعة تزايد الأس تعتمد على مقدار p ، وستكون أكبر لقيم p الكبيرة. إذا كانت p سالبة سيكون النظام مستقرًا وسيقترب النظام من القيمة الثابتة A مع الزمن. سرعة الاقتراب من الثابت A تعتمد على مقدار p ، وستكون هذه السرعة أكبر لقيم p الكبيرة. مقلوب p السالب يسمى الثابت الزمني τ للنظام، حيث $\tau=1/p$ ، ولأنظمة المستقرة، فإن استجابة الخطوة تتحرك 63.2% من المسافة حتى القيمة النهائية في زمن مقداره ثابت زمني واحد.

افترض الآن نظاماً من الدرجة الثانية له دالة عبور كالتالي:

$$H(s) = \frac{A\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \omega_n > 0.$$

هذه الصورة لدالة عبور نظام من الدرجة الثانية لها ثلاثة معاملات، معامل تكبير الترددات المنخفضة A ، نسبة القمع ζ damping ratio والتردد الزاوي الطبيعي ω_n . يعتمد شكل الاستجابة لوحدة الخطوة على قيم هذه المعاملات. تحويل لابلاس لاستجابة وحدة الخطوة سيكون:

$$H_{-1}(s) = \frac{A\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{A\omega_n^2}{s[s + \omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})][s + \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})]}$$

وهذه يمكن وضعها في صورة الكسور الجزئية إذا كانت $\zeta \neq \pm 1$ كما يلي:

$$H_{-1}(s) = A \left[\frac{1}{s} + \frac{2(\zeta^2 - 1 + \zeta\sqrt{\zeta^2 - 1})}{s + \omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} + \frac{2(\zeta^2 - 1 - \zeta\sqrt{\zeta^2 - 1})}{s + \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} \right]$$

وبالتالي ستكون الاستجابة في النطاق الزمني كما يلي:

$$h_{-1}(s) = A \left[\frac{e^{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t}}{2(\zeta^2 - 1 + \zeta\sqrt{\zeta^2 - 1})} + \frac{e^{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t}}{2(\zeta^2 - 1 - \zeta\sqrt{\zeta^2 - 1})} + 1 \right] u(t)$$

بالنسبة للحالة الخاصة التي فيها $\zeta \neq \pm 1$ ستكون استجابة النظام لوحدة الخطوة كما يلي:

$$H_{-1}(s) = \frac{A\omega_n^2}{(s \pm \omega_n)^2 s}$$

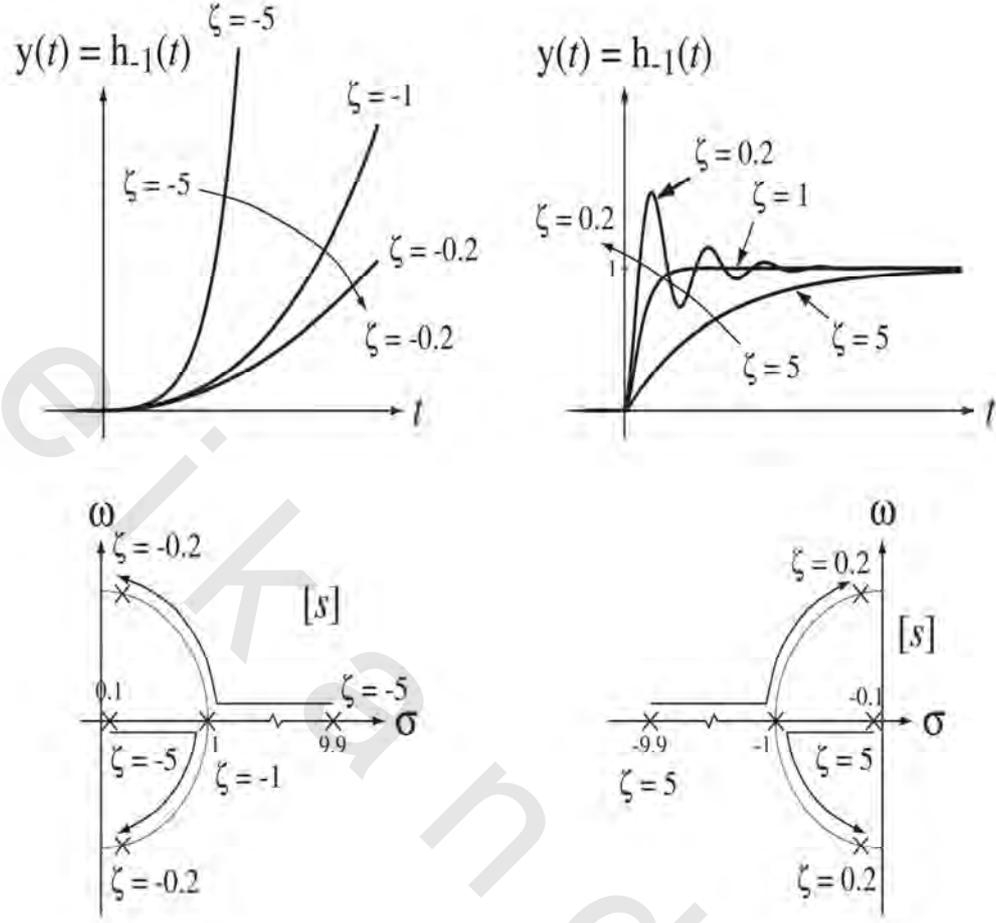
وسيكون القطبان متماثلين، وستكون الكسور الجزئية كما يلي:

$$H_{-1}(s) = A \left[\frac{1}{s} - \frac{\pm \omega_n}{(s \pm \omega_n)^2} - \frac{1}{s \pm \omega_n} \right]$$

وستكون الاستجابة في النطاق الزمني كما يلي:

$$h_{-1}(s) = A[1 - (1 \pm \omega_n t)e^{\mp \omega_n t}]u(t) = Au(t) \begin{cases} 1 - (1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}, & \zeta = 1 \\ 1 - (1 - \omega_n t)e^{+\omega_n t}, & \zeta = -1 \end{cases}$$

من الصعب أن نحدد وحدة الخطوة من خلال شكل الدالة الحاسوبية لاستجابة، ماذا سيكون شكل هذه الاستجابة بوضع قيم اختيارية للمعاملات. لكي نستكشف تأثير هذه المعاملات فقط، دعنا نفترض أولاً أن كلاً من A و ω_n ثابت وسنفحص تأثير نسبة القمع ζ . افترض أن $A=1$ ، وأن $\omega_n=1$. بالتالي فإن استجابة وحدة الخطوة ومخطط الإقطاب والأصفار المقابل سيكون كما هو موضح في شكل (١٣.٣٩) لستة اختيارات لمعامل القمع ζ .



شكل رقم (١٣.٣٩) استجابات النظام من الدرجة الثانية لوحدة الخطوة ومخططات الأقطاب والأصفار المقابلة

يمكننا أن نرى لماذا يحدث هذا السلوك من هذه الأنواع المختلفة إذا فحصنا استجابة وحدة الخطوة التالية:

$$(13.9) \text{ المعادلة رقم } h_{-1}(s) = A \left[\frac{e^{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t}}{2(\zeta^2 - 1 + \zeta\sqrt{\zeta^2 - 1})} + \frac{e^{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t}}{2(\zeta^2 - 1 - \zeta\sqrt{\zeta^2 - 1})} + 1 \right] u(t)$$

وبالذات الأسس للـ $e^{-\omega_n(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})t}$. إشارات هذه الأجزاء الحقيقية لهذه الأسس تحدد إذا كانت

الاستجابة تنمو أو تتناقص مع الزمن $t > 0$. بالنسبة للأزمنة $t < 0$ فإن الاستجابة تكون صفراً لأن استجابة الخطوة تكون $u(t)$.

الحالة 1: $\zeta < 0$

إذا كانت $\zeta < 0$ ، بالتالي فإن أس الـ e في كل من مقاديري المعادلة (١٣.٩) سيكون لهما جزء حقيقي موجب

في الأزمنة الموجبة وبالتالي فإن استجابة الخطوة ستنامى مع الزمن وسيكون النظام غير مستقر. الشكل الصحيح

لاستجابة الخطوة سيعتمد على قيمة الـ ζ . هذا الشكل سيكون عبارة عن أساً متزايداً عندما $\zeta < 1$ وتذبذبات متزايدة أسياً عندما $0 < \zeta < 1$ ، ولكن في كلا الحالتين فإن النظام يكون غير مستقر.

الحالة 2: $0 < \zeta$

عندما تكون $0 < \zeta$ ، فإن أس الـ e في كل من مقدارى المعادلة (١٣.٩) سيكون له جزء حقيقي موجب في الأزمنة الموجبة ولذلك فإن استجابة الخطوة تتناقص مع الزمن وسيكون النظام مستقرًا.

الحالة 2أ: $\zeta > 1$

إذا كانت $\zeta > 1$ ، بالتالي فإن $\zeta^2 - 1 > 0$ وستكون معاملات الـ t في المعادلة (١٣.٩) وهي:

$-w_n(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})t$ كل منهما سيكون رقماً حقيقياً سالباً وستكون استجابة وحدة الخطوة في صورة ثابت مضافاً إليه كمية أسية متناقصة في كل حالة. هذه الحالة، $\zeta > 1$ ، تسمى حالة القمع الزائد.

الحالة 2ب: $0 < \zeta < 1$

إذا كانت $0 < \zeta < 1$ فإن $\zeta^2 - 1 < 0$ ، وستكون معاملات t في المعادلة (١٣.٩) وهي $-w_n(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})t$ كل منهما كمية مركبة في صورة زوج مترافق له جزء حقيقي سالب، وستكون استجابة الخطوة في صورة ثابت مجموع عليه اثنان من الدوال الجيبية المضروبة في أس متناقص. على الرغم من الاستجابة يكون بها تخط أو خروج على القيمة النهائية، إلا أنها ما زالت تؤول إلى قيمة ثابتة وبالتالي فإن النظام يكون مستقرًا. هذه الحالة $0 < \zeta < 1$ تسمى الحالة تحت تحت الكبح (القمعية) underdamped.

الخط الفاصل بين الحالة فوق القمعية وتحت القمعية تكون هي الحالة $\zeta = 1$ ، وهي تسمى حالة الكبح الحرج critical damping.

الآن دعنا نفحص تأثير تغيير ω_n بينما يتم تثبيت المعاملات الأخرى. افترض أن $A=1$ و $\zeta=0.5$. استجابة الخطوة موضحة في شكل (١٣.٤٠) لثلاث قيم مختلفة لـ ω_n .

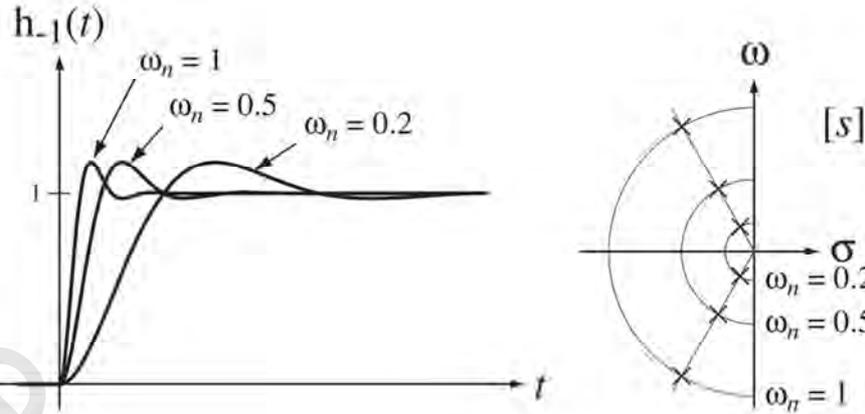
حيث إن ω_n هي التردد الزاوي الطبيعي، فمن المنطقي أنها ستؤثر على معدل تذبذب استجابة الخطوة.

يمكن إيجاد استجابة الخطوة لأي نظام LTI باستخدام الأمر step في صندوق أدوات التحكم في ماتلاب.

الاستجابة الجيبية

الآن دعنا نفحص استجابة أي نظام لدالة جيبية سببية (يتم تطبيقها على النظام عند الزمن $t=0$). للمرة الثانية سنفترض أن دالة عبور النظام ستكون على الصورة:

$$H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$



شكل رقم (١٣.٤٠) استجابة نظام من الدرجة الثانية لثلاث قيم مختلفة لـ ω_n ومخطط الأقطاب والأصفار المقابل

بالتالي فإن تحويل لابلاس لاستجابة الحالة صفر للدخل $x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$ ستكون على الصورة التالية:

$$Y(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

يمكن فصل ذلك بالكسور الجزئية على الصورة التالية:

$$Y(s) = \frac{N_{H1}(s)}{D_H(s)} + \frac{1}{2} \frac{H(-j\omega_0)}{s + j\omega_0} + \frac{1}{2} \frac{H(j\omega_0)}{s - j\omega_0} = \frac{N_{H1}(s)}{D_H(s)} + \frac{1}{2} \frac{H^*(j\omega_0)}{s + j\omega_0} + \frac{1}{2} \frac{H(j\omega_0)}{s - j\omega_0}$$

أو:

$$Y(s) = \frac{N_{H1}(s)}{D_H(s)} + \frac{1}{2} \frac{H^*(j\omega_0)(s - j\omega_0) + H(j\omega_0)(s + j\omega_0)}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$Y(s) = \frac{N_{H1}(s)}{D_H(s)} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} [H(j\omega_0) + H^*(j\omega_0)] + \frac{j\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} [H(j\omega_0) - H^*(j\omega_0)] \right\}$$

$$Y(s) = \frac{N_{H1}(s)}{D_H(s)} + \text{Re}(H(j\omega_0)) \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} - \text{Im}(H(j\omega_0)) \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

تحويل لابلاس العكسي للكحد:

$$\text{Re}(H(j\omega_0)) (s/s^2 + \omega_0^2)$$

يساوي حاصل ضرب وحدة الخطوة وجيب تمام تردده ω_0 بمقدار هو $\text{Re}(H(j\omega_0))$ ، وتحويل لابلاس

العكسي للكحد:

$$\text{Im}(H(j\omega_0)) \omega_0 / (s^2 + \omega_0^2)$$

يساوي حاصل ضرب وحدة الخطوة وجيب تردده ω_0 ومقداره هو $\text{Im}(H(j\omega_0))$ ، بمعنى:

$$y(s) = \mathcal{E}^{-1} \left(\frac{N_{H1}(s)}{D_H(s)} \right) + [\text{Re}(H(j\omega_0)) \cos(\omega_0 t) - \text{Im}(H(j\omega_0)) \sin(\omega_0 t)] u(t)$$

أو باستخدام العلاقة:

$$\text{Re}(A) \cos(\omega_0 t) - \text{Im}(A) \sin(\omega_0 t) = |A| \cos(\omega_0 t + \angle A)$$

يمكن كتابة الاستجابة على الصورة التالية :

$$y(s) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{N_{H1}(s)}{D_H(s)} \right) + |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \angle H(j\omega_0)) u(t)$$

إذا كان النظام مستقرًا، فإن جذور $D_H(s)$ ستكون كلها في النصف الأيسر المفتوح من المستوى s وتحويل لابلاس العكسي للـ $N_{H1}(s)/D_H(s)$ (وهي الاستجابة العابرة) سيتناقص إلى الصفر عندما تقترب t من الما لانهاية. لذلك فإن الاستجابة المدفوعة التي تبقى بعد تلاشي الاستجابة العابرة ستكون دالة جيبيية سببية بتردد الإثارة نفسه وبمقدار وزاوية تتحدد بقيمة دالة العبور المحسوبة عند $s=j\omega_0$. الاستجابة المدفوعة ستكون هي نفسها تماما مثل الاستجابة التي يتم الحصول عليها باستخدام طريقة تحويل فورير؛ لأن طرق تحويل فورير تفترض أن الإثارة تكون دالة جيبيية حقيقية (مطبقة عند الزمن $t \rightarrow \infty$)، وليست دالة جيبيية سببية وبالتالي فليس هناك استجابة عابرة في الحل.

مثال ١٣.٥

استجابة الحالة صفر لنظام عندما تكون الإثارة دالة جيب تمام.

أوجد الاستجابة الكلية للحالة صفر لنظام موصوف بدالة العبور التالية :

$$H(s) = \frac{10}{s+10}$$

لجيب تمام مقدارة الوحدة عند التردد 2Hz .

التردد الزاوي لجيب التمام ω_0 هو 4π . لذلك فإن تحويل لابلاس لهذه الاستجابة سيكون :

$$Y(s) = \frac{10}{s+10} \frac{s}{s^2+(4\pi)^2}$$

$$Y(s) = \frac{-0.388}{s+10} + \text{Re}(H(j4\pi)) \frac{s}{s^2+(4\pi)^2} - \text{Im}(H(j4\pi)) \frac{\omega_0}{s^2+(4\pi)^2}$$

والاستجابة في النطاق الزمني ستساوي :

$$y(t) = \mathcal{E}^{-1} \left(\frac{-0.388}{s+10} \right) + |H(j4\pi)| \cos(4\pi t + \angle H(j4\pi)) u(t)$$

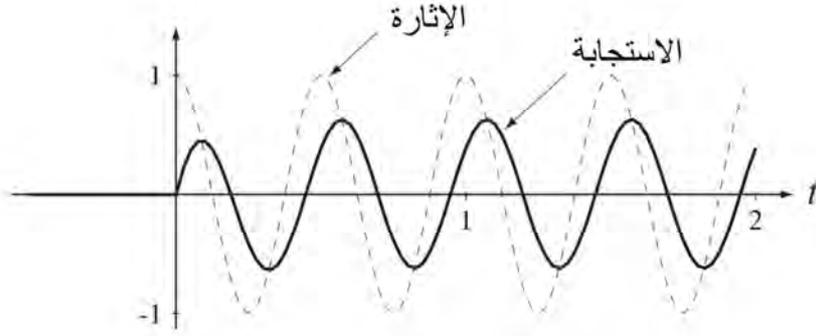
أو :

$$y(t) = \left[-0.388e^{-10t} + \left| \frac{10}{j4\pi+10} \right| \cos(4\pi t - \angle(j4\pi + 10)) \right] u(t)$$

أو :

$$y(t) = [-0.388e^{-10t} + 0.623\cos(4\pi t - 0.899)] u(t)$$

شكل (١٣.٤١) يبين كلاً من الإثارة والاستجابة. بالنظر لهذه الشكل سنرى أن الاستجابة تصل إلى مقدار مستقر في أقل من ثانية واحدة، وهذا منطقي إذا علمنا أن الاستجابة العابرة لها ثابت زمني يساوي $1/10$ من الثانية. بعد استقرار الاستجابة، يكون مقدارها 62% من مقدار الإثارة وهناك إزاحة زاوية تتأخر عن الإثارة بمقدار 0.899 راديان، والتي تكافئ حوالي 72ms تأخير زمني.



شكل رقم (١٣.٤١) الإثارة والاستجابة لنظام من الدرجة الثانية تمت إزاحته بجيب تمام عند الزمن $t=0$

إذا قمنا بالحل لإيجاد استجابة النظام باستخدام طرق فوريير، فإننا نكتب الاستجابة الترددية من دالة العبور

كما يلي:

$$H(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 10}$$

إذا وضعنا الإثارة للنظام في صورة جيب تمام حقيقي على الصورة $x(t) = \cos(4\pi t)$ والتي لها CTFT على

الصورة $X(j\omega) = \pi[\delta(\omega - 4\pi) + \delta(\omega + 4\pi)]$ ، بالتالي فإن استجابة النظام ستكون على الصورة:

$$Y(j\omega) = \pi[\delta(\omega - 4\pi) + \delta(\omega + 4\pi)] \frac{10}{j\omega + 10} = 10\pi \left[\frac{\delta(\omega - 4\pi)}{j4\pi + 10} + \frac{\delta(\omega + 4\pi)}{-j4\pi + 10} \right]$$

أو:

$$Y(j\omega) = 10\pi \frac{10[\delta(\omega - 4\pi) + \delta(\omega + 4\pi)] + j4\pi[\delta(\omega + 4\pi) - \delta(\omega - 4\pi)]}{16\pi^2 + 100}$$

بإجراء تحويل فوريير العكسي سنحصل على:

$$y(t) = 0.388 \cos(4\pi t) + 0.487 \sin(4\pi t)$$

أو باستخدام المعادلة:

$$\operatorname{Re}(A) \cos(\omega_0 t) - \operatorname{Im}(A) \sin(\omega_0 t) = |A| \cos(\omega_0 t + \angle A)$$

فإن الاستجابة ستكون:

$$y(t) = 0.623 \cos(4\pi t - 0.889)$$

وهذه هي نفسها تماماً (فيما عدا لوحدة الخطوة) مثل الاستجابة المدفوعة في الحل السابق الذي تم إيجاد

باستخدام تحويل لابلاس.

(١٣.٧) البناء القياسي للأنظمة

عملية تصميم الأنظمة، وعلى العكس من عملية التحليل، تهدف إلى الحصول على دالة عبور لفصيل من

الإشارات بحيث تعطي الاستجابة، أو الاستجابات المطلوبة. بمجرد أن نوجد دالة العبور المطلوبة، تكون الخطوة

المنطقية المطلوبة هي بناء أو ربما محاكاة النظام. الخطوة الأولى الطبيعية في بناء أو محاكاة النظام هي تكوين مخطط

صندوق يصف التفاعلات بين كل الإشارات في النظام. هذه الخطوة تسمى خطوة التحقق وهي تأتي من مفهوم عمل نظام حقيقي بدلاً من مجموعة من المعادلات فقط التي تصف سلوك النظام. هناك العديد من أنواع التحقق القياسية من الأنظمة. لقد رأينا مسبقاً الطريقة المباشرة II في الفصل ٨ ، ونستكشف هنا طريقتين جديدتين.

التحقق أو البناء المتتالي

الطريقة القياسية الثانية لبناء الأنظمة هي الطريقة المتتالية. البسط والمقام لدالة العبور العامة يكونان على

الصورة التالية :

$$\text{المعادلة رقم (١٣.١٠)} \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0} = a_N = 1$$

حيث $M \leq N$ ، وهذه المعادلة يمكن تحليلها لتعطي صورة دالة العبور التالية :

$$H(s) = A \frac{s-z_1}{s-p_1} \frac{s-z_2}{s-p_2} \dots \frac{s-z_M}{s-p_M} \frac{1}{s-p_{M+1}} \frac{1}{s-p_{M+2}} \dots \frac{1}{s-p_N}$$

أي مركبة من المركبات الكسرية السابقة تكون على الصورة التالية :

$$\frac{Y_k(s)}{X_k(s)} = \frac{s-z_k}{s-p_k} \quad \text{أو} \quad \frac{Y_k(s)}{X_k(s)} = \frac{1}{s-p_k}$$

وهذه الصورة تعبر عن نظام فرعي يمكن بناؤه عن طريق كتابة العلاقة التالية :

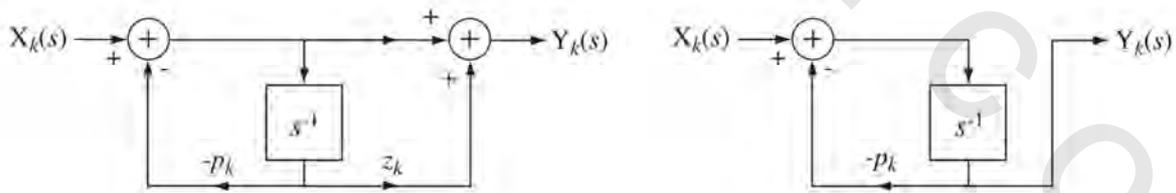
$$H_k(s) = \frac{1}{\underbrace{s-p_k}_{H_{k1}(s)}} \underbrace{(s-z_k)}_{H_{k2}(s)} \quad \text{أو} \quad H_k(s) = \frac{1}{s-p_k}$$

وهذه يمكن بناؤها بالطريقة المباشرة II كما في شكل (١٣.٤٢). بعد ذلك يمكن بناء النظام على الصورة

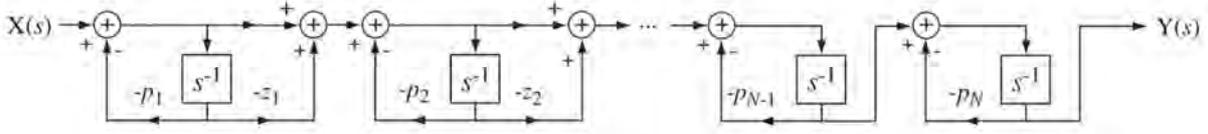
المتتالية كما في شكل (١٣.٤٣).

$$H_k(s) = \frac{s-z_k}{s-p_k}$$

$$H_k(s) = \frac{1}{s-p_k}$$



شكل رقم (١٣.٤٢) البناء بالطريقة المباشرة II لنظام فرعي واحد بطريقة البناء المتتالي.

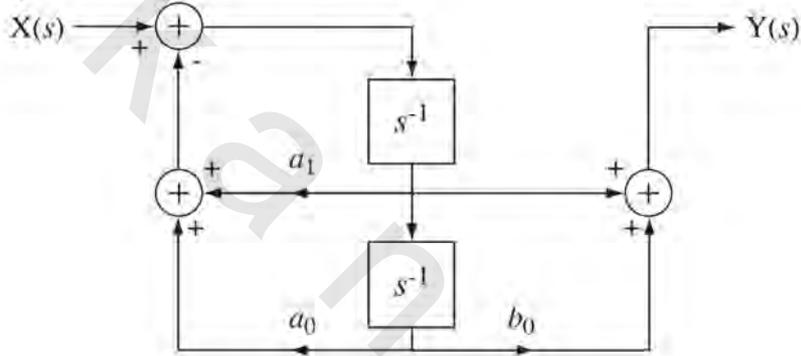


شكل رقم (١٣.٤٣) بناء النظام الكلي.

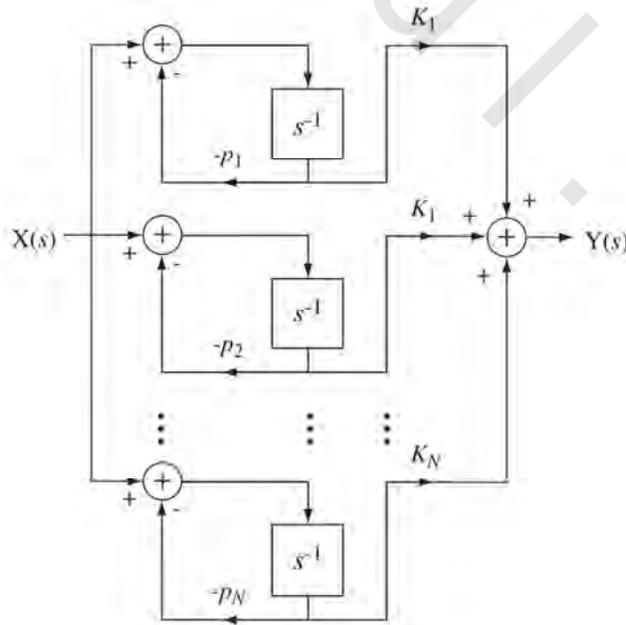
هناك مشكلة تحدث دائماً مع هذا النوع من البناء المتتالي. في بعض الأحيان يكون النظام الفرعي الأول به أقطاب مركبة، وهذا يستلزم الضرب في أرقام مركبة وهذا لا يمكن عمله عادة أثناء البناء الحقيقي للنظام. في هذه الحالات، يمكن ربط نظامين فرعيين بأقطاب مركبة مترافقة في صورة نظام فرعي واحد من الدرجة الثانية على الصورة.

$$H_k(s) = \frac{s+b_0}{s^2+a_1s+a_0}$$

والتي يمكن بناؤها عادة باستخدام معاملات حقيقية كما في شكل (١٣.٤٤).



شكل رقم (١٣.٤٤) نظام قياسي فرعي من الدرجة الثانية



شكل رقم (١٣.٤٥) بناء النظام الكلي المتوازي.

البناء المتوازي

آخر طرق البناء القياسي للأنظمة هي البناء المتوازي. يمكن تحقيق ذلك عن طريق تحليل دالة العبور القياسية في المعادلة (١٣.١٠) في صورة كسور جزئية على الصورة التالية وكما في شكل (١٣.٤٥):

$$H(s) = \frac{K_1}{s-P_1} + \frac{K_2}{s-P_2} + \dots + \frac{K_N}{s-P_N}$$

(١٣.٨) ملخص النقاط المهمة

- ١- يمكن وصف الأنظمة المستمرة زمنياً عن طريق المعادلات التفاضلية، أو المخططات الصندوقية، أو مخططات الدوائر وفي النطاق الزمني أو النطاق الترددي.
- ٢- النظام LTI المستمر زمنياً يكون مستقراً إذا كانت كل أقطاب دالة العبور له تقع في النصف الأيسر المفتوح من المستوى s .
- ٣- الأنظمة المستقرة هامشياً تكون مجموعة فرعية من الأنظمة غير المستقرة.
- ٤- أهم ثلاث أنواع من التوصيل البيئي للأنظمة هي التوصيل على التوالي، والتوصيل على التوازي، وتوصيل التغذية العكسية.
- ٥- إشارة وحدة الخطوة والإشارة الجيبية تعتبر إشارات عملية مهمة لاختبار خواص النظام.
- ٦- الصورة المباشرة II، والبناء على التوالي وعلى التوازي هي أهم الطرق القياسية لبناء الأنظمة.

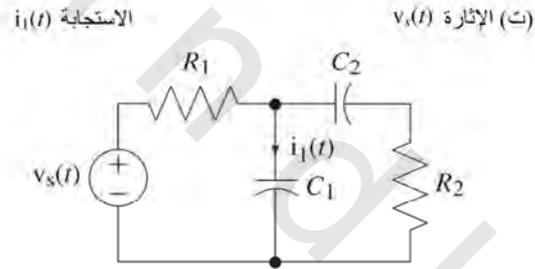
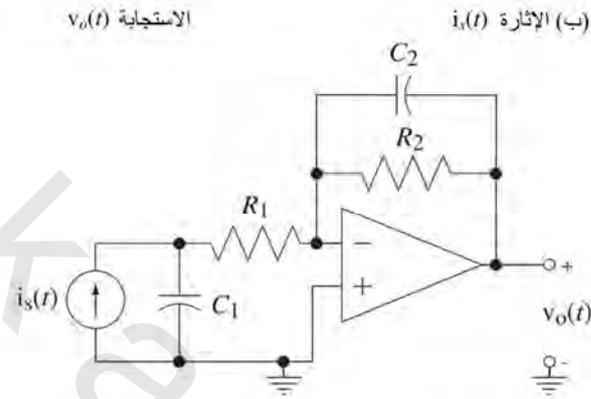
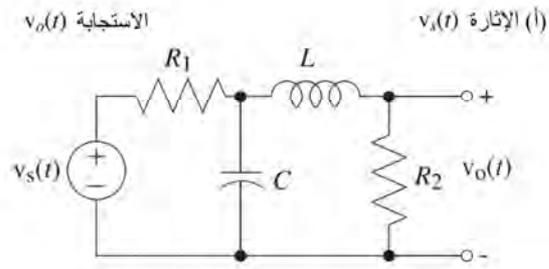
تمارين مع الإجابات

(في كل تمرين، تكون الإجابات مرتبة بطريقة عشوائية)

دوال العبور

- ١- لكل دائرة في شكل (ت-١) أكتب دالة العبور بين الإثارة والاستجابة الموضحتين. عبر عن كل دالة عبور في الصورة القياسية التالية:

$$H(s) = A \frac{s^M + b_{N-1}s^{M-1} + \dots + b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^N + a_{D-1}s^{N-1} + \dots + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$



شكل رقم (ت-١)

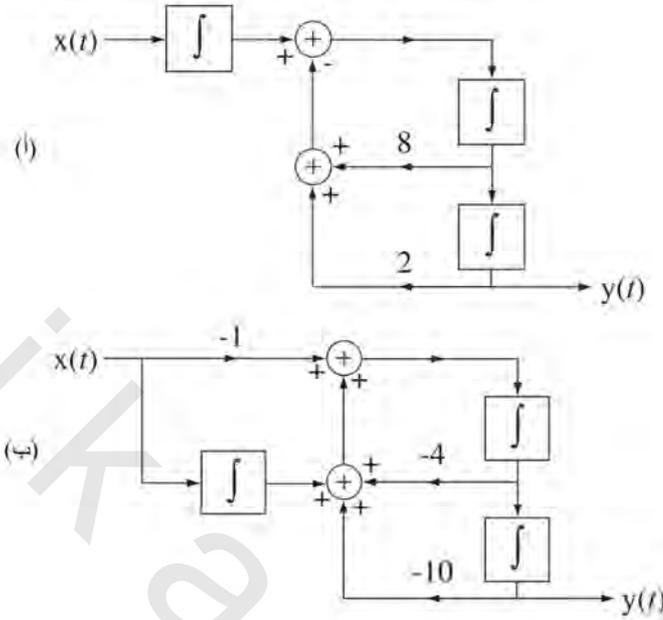
الإجابة:

$$\frac{1}{R_1} \frac{s^2 + s \frac{1}{R_2 C_2}}{s^2 + s \left(\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_1 C_1} \right) + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

$$\frac{R_2}{R_1 L C} \frac{1}{s^2 + s \left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{R_2}{L} \right) + \frac{R_2 + R_1}{R_1 C L}}$$

$$- \frac{1}{R_1 C_1 C_2} \frac{1}{s^2 + s \left(\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_1} \right) + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

٢- لكل مخطط صندوقي في شكل (ت-٢) اكتب دالة العبور حيث تكون $x(t)$ هي إشارة الدخل، و $y(t)$ هي إشارة الخرج.



شكل رقم (ت-٢)

الإجابة:

$$\frac{1}{s^3+8s^2+2s} - \frac{s-1}{s^3+4s^2+10s}$$

الاستقرار

٣- تحقق من استقرار كل من الأنظمة التالية التي دوال عبورها كما يلي:

(أ) $H(s) = \frac{100}{s+200}$

(ب) $H(s) = \frac{80}{s-4}$

(ت) $H(s) = \frac{6}{s(s+1)}$

(ث) $H(s) = \frac{15s}{s^2+4s+4}$

(ج) $H(s) = \frac{s-10}{s^2+4s+29}$

(ح) $H(s) = 3 \frac{s^2-4}{s^2-4s+29}$

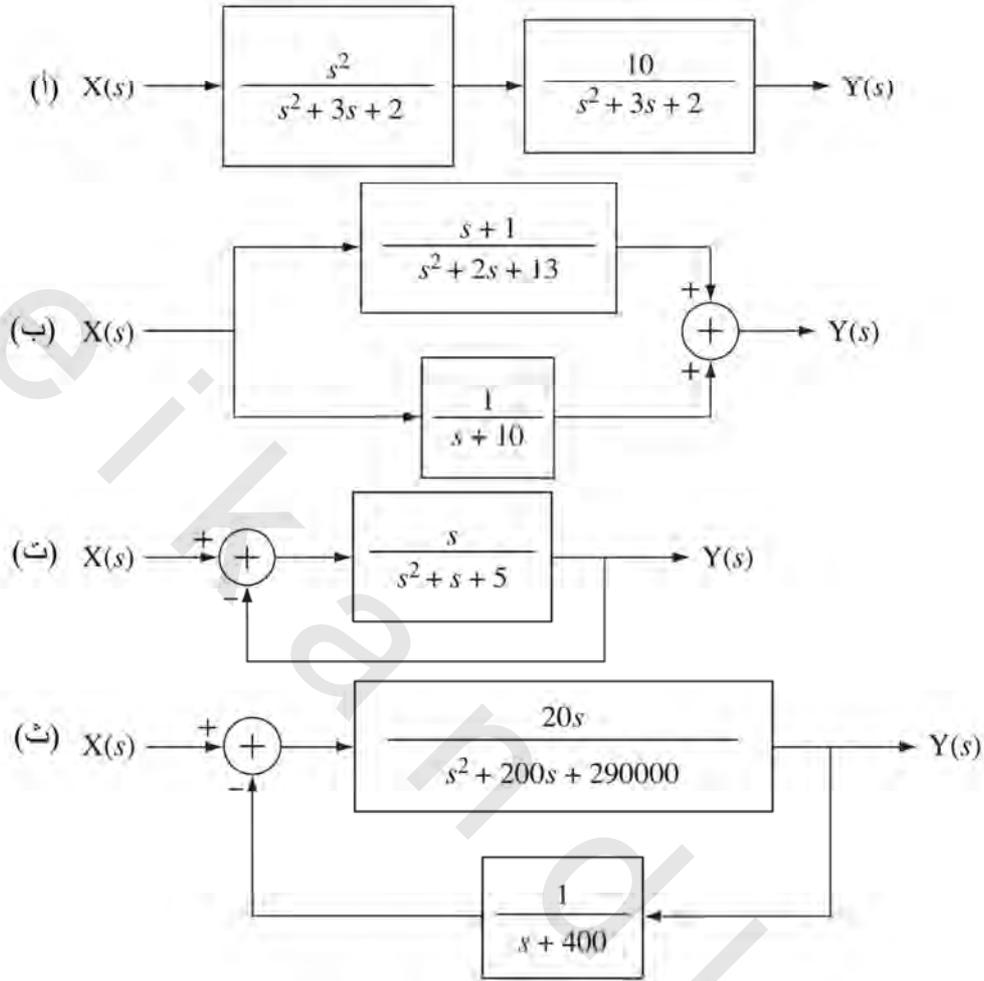
(خ) $H(s) = \frac{1}{s^2+64}$

(د) $H(s) = \frac{10}{s^3+4s^2+29s}$

الإجابة: 3 أنظمة مستقرة، و5 غير مستقرة بما في ذلك 33 مستقرة هامشياً

التوصيلات على التوالي وعلى التوازي والتغذية العكسية

٤- أوجد دوال العبور الكلية للأنظمة الموضحة في شكل (ت-٤) في صورة نسبة واحدة من كثيرتي حدود في المتغير s.



شكل رقم (ت-٤)

الإجابة:

$$20 \frac{s^2+400s}{s^3+600s^2+370020s+1.16 \times 10^8}, \quad 2 \frac{s^2+6.5s+11.5}{s^3+12s^2+33s+130},$$

$$10 \frac{s^2}{s^4+600s^3+370020s^2+12s+4}, \quad \frac{s}{s^2+2s+5}$$

٥- في نظام التغذية العكسية الموضح في شكل (ت-٥)، أوجد دالة العبور الكلية لهذه القيم لمعامل التكبير K في المسار الأمامي.

(أ) $K = 10^6$

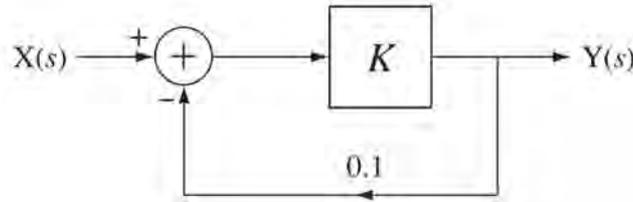
(ب) $K = 10^5$

$$\text{(ت)} \quad K = 10$$

$$\text{(ث)} \quad K = 1$$

$$\text{(ج)} \quad K = -1$$

$$\text{(ح)} \quad K = -10$$



شكل رقم (ت-٥)

الإجابة: 5، -1.111، $-\infty$ ، 0.909، 10، 10

٦- في نظام التغذية العكسية الموضح في شكل (ت-٦) ارسم استجابة النظام لوحدة الخطوة في الفترة الزمنية $0 < t < 10$ ، ثم اكتب معادلة لدالة العبور الكلية وارسم مخطط الأقطاب والأصفار لهذه القيم لـ K.

$$\text{(أ)} \quad K = 20$$

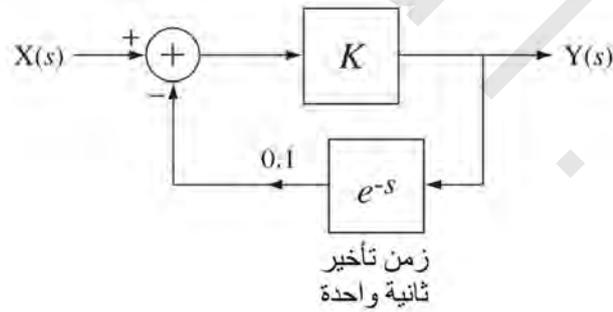
$$\text{(ب)} \quad K = 10$$

$$\text{(ث)} \quad K = 1$$

$$\text{(ج)} \quad K = -1$$

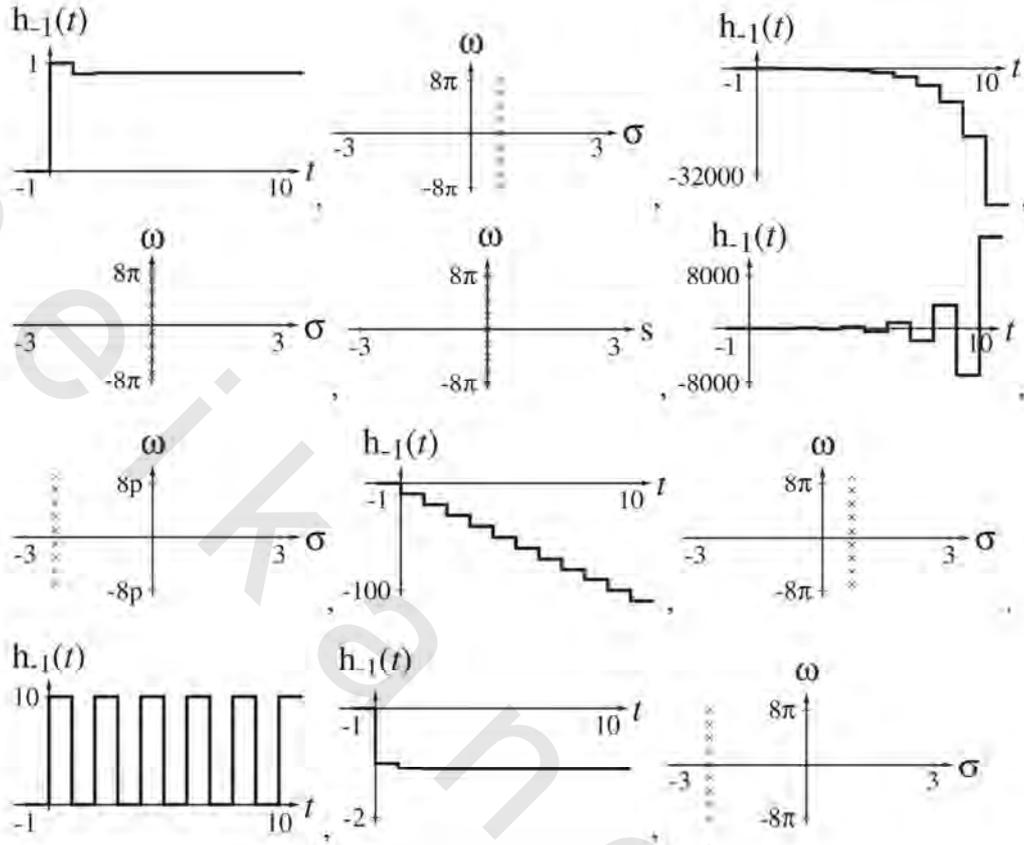
$$\text{(ح)} \quad K = -10$$

$$\text{(خ)} \quad K = -20$$



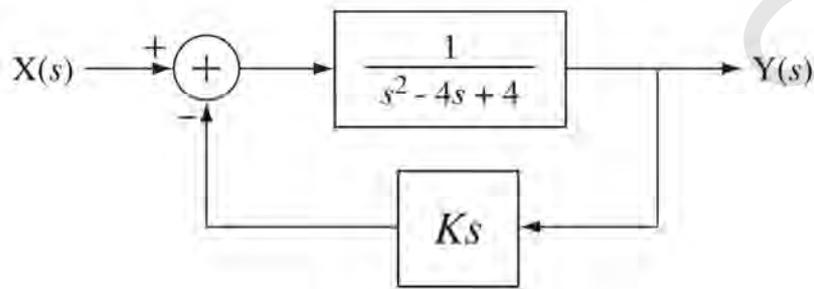
شكل رقم (ت-٦)

الإجابة:

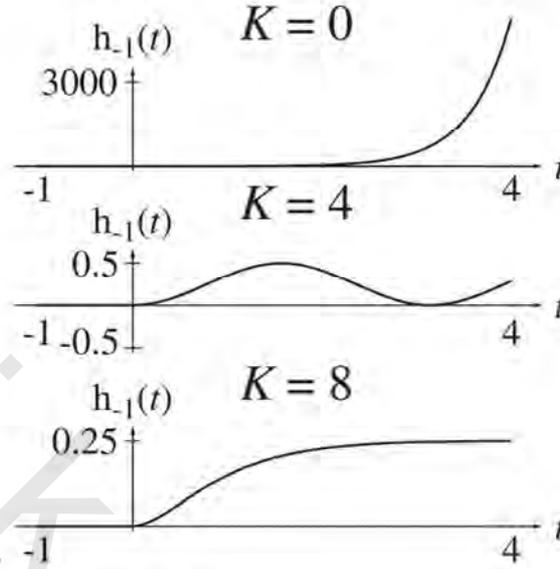


شكل رقم (ج-ت-٦)

٧- إلى مدى لمعامل التكبير K سيكون النظام في شكل (ت-٧) مستقرًا؟ ارسم استجابة دوال الخطوة عندما $K=0$ ، و $K=4$ ، و $K=8$.

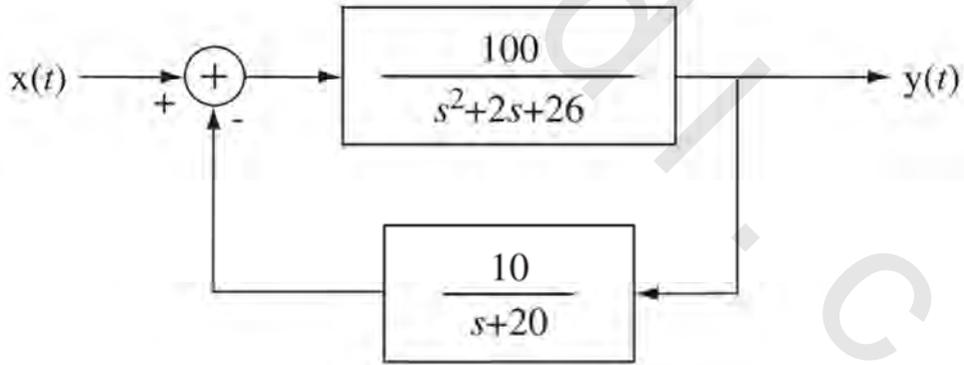


شكل رقم (ت-٧)

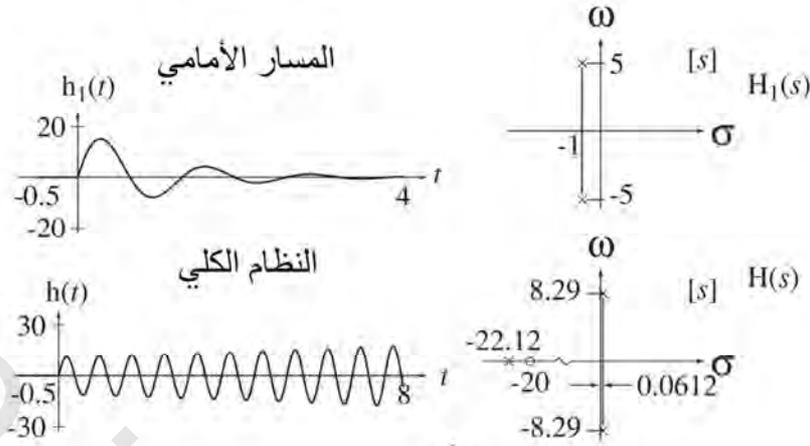
الإجابة: $K > 4$ 

شكل رقم (ج-ت-٧)

٨- ارسم استجابة الصدمة ومخطط الأقطاب والأصفار للمسار الأمامي وللنظام الكلي الموضح في شكل (ت-٨).



شكل رقم (ت-٨)



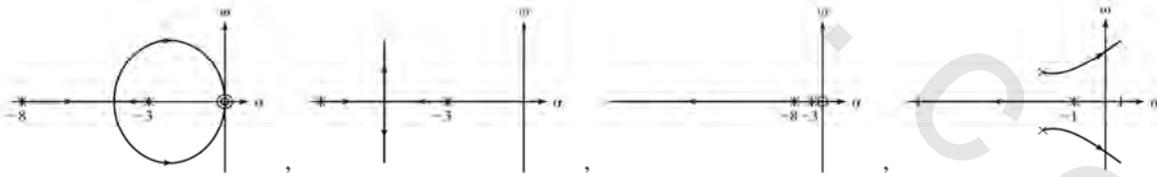
شكل رقم (ج-ت-٨)

الموضع الجذري

٩- ارسم الموضع الجذري لكل واحد من الأنظمة التي لها دوال عبور الحلقة التالية وحدد دوال العبور التي تكون مستقرة لكل القيم الموجبة لـ K .

- (أ) $T(s) = \frac{K}{(s+3)(s+8)}$
- (ب) $T(s) = \frac{Ks}{(s+3)(s+8)}$
- (ت) $T(s) = \frac{Ks^2}{(s+3)(s+8)}$
- (ث) $T(s) = \frac{K}{(s+1)(s^2+4s+8)}$

الإجابة: ثلاثة مستقرة للقيم الموجبة المحددة لـ K ، وواحدة غير مستقرة لبعض القيم الموجبة المحددة لـ K .



شكل رقم (ج-ت-9)

تتبع أخطاء أنظمة التغذية العكسية التي لها معامل تكبير الوحدة

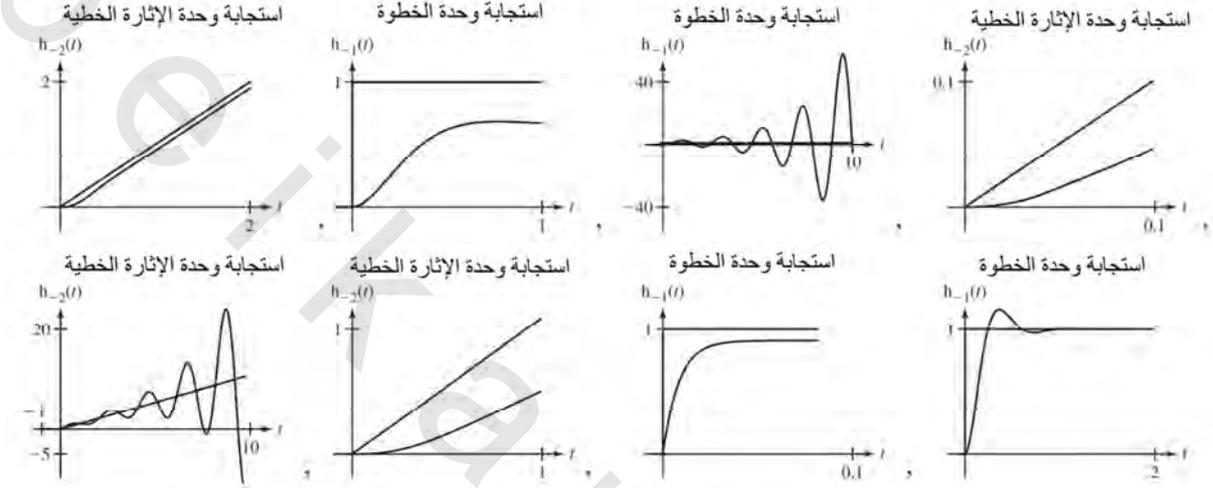
١٠- ارسم استجابة وحدة الخطوة، واستجابة الإثارة الخطية التصاعدية لنظم التغذية العكسية التي لها دوال عبور المسارات الأمامية التالية:

$$(أ) H_1(s) = \frac{100}{s+10}$$

$$(ب) H_1(s) = \frac{100}{s(s+10)}$$

$$(ث) H_1(s) = \frac{100}{s^2(s+10)}$$

$$(ج) H_1(s) = \frac{20}{(s+2)(s+6)}$$



شكل رقم (ج-ت-١٠).

الاستجابة للإشارات القياسية

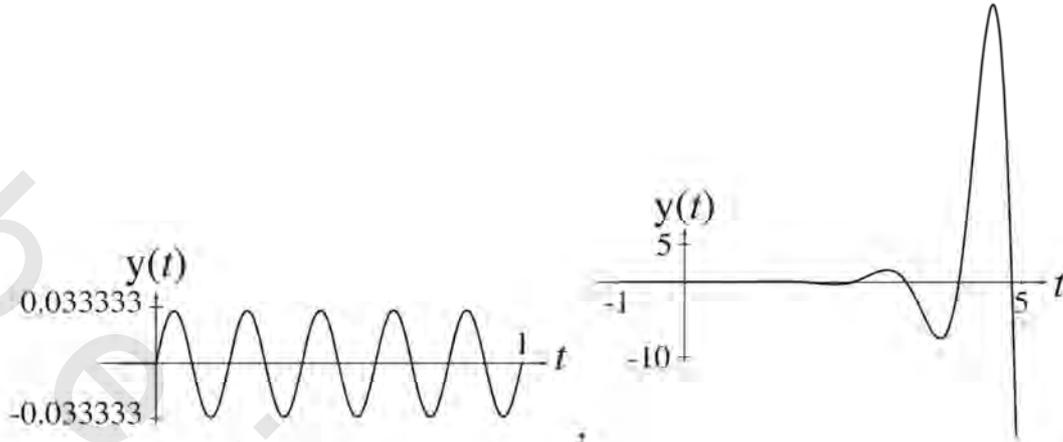
١١ - باستخدام تحويل لابلاس، أوجد وارسم الاستجابة $y(t)$ في النطاق الزمني للأنظمة التي لها دوال

العبور التالية للإشارة الجيبية السببية: $x(t) = A \cos(10\pi t)u(t)$.

$$(أ) H(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$(ب) H(s) = \frac{s-2}{(s-2)^2+16}$$

الإجابة:



شكل رقم (ج-ت-١١).

١٢ - أوجد استجابات الأنظمة التي لها دوال العبور التالية لوحدة خطوة ووحدة مقدار، وجيب تمام تردده 1Hz يتم تطبيقه عند $t=0$. أوجد أيضاً الاستجابة لوحدة مقدار حقيقية، وجيب تمام تردده 1Hz باستخدام CTFT وقارن مع الاستجابة المدفوعة للحل الكلي الذي تحصل عليه باستخدام تحويل لابلاس.

- (أ) $H(s) = \frac{1}{s}$
 (ب) $H(s) = \frac{s}{s+1}$
 (ت) $H(s) = \frac{s}{s^2+2s+40}$
 (ث) $H(s) = \frac{s^2+2s+40}{s^2}$

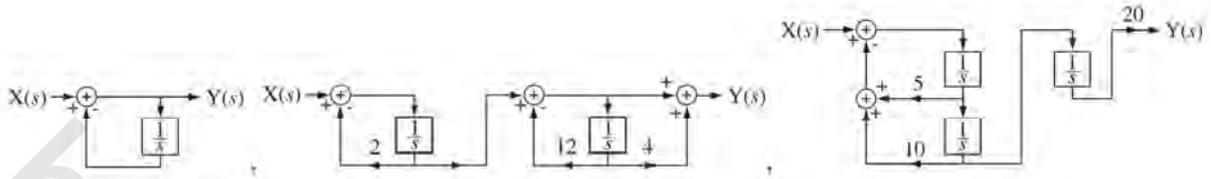
الإجابة: (استجابات الخطوة) $[1+2t+20t^2]$ ، $\text{ramp}(t)$ ، $0.16e^{-t}\sin(6.245t)u(t)$ ، $e^{-t}u(t)$.

بناء الأنظمة

١٣ - ارسم مخططات متتالية للأنظمة التي لها دوال العبور التالية:

- (أ) $H(s) = \frac{s}{s+1}$
 (ب) $H(s) = \frac{s+4}{(s+2)(s+12)}$
 (ت) $H(s) = \frac{20}{s(s^2+5s+10)}$

الإجابة:



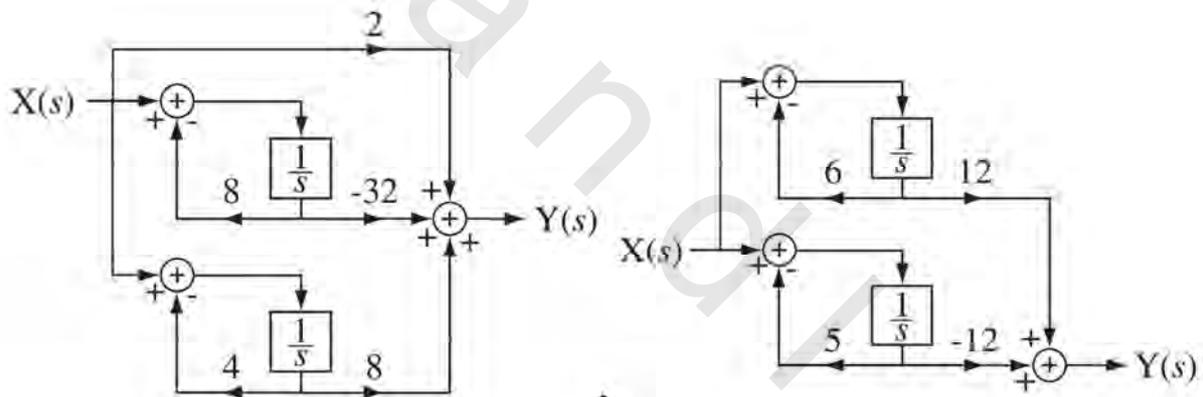
شكل رقم (ج-ت-١٣)

١٤ - ارسم المخططات المتوازية للأنظمة التي لها دوال العبور التالية:

(أ) $H(s) = \frac{-12}{s^2+11s+30}$

(ب) $H(s) = \frac{2s^2}{s^2+12s+32}$

الإجابة:



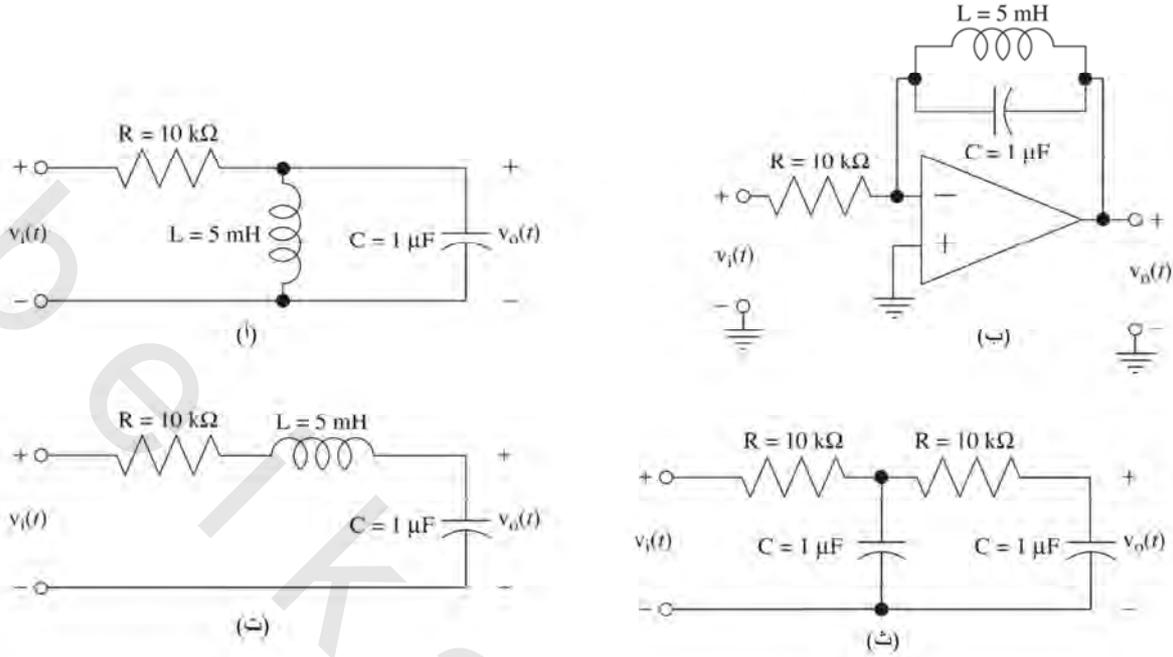
شكل رقم (ج-ت-١٤)

تمارين بدون إجابات

دوال العبور

١٥ - أوجد دوال العبور في النطاق s للدوائر الموضحة في شكل (ت- ١٥) ثم ارسم مخططات صندوقية لها

حيث $v_i(s)$ هي الإثارة، و $v_o(s)$ هي الاستجابة:



شكل رقم (ت-١٥)

الاستقرار

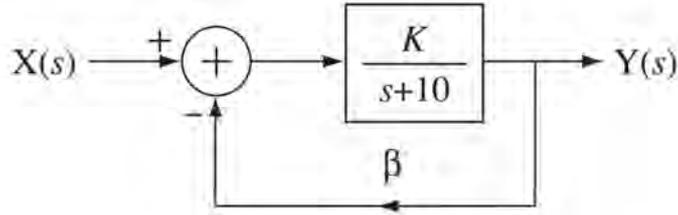
١٦ - حدد إذا كانت الأنظمة التي لها دوال العبور التالية تكون مستقرة، أم مستقرة هامشياً، أم غير مستقرة.

- (أ) $H(s) = \frac{s(s+2)}{s^2+8}$
 (ب) $H(s) = \frac{s(s-2)}{s^2-8}$
 (ت) $H(s) = \frac{s^2}{s^2+4s+8}$
 (ث) $H(s) = \frac{s^2}{s^2-4s+8}$
 (ج) $H(s) = \frac{s}{s^3-4s^2+8s}$

التوصيلات المتوازية، والمتوالية، والتغذية العكسية

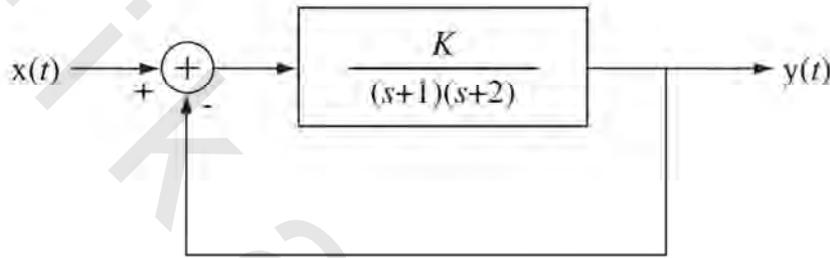
١٧ - أوجد معادلة النظام الكلي للنظام الموضح في شكل (ت-١٧).

- (أ) بفرض $\beta=1$ ، لأي قيم لـ K سيكون النظام مستقراً؟
 (ب) بفرض $\beta=-1$ ، لأي قيم لـ K سيكون النظام مستقراً؟
 (ت) بفرض $\beta=10$ ، لأي قيم لـ K سيكون النظام مستقراً؟



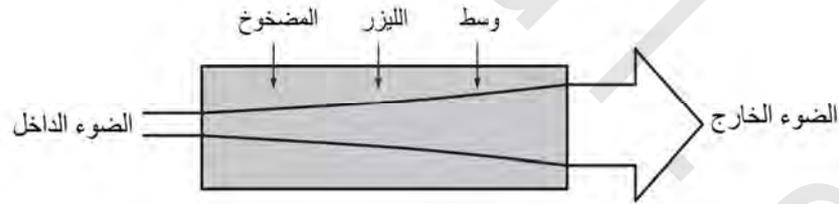
شكل رقم (ت-١٧)

١٨ - أوجد معادلة دالة العبور الكلية للنظام الموضح في شكل (ت- ١٨). لأي قيم موجبة لـ K سيكون النظام مستقرًا؟

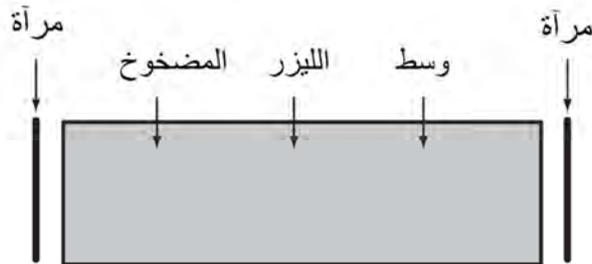


شكل رقم (ت-١٨)

١٩ - ليزر يعمل على المبدأ الأساسي بأن وسط الضخ يكبر الضوء المسافر أثناء انتشاره خلال الوسط. بدون المرايا يصبح الليزر مكبر موجة مسافرة أحادية المرور، كما في شكل (ت- ١٩أ)، وهذا يعتبر نظاماً بدون تغذية مرتدة. إذا قمنا الآن بوضع مرايا عند كل نهاية في وسط الضخ، فإننا نحدث تغذية مرتدة في النظام كما في شكل (ت- ١٩ب).



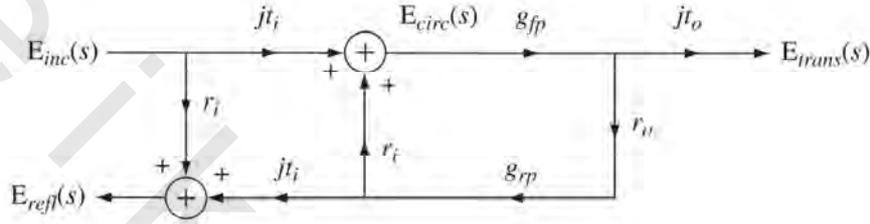
شكل رقم (ت-١٩أ) مكبر موجة ضوئية تسافر في مسار واحد



شكل رقم (ت-١٩ب) مكبر موجة ضوئية تجددية أو توالدية.

عندما يكون معامل تكبير الوسط كبيراً بما فيه الكفاية، فإن النظام سيتردد، مولداً شعاعاً ضوئياً متوافقاً، ومعبراً عن تشغيل الليزر. إذا كان معامل تكبير الوسط أقل من المطلوب لتوليد الذبذبات المستديمة، فإن النظام يسمى مكبراً تجديداً للموجة المسافرة RTWA، regenerative traveling wave amplifier.

افتراض أن المجال الكهربائي لشعاع ضوئي ساقط على RTWA من اليسار سيكون هو الإثارة للنظام $E_{inc}(s)$ ، وافترض أن المجال الكهربائي للضوء المنعكس $E_{ref}(s)$ والضوء المرسل أو العابر $E_{trans}(s)$ هما استجابات هذا النظام، كما في شكل (١٣ - ١٩).



شكل رقم (١٣-١٩) مخطط صندوق ل RTWA1

افتراض أن معاملات النظام ستكون كما يلي:

انعكاسية المجال الكهربائي لمراية الدخل $r_i=0.99$

إرسالية المجال الكهربائي لمراية الدخل $t_i = \sqrt{1 - r_i^2}$

انعكاسية المجال الكهربائي لمراية الخرج $r_o=0.98$

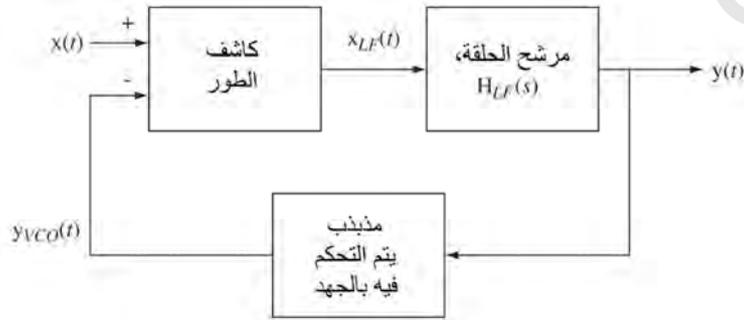
إرسالية المجال الكهربائي لمراية الخرج $t_o = \sqrt{1 - r_o^2}$

معاملات تكبير المسار الأمامي والعكسي $g_{fp}(s) = g_{rp}(s) = 1.01e^{-10^{-9}s}$

أوجد معادلة الاستجابة الترددية $E_{trans}(f)/E_{inc}(f)$ وارسم مقدارها على المدى الترددي $\pm 3 \times 10^{14}$ Hz 5×10^8 .

٢٠- من الأمثلة الكلاسيكية على استخدام التغذية العكسية هو حلقة الطور المغلقة phase locked loop

المستخدمة لاستخلاص الإشارات المعدلة ترددياً، كما في شكل (ت- ٢٠).



شكل رقم (ت-٢٠) حلقة الطور المغلقة

إشارة الدخل $x(t)$ هي إشارة جيبية معدلة ترددياً. كاشف الطور يكشف عن فرق الزاوية بين إشارة الدخل والإشارة المنتجة من المذبذب المتحكم فيه جهدياً. استجابة الكاشف الطورة تكون جهدياً متناسب مع الفرق في الطور. يقوم مرشح الحلقة بترشيح هذا الجهد. تقوم إشارة الخرج بعد ذلك بالتحكم في تردد المذبذب الجهدي. عندما تكون إشارة الدخل عند تردد ثابت وتكون الحلقة مغلقة يكون الفرق في الطور بين إشارتي دخل الكاشف الطوري يساوي صفراً. (في الكاشف الطوري الحقيقي يكون الفرق في الطور 90 درجة عند الغلق. ولكن هذا لا يكون مهماً في هذا التحليل، حيث ذلك لا يكون له أي تأثير على أداء أو استقرار النظام). مع تغير تردد إشارة الدخل $x(t)$ ، فإن الحلقة ستكتشف التغير الطوري المصاحب لذلك وتحاول تتبعه. إشارة الخرج الكلية $y(t)$ تكون عبارة عن إشارة تتناسب مع تردد إشارة الدخل.

الإثارة الحقيقية، بمفهوم الأنظمة، لهذا النظام ليست $x(t)$ ، ولكنها بدلاً من ذلك زاوية الطور لـ $x(t)$ وهي $\phi_x(t)$ ، لأن الكاشف الطوري يكشف عن الفرق في الطور وليس الفرق في الجهد. افترض أن تردد الـ $x(t)$ هو $f_x(t)$. العلاقة بين الطور والتردد، يمكن رؤيتها عن طريق فحص أي دالة جيبية. افترض $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$. طور هذه الدالة هو $2\pi f_0 t$ ، وبالنسبة للدوال الجيبية البسيطة (f_0 تكون ثابتة)، وهذا الطور يزيد خطياً مع الزمن. التردد f_0 يساوي تفاضل الطور. لذلك فإن العلاقة بين الطور والتردد، بالنسبة للإشارة المعدلة ترددياً ستكون:

$$f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} (\phi_x(t))$$

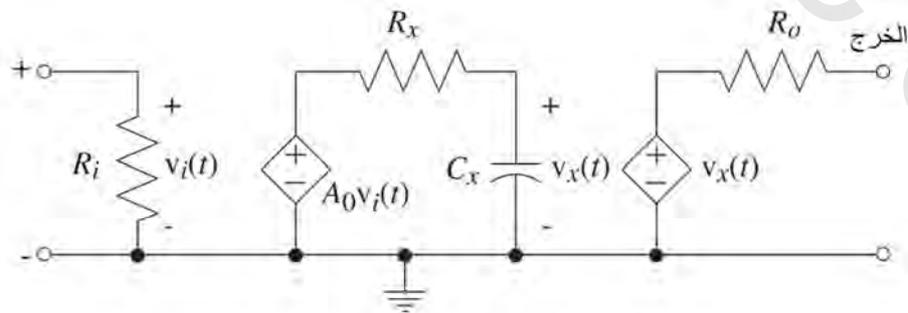
افترض أن تردد $x(t)$ يساوي 100Hz. افترض أن دالة العبور للمذبذب الجهدي تساوي 10^8Hz/V . افترض أيضاً أن دالة العبور لمرشح الحلقة ستكون:

$$H_{LF}(s) = \frac{1}{s + 1.2 \times 10^5}$$

افترض أن دالة العبور للكاشف الطوري تساوي 1V/radian. إذا تغير تردد الإشارة $x(t)$ فجأة إلى 100.001MHz، ارسم التغير في إشارة الخرج $\Delta y(t)$.

٢١- الدائرة الموضحة في شكل (ت-٢١) هي نموذج تقريبي مبسط لمكبر عمليات مع توصيل الطرف

العاكس للأرضي.



شكل رقم (ت-٢١)

بفرض القيم التالية:

$$R_i = 1M\Omega, R_x = 1k\Omega, C_x = 8\mu F, R_o = 10\Omega, A_0 = 10^6$$

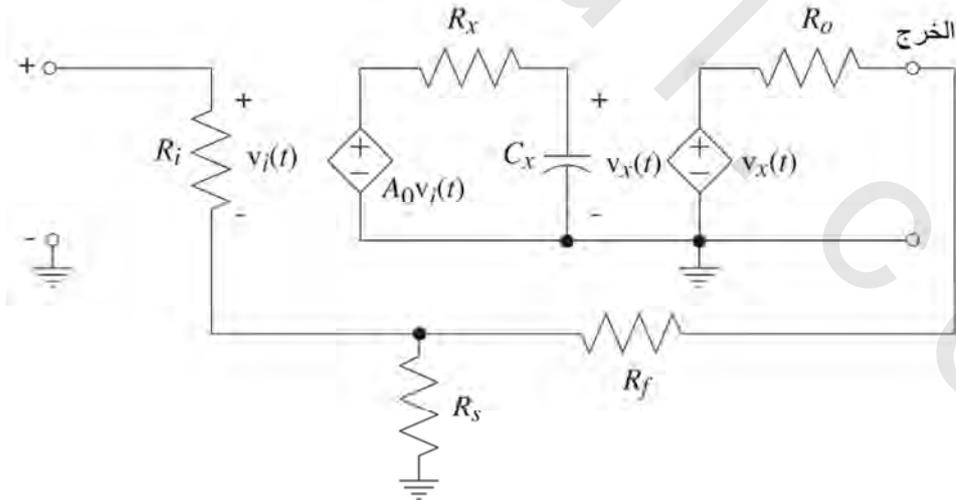
(أ) اعتبر الإثارة للدائرة هي تيار من مصدر تيار ثابت مطبق على الدخل غير العاكس وافترض أن الاستجابة هي فرق الجهد بين الدخل غير العكس والأرضي. أوجد دالة العبور وارسم الاستجابة الترددية. دالة العبور هذه تمثل معاوقة الدخل؟

(ب) افترض أن الإثارة لهذه الدائرة هي تيار من مصدر تيار ثابت مطبق على الخرج وأن الاستجابة هي الجهد المتكون بين طرف الخرج والأرضي مع توصيل الدخل غير العاكس للأرضي. أوجد دالة العبور وارسم الاستجابة الترددية. دالة العبور هذه تمثل معاوقة الخرج.

(ت) افترض أن الإثارة لهذه الدائرة عبارة عن جهد من مصدر جهد ثابت مطبق على الدخل غير العاكس وأن الاستجابة هي الجهد المتكون بين طرف الخرج والأرضي. أوجد دالة العبور وارسم الاستجابة الترددية. دالة العبور هذه تمثل معامل تكبير الجهد.

٢٢- غير الدائرة في تمرين ٢١ إلى الدائرة الموضحة في شكل (ت-٢٢). إنها هي دائرة تغذية مرتدة، تحقق معامل تكبير جهد موجب حلقة مغلقة في المكبر الكلي. أعد الخطوات (أ)، و(ب)، و(ت) في المسألة #6 لدائرة التغذية العكسية وقارن بين النتائج. ما هي التأثيرات المهمة للتغذية العكسية لهذه الدائرة. افترض القيم التالية لمكونات الدائرة:

$$R_i = 1M\Omega, R_x = 1k\Omega, C_x = 8\mu F, R_o = 10\Omega, A_0 = 10^6, R_f = 10k\Omega, R_s = 5k\Omega$$



شكل رقم (ت-٢٢)

الموضع الجذري

٢٣- ارسم الموضع الجذري لكل من الأنظمة التي لها دوال عبور الحلقة التالية وحدد منها دوال العبور التي تكون مستقرة لكل القيم الموجبة لـ K.

$$(أ) T(s) = \frac{K(s+10)}{(s+1)(s^2+4s+8)}$$

$$(ب) T(s) = \frac{K(s^2+10)}{(s+1)(s^2+4s+8)}$$

$$(ت) T(s) = \frac{K}{s^3+37s^2+332s+800}$$

$$(ث) T(s) = \frac{K(s-4)}{s+4}$$

$$(ج) T(s) = \frac{K(s-4)}{(s+4)^2}$$

$$(ح) T(s) = \frac{K(s+6)}{(s+5)(s+9)(s^2+4s+12)}$$

تتبع الأخطاء في أنظمة التغذية العكسية ذات معامل تكبير الوحدة

٢٤- ارسم استجابة الخطوة والاستجابة الخطية لأنظمة التغذية العكسية ذات تردد الوحدة التي لها دالة عبور المسار الأمامي كما يلي:

$$(أ) H_1(s) = \frac{20}{(s+2)(s+6)}$$

$$(ب) H_1(s) = H_1(s) = \frac{20}{s^2(s+2)(s+6)}$$

$$(ت) H_1(s) = \frac{100}{s^2+10s+34}$$

$$(ث) H_1(s) = \frac{100}{s(s^2+10s+34)}$$

$$(ج) H_1(s) = \frac{100}{s^2(s^2+10s+34)}$$

الاستجابة للإشارات القياسية

٢٥- بمعلومية دالة العبور للنظام LTI، أوجد استجابة النطاق الزمني y(t) للإشارات x(t):

$$(أ) X(t) = \sin(2\pi t)u(t), H(s) = \frac{1}{s+1}$$

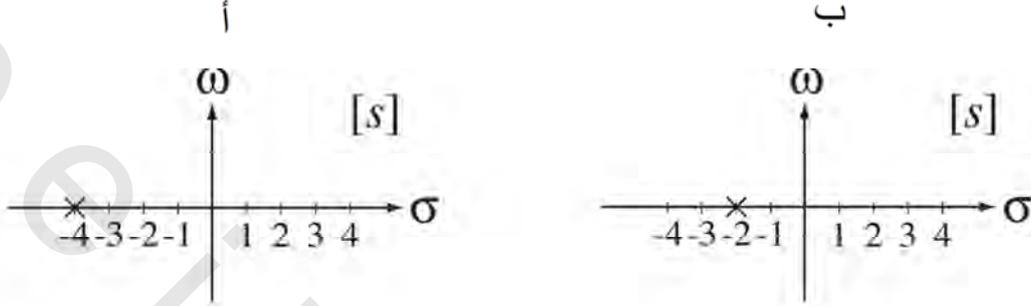
$$(ب) X(t) = u(t), H(s) = \frac{3s}{s+2}$$

$$(ت) X(t) = u(t), H(s) = \frac{3}{s+2}$$

$$(ث) X(t) = u(t), H(s) = \frac{5s}{s^2+2s+2}$$

$$(ج) X(t) = \sin(2\pi t)u(t), H(s) = \frac{5s}{s^2+2s+2}$$

٢٦- النظامان A و B الموضحان في شكل (ت- ٢٦) لهما مخططات الأقطاب والأصفار الموضحة. أيهما يستجيب بشكل أسرع لوحدة الخطوة (بمعنى يصل إلى القيمة النهائية بمعدل أسرع)؟ اشرح إجابتك.



شكل رقم (ت-٢٦)

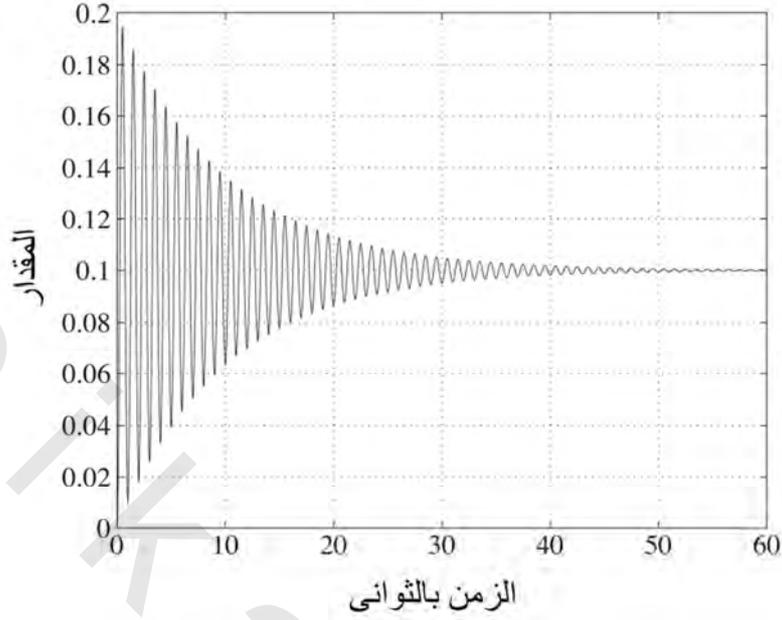
٢٧- النظامان A و B الموضحان في شكل (ت- ٢٦) لهما مخططات الأقطاب والأصفار الموضحة. أيهما يكون له استجابة خطوة تتخطى القيمة النهائية قبل أن تستقر عند القيمة النهائية؟ اشرح إجابتك.



شكل رقم (ت-٢٧)

٢٨- نظام من الدرجة الثانية تتم إثارته بوحدة خطوة واستجابته، كما هو موضح في شكل (ت- ٢٨). اكتب معادلة دالة عبور هذا النظام؟

استجابة الخطوة



شكل رقم (ت-٢٨) استجابة الخطوة لنظام من الدرجة الثانية

بناء الأنظمة

٢٩- ارسم مخططات توالٍ للأنظمة التي لها دوال العبور التالية :

(أ) $H(s) = -50 \frac{s^2}{s^3 + 8s^2 + 13s + 40}$

(ب) $H(s) = \frac{s^3}{s^3 + 18s^2 + 92s + 120}$

٣٠- ارسم مخططات توازٍ للأنظمة التي دوال العبور التالية :

(أ) $H(s) = -50 \frac{s^3}{s^3 + 4s^2 + 9s + 3}$

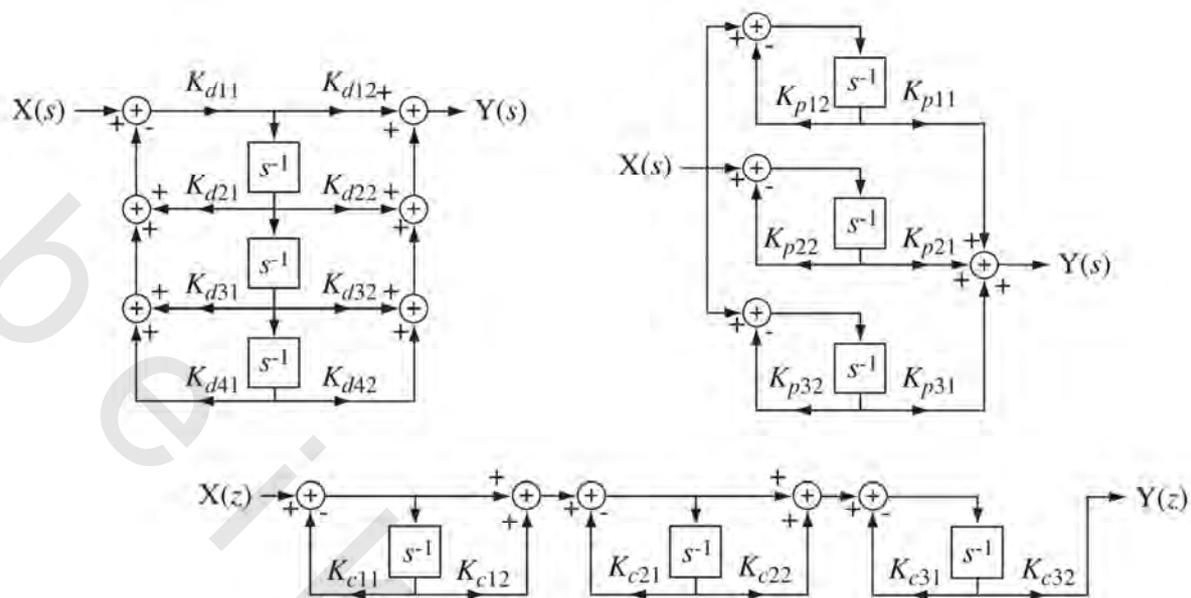
(ب) $H(s) = \frac{5}{6s^3 + 77s^2 + 228s + 189}$

٣١- نظام له دالة العبور التالية :

$$H(s) = 10 \frac{s^2 - 16}{s(s^2 + 4s + 3)}$$

هناك ثلاثة أبنية موضحة في شكل (ت-٣١)، الصورة المباشرة II، والتوصيل التوالي والتوازي. أوجد

قيم كل معاملات التكبير K.



شكل رقم (ت-٣١)

تحويل زد (z) لتحليل الأنظمة

(١٤.١) المقدمة والأهداف

هذا الفصل يتبع طريقاً مثل الذي في الفصل ١٣ على تحليل الأنظمة باستخدام تحويل لابلاس، فيما عدا أن التطبيق سيكون على الإشارات والأنظمة المتقطعة زمنياً بدلاً من الإشارات والأنظمة المستمرة زمنياً.

أهداف الفصل

- ١- لكي نقدر العلاقة بين تحويل زد وتحويل لابلاس
- ٢- لكي نطبق تحويل زد على التحليل العام للأنظمة LTI، بما في ذلك أنظمة التغذية العكسية، والاستقرار، والاستجابات الزمنية للإشارات القياسية
- ٣- لكي نقدم طريقة لبناء أنظمة الزمن المتقطع في أشكال مختلفة

(١٤.٢) نماذج الأنظمة

المعادلات الفرقية

تكمّن القوة الحقيقية لتحويل لابلاس في تحليل السلوك الديناميكي لأنظمة الزمن المستمر. بطريقة مماثلة، فإن تحليل السلوك الديناميكي لأنظمة الزمن المتقطع تعتبر القوة الحقيقية لتحويل زد. معظم أنظمة الزمن المستمر التي يتم تحليلها بواسطة المهندسين يتم وصفها بمعادلات تفاضلية، ومعظم أنظمة الزمن المتقطع التي يتم تحليلها عن طريق المهندسين يتم وصفها بمعادلات فرقية. الصورة العامة لأي معادلة فرقية تصف نظام في الزمن المتقطع له إثارة هي $x[n]$ واستجابته هي $y[n]$ يمكن كتابتها كما يلي:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

بفرض أن كلاً من $x[n]$ و $y[n]$ سببيان ، وبإجراء تحويل زد على طرفي المعادلة السابقة نحصل على :

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$$

دالة العبور $H(z)$ هي نسبة $Y(z)$ على $X(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

أو :

$$H(z) = z^{-N-M} \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_{M-1} z + b_M}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_{N-1} z + a_N}$$

وعلى ذلك ، فإن دالة عبور النظام المتقطع زمنياً الموصوف بمعادلة فرقية تكون نسبة بين كثيرتي حدود في المتغير z ، وذلك تماماً مثل دالة عبور النظام المستمر زمنياً الموصوف بمعادلة تفاضلية تكون نسبة بين كثيرتي حدود في المتغير s .

المخططات الصندوقية

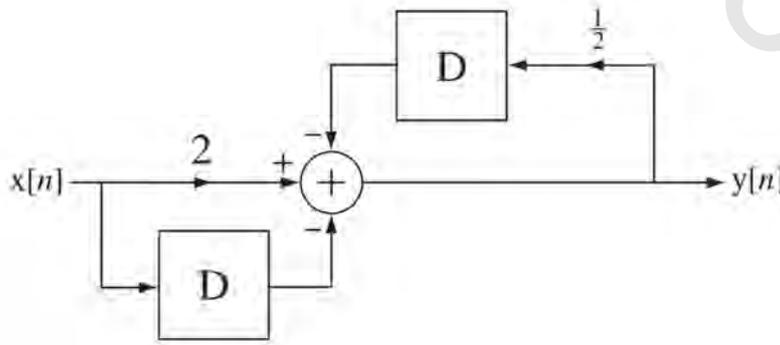
يمكن بسهولة نمذجة الأنظمة المتقطعة باستخدام المخططات الصندوقية تماماً مثلما كان الحال مع الأنظمة المستمرة زمنياً ، ويمكن كتابة دوال العبور مباشرة من هذه المخططات الصندوقية. افترض النظام الموضح في شكل (١٤.١).

المعادلة الفرقية الواصفة لهذا النظام هي : $y[n] = 2x[n] - x[n-1] - (1/2)y[n-1]$. يمكننا أن نعيد رسم المخطط الصندوقي لنجعله مخططاً صندوقياً في النطاق z بدلاً من المخطط الصندوقي في النطاق الزمني كما في شكل (١٤.٢).

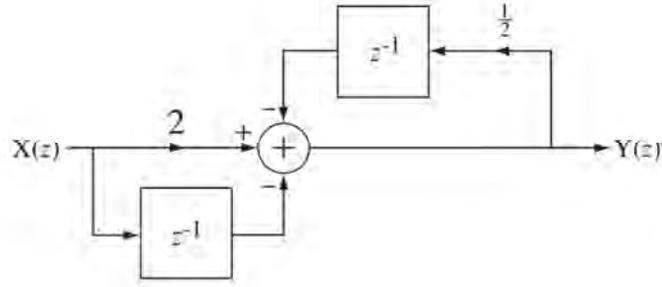
$$Y(z) = 2X(z) - z^{-1}X(z) - (1/2)z^{-1}Y(z)$$

وستكون دالة العبور على الصورة التالية :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2-z^{-1}}{1+(1/2)z^{-1}} = \frac{2z-1}{z+1/2}$$



شكل رقم (١٤.١) المخطط الصندوقي لنظام في النطاق الزمني.



شكل رقم (١٤.٢) المخطط الصندوقي لنظام في النطاق z.

(١٤.٣) استقرار النظام

أي نظام سببي متقطع زمنياً يكون مستقراً BIBO إذا كانت استجابة الصدمة له قابلة للجمع المطلق، بمعنى، أن يكون مجموع مقادير الصدمات في استجابة الصدمة محدداً. بالنسبة لنظام تكون دالة العبور له نسبة بين كثيرتي حدود في المتغير z على الصورة التالية:

$$H(z) = \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_M}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N}$$

حيث $M < N$ وكل الأقطاب مختلفة أو متميزة، فإن دالة العبور لهذا النظام يمكن كتابتها في صورة الكسور

الجزئية كما يلي:

$$H(z) = \frac{K_1}{z-p_1} + \frac{K_2}{z-p_2} + \dots + \frac{K_N}{z-p_N}$$

وبالتالي، فإن استجابة الصدمة ستكون على الصورة التالية:

$$h[n] = (K_1 p_1^{n-1} + K_2 p_2^{n-1} + \dots + K_N p_N^{n-1}) u[n-1],$$

(بعض الـ p's من الممكن أن تكون مركبة). لكي يكون النظام مستقراً، فإن كل كمية في المعادلة السابقة

يجب أن تكون قابلة للجمع. مجموع القيمة المطلقة لإحدى هذه المقادير يكون على الصورة:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |K p^{n-1} u[n-1]| = |K| \sum_{n=1}^{\infty} |p^{n-1}| = |K| \sum_{n=0}^{\infty} |p|^n (e^{j\omega})^n = |K| \sum_{n=0}^{\infty} |p|^n \frac{e^{jn\omega}}{1}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |K p^{n-1} u[n-1]| = |K| \sum_{n=1}^{\infty} |p|^n$$

تقارب المجموع السابق يتطلب أن تكون $|p| < 1$. لذلك لكي يكون النظام مستقراً، فإن كل الأقطاب يجب أن تحقق

الشرط $|p_k| < 1$.

لأي نظام متقطع زمنياً يجب أن تقع كل أقطاب دالة العبور في الداخل المفتوح لدائرة الوحدة في المستوى z حتى يكون النظام مستقراً.

وهذا يكافئ تماماً شرط أن تقع كل أقطاب النظام المستمر زمنياً في النصف الأيسر من المستوى s حتى يكون النظام مستقرًا. لقد تم إجراء هذه التحليل على الأحوال الأكثر شيوعاً التي تكون فيها كل الأقطاب مختلفة أو متميزة. إذا كان هناك أقطاب متكررة، فإنه يمكن إثبات أن متطلب أن كل الأقطاب يجب أن تقع في الداخل المفتوح لدائرة الوحدة في المستوى z لن يتغير.

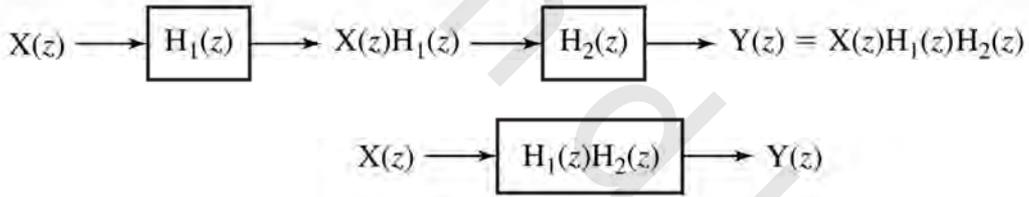
(١٤.٤) توصيلات النظام

يتم التعامل مع دوال العبور لمكونات موصلة على التوالي، أو على التوازي بتغذية عكسية لأنظمة متقطعة زمنياً بالطريقة نفسها في حالة الأنظمة المستمرة زمنياً كما في شكل (١٤.٣) حتى شكل (١٤.٥). يمكننا إيجاد دالة العبور الكلية لنظام تغذية عكسية بالطريقة نفسها التي تم اتباعها في حالة الأنظمة المستمرة زمنياً وستكون النتيجة كما يلي:

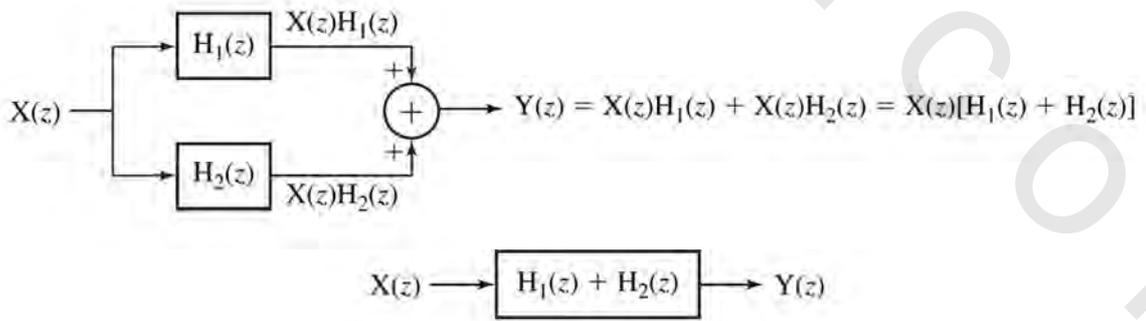
المعادلة رقم (١٤.١)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_1(z)}{1+H_1(z)H_2(z)} = \frac{H_1(z)}{1+T(z)}$$

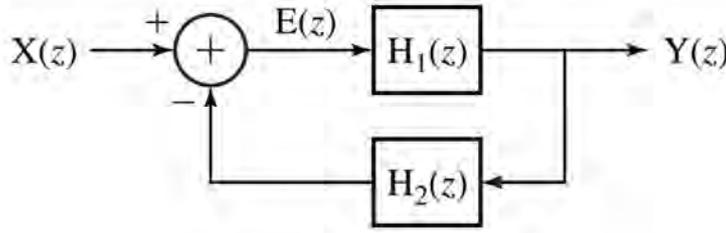
حيث $T(z)=H_1(z)H_2(z)$ هي دالة عبور الحلقة.



شكل رقم (١٤.٣) التوصيل على التوالي للأنظمة.



شكل رقم (١٤.٤) التوصيل على التوازي للأنظمة.



شكل رقم (١٤.٥) أنظمة التغذية العكسية.

مثلاً كان الأمر حقيقياً بالنسبة لأنظمة التغذية العكسية المستمرة زمنياً، فإنه يمكن رسم الموضع الجذري لأنظمة التغذية العكسية المتقطعة زمنياً التي لها:

$$H_1(z) = K \frac{P_1(z)}{Q_1(z)} \quad \text{و} \quad H_2(z) = \frac{P_2(z)}{Q_2(z)}$$

خطوات رسم الموضع الجذري هي نفسها تماماً لأنظمة المستمرة زمنياً فيما عدا أن دالة عبور الحلقة:

$$T(z) = H_1(z)H_2(z)$$

تكون دالة في المتغير z بدلا من المتغير s . وعلى ذلك فإن تفسير الموضع الجذري، بعد رسمه، يكون مختلفاً قليلاً. بالنسبة للأنظمة المستمرة زمنياً، كانت قيمة معامل تكبير المسار الأمامي K التي يعبر عندها الموضع الجذري إلى النصف الأيمن من المستوى s هي القيمة التي يصبح عندها النظام غير مستقر. بالنسبة للأنظمة المتقطعة زمنياً، ستكون العبارة السابقة كما هي فيما عدا أن "النصف الأيمن من المستوى s " تستبدل بـ "خارج دائرة الوحدة".

مثال ١٤.١

تحليل استقرار الأنظمة المتقطعة زمنياً باستخدام الموضع الجذري

ارسم الموضع الجذري للنظام المتقطع زمنياً الذي له دالة عبور للمسار الأمامي كما يلي:

$$H_1(z) = K \frac{z-1}{z+1/2}$$

وله دالة عبور للمسار العكسي كما يلي:

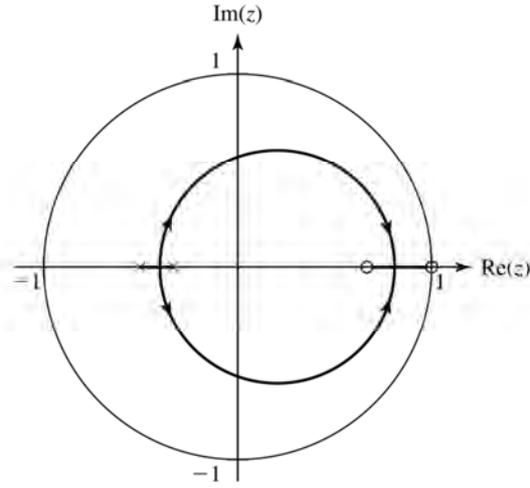
$$H_2(z) = \frac{z-2/3}{z+1/3}$$

فإن دالة عبور الحلقة ستكون على الصورة:

$$T(z) = K \frac{z-1}{z+1/2} \frac{z-2/3}{z+1/3}$$

هناك صفران عند $z=2/3$ ، و $z=1$ ، وقطبان عند $z=-1/2$ ، و $z=-1/3$. من الواضح من شكل الموضع الجذري

في شكل (١٤.٦) أن النظام سيكون مستقراً بدون أي شرط لأي قيمة موجبة لـ K .



شكل رقم (١٤.٦) الموضع الجذري لدالة عبور الحلقة التالية:

$$T(z) = K \frac{z-1}{z+1/2} \frac{z-2/3}{z+1/3}$$

(١٤.٥) استجابات الأنظمة للإشارات القياسية

كما تم التوضيح في الفصل ١٣ ، فإنه من غير العملي أن نوجد استجابة الصدمة لنظام مستمر زمنياً عن طريق التطبيق الحقيقي للصدمة على النظام. في المقابل ، فإن الصدمة المتقطعة زمنياً تكون دالة بسيطة جيدة السلوك ويمكن تطبيقها في المواقف العملية بدون أي مشاكل. بالإضافة لإيجاد استجابة الصدمة ، وإيجاد استجابات الأنظمة لوحدة التتابع وللدوال الجيبية المطبقة على النظام عند الزمن $n=0$ فإنها تكون أيضاً طرق جيدة لاختبار ديناميكية وأداء الأنظمة.

استجابة وحدة التتابع

افترض أن دالة عبور النظام تكون على الصورة :

$$H(z) = \frac{N_H(z)}{D_H(z)}$$

بالتالي ، فإن الاستجابة لوحدة تتابع للنظام في النطاق z ستكون :

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} \frac{N_H(z)}{D_H(z)}$$

يمكن كتابة هذه الاستجابة لوحدة التتابع في صورة الكسور الجزئية كما يلي :

$$Y(z) = z \left[\frac{N_H(z)}{D_H(z)} + \frac{H(1)}{z-1} \right] = z \frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)} + H(1) \frac{z}{z-1}$$

إذا كان النظام مستقراً وسيبياً ، فإن تحويل z العكسي للكمية $z N_{H1}(z)/D_H(z)$ تكون إشارة تناقص مع الزمن (الاستجابة العابرة) ، وتحويل z للكمية $H(1)z/(z-1)$ تكون عبارة عن حاصل ضرب وحدة التتابع في قيمة دالة العبور عند $z=1$ (الاستجابة المدفوعة).

مثال ١٤.٢

استجابة وحدة التتابع باستخدام تحويل زد

نظام له دالة العبور التالية :

$$H(z) = \frac{100z}{z-1/2}$$

أوجد وارسم استجابة التتابع لهذا النظام.

في النطاق z ستكون استجابة النظام لوحدة التتابع كما يلي :

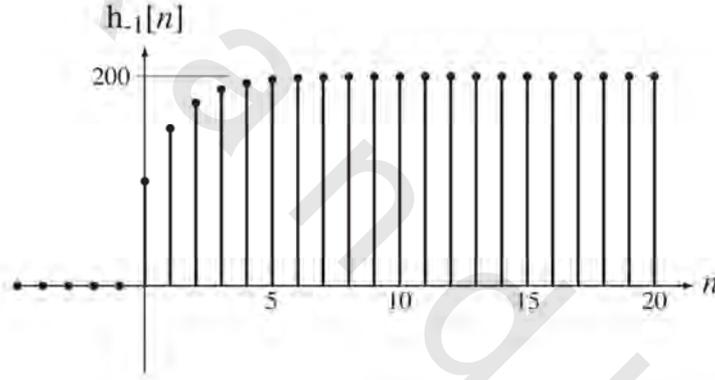
$$H_{-1}(z) = \frac{z}{z-1} \frac{100z}{z-1/2} = z \left[\frac{-100}{z-1/2} + \frac{200}{z-1} \right] = 100 \left[\frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-1/2} \right]$$

استجابة وحدة التتابع في النطاق الزمني هي تحويل زد العكسي الذي سيكون على الصورة التالية وكما في

شكل (١٤.٧) :

$$h_{-1}[n] = 100[2 - (1/2)^n]u[n]$$

القيمة النهائية التي تقترب منها استجابة النظام لوحدة التتابع هي 200 ، وهي نفسها مثل H(1).



شكل رقم (١٤.٧) استجابة وحدة التتابع

في تحليل الإشارات والأنظمة، تكون الأنظمة الأكثر شيوعاً في الاستخدام هي أنظمة القطب الواحد

والقطبين. دالة العبور لنظام القطب الواحد تكون على الصورة :

$$H(z) = \frac{kz}{z-p}$$

حيث p هي موضع القطب الحقيقي في المستوى زد. استجابة هذا النظام لوحدة التتابع في النطاق زد هي :

$$H_{-1}(z) = \frac{z}{z-1} \frac{kz}{z-p} = \frac{K}{1-p} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{pz}{z-p} \right)$$

واستجابته في النطاق الزمني ستكون :

$$h_{-1}[n] = \frac{K}{1-p} (1 - p^{n+1})u[n]$$

لتبسيط هذه المعادلة وفصل تأثيراتها، سنفترض أن معامل التكبير الثابت K يساوي $1-p$. وبالتالي يمكننا

كتابة:

$$h_{-1}[n] = (1 - p^{n+1})u[n]$$

الاستجابة المدفوعة هي $u[n]$ والاستجابة العابرة هي $-p^{n+1}u[n]$.

هذه هي الاستجابة المتقطعة زمنياً المقابلة لاستجابة وحدة الخطوة لنظام أحادي القطب في الزمن المستمر، ويتم تحديد سرعة الاستجابة عن طريق موضع القطب. عندما $0 < p < 1$ ، يكون النظام مستقراً وكلما كانت p أقرب من الواحد، كان النظام أبطأ كما في شكل (١٤.٨). عندما $p > 1$ يكون النظام غير مستقر.

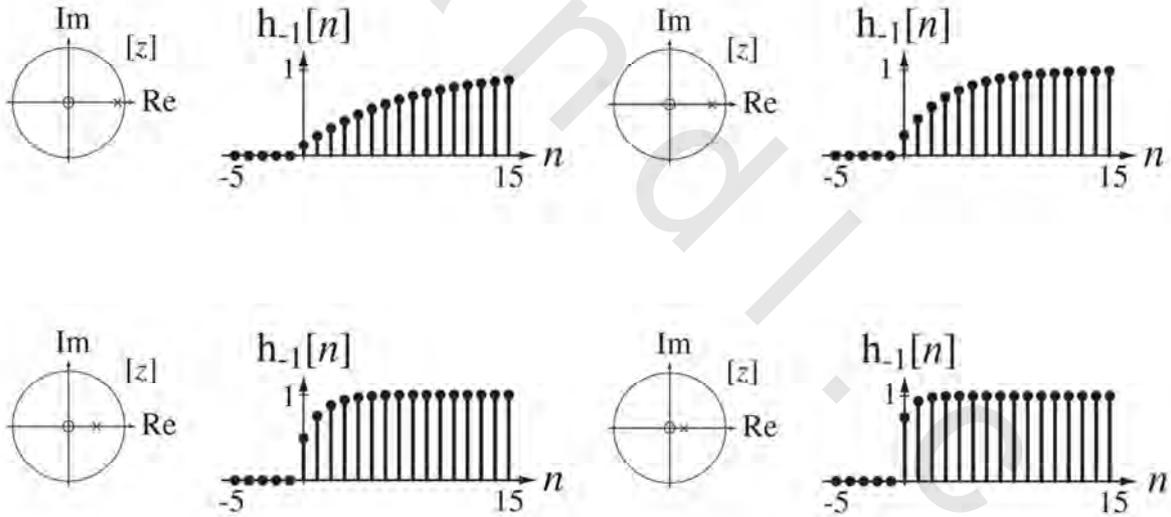
دالة عبور مثالية لنظام من الدرجة الثانية تكون على الصورة التالية:

$$H(z) = K \frac{z^2}{z^2 - 2r_0 \cos(\Omega_0)z + r_0^2}$$

أقطاب $H(z)$ تقع عند $p_{1,2} = r_0 e^{\pm j\Omega_0}$. إذا كانت $r_0 < 1$ ، فإن كل من القطبين سيقع داخل دائرة الوحدة

وسيكون النظام مستقراً. تحويل زد لاستجابة وحدة التابع سيكون:

$$H_{-1}(z) = K \frac{z}{z-1} \frac{z^2}{z^2 - 2r_0 \cos(\Omega_0)z + r_0^2}$$



شكل رقم (١٤.٨) استجابة نظام القطب الواحد لتتابع الوحدة مع تغيير موضع القطب

عندما $\Omega_0 \neq \pm m\pi$ حيث m رقم صحيح، فإن تحليل الكسور الجزئية لـ $H_{-1}(z)/Kz$ سيكون:

$$\frac{H_{-1}(z)}{Kz} = \frac{1}{1 - 2r_0 \cos(\Omega_0)z + r_0^2} \left[\frac{z}{z-1} + \frac{(r_0^2 - 2r_0 \cos(\Omega_0))z + r_0^2}{z^2 - 2r_0 \cos(\Omega_0)z + r_0^2} \right]$$

وبالتالي :

$$H_{-1}(z) = \frac{kz}{1-2r_0 \cos(\Omega_0)z+r_0^2} \left[\frac{z}{z-1} + \frac{(r_0^2-2r_0 \cos(\Omega_0))z+r_0^2}{z^2-2r_0 \cos(\Omega_0)z+r_0^2} \right]$$

أو :

$$H_{-1}(z) = H(1) \left[\frac{z}{z-1} + Z \frac{(r_0^2-2r_0 \cos(\Omega_0))z+r_0^2}{z^2-2r_0 \cos(\Omega_0)z+r_0^2} \right]$$

وهذه يمكن كتابتها كما يلي :

$$H_{-1}(z) = H(1) \left(\frac{z}{z-1} + r_0 \left\{ [r_0 - 2 \cos(\Omega_0)] \frac{z^2-2r_0 \cos(\Omega_0)z}{z^2-2r_0 \cos(\Omega_0)z+r_0^2} + \frac{1+[r_0-2 \cos(\Omega_0)]\cos(\Omega_0)}{\sin(\Omega_0)} \frac{zr_0 \sin(\Omega_0)}{z^2-2r_0 \cos(\Omega_0)z+r_0^2} \right\} \right)$$

وتحويل زد العكسي لها سيكون :

$$h_{-1}[n] = H(1) \left(1 + r_0 \left\{ [r_0 - 2 \cos(\Omega_0)]r_0^n \cos(n\Omega_0) + \frac{1+[r_0-2 \cos(\Omega_0)]\cos(\Omega_0)}{\sin(\Omega_0)} r_0^n \sin(n\Omega_0) \right\} \right) u[n]$$

وهذا هو الحل العام لاستجابة وحدة التتابع لهذا النوع من أنظمة الدرجة الثانية. إذا افترضنا أن :

$$K = 1 - 2r_0 \cos(\Omega_0) + r_0^2$$

بالتالي ، فإن النظام سيكون له معامل تكبير وحدة (H(1)=1).

مثال ١٤.٣

مخططات الأقطاب والأصفار واستجابة وحدة التتابع باستخدام تحويل زد

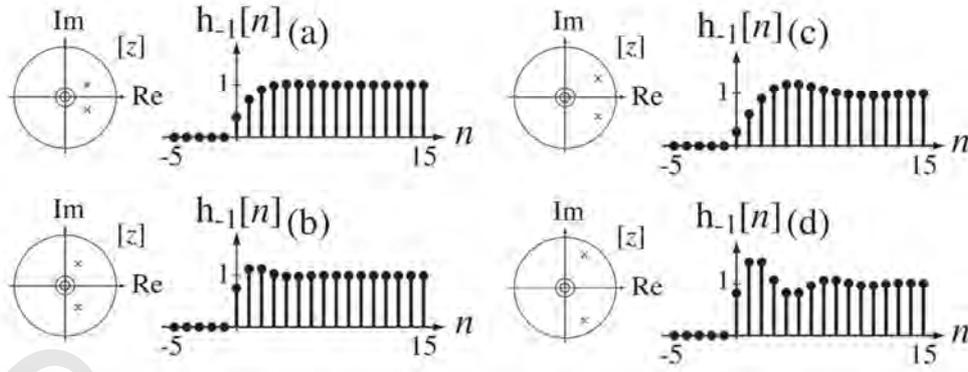
افترض نظاماً له دالة عبور على الصورة التالية :

$$H(z) = K \frac{z^2}{z^2-2r_0 \cos(\Omega_0)z+r_0^2} \text{ with } K = 1 - 2r_0 \cos(\Omega_0) + r_0^2$$

ارسم مخططات الأصفار والأقطاب وارسم استجابة وحدة التتابع لهذا النظام في الحالات التالية :

$$(أ) r_0 = 1/2, \Omega_0 = \pi/6, \quad (ب) r_0 = 1/2, \Omega_0 = \pi/3,$$

$$(ت) r_0 = 3/4, \Omega_0 = \pi/6, \quad (ث) r_0 = 3/4, \Omega_0 = \pi/3,$$



شكل رقم (٩.١٤) يبين مخططات الأقطاب والأصفار واستجابة وحدة التتابع لقيم r_0 و Ω_0 السابقة.

مع زيادة r_0 ، فإن النظام يصبح تحت القمع، ويتردد لفترة زمنية أطول. مع زيادة Ω_0 تزداد سرعة الذبذبة. لذلك يمكننا أن نعمم ذلك بالقول إنه مع اقتراب الأقطاب من دائرة الوحدة، فإن ذلك يعطي استجابة تحت قمعية أكثر من الأقطاب التي تكون أبعد من (وبالتالي داخل) دائرة الوحدة. يمكننا القول أيضاً أن معدل الذبذبات في الاستجابة سيعتمد على زاوية هذه الأقطاب، حيث يكون هذا المعدل أكبر للزوايا الأكبر.

الاستجابة لدالة جيبية سببية

استجابة النظام لجيب تمام مقداره الوحدة والتردد الزاوي له هو Ω_0 يتم تطبيقه على النظام عند الزمن $n=0$

سيكون كما يلي :

$$Y(z) = \frac{N_H(z)}{D_H(z)} \frac{z[z - \cos(\Omega_0)]}{z^2 - 2z \cos(\Omega_0) + 1}$$

أقطاب هذه الاستجابة هي أقطاب دالة العبور زائد جذور المعادلة: $z^2 - 2z \cos(\Omega_0) + 1 = 0$ وهي أزواج مركبة

مترافقة $p_1 = e^{j\Omega_0}$ و $p_2 = e^{-j\Omega_0}$. لذلك فإن $p_1 = p_2^*$ و $p_1 + p_2 = 2\cos(\Omega_0)$ و $p_1 - p_2 = j2\sin(\Omega_0)$ و $p_1 p_2 = 1$. بالتالي

إذا كانت $\Omega_0 \neq m\pi$ ، حيث m رقم صحيح، وإذا لم يكن هناك تلاشٍ بين الأقطاب والأصفار، فإن هذه الأقطاب

ستكون مختلفة أو مميزة ويمكن كتابة الاستجابة في صورة الكسور الجزئية كالتالي :

$$Y(z) = \frac{N_H(z)}{D_H(z)} + \frac{1}{P_1 - P_2} \frac{H(P_1)(P_1 - \cos(\Omega_0))}{z - P_1} + \frac{1}{P_2 - P_1} \frac{H(P_2)(P_2 - \cos(\Omega_0))}{z - P_2}$$

وبعد التبسيط يمكن كتابتها كما يلي :

$$Y(z) = z \left[\frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)} + \left[\frac{H_r(P_1)(z - p_{1r}) - H_i(p_1)p_{1i}}{z^2 - z(2p_{1r}) + 1} \right] \right]$$

حيث $H(p_1) = H_r(p_1) + jH_i(p_1)$ و $p_1 = p_{1r} + jp_{1i}$ ، وهذه يمكن كتابتها بدلالة المعاملات الأصلية كما يلي :

$$Y(z) = \left\{ z \frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)} + \left[\operatorname{Re} \left(H(\cos(\Omega_0) + j\sin(\Omega_0)) \right) \frac{z^2 - z \cos(\Omega_0)}{z^2 - z(2\cos(\Omega_0)) + 1} - \operatorname{Im} \left(H(\cos(\Omega_0) + j\sin(\Omega_0)) \right) \frac{z \sin(\Omega_0)}{z^2 - z(2\cos(\Omega_0)) + 1} \right] \right\}$$

وتحويل زد العكسي لها سيكون :

$$y[n] = z^{-1} \left(\frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)} \right) + \left[\operatorname{Re} \left(H(\cos(\Omega_0) + j\sin(\Omega_0)) \right) \cos(\Omega_0 n) - \operatorname{Im} \left(H(\cos(\Omega_0) + j\sin(\Omega_0)) \right) \sin(\Omega_0 n) \right] u[n]$$

باستخدام المعادلة التالية :

$$\operatorname{Re}(A)\cos(\Omega_0 n) - \operatorname{Im}(A)\sin(\Omega_0 n) = |A|\cos(\Omega_0 n + \phi A)$$

يمكن إعادة كتابة الاستجابة كما يلي :

$$y[n] = z^{-1} \left(z \frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)} \right) + |H(\cos(\Omega_0) + j\sin(\Omega_0))| \cos(\Omega_0 n + \phi H(\cos(\Omega_0) + j\sin(\Omega_0))) u[n]$$

أو :

$$y[n] = z^{-1} \left(z \frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)} \right) +$$

$$\text{المعادلة رقم (١٤.٢)} \quad y[n] = z^{-1} \left(z \frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)} \right) + |H(p_1)| \cos(\Omega_0 n + \phi H(p_1)) u[n].$$

إذا كان النظام مستقرًا فإن المقدار :

$$z^{-1} \left(z \frac{N_{H1}(z)}{D_H(z)} \right)$$

سيتناقص مع الزمن (الاستجابة العابرة) حتى يصل إلى الصفر مع الزمن المتقطع ، وستكون الكمية :

$$|H(p_1)| \cos(\Omega_0 n + \phi H(p_1)) u[n]$$

التي تمثل الاستجابة المدفوعة تساوي دالة جيبيية بعد الزمن المتقطع $n=0$ وتستمر إلى المالا لانهاية.

مثال ١٤.٤

استجابة النظام لجيب التمام السببي باستخدام تحويل زد

النظام الموجود في مثال ١٤.٢ له دالة عبور كالتالي :

$$H(z) = \frac{100z}{z-1/2}$$

أوجد وارسم استجابة هذا النظام للدخل $x[n] = \cos(\Omega_0 n) u[n]$ حيث $\Omega_0 = \pi/4$.

هذه الاستجابة ستكون كما يلي في النطاق زد :

$$Y(z) = \frac{Kz}{z-p} \frac{z[z-\cos(\Omega_0)]}{z^2 - 2z\cos(\Omega_0) + 1} = \frac{Kz}{z-p} \frac{z[z-\cos(\Omega_0)]}{(z-e^{j\Omega_0})(z-e^{-j\Omega_0})}$$

حيث $K=100$ ، و $p=1/2$ ، و $\Omega_0 = \pi/4$. يمكن كتابة هذه الاستجابة في صورة الكسور الجزئية كما يلي :

$$Y(z) = kz \left[\frac{\frac{p[p-\cos(\Omega_0)]}{(p-e^{j\Omega_0})(p-e^{-j\Omega_0})}}{z-p} + \frac{Az+B}{z^2-2z\cos(\Omega_0)+1} \right]$$

الاستجابة العابرة الاستجابة المدفوعة

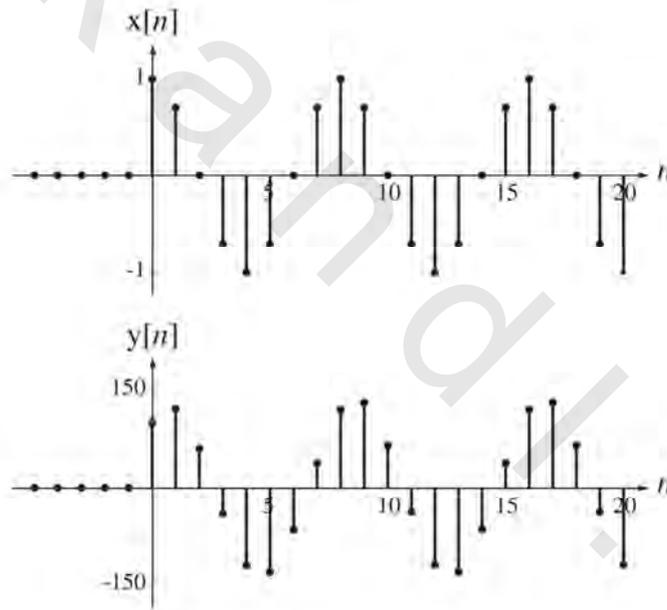
باستخدام المعادلة (١٤.٢) :

$$\text{المعادلة رقم } y[n] = z^{-1} \left(100z \frac{\frac{(1/2)[1/2-\cos(\pi/4)]}{(1/2-e^{j\pi/4})(1/2-e^{-j\pi/4})}}{z-1/2} \right) + \left| \frac{100e^{j\pi/4}}{e^{j\pi/4}-1/2} \right| \cos \left(\Omega_0 n + \phi - \frac{100e^{j\pi/4}}{e^{j\pi/4}-1/2} \right) u[n]$$

(١٤.٣)

$$y[n] = [-19.07(1/2)^n + 135.72\cos(\pi n/4 - 0.5)]u[n]$$

أنظر شكل (١٤.١٠)



شكل رقم (١٤.١٠) دالة جيب تمام سببي واستجابة النظام لها

دعنا الآن نوجد استجابة النظام لدالة جيب تمام حقيقية يتم تطبيقها عند الزمن $n \rightarrow \infty$ باستخدام الـ DTFT وذلك بغرض المقارنة. دالة العبور، معبرا عنها كدالة في التردد الزاوي Ω ، باستخدام العلاقة $z=e^{j\Omega}$ ، يمكن وضعها على الصورة التالية :

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{100e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-1/2}$$

بإجراء DTFT لدالة الدخل $x[n]$:

$$X(e^{j\Omega}) = \pi[\delta_{2\pi}(\Omega - \Omega_0) + \delta_{2\pi}(\Omega + \Omega_0)].$$

وبالتالي ستكون الاستجابة كما يلي :

$$Y(e^{j\Omega}) = \pi[\delta_{2\pi}(\Omega - \Omega_0) + \delta_{2\pi}(\Omega + \Omega_0)] \frac{100e^{j\Omega}}{e^{j\Omega-1/2}}.$$

أو :

$$Y(e^{j\Omega}) = 100\pi \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega-1/2}} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega-1/2}} \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k) \right]$$

باستخدام خاصية التكافؤ للصدمة :

$$Y(e^{j\Omega}) = 100\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{j(\Omega_0+2\pi k)}}{e^{j(\Omega_0+2\pi k)-1/2}} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k) + \frac{e^{j(-\Omega_0+2\pi k)}}{e^{j(-\Omega_0+2\pi k)-1/2}} \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k) \right]$$

حيث إن

$$e^{j(\Omega_0+2\pi k)} = e^{j\Omega_0} \text{ و } e^{j(-\Omega_0+2\pi k)} = e^{-j\Omega_0} \text{ لقيم } k \text{ الصحيحة يمكننا كتابة ما يلي :}$$

$$Y(e^{j\Omega}) = 100\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{j\Omega_0} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)}{e^{j\Omega_0-1/2}} + \frac{e^{-j\Omega_0} \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k)}{e^{-j\Omega_0-1/2}} \right]$$

أو :

$$Y(e^{j\Omega}) = 100\pi \left[\frac{e^{j\Omega_0} \delta_{2\pi}(\Omega - \Omega_0)}{e^{j\Omega_0-1/2}} + \frac{e^{-j\Omega_0} \delta_{2\pi}(\Omega + \Omega_0)}{e^{-j\Omega_0-1/2}} \right]$$

بإيجاد المقام المشترك ، وتطبيق قانون أويلر والتبسيط نحصل على :

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{100\pi}{5/4 - \cos(\Omega_0)} \left\{ (1 - (1/2)\cos(\Omega_0))[\delta_{2\pi}(\Omega - \Omega_0) + \delta_{2\pi}(\Omega + \Omega_0)] \right. \\ \left. + (j/2)\sin(\Omega_0)[\delta_{2\pi}(\Omega + \Omega_0) - \delta_{2\pi}(\Omega - \Omega_0)] \right\}$$

بإيجاد DTFT العكسي نحصل على :

$$Y[n] = \frac{50}{5/4 - \cos(\Omega_0)} \{ [1 - (1/2)\cos(\Omega_0)]2\cos(\Omega_0 n) + \sin(\Omega_0)\sin(\Omega_0 n) \}.$$

أو كما يلي حيث إن $\Omega_0 = \pi/4$:

$$Y[n] = 119.06 \cos(\pi n/4) + 65.113 \sin(\pi n/4) = 135.72 \cos(\pi n/4 - 0.5).$$

وهو تماماً ما حصلنا عليه مسبقاً (فيما عدا لوحدة التتابع $u[n]$) بالنسبة للاستجابة المدفوعة في المعادلة

(١٤.٣).

(١٤.٦) محاكاة الأنظمة المستمرة زمنياً باستخدام الأنظمة المتقطعة زمنياً

العلاقات بين تحويل زد وتحويل لابلاس

لقد استعرضنا في فصول سابقة علاقات مهمة بين طرق تحويل فوريير. ولقد أوضحنا بالذات أن هناك

تكافؤاً معلوماتياً بين الإشارة المتقطعة زمنياً $x[n] = x(nTs)$ التي يتم تشكيلها عن طريق أخذ عينات من الإشارة

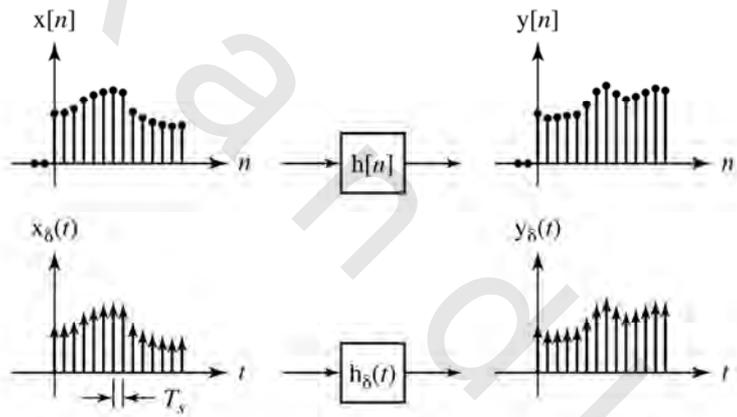
المستمرة زمنياً، وإشارة صدمة مستمرة زمنياً $x_\delta(t) = x(t)\delta_{Ts}(t)$ المشكلة عن طريق أخذ عينات صدمية من الإشارة

المستمرة زمنياً، حيث $f_s=1/T_s$. ولقد استنتجنا أيضاً العلاقة بين DTFT لـ $x[n]$ ، و CTFT لـ $x_\delta(t)$ في الفصل ١٠. حيث أن تحويل زد يتم تطبيقه على الإشارات المتقطعة زمنياً وأنه تعميم للـ DTFT، وأن تحويل لابلاس يتم تطبيقه على الإشارات المستمرة زمنياً وهو تعميم للـ CTFT فإنه يجب أن نتوقع علاقة وثيقة بينهما أيضاً. افترض النظامين التاليين، نظام متقطع زمنياً له استجابة صدمة $h[n]$ ، ونظام مستمر زمنياً له استجابة صدمة $h_\delta(t)$ وسنفترض أنهما يرتبطان بالعلاقة التالية:

المعادلة رقم (١٤.٤)

$$h_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\delta(t - nT_s).$$

هذا التكافؤ يوضح أن كل شيء يحدث لـ $x[n]$ في النظام المتقطع زمنياً، يحدث بطريقة مناظرة لـ $x_\delta(t)$ في النظام المستمر زمنياً كما في شكل (١٤.١١). لذلك من الممكن أن نحلل الأنظمة المتقطعة زمنياً باستخدام تحويل لابلاس باستخدام شدة الصدمات المستمرة زمنياً التي تمثل قيم الإشارات المتقطعة زمنياً عند نقاط متساوية التباعد في الزمن. ولكن من المريح رمزياً أن نستخدم تحويل زد بدلاً من ذلك.



شكل رقم (١٤.١١) التكافؤ بين الأنظمة المتقطعة زمنياً والمستمرة زمنياً.

دالة العبور للنظام المتقطع زمنياً تكون على الصورة:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

ودالة العبور للنظام المستمر زمنياً يمكن كتابتها على الصورة:

$$H_\delta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]e^{-nT_s s}.$$

إذا كانت استجابات الصدمة متكافئة بالمفهوم الموجود في المعادلة (١٤.٤)، بالتالي فإن دوال العبور يجب

أن تكون متكافئة أيضاً. هذا التكافؤ يمكن رؤيته في العلاقة التالية:

$$H_\delta(s) = H(z)|_{z \rightarrow e^{sT_s}}.$$

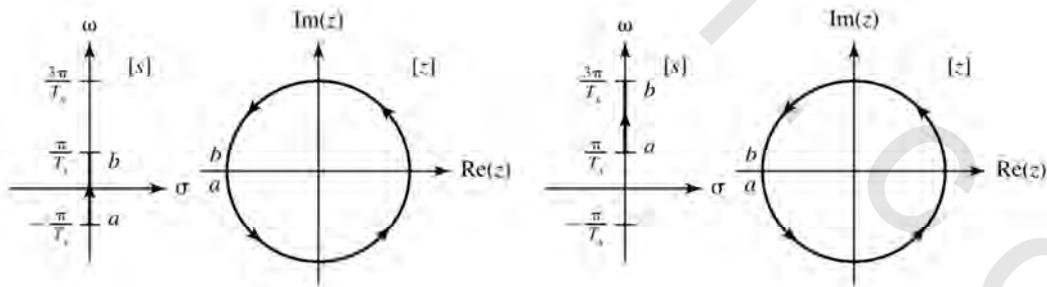
من المهم عند هذه النقطة أن نفترض بعض الآثار المترتبة على التحويل $z \rightarrow e^{sT_s}$. أحد الطرق لنرى العلاقة

بين المستويين المركبين s و z هي أن ننقل محيطاً أو منطقة في المستوى s إلى محيط أو منطقة مقابلة في المستوى z .

سنفترض أولاً محيطاً بسيطاً جداً في المستوى s ، المحيط هو $s=j\omega=j2\pi f$ حيث ω و f تمثل التردد الزاوي والتردد الدوري الحقيقي على التوالي. هذا المحيط هو المحور ω في المستوى s . المحيط المقابل في المستوى زد سيكون $e^{j\omega T_s}$ أو $e^{j2\pi f T_s}$ ، ولأي قيمة حقيقية لـ ω أو f ، فإنها يجب أن تقع على دائرة الوحدة. على الرغم من ذلك فإن هذا النقل ليس بالبساطة التي تم بها التعبير عنه في العبارة السابقة.

لكي نوضح تعقيدات هذه العملية، سننقل المقطع $-\pi/T_s < \omega < \pi/T_s$ المساوي للمقطع $-f_s/2 < f < f_s/2$ إلى ما يقابله في المستوى z . مع عبور ω لهذا المقطع من $-\pi/T_s \rightarrow \omega \rightarrow \pi/T_s$ ، فإن الـ z ستقطع دائرة الوحدة من $e^{-j\pi}$ حتى $e^{+j\pi}$ في اتجاه عكس عقارب الساعة، حيث سيقطع دورة كاملة من دائرة الوحدة. الآن إذا افترضنا أن ω ستقطع المنطقة التالية $\pi/T_s \rightarrow \omega \rightarrow 3\pi/T_s$ ، فإن z ستقطع دائرة الوحدة من $e^{j\pi}$ حتى $e^{+j3\pi}$ ، وهي نفسها المحيط السابق نفسه لدائرة الوحدة؛ لأن $e^{-j\pi} = e^{j\pi} = e^{j3\pi} = e^{j(2n+1)\pi}$ حيث n أي رقم صحيح. لذلك فإنه من الواضح أن التحويل $z \rightarrow e^{sT_s}$ ، ينقل المحور w في المستوى s إلى دائرة الوحدة في المستوى z ، العديد من المرات إلى المالا نهائية كما هو موضح في شكل (١٤.١٢).

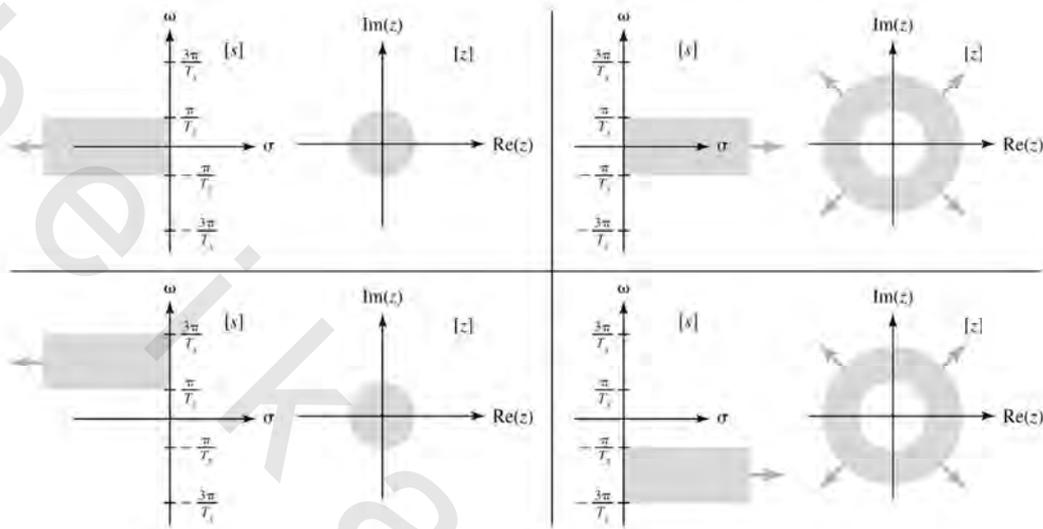
هذه طريقة أخرى للنظر إلى ظاهرة الاستعارة أو الخلط الترددي. كل هذه المقاطع من المحور التخيلي للمستوى s التي يبلغ طول كل منها $2\pi/T_s$ تظهر هي نفسها تماماً عند نقلها إلى المستوى z نتيجة تأثيرات أخذ العينات. لذلك، فإنه لكل نقطة على المحور التخيلي في المستوى s هناك نقطة وحيدة وفريدة على دائرة الوحدة في المستوى z . ولكن هذا التقابل الفريد ليس مطبقاً بالطريقة العكسية، حيث إنه لكل نقطة على دائرة الوحدة في المستوى z فإن هناك مالا نهائية من النقط المقابلة على المحور التخيلي في المستوى s .



شكل رقم (١٤.١٢) نقل المحور ω في المستوى s إلى دائرة الوحدة في المستوى z .

بأخذ خطوة أخرى في مفهوم النقل، فإن النصف الأيسر من المستوى s سينتقل إلى داخل دائرة الوحدة في المستوى z ، والنصف الأيمن من المستوى s سينتقل إلى ما هو خارج دائرة الوحدة في المستوى z (عدد لا نهائي من المرات في كل حالة). الأفكار المقابلة عن استقرار الأنظمة ومواضع الأقطاب والأصفار ستنتقل ب الطريقة نفسها.

أي نظام مستمر زمنياً ومستقر تكون له دالة عبور كل أقطابها في النصف الأيسر المفتوح من المستوى s ، وأي نظام متقطع زمنياً ومستقر تكون له دالة عبور تقع كل أقطابها في الداخل المفتوح لدائرة الوحدة في المستوى z كما هو مبين في شكل (١٤.٣١).



شكل رقم (١٤.٣١) نقل مناطق في المستوى s إلى مناطق في المستوى z .

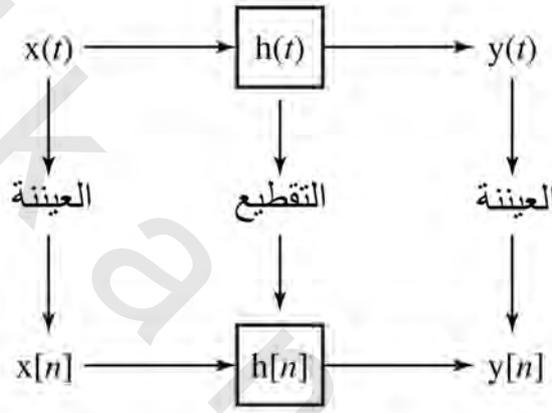
الثبات الصدمي

لقد فحصنا في الفصل ١٠ كيف يتم تحويل الإشارات المستمرة زمنياً إلى إشارات متقطعة زمنياً عن طريق أخذ العينات. ولقد وجدنا، أنه تحت شروط معينة، كانت الإشارة المتقطعة زمنياً هي تمثيل جيد للإشارة المستمرة زمنياً بمفهوم أنها تحتفظ عملياً بكل معلوماتها. الإشارة المتقطعة زمنياً المشكلة عن طريق أخذ عينات مناسبة من الإشارة المستمرة زمنياً تحاكي بمفهوم معين الإشارة المستمرة زمنياً. لقد شرحنا في هذا الفصل التكافؤ بين الأنظمة المتقطعة زمنياً التي لها استجابة صدمة $h[n]$ والأنظمة المستمرة زمنياً التي لها استجابة صدمة كالتالي:

$$h_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\delta(t - nT_s).$$

النظام الذي استجابة الصدمة له تساوي $h_{\delta}(t)$ يعتبر نوعاً خاصاً من الأنظمة لأن استجابته صدمته تتكون من صدمات فقط. عملياً، ليس من الممكن تحقيق ذلك؛ لأن دالة العبور مثل هذه الأنظمة، لكونها دورية، تكون لها استجابة غير مساوية للصفر عند الترددات التي تقترب من الما لانهاية. لا يوجد نظام مستمر زمنياً حقيقياً يمكنه أن تكون له استجابة صدمة تحتوي صدمات حقيقية، على الرغم من أن ذلك من الممكن أن يكون تقريباً جيداً لأغراض التحليل.

لكي نحاكي الأنظمة المستمرة زمنياً باستخدام الأنظمة المتقطعة زمنياً يجب علينا أولاً أن نصل إلى مشكلة التكافؤ المفيد بين النظام المتقطع زمنياً، الذي يجب أن تكون استجابته الصدمية متقطعة، والنظام المستمر زمنياً، الذي يجب أن تكون استجابته الصدمية مستمرة. التكافؤ الأكثر مباشرة ووضوح بين الإشارة المتقطعة زمنياً والإشارة المستمرة زمنياً هي أن يكون لدينا قيم الإشارة المستمرة زمنياً عند لحظات أخذ العينات تساوي تماماً أو تكون قيم الإشارة المتقطعة زمنياً عند الأزمنة المتقطعة المقابلة $x[n]=x(nTs)$. لذلك إذا كانت الإثارة لنظام متقطع زمنياً نسخة معينة لإثارة النظام المستمر زمنياً، فإن استجابة النظام المتقطع زمنياً يجب أن تكون نسخة معينة لاستجابة النظام المستمر زمنياً كما في شكل (١٤.١٤).



شكل رقم (١٤.١٤) عينة الإشارات وتقطيع الأنظمة.

الاختيار الأكثر طبيعية لـ $h[n]$ من الممكن أن يكون $h[n]=h(nTs)$. حيث إن $h[n]$ ليست إشارة تحدث حقيقياً في هذا النظام، ولكنها بدلاً من ذلك دالة تصف النظام، فإننا لا نستطيع أن نقول بدقة إن شكل (١٤.١٤) يبين عملية أخذ العينات. إننا لا نأخذ عينات من إشارة، ولكن بدلاً من ذلك، فإننا نقوم بتقطيع النظام. اختيار استجابة الصدمة للنظام المتقطع زمنياً $h[n]=h(nTs)$ يحقق نوعاً من التكافؤ بين استجابات الصدمة للنظامين. بهذا الاختيار لاستجابة الصدمة، إذا تمت إثارة نظام مستمر زمنياً بوحدة صدمة مستمرة زمنياً، وإثارة نظام متقطع زمنياً بوحدة صدمة متقطعة زمنياً لها الشدة نفسها، فإن الاستجابة $y[n]$ ستكون نسخة معينة للاستجابة $y(t)$ وأن $y[n]=y(nTs)$. ولكن على الرغم من أن النظامين سيكون لهما استجابات صدمة متكافئة بمفهوم أن $h[n]=h(nTs)$ ، و $y[n]=y(nTs)$ ، فإن ذلك لا يعني أن استجابات النظام للإثارات الأخرى ستكون متكافئة بالمفهوم نفسه. تصميم النظام الذي يكون له $h[n]=h(nTs)$ يسمى تصميمياً الصدمة نتيجة تكافؤ استجابات النظام مع وحدات الصدمات.

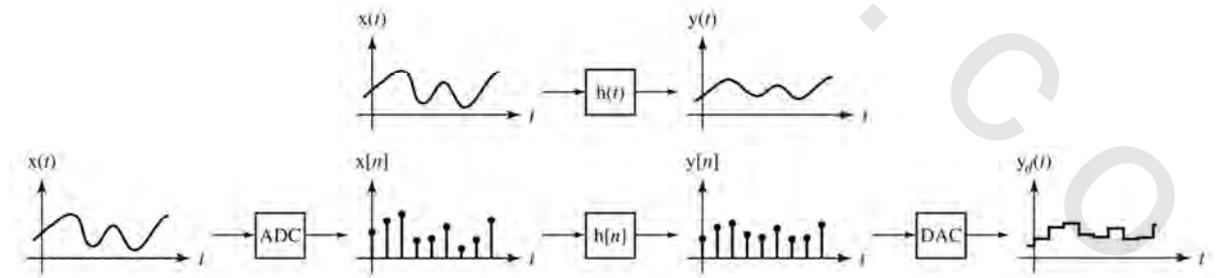
من المهم أن نشير هنا أننا إذا اخترنا أن نجعل $h[n]=h(nTs)$ ، وقمنا بإثارة النظامين بوححدات الصدمات، فإن الاستجابات ستكون بينها العلاقة التالية $y[n]=y(nTs)$ ، ولكننا لا نستطيع القول بأن $x[n]=x(nTs)$ كما في شكل

(١٤.١٤). شكل (١٤.١٤) يبين أن الإشارة المتقطعة زمنياً يتم تشكيلها عن طريق أخذ عينات من الإشارة المستمرة زمنياً، ولكن إذا كانت الإشارة المستمرة زمنياً هي صدمة، فإننا لن نستطيع عينتها. حاول أن تتخيل أخذ عينات من صدمة مستمرة زمنياً. أولاً، إذا كنا نأخذ العينات عند نقاط زمنية بمعدل محدد لمحاولة "مسك"، أو أخذ العينة عند حدوث الصدمة، فإن احتمال أن نرى الصدمة الحقيقية في العينات الناتجة ستكون صفرًا لأن الصدمة الحقيقية لها عرض زمني يساوي صفرًا. حتى إذا استطعنا أن نأخذ العينة عند حدوث الصدمة تمامًا فإننا نستطيع القول أن $\delta[n]=\delta(nTs)$ ، ولكن ذلك لا يكون معقولاً لأن مقدار الصدمة المستمرة زمنياً عند لحظة حدوثها لا يكون محددًا (لأنها ليست دالة عادية)، وعلى ذلك، فإننا لن نستطيع تحقيق الشدة المقابلة للصدمة المتقطعة زمنياً $\delta[n]$.

أنظمة البيانات المعينة

نتيجة الزيادات الهائلة في سرعات المعالجات والذاكرة والانخفاض الهائل أيضاً في تكلفة هذه المعالجات، فإن تصميم الأنظمة الحديثة يستخدم عادة أنظمة جانبية متقطعة زمنياً لتحل محل الأنظمة الفرعية التي تستخدم عادة مع الأنظمة الفرعية المستمرة زمنياً لتوفير التكلفة والفراغ والطاقة المستخدمة ولزيادة مرونة واعتمادية النظام. بعض الأمثلة على ذلك القيادة الآلية للطائرات، والتحكم في العمليات الصناعية والكيميائية، والعمليات الصناعية، وتشغيل السيارة ونظام الوقود فيها. الأنظمة التي تحتوي على أنظمة فرعية متقطعة زمنياً، وأنظمة فرعية مستمرة زمنياً والآليات للتحويل بين إشارات هذه الأنظمة الفرعية تسمى أنظمة البيانات المعينة.

أول نوع من أنظمة البيانات المعينة المستخدم ليحل محل الأنظمة المستمرة زمنياً، وما زال هو النوع السائد أو المنتشر، يأتي من فكرة طبيعية. إننا نقوم بتحويل الإشارات المستمرة زمنياً إلى إشارات متقطعة زمنياً باستخدام المحول التماثلي الرقمي analog to digital converter, ADC، ثم نقوم بمعالجة العينات الخارجة من ADC في الأنظمة المتقطعة زمنياً. بعد ذلك نقوم بتحويل الاستجابة المتقطعة زمنياً إلى استجابة مستمرة زمنياً مرة أخرى باستخدام المحول الرقمي التماثلي digital to analog converter DAC كما في شكل (١٤.١٥).



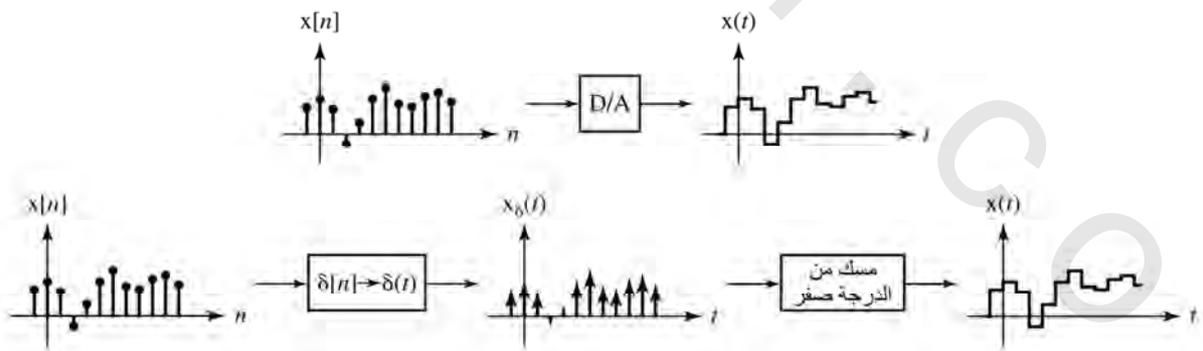
شكل رقم (١٤.١٥) نوع شائع من محاكاة البيانات المعينة للأنظمة المستمرة زمنياً

من الممكن أن يكون من متطلبات التصميم أن تكون استجابة النظام المعين أقرب ما يكون للاستجابة المستمرة زمنياً المطلوبة. لكي يتم ذلك يجب علينا اختيار $h[n]$ بطريقة مناسبة وجيدة، ولكي يتم هذا الاختيار لـ $h[n]$ يجب علينا أيضاً أن نفهم التعامل مع كل من ADC و DAC.

من السهل جداً أن نمثل أو نضع نموذجاً لـ ADC. إنه يقرأ أو يكتسب قيمة إشارة الدخل عند لحظة أخذ العينة ويعطي أو يستجيب برقم يتناسب مع هذه القيمة. (إنه يقوم بتكميم الإشارة الداخلة، ولكننا سنهمل هذا التأثير في هذا التحليل). النظام الفرعي الذي له استجابة صدمة $h[n]$ يتم تصميمه لجعل نظام البيانات المعينة يحاكي تأثير النظام المستمر زمنياً الذي له استجابة صدمة $h(t)$.

تأثير DAC يكون أكثر تعقيداً في النمذجة الرياضية عن ADC، حيث تتم إثارة DAC برقم قادم من النظام الفرعي المتقطع زمنياً، وهذا الرقم يمثل شدة الصدمة، وعليه أن يستجيب بإشارة مستمرة زمنياً تتناسب مع هذا الرقم، وتظل هذه الإشارة ثابتة حتى يتغير الرقم الداخل إلى قيمة جديدة. يمكن نمذجة ذلك عن طريق التفكير هذه العملية على خطوتين. أولاً نفترض أن الصدمة المتقطعة زمنياً يتم تحويلها إلى صدمة مستمرة زمنياً ب الشدة نفسها. بعد ذلك ندع الصدمة المستمرة زمنياً أن تقوم بإثارة دائرة مسك من الدرجة صفر (تم تقديمها في الفصل ١٠) يكون لها استجابة صدمة مستطيلة ارتفاعها يساوي واحداً وعرضها الزمني T_s يبدأ عند الزمن $t=0$ كما يلي وكما هو موضح في شكل (١٤.١٦).

$$h_{zoh}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < T_s \\ 0, & t > T_s \end{cases} = \text{rect}\left(\frac{t-T_s/2}{T_s}\right).$$



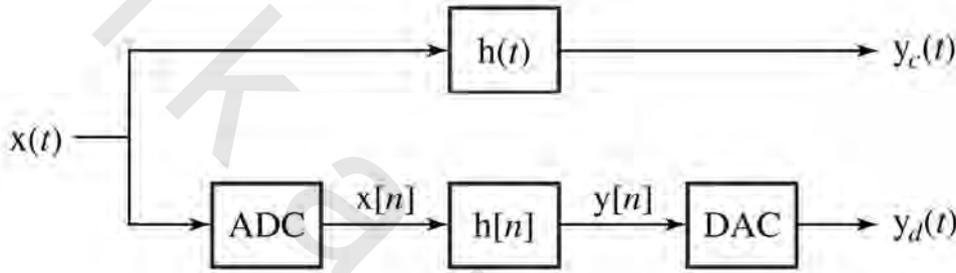
شكل رقم (١٤.١٦) التكافؤ بين تحويل DAC وتحويل النبضة المتقطعة زمنياً إلى نبضة مستمرة زمنياً المتبوع بدائرة مسك من الدرجة صفر

دالة العبور لدائرة المسك من الدرجة صفر هي تحويل لابلاس لاستجابة صدمتها $h_{zoh}(t)$ التي تكون على

الصورة:

$$H_{zoh}(S) = \int_{0^-}^{\infty} h_{zoh}(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{T_s} e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_{0^-}^{T_s} = \frac{1-e^{-sT_s}}{s}.$$

الخطوة التصميمية التالية هي أن نجعل $h[n]$ تحاكي تأثير الـ $h(t)$ بمفهوم أن الاستجابات الكلية للأنظمة تكون أقرب ما يكون من بعضها بعضاً. النظام المستمر زمنياً تتم إثارته بالإشارة $x(t)$ ويعطي الاستجابة $y_c(t)$. المطلوب هنا هو تصميم نظام بيانات معينة بحيث إذا قمنا بتحويل $x(t)$ إلى إشارة متقطعة زمنياً $x[n]=x(nT_s)$ باستخدام ADC، ثم يقوم النظام بمعالجة هذه الإشارة ليعطي الاستجابة $y[n]$ ، بعد ذلك يتم تحويل هذه الاستجابة $y_d(t)$ باستخدام DAC، وبالتالي تكون $y_d(t)=y_c(t)$ كما في شكل (١٤.١٧).



شكل رقم (١٤.١٧) التكافؤ بين الأنظمة المستمرة زمنياً وأنظمة البيانات المعينة

لا يمكن تحقيق ذلك بصورة دقيقة (إلا في الحدود النظرية التي يكون فيها معدل أخذ العينات من الممكن أن يقترب من المالا نهائية). ولكن من الممكن وضع شروط يكون معها من الممكن عمل تقريب جيد للنظام، يتحسن مع زيادة معدل أخذ العينات.

كخطوة في اتجاه تحديد الاستجابة الصدمية $h[n]$ للنظام الفرعي، سنفترض أولاً أن استجابة النظام المستمر

زمنياً، ليس للإشارة $x(t)$ ، ولكن بدلاً من ذلك ستكون للإشارة $x_\delta(t)$ المحددة كما يلي:

$$X_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s)\delta(t - nT_s) = X(t)\delta_{T_s}(t).$$

الاستجابة لهذه الإشارة ستكون كما يلي:

$$y(t) = h(t) * X_\delta(t) = h(t) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(nT_s)\delta(t - mT_s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m]h(t - mT_s)$$

حيث $x[n]$ هي النسخة المعينة من $x(t)$. الاستجابة عند المضاعف رقم n من الزمن T_s ستكون:

$$(14.5) \quad \text{المعادلة رقم} \quad y(nT_s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m]h((n-m)T_s).$$

قارن ذلك مع استجابة النظام المتقطع زمنياً مع استجابة الصدمة $h[n]=h(nT_s)$ للإشارة $x[n]=x(nT_s)$ التي

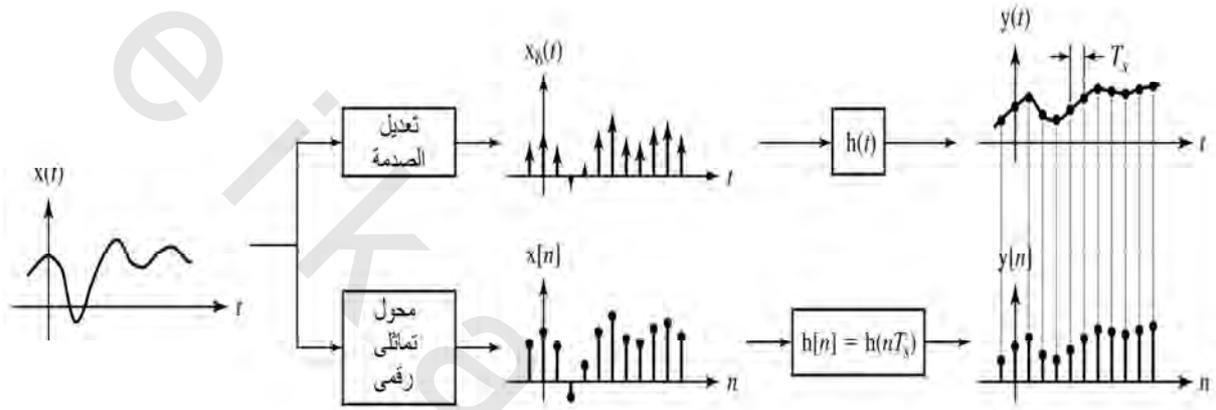
تساوي:

$$(14.6) \quad \text{المعادلة رقم} \quad y[n] = X[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m]h[n-m].$$

بمقارنة المعادلة (١٤.٥) والمعادلة (١٤.٦) يكون من الواضح أن الاستجابة $y(t)$ لنظام مستمر زمنياً له الاستجابة الصدمية $h(t)$ عند لحظة أخذ العينة nT_s لإشارة مستمرة زمنياً معينة صدمياً كالتالي:

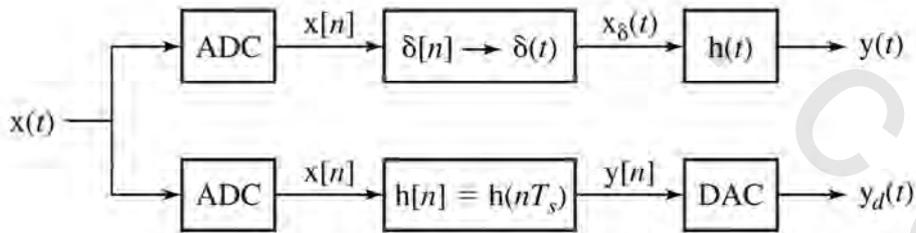
$$X_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s)\delta(t - nT_s).$$

يمكن إيجادها عن طريق إيجاد استجابة النظام الذي له استجابة صدمة تساوي $h[n]=h(nT_s)$ للإشارة $x[n]=x(nT_s)$ ، ثم نقوم بعمل التكافؤ $y(nT_s)=y[n]$ كما في شكل (١٤.١٨).



شكل رقم (١٤.١٨) التكافؤ عند الأزمنة nT_s والأزمنة المتقطعة زمنياً المقابلة n لاستجابة نظام مستمر زمنياً وآخر متقطع زمنياً تمت إثارتها عن طريق إشارات مستمرة زمنياً ومتقطعة زمنياً مستنتجة من الإشارة المستمرة نفس زمنياً.

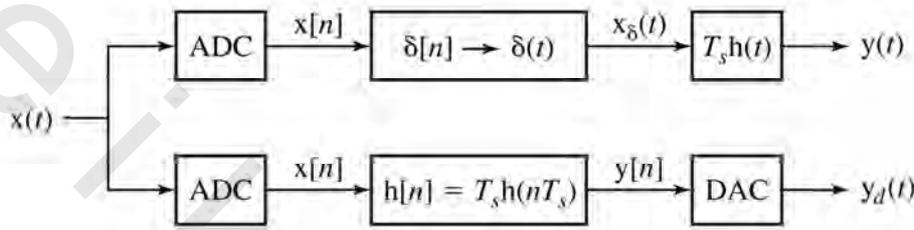
الآن، بالعودة إلى النظام المستمر زمنياً ونظام البيانات المعينة، سنعدل النظام المستمر زمنياً كما هو موضح في شكل (١٤.١٩) باستخدام التكافؤ الموجود في شكل (١٤.١٨) سنجد أن $y[n]=y(nT_s)$.



شكل رقم (١٤.١٩) الأنظمة المستمرة زمنياً وأنظمة البيانات المعينة عند إثارة النظام المستمر زمنياً بالإشارة $x_{\delta}(t)$ بدلاً من $x(t)$

الآن سنغير استجابة الصدمة للنظام المستمر زمنياً والنظام المتقطع زمنياً عن طريق ضرب كل منهما في الزمن بين العينات T_s كما في شكل (١٤.٢٠). في هذا النظام المعدل مازلنا نستطيع القول بأن $y[n]=y(nT_s)$ ، حيث الآن:

$$\begin{aligned} \text{المعادلة رقم (١٤.٧)} \quad y(t) &= X_\delta(t) * T_s h(t) = [\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s) \delta(t - nT_s)] * h(t) T_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s) h(t - nT_s) T_s, \\ y[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m] h[n - m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m] T_s h((n - m) T_s) \end{aligned}$$



شكل رقم (١٤.٢٠) الأنظمة المستمرة زمنياً وأنظمة البيانات المعينة عند ضرب استجابات الصدمة لهما في الزمن بين العينات

استجابة الصدمة الجديدة للنظام الفرعي ستكون $h[n]=T_s h(nT_s)$ وما زالت $h(t)$ تمثل استجابة الصدمة للنظام الأصلي المستمر زمنياً. الآن في المعادلة (١٤.٧) دع T_s تقترب من الصفر. عند هذا الحد، سيصبح المجموع في الجانب الأيمن هو الالتفاف التكاملي الذي تم استنتاجه في معرض استنتاج الالتفاف في الفصل ٥،

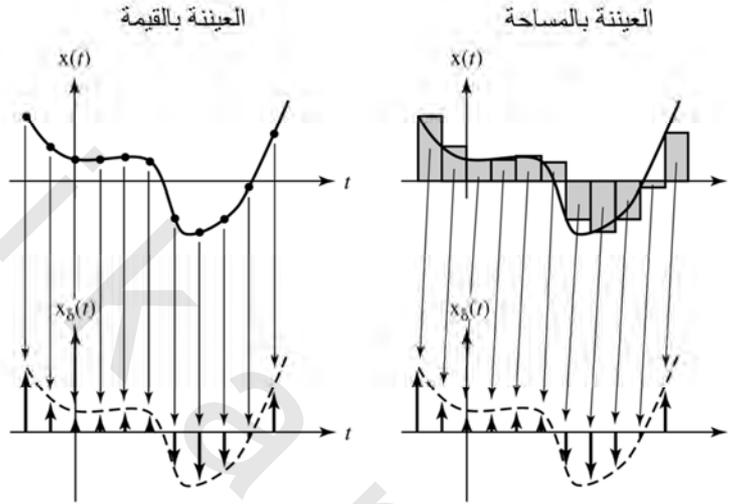
$$\lim_{T_s \rightarrow 0} y(t) = \lim_{T_s \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s) h(t - nT_s) T_s = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) h(t - \tau) d\tau,$$

وهي الإشارة $y_c(t)$ ، التي تمثل استجابة النظام الأصلي المستمر زمنياً في شكل (١٤.١٧) للإشارة $x(t)$. أيضاً، عند هذا الحد الزمني تكون $y[n]=y_c(nT_s)$. لذلك، ففي النهاية فإن التباعد بين النقاط T_s يقترب من الصفر، ولحظات أخذ العينات ستتقارب بحيث تصبح زمناً مستمراً وسيكون هناك تقابل من النوع واحد لواحد بين قيم الإشارة $y[n]$ وقيم الإشارة عند $y_c(t)$. استجابة نظام البيانات المعينة $y_d(t)$ سيكون موافق تماماً ولا يمكن تفريقه من الاستجابة $y_c(t)$ ، للنظام الأصلي للإشارة $x(t)$. بالطبع، فإنه عملياً لا يمكن أن يكون معدل أخذ العينات يساوي مالا نهاية، لذلك فإن المقابلة $y[n]=y_c(nT_s)$ لا يمكن أن تكون تساوي تام، ولكنها تحقق تكافؤاً تقريبياً بين النظام المستمر زمنياً ونظام البيانات المعينة.

هناك طريق آخر مفهومي للوصول إلى الخلاصة نفسها لاستجابة الصدمة للنظام المتقطع زمنياً $h[n]=T_s h(nT_s)$ في الاستنتاجات السابقة قمنا بتشكيل إشارة صدمة مستمرة زمنياً:

$$X_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

التي لها شدة صدمة تساوي عينات الإشارة $x(t)$. الآن، بدلاً من ذلك، نكون نسخة معدلة من إشارة الصدمة. افترض التقابل الجديد بين $x(t)$ و $x_\delta(t)$ سيكون هو التقابل بين شدة الصدمة عند nT_s تساوي تقريباً المساحة تحت $x(t)$ في فترة أخذ العينات $nT_s \leq t < (n+1)T_s$ وليست القيمة عند nT_s . التكافؤ بين $x(t)$ و $x_\delta(t)$ يعتمد الآن (تقريباً) على المساحات، كما في شكل (١٤.٢١). (هذا التقريب أفضل مع زيادة معدل أخذ العينات).



شكل رقم (١٤.٢١) مقارنة بين العينة بالقيمة والعينة بالمساحة

المساحة تحت $x(t)$ تساوي تقريباً $T_s(nT_s)$ في كل فترة عينة. لذلك فإن إشارة الصدمة المستمرة زمنياً الجديدة

ستكون:

$$X_\delta(t) = T_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s) \delta(t - nT_s).$$

إذا طبقنا الآن هذه الإشارة على نظام تكون استجابة الصدمة له هي $h(t)$ فإننا سنحصل تماماً على

الاستجابة نفسها كما في المعادلة (١٤.٧):

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT_s) h(t - nT_s) T_s.$$

وبالطبع النتيجة نفسها بأن $y[n] = y_c(nT_s)$ مع اقتراب معدل أخذ العينات من النهاية. كل ما عملناه في هذا

الاستنتاج هو مصاحبة المعامل T_s مع الإثارة بدلاً من أن تكون مع استجابة الصدمة. عندما نقوم بعمل التفاف

للاثنين فإننا نحصل على النتيجة نفسها. إذا قمنا بأخذ عينات الإشارات بوضع شدة الصدمة تساوي مساحة الإشارة

في فترة أخذ العينة، بدلاً من وضعها تساوي قيم الإشارة عند لحظة أخذ العينات، بالتالي فإن المقابلة $h[n] = h(nT_s)$

من الممكن أن تكون مقابلة تصميم بين نظام مستمر زمنياً ونظام بيانات معينة يحاكيه. ولكن، حيث أننا لا نأخذ

العينات بهذا الشكل، (لأن معظم الـ ADC's لا تعمل بهذه الطريقة)، فإننا بدلاً من ذلك نصاحب المعامل T_s مع

استجابة الصدمة ونشكل المقابلة $h[n] = T_s h(nT_s)$.

مثال ١٤.٥

تصميم نظام بيانات معينة لمحاكاة نظام مستمر زمنياً

نظام مستمر زمنياً يمكن وصفه بدالة عبور كالتالية :

$$H_c(s) = \frac{1}{s^2 + 40s + 300}$$

صمم نظام بيانات معينة على الصورة الموضحة في شكل (١٤.١٥) لمحاكاة هذا النظام. نفذ هذا التصميم

لمعدلين لأخذ العينات $f_s=10$ و $f_s=100$ وقارن بين استجابات الخطوة.

استجابة الصدمة للنظام المستمر زمنياً هي :

$$h_c(t) = (1/20)(e^{-10t} - e^{-30t})u(t).$$

بالتالي ستكون استجابة الصدمة للنظام الفرعي المتقطع زمنياً هي :

$$h_d[n] = (T_s/20)(e^{-10nT_s} - e^{-30nT_s})u[n].$$

ودالة العبور المقابلة في النطاق z ستكون :

$$H_d(z) = \frac{T_s}{20} \left(\frac{z}{z - e^{-10T_s}} - \frac{z}{z - e^{-30T_s}} \right).$$

استجابة الخطوة للنظام المستمر زمنياً ستكون :

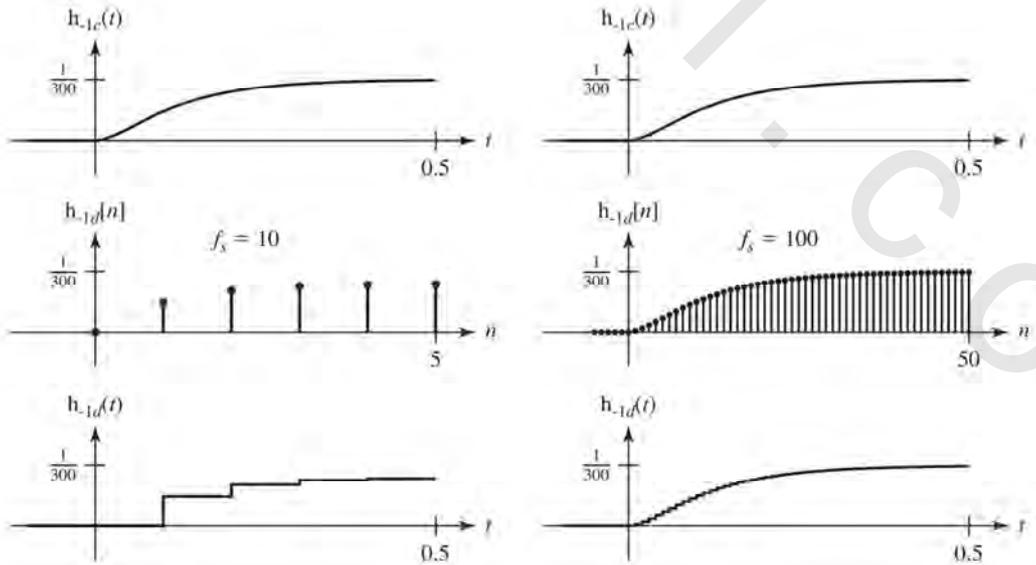
$$h_{-1c}(t) = \frac{2 - 3e^{-10t} + e^{-30t}}{600} u(t).$$

استجابة النظام الفرعي لوحدة التتابع ستكون :

$$h_{-1d}[n] = \frac{T_s}{20} \left[\frac{e^{-10T_s} - e^{-30T_s}}{(1 - e^{-10T_s})(1 - e^{-30T_s})} + \frac{e^{-10T_s}}{e^{-10T_s} - 1} e^{-10nT_s} - \frac{e^{-30T_s}}{e^{-30T_s} - 1} e^{-30nT_s} \right] u[n].$$

وستكون استجابة DAC كما يلي وكما هو موضح في شكل (١٤.٢٢).

$$h_{-1d}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y[n] \text{rect} \left(\frac{t - T_s(n+1/2)}{T_s} \right)$$



شكل رقم (١٤.٢٢) مقارنة لاستجابات الخطوة لنظام مستمر زمنياً واثنين من أنظمة البيانات المعينة التي تحاكي معدلات عينة مختلفة.

عند معدلات أخذ العينات المنخفضة نلاحظ أن جودة المحاكاة لنظام البيانات المعينة سيئة جداً. إنها تقترب من قيمة للاستجابة المدفوعة حوالي 78% من الاستجابة المدفوعة للنظام المستمر زمنياً. عند معدل أخذ العينات الأعلى تكون المحاكاة أفضل كثيراً حيث تكون الاستجابة المدفوعة حوالي 99% من الاستجابة المدفوعة للنظام المستمر زمنياً. أيضاً عند المعدلات العالية لأخذ العينات، يكون الفرق بين استجابة النظام المستمر زمنياً واستجابة نظام البيانات المعينة أقل كثيراً منه مع معدلات أخذ العينات المنخفضة.

يمكننا أن نرى التفاوت بين القيم المدفوعة بفحص المعادلة:

$$y[n] = \frac{T_s}{20} \left[\frac{e^{-10T_s} - e^{-30T_s}}{(1 - e^{-10T_s})(1 - e^{-30T_s})} + \frac{e^{-10T_s}}{e^{-10T_s} - 1} e^{-10nT_s} - \frac{e^{-30T_s}}{e^{-30T_s} - 1} e^{-30nT_s} \right] u[n].$$

الاستجابة المدفوعة تساوي:

$$y_{forced} = \frac{T_s}{20} \frac{e^{-10T_s} - e^{-30T_s}}{(1 - e^{-10T_s})(1 - e^{-30T_s})}.$$

إذا قربنا الدالة الأسية بأول مركبتين فيها في التحليل التتابعي لها كما يلي $e^{-30T_s} \approx 1 - 30T_s$ و $e^{-10T_s} \approx 1 - 10T_s$ فإننا سنحصل على $y_{forced} = 1/300$ ، وهي الاستجابة المدفوعة الصحيحة. أما إذا كانت T_s ليست صغيرة بما فيه الكفاية، فإن تقريب الدالة الأسية في تحليلها التتابعي لن يكون جيداً وسيكون هناك فرق بين القيم المدفوعة الحقيقية والمثالية. عندما $f_s = 10$ سنحصل على $e^{-10T_s} = 0.368$ و $1 - 10T_s = 0$ ، و $e^{-30T_s} = 0.0498$ و $1 - 30T_s = -2$ ، وهذا يعتبر تقريباً مزعجاً. ولكن عندما $f_s = 100$ نحصل على $e^{-10T_s} = 0.905$ و $1 - 10T_s = 0.9$ ، و $e^{-30T_s} = 0.741$ و $1 - 30T_s = 0.7$ وهذا يمثل تقريباً أفضل كثيراً.

(١٤.٧) البناء القياسي للأنظمة

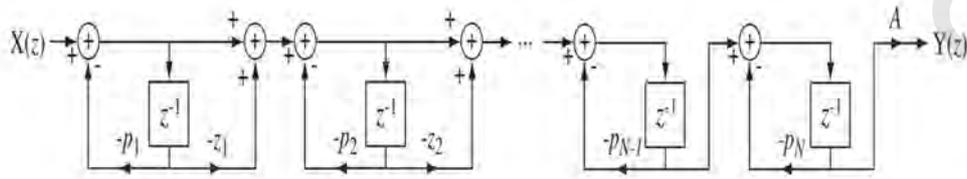
بناء الأنظمة المتقطعة زمنياً يتوازي كثيراً مع بناء الأنظمة المستمرة زمنياً. الطرق العامة نفسها يتم تطبيقها هنا حيث ينتج أنواع البناء نفسها كما سنرى.

البناء المتوازي

يمكن بناء توالي من الأنظمة من دالة العبور المحللة على الصورة التالية:

$$H(z) = A \frac{z - z_1}{z - p_1} \frac{z - z_2}{z - p_2} \dots \frac{z - z_M}{z - p_M} \frac{1}{z - p_{M+1}} \frac{1}{z - p_{M+2}} \dots \frac{1}{z - p_N}$$

حيث درجة البسط $M \leq N$ كما في شكل (١٤.٢٣).



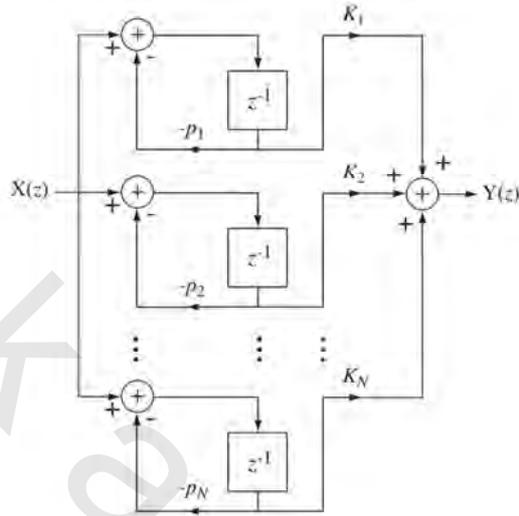
شكل رقم (١٤.٢٣) البناء المتوازي للنظام الكلي

البناء المتوازي

يمكن التعبير عن دالة العبور كمجموع من الكسور الجزئية كما يلي :

$$H(z) = \frac{K_1}{z-p_1} + \frac{K_2}{z-p_2} + \dots + \frac{K_N}{z-p_N}$$

ثم بناء النظام على التوالي كما في شكل (١٤.٢٤).



شكل رقم (١٤.٢٤) البناء المتوازي للنظام الكلي.

في الحقيقة يتم بناء الأنظمة المتقطعة زمنياً باستخدام مكونات رقمية. في هذه الأنظمة تكون كل الإشارات في صورة أرقام ثنائية بعدد محدد من البتات. في العادة يتم إجراء العمليات عن طريق حسابات النقطة الثابتة. إن ذلك يعني أن كل الإشارات سيتم تكميمها إلى رقم محدد من القيم الممكنة ولذلك فإنها لا تكون تمثيلاً حقيقياً للإشارات المثالية. هذا النوع من التصميم يؤدي في العادة إلى أسرع الأنظمة وأكثرها كفاءة، ولكن خطأ التكميم السابق بين الإشارات الحقيقية والمثالية، يجب التحكم فيه حتى يتم تجنب الضوضاء الناتجة عنه، أو في بعض الأحوال يجعل النظام غير مستقر. تحليل مثل هذا الأخطاء يقع خارج نطاق هذا الكتاب، ولكن عموماً فإن البناء المتوازي والمتوازي يكون أكثر سماحية وأقل تأثيراً بمثل هذه الأخطاء عن طريقة البناء بالشكل المباشر II.

(١٤.٨) ملخص النقاط المهمة

- ١- من الممكن تحليل الأنظمة المتقطعة زمنياً باستخدام تحويل لابلاس من خلال استخدام صدمات مستمرة زمنياً تحاكي مثيلاتها المتقطعة زمنياً، ولكن تحويل z يكون أكثر مناسبة في ذلك.
- ٢- يمكن نمذجة الأنظمة المتقطعة زمنياً باستخدام المعادلات الفرقية أو المخططات الصندوقية في النطاق الزمني أو النطاق الترددي.

٣- النظام LTI المتقطع زمنياً يكون مستقراً إذا كانت كل أقطاب دالة عبور هذا النظام تقع في الداخل المفتوح لدائرة الوحدة.

٤- الثلاثة أنواع الشهيرة للتوصيل البيني للأنظمة هي التوصيل المتتالي، والتوصيل المتوازي، والتوصيل مع التغذية العكسية.

٥- وحدة التتابع، والإشارة الجيبية إشارتان مهمتان عمليتان لاختبار خواص الأنظمة.

٦- يمكن للأنظمة المتقطعة زمنياً أن تحاكي بدرجة تقريب عالية الأنظمة المستمرة زمنياً، وهذا التقريب يتحسن مع زيادة معدل أخذ العينات.

٧- الطريقة المباشرة II، والبناء المتوالي والمتوازي هي طرق قياسية مهمة لبناء الأنظمة.

تمارين مع إجاباتها

الاستقرار

١- تحقق من استقرار الأنظمة التي لها دوال العبور التالية:

(أ) $H(z) = \frac{z}{z-2}$

(ب) $H(z) = \frac{z}{z^2-7/8}$

(ت) $H(z) = \frac{z}{z^2-(3/2)z+9/8}$

(ث) $H(z) = \frac{z^2-1}{z^3-2z^2+3.75z-0.5625}$

الإجابة: ثلاثة أنظمة غير مستقرة وواحدة مستقرة

التوصيلات المتوالية، والمتوازية، والتغذية العكسية

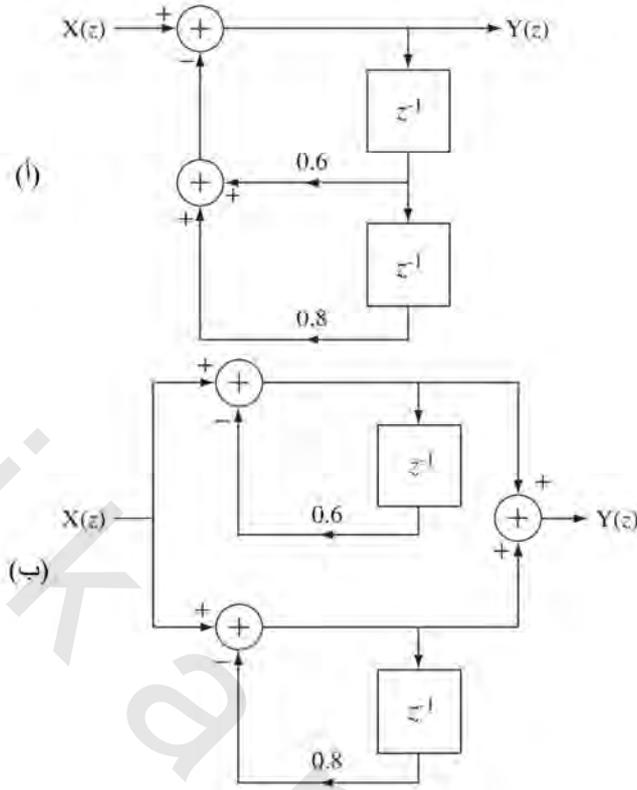
٢- نظام تغذية عكسية له دالة العبور التالية:

$$H(z) = \frac{K}{1+K\frac{z}{z-0.9}}$$

لأي مدي للـ K يكون هذا النظام مستقراً.

الإجابة: $K > 0.1$ أو $K < -1.9$

٣- أوجد دوال العبور للأنظمة الموضحة في شكل (ت- ٣) في صورة نسبة واحدة لكثيرتي حدود في المتغير z.



شكل رقم (ت-٣)

الإجابة:

$$\frac{z}{z+0.3} \cdot \frac{z^2}{z^2+1.2z+0.27}$$

الاستجابة للإشارات القياسية

٤- أوجد الاستجابات $h_{-1}[n]$ للأنظمة التي لها دوال العبور التالية لتتابع الوحدة $x[n]=u[n]$:

(أ) $H(z) = \frac{z}{z-1}$ (ب) $H(z) = \frac{z-1}{z-1/2}$

الإجابة: $(1/2)^n$ ، و $\text{ramp}[n+1]$

٥- أوجد الاستجابة $y[n]$ للأنظمة التي لها دوال العبور التالية للإشارة $x[n]=\cos(2\pi n/8)u[n]$. بين أن

الاستجابة المدفوعة ستكون هي نفسها كما لو تم الحصول عليها باستخدام الـ DTFT مع الإشارة

$$x[n]=\cos(2\pi n/8)$$

(أ) $H(z) = \frac{z}{z-0.9}$ (ب) $H(z) = \frac{z^2}{z^2-1.6z+0.63}$

الإجابة:

$$y[n] = \{0.03482(0.7)^n + 1.454(0.9)^n + 1.9293\cos(2\pi n/8 - 1.3145)\}u[n], \\ 0.3232(0.9)^n u[n] + 1.3644\cos(2\pi n/8 - 1.0517)u[n]$$

الموضع الجذري

٦- ارسم الموضع الجذري للأنظمة التالية التي لكل منها مسارات أمامية ومسارات تغذية عكسية كما يلي :

(أ) $H_1(z) = K \frac{z-1}{z+\frac{1}{2}}$, $H_2(z) = \frac{4z}{z-0.8}$

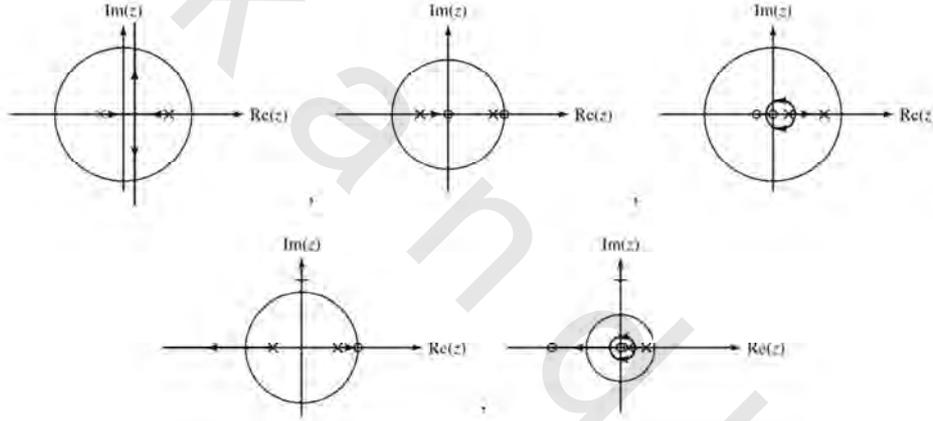
(ب) $H_1(z) = K \frac{z-1}{z+\frac{1}{2}}$, $H_2(z) = \frac{4}{z-0.8}$

(ت) $H_1(z) = K \frac{z}{z-\frac{1}{4}}$, $H_2(z) = \frac{z+\frac{1}{3}}{z-\frac{3}{4}}$

(ث) $H_1(z) = K \frac{z}{z-\frac{1}{4}}$, $H_2(z) = \frac{z+2}{z-\frac{3}{4}}$

(ج) $H_1(z) = K \frac{1}{z^2-\frac{1}{4}z-\frac{2}{9}}$, $H_2(z) = 1$

الإجابة :



شكل رقم (ج-ت-٦)

العلاقة بين تحويل زد وتحويل لابلاس

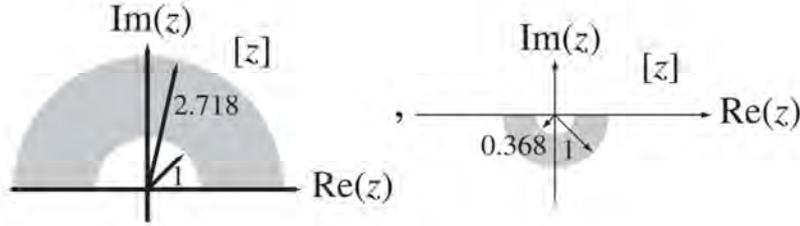
٧- ارسم المناطق التالية التي في المستوى s فيما يقابلها في المستوى z :

(أ) $0 < \sigma < 1/T_s$, $0 < \omega < \pi/T_s$

(ب) $-1/T_s < \sigma < 0$, $-\pi/T_s < \omega < 0$

(ج) $-\infty < \sigma < \infty$, $0 < \omega < 2\pi/T_s$

الإجابة : كل المستوى z ،



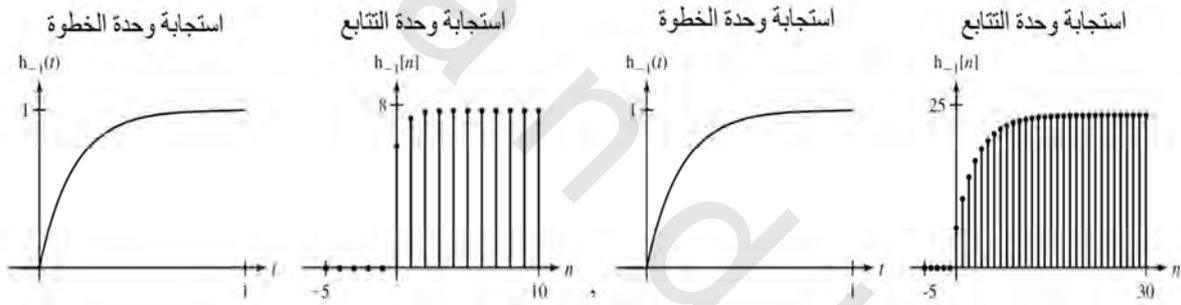
شكل رقم (ج-ت-٧)

أنظمة البيانات المعينة

٨- باستخدام طريقة ثبات الصدمة للتصميم، صمم نظاماً يقارب الأنظمة التي لها دوال العبور التالية عند معدلات أخذ العينات المصاحبة لكل منها. قارن استجابات الصدمة واستجابات الخطوة (تتابع الوحدة) للأنظمة المستمرة زمنياً والمقطعة زمنياً:

$$\text{(أ)} H(s) = \frac{6}{s+6}, \quad f_s = 4 \text{ Hz} \quad \text{(ب)} H(s) = \frac{6}{s+6}, \quad f_s = 20 \text{ Hz}$$

الإجابة:



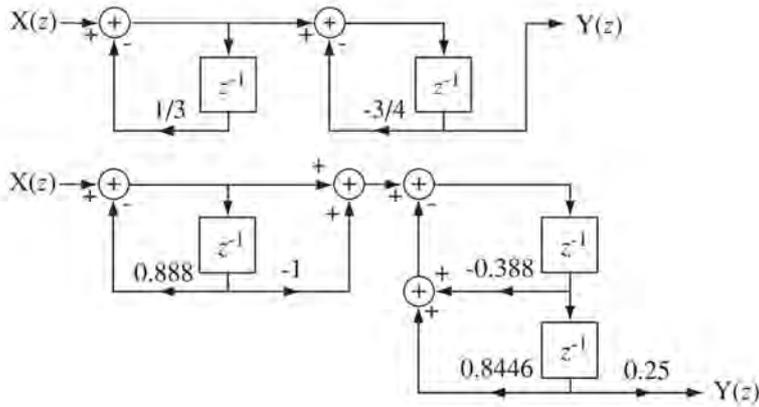
شكل رقم (ج-ت-٨)

بناء الأنظمة

٩- ارسم المخطط الصندوقي للتوصيل المتتالي لكل من الأنظمة التي لها دوال العبور التالية:

$$\text{(أ)} H(z) = \frac{z}{(z+1/3)(z-3/4)} \quad \text{(ب)} H(z) = \frac{z-1}{4z^3+2z^2+2z+3}$$

الإجابة:



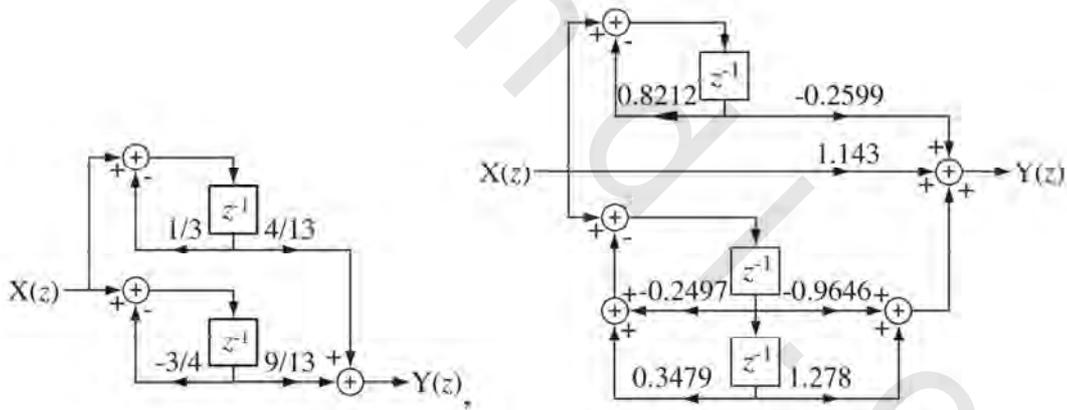
شكل رقم (ج-ت-٩)

١٠ - ارسم المخطط الصندوقي للتوصيل المتوازي للأنظمة التي لها دوال العبور التالية:

(أ) $H(z) = \frac{z}{(z+1/3)(z-3/4)}$

(ب) $H(z) = \frac{8z^3-4z^2+5z+9}{7z^3+4z^2+z+2}$

الإجابة:



شكل رقم (ج-ت-١٠)

تمارين بدون إجابات

الاستقرار

١١ - إذا كان:

$(1.1)^n \cos(2\pi n/16) \xleftrightarrow{z} H_1(z),$

و $h_2(z)=H_1(az)$ ، و $H_1(z)$ و $H_2(z)$ هما دوال العبور للنظام #1 والنظام #2 على التوالي ، ما مدى قيم a

التي تجعل النظام #2 مستقراً ويمكن بناؤه طبيعياً ؟

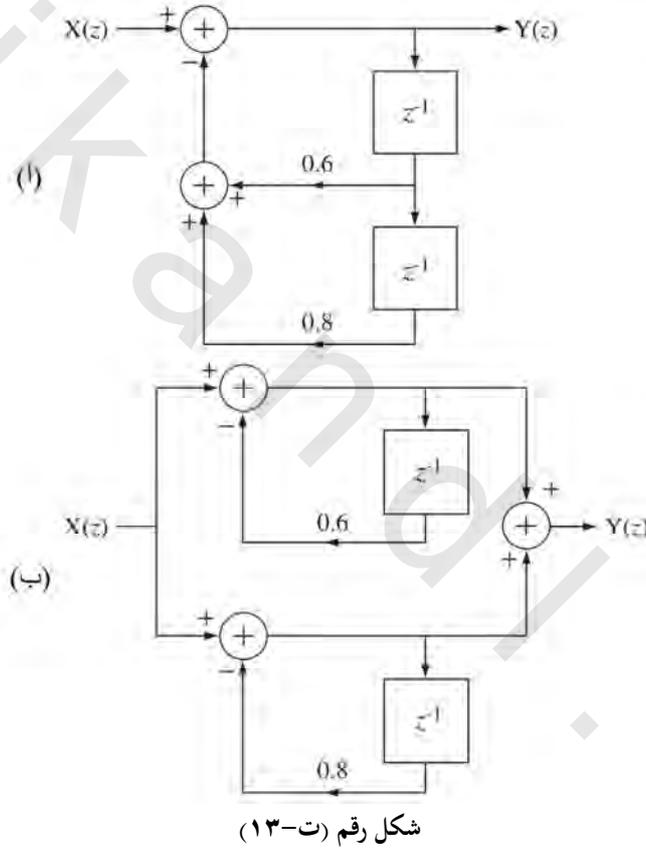
التوصيل المتوازي، والمتوالي، والتغذية العكسية

١٢ - نظام تغذية عكسية له دالة عبور للمسار الأمامي كالتالي : $H_1(z)=Kz/(z-0.5)$ ودالة عبور للمسار المرتد

كالتالي $H_2(z)=4z^{-1}$. لأي قيم للـ K سيكون هذا النظام مستقراً ؟

١٣ - أوجد دوال العبور الكلية للأنظمة الموضحة في شكل (ت- ١٣) في صورة نسبة واحدة من كثيرتي

حدود في المتغير z :



الاستجابة للإشارات القياسية

١٤ - نظام له دالة العبور التالية :

$$H(z) = \frac{z}{z^2+z+0.24}$$

إذا تم تطبيق تتابع الوحدة $u[n]$ على هذا النظام ، فما هي قيمة الاستجابات $y[0]$ ، و $y[1]$ ، و $y[2]$ ؟

١٥ - أوجد الاستجابات $y[n]$ للأنظمة التي لها دوال العبور التالية عند تطبيق تتابع الوحدة $x[n]=u[n]$:

$$(أ) H(z) = \frac{z}{z^2 - 1.8z + 0.82}$$

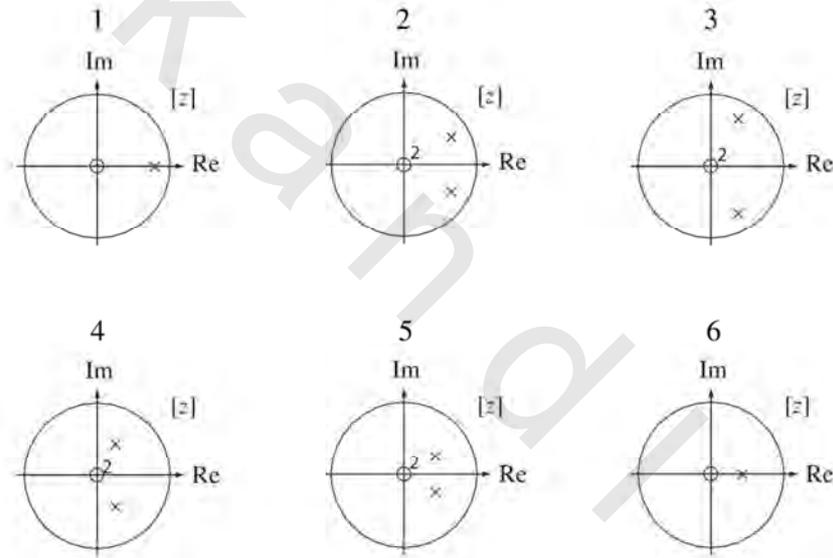
$$(ب) H(z) = \frac{z^2 - 1.932z + 1}{z(z - 0.95)}$$

١٦- في شكل (ت- ١٦) يوجد 6 مخططات للأقطاب والأصفار لدوال العبور ل 6 أنظمة متقطعة زمنياً:

(أ) أي هذه الأنظمة تكون له استجابة صدمة متزايدة رتيبة؟

(ب) من بين هذه الأنظمة التي لها استجابة صدمة متزايدة، أي واحدة فيها يكون لها أسرع استجابة لوحدة تتابع؟

(ج) من بين هذه الأنظمة أيها يكون له استجابة صدمة ترددية، وأي واحد فيها يكون له أسرع معدل تردد وله أكبر تخط في استجابته:



شكل (ت-١٦)

١٧- أجب عن الأسئلة التالية:

(أ) مرشح رقمي له استجابة صدمة $h[n] = 0.6^n u[n]$. إذا تمت إثارته بوحدة تتابع، فما هي القيمة النهائية للاستجابة؟

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} g[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)G(z) \right)$$

(ب) مرشح رقمي له دالة العبور $H(z) = 10z/(z - 0.5)$. عند أي تردد زاوي Ω سيكون مقدار استجابته أقل ما يمكن؟

(ج) مرشح رقمي له دالة العبور $H(z)=10(z-1)/(z-0.3)$. عند أي تردد زاوي Ω سيكون مقدار استجابته أقل ما يمكن؟

(د) مرشح رقمي له دالة العبور التالية $H(z)=2z/(z-0.7)$. ما هو مقدار استجابته عند التردد الزاوي $\Omega=\pi/2$ ؟

العلاقة بين تحويل زد وتحويل لابلاس

١٨ - العلاقة بين المستوى s والمستوى z هي $z = e^{sT_s}$ حيث $T_s=1/f_s$ لأي قيمة لمعدل أخذ العينات f_s . بفرض أن $f_s=100$.

(أ) صف المسار المحيطي في المستوى z المقابل لكل المحور الحقيقي السالب σ في المستوى s ؟

(ب) ما هو طول أقل مقطع خطي على المحور w في المستوى s المقابل لكل دائرة الوحدة في المستوى z ؟

(ج) أوجد قيم النقطتين المختلفتين s_1 ، و s_2 في المستوى s المقابلة للنقطة $z=1$ في المستوى z ؟

أنظمة البيانات المعينة

١٩ - باستخدام طريقة الصدمة الثابتة للتصميم، صمم نظاماً يقارب الأنظمة التي لها دوال العبور التالية عند معدلات أخذ العينات المقابلة. قارن استجابات الصدمة ووحدة الخطوة (التتابع) للنظام المستمر زمنياً والنظام المتقطع زمنياً.

$$(أ) H(s) = \frac{712s}{s^2+46s+240}, \quad f_s = 20 \text{ Hz}$$

$$(ب) H(s) = \frac{712s}{s^2+46s+240}, \quad f_s = 200 \text{ Hz}$$

بناء الأنظمة

٢٠ - ارسم مخططاً صندوقياً للصورة المتتالية للأنظمة التي لها دوال العبور التالية:

$$(أ) H(z) = \frac{z^2}{z^2-0.1z-0.12} + \frac{z}{z-1}$$

$$(ب) H(z) = \frac{\frac{z}{z-1}}{1+\frac{z}{z-1}\frac{z^2}{z^2-1/2}}$$

٢١ - ارسم مخططاً صندوقياً للصورة المتوازية للأنظمة التي لها دوال العبور التالية:

$$(أ) H(z) = (1+z^{-1})\frac{18}{(z-0.1)(z-0.7)}$$

$$(ب) H(z) = \frac{\frac{z}{z-1}}{1+\frac{z}{z-1}\frac{z^2}{z^2-1/2}}$$

