

الفصل الثالث عشر

نظم الإسقاط المركبة

مؤخراً تم اقتراح طريقة جديدة سميت " نظرية الإسقاطات المركبة " ، التي تعتمد على إيجاد نظم إسقاط جديدة ، باستخدام علاقات مركبة من معادلات نظم الإسقاط المعروفة [١١]. هذه النظرية فتحت باباً جديداً في طرق إيجاد نظم إسقاط بتشوهات أصغرية ، موزعة بشكل متوافق أو قريب من شكل حدود المنطقة ، كما برهن على ذلك تشييتشيف (الفقرة ١٢.٢).

إن قيم التشوه كتاب رياضي ، تتزايد بالابتعاد عن مركز نظام الإسقاط. ويأخذ قيمه حديه صغرى واحده عند مركز نظام الإسقاط والتي تساوي الصفر أحياناً. ومن المعروف أن أي تابع رياضي يتغير ببطء بجوار القيمة الحدية له. من هذا المنطلق يجب السعي لجعل نقطة القيمة الحدية في مركز المنطقة المدروسة ، بحيث يكون جوارها هو امتداد المنطقة ومن ثم التشوهات تتغير ببطء.

ولكن ليس بالضرورة أن يكون منحن ما ، هو الشكل الوحيد المعبر عن توزيع التشوهات في نظام الإسقاط الواحد. ففي الحالة العامة يمكن ملاحظة أنه في كل اتجاه هناك منحنى يعبر عن توزيع التشوهات (هذه المنحنيات متطابقة في نظام الإسقاط السمّي). ومن ثم يمكن تصور ما يسمى بسطح التشوهات. تقعر هذا السطح بجهة واحدة ولكنه يختلف بالقيمة من نقطة لأخرى ومن اتجاه لآخر. فإذا اعتبرنا أن

الاختلاف الأساسي هو حسب الاتجاه، لأنه ضمن حدود منطقة صغيرة نسبياً، يمكن اعتبار تقعر منحنى التشوهات ثابتاً، فهناك إذن تقعر حدي أصغري. وهذا يعني بالمفهوم الجيوديزي أن توزع التشوهات سيكون أفضل. إذن نسعى لجعل هذا التقعر ينطبق مع الامتداد الأعظمي للمنطقة المدروسة. فإذا اعتبرنا مثلاً أسطوانة تمس سطح الكرة. ففي الاتجاه العمودي على خط التماس تتوزع التشوهات في نظام إسقاط ميركاتور مثلاً حسب منحنى معطى بالعلاقة ($v = 1 - \sec z$). حيث z المسافة السميتية عن خط التماس. أما باتجاه خط التماس، فالتشوهات ثابتة، أي تتوزع حسب مستقيم، ومن ثم التقعر الأصغري هو باتجاه خط التماس. وعليه نجعل الاسطوانة ماسة للكرة حسب الامتداد الأعظمي للمنطقة المدروسة.

(١٣، ١) نظم الإسقاط المركبة

إن فكرة نظام الإسقاط المركب اقترحت قديماً بشكل مبسط جداً، وهو دمج إحداثيات نظامي إسقاط بسيطين، بغية الحصول على أشكال مختلفة لمرتسم شبكة الإحداثيات (λ, ϕ) في المرتسم. ولم تتعرض هذه الفكرة لبحث وتطوير أو حتى تطبيق. فقد تم تطوير هذه الفكرة باستنباط علمي [١١]، بحيث أخذت طابع نظرية معممة لتركيب نظم الإسقاط. وتم التوصل إلى نتائج هامة، وهي أنه ليس من الضروري البحث عن نظام إسقاط مطابق جديد، بمحاولة إيجاد شكل جديد للتابعين f_1 و f_2 في (١، ١)، بل يمكن البحث عن نظام الإسقاط الجديد باستخدام معادلات نظم الإسقاط المطابقة المعروفة. بالإضافة لذلك تم استنباط علاقة لحساب المقياس المحلي وتقارب خطوط الطول، وهي التي على أساسها يمكن مقارنة نظم الإسقاط المطابقة وتقييمها.

لنعتبر نظام الإسقاط التالي :

$$(١٣,١) \quad \begin{cases} x^* = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y^* = F_2(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

حيث x_i, y_i إحداثيات نظام الإسقاط i المطابق. وأن :

$$(١٣,١) \quad \begin{aligned} x_i &= x_i(\varphi, \lambda) \\ y_i &= y_i(\varphi, \lambda) \end{aligned}$$

فإذا اعتبرنا أن التابعين F_1, F_2 خطيين، فإن نظام الإسقاط المركب سيكون مطابقاً، والبرهان كما يلي :

باعتبار أن F_1, F_2 خطيين فإنه يمكن كتابة (١٣,١) بالشكل التالي :

$$(١٣,٢) \quad \begin{cases} x^* = k_i x_i \\ y^* = K_i y_i \end{cases}$$

حيث k_i ثوابت.

المشتقات الجزئية لـ x و y بالنسبة لـ φ و λ هي :

$$(١٣,٣) \quad \begin{cases} \frac{\partial x^*}{\partial \varphi} = \sum_1^n k_i \frac{\partial x_i}{\partial \varphi} & , & \frac{\partial x^*}{\partial \lambda} = \sum_1^n k_i \frac{\partial x_i}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y^*}{\partial \varphi} = \sum_1^n K_i \frac{\partial y_i}{\partial \varphi} & , & \frac{\partial y^*}{\partial \lambda} = \sum_1^n K_i \frac{\partial y_i}{\partial \lambda} \end{cases}$$

وباعتبار X_i و Y_i نظم إسقاط مطابقة فرضاً فهي تحقق علاقات كوشي - ريمان

(١,٧١) و (١,٧٢) على سطح الإهليلج، والتي تصبح في حالة الكرة :

$$(١٣,٤) \quad \begin{cases} \frac{\partial x_i}{\partial \lambda} = +\cos \varphi \frac{\partial y_i}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y_i}{\partial \lambda} = -\cos \varphi \frac{\partial x_i}{\partial \varphi} \end{cases}$$

ومن ثم وباعتبار (١٣,٣) ومن أجل أي نقطة (φ, λ) :

$$(١٣,٥) \quad \begin{cases} \frac{\partial x^*}{\partial \lambda} = + \sum_1^n k_i \cos \varnothing \frac{\partial y_i}{\partial \varnothing} = + \cos \varnothing \sum_1^n k_i \frac{\partial y_i}{\partial \varnothing} = + \cos \varnothing \frac{\partial y^*}{\partial \varnothing} \\ \frac{\partial y^*}{\partial \lambda} = - \sum_1^n k_i \cos \varnothing \frac{\partial x_i}{\partial \varnothing} = - \cos \varnothing \sum_1^n k_i \frac{\partial x_i}{\partial \varnothing} = - \cos \varnothing \frac{\partial x^*}{\partial \varnothing} \end{cases}$$

إذا x^* و y^* تحققان علاقات كوشي - ريمان أيضاً فهو نظام إسقاط مطابق.

النتيجة: يمكن تركيب نظام إسقاط مطابق من عدة نظم إسقاط مطابقة باستخدام أي تابع خطي. وهي نتيجة معممة يمكن اشتقاق أي حالة خاصة منها تبعاً لنوع نظم الإسقاط وعددها وشكل التابع الخطي.

الآن نأتي إلى علاقة المقياس المحلي الخطي. فإذا اعتبرنا ان نصف قطر الكرة يساوي الواحد، فإن قيمة المقياس المحلي يعطى بالعلاقات:

$$m^* = \sqrt{e^*} = \sqrt{g^*} / \cos \varphi$$

حيث:

$$(١٣,٧) \quad \begin{cases} e^* = \left(\frac{\partial x^*}{\partial \varnothing} \right)^2 + \left(\frac{\partial y^*}{\partial \varnothing} \right)^2 \\ g^* = \left(\frac{\partial x^*}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y^*}{\partial \lambda} \right)^2 \end{cases}$$

يمكن اختيار e أو g حسب سهولة الحساب باعتبار أن نظام الإسقاط مطابق.

ومن ثم:

$$(13,8) \quad (m^*)^2 \cos^2 \varnothing = \left(\frac{\partial x^*}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y^*}{\partial \lambda} \right)^2 = \left(\sum_1^n k_i \frac{\partial x_i}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\sum_1^n k_i \frac{\partial y_i}{\partial \lambda} \right)^2$$

هنا اخترنا قيمة g ، حيث يؤدي ذلك لتسهيل الحسابات خاصة بالنسبة لنظم الإسقاط الأسطوانية.

أما تقارب خطوط الطول فيمكن التعبير عنها بالعلاقة :

$$(13,9) \quad \begin{cases} \tan \gamma_m^* = \frac{\frac{\partial x^*}{\partial \varnothing}}{\frac{\partial y^*}{\partial \varnothing}} \end{cases}$$

ولكن بالتعويض من (١٣,٣) في (١٣,٩) نحصل على :

$$(13,10) \quad \begin{cases} \tan \gamma_m^* = \frac{\frac{\sum_1^n k_i \frac{\partial x_i}{\partial \varnothing}}{1}}{\frac{\sum_1^n k_i \frac{\partial y_i}{\partial \varnothing}}{1}} \end{cases}$$

لندرس الآن حالة تركيب نظام إسقاطين مطابقين.

لنسقط سطح الإهليلج على سطح الكرة ضمن شروط المطابقة ولنفرض أن عملية الإسقاط هذه أعطت مقياسا محليا خطيا m_B .

إحداثيات نظام الإسقاط المركب حسب (١٣,٢) تعطى بالعلاقة :

$$(13,11) \quad \begin{cases} x^* = k_1 x_1 + k_2 x_2 \\ y^* = k_1 y_1 + k_2 y_2 \end{cases}$$

والمقياس المحلي وباعتبار (١٣,٨)

$$(١٣, ١٢) \quad (m^*)^2 \cos^2 \varnothing = \left(k_1 \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} + k_2 \frac{\partial x_2}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(k_1 \frac{\partial y_1}{\partial \lambda} + k_2 \frac{\partial y_2}{\partial \lambda} \right)^2$$

بفك الأقواس واعتبار (١٣, ٨)

$$\begin{aligned} (m^*)^2 \cos^2 \varnothing &= \left(k_1 \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(k_1 \frac{\partial y_1}{\partial \lambda} \right)^2 \\ &+ \left(k_2 \frac{\partial x_2}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(k_2 \frac{\partial y_2}{\partial \lambda} \right)^2 \\ &+ 2k_1 k_2 \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} \frac{\partial x_2}{\partial \lambda} + 2k_1 k_2 \frac{\partial y_1}{\partial \lambda} \frac{\partial y_2}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

$$(m^*)^2 \cos^2 \varnothing = k_1^2 m_1^2 \cos^2 \varnothing + k_2^2 m_2^2 \cos^2 \varnothing + 2k_1 k_2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial \lambda} \frac{\partial x_2}{\partial \lambda} + \frac{\partial y_1}{\partial \lambda} \frac{\partial y_2}{\partial \lambda} \right)$$

$$(١٣, ١٣) \quad (m^*)^2 = k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + \frac{2k_1 k_2}{\cos^2 \varnothing} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \lambda} \frac{\partial x_2}{\partial \lambda} + \frac{\partial y_1}{\partial \lambda} \frac{\partial y_2}{\partial \lambda} \right)$$

حيث m_1 و m_2 المقياس المحلي لكل من نظامي الإسقاط ١ و ٢.

وهكذا حصلنا على علاقة المقياس المحلي الخطي لنظام إسقاط مطابق مركب من نظامي إسقاط مطابقين. المهم هنا أن تكون منظومة الإحداثيات الكروية واحدة بالنسبة لكليهما. في العلاقة (١٣, ١٣) نلاحظ حالة عدم تعيين عند قطب منظومة الإحداثيات الكروية. وهذا أصلاً معروف في نظام الإسقاط الأسطوانى المطابق القائم أو المائل.

إذاً المقياس المحلي النهائي يعطى بالعلاقة التالية :

$$(١٣,١٤) \quad m_F = m_B \cdot m^*$$

المقياس المحلي للمساحات و باعتبار أن الإسقاط مطابق ، يعطى بالعلاقة :

$$(١٣,١٥) \quad \mu_S = m_F^2$$

إن التوابع x_i و y_i كلها منسوبة لمنظومة واحدة هي الإحداثيات الجغرافية (φ, λ) ، المنسوبة بدورها إلى نقطة هي القطب الجغرافي. وفي الحالة العامة التوابع x_i و y_i هي توابع معقدة بالنسبة لـ φ و λ ، أي العلاقة فيها ليست مباشرة، مثال ذلك نظم الإسقاط المائلة. من ناحية أخرى، شرط كون نظام الإسقاط المركب مطابقاً، هو كون التوابع x_i و y_i كلها منسوبة لمنظومة إحداثيات واحدة، وليس من الضروري كون هذه المنظومة هي الجغرافية (φ, λ) . بمعنى أنه ليس من الضروري اعتماد القطب الجغرافي كمبدأ، بل يمكن اختيار أي نقطة من سطح الأرض. وبالطبع سيكون اختيار النقطة التي تؤدي إلى تسهيل الحسابات، كأن تكون نقطة المبدأ مثلاً هي مركز أحد نظم الإسقاط الداخلة في العلاقة (١١,٣) لتصبح الحسابات منسوبة لمنظومة بسيطة (φ', λ') .

أما العلاقة بين (φ, λ) و (φ', λ') ، فيمكن تحديدها من علاقات الهندسية الكروية. إن استبدال منظومة الإحداثيات (φ, λ) بـ (φ', λ') ، سيعطي نفس النتائج بالنسبة للإحداثيات x^* و y^* والمقياس المحلي m^* .

إلا أنه من أجل حساب تقارب خطوط الطول و هي الزاوية بين مرتسم خط الطول ومحور oy في نقطة ما، يجب أن تكون المنظومة منسوبة للقطب الجغرافي حسب العلاقة (١٣,١٣).

فمثلاً التوابع :

$$x_i = x_i(\varphi', \lambda') \quad , \quad y_i = y_i(\varphi', \lambda')$$

$$\varphi' = F_{i1}(\varphi, \lambda)$$

$$\lambda' = F_{i2}(\varphi, \lambda)$$

تصادفنا دائماً في نظم الإسقاط المائلة.

إذاً يمكننا صياغة العلاقات المباشرة كما يلي:

$$X_i = X_i \{ F_{i1}(\varphi, \lambda), F_{i2}(\varphi, \lambda) \}$$

$$Y_i = Y_i \{ F_{i1}(\varphi, \lambda), F_{i2}(\varphi, \lambda) \}$$

بعد ذلك يمكن حساب التفاضلات الجزئية بالنسبة لـ φ و λ مباشرة بالعلاقات

التالية:

$$(13, 16) \left\{ \begin{array}{l} \partial X_i / \partial \varphi = (\partial X_i / \partial F_{i1})(dF_{i1} / d\varphi) + (\partial X_i / \partial F_{i2})(dF_{i2} / d\varphi) \\ \partial Y_i / \partial \varphi = (\partial Y_i / \partial F_{i1})(dF_{i1} / d\varphi) + (\partial Y_i / \partial F_{i2})(dF_{i2} / d\varphi) \end{array} \right.$$

الآن يمكن تطبيق العلاقة (١٣، ١٠) لحساب زاوية تقارب خطوط الطول.

(١٣، ٢) تطبيقات نظم الإسقاط المركبة [١٢]

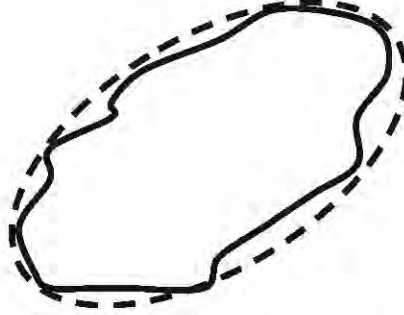
هناك نظرية مفادها، بأن أفضل نظام إسقاط مطابق من أجل منطقة محدودة، هو نظام الإسقاط الذي يحافظ فيه المقياس المحلي، في جميع نقاط حدود المنطقة، على قيمة ثابتة. (النظرية قدمها تشييتشيف، ١٨٥٣ م، وبرهن عليها تحليلياً غرافي، ١٨٩٤ م).

انطلاقاً من مفهوم هذه النظرية، فإن أفضل نظام إسقاط، هو نظام الإسقاط الذي تحاكي فيه الخطوط الإيزومترية حدود المنطقة المدروسة. وبشكل عام نقول كلما اقترب شكل الخط الإيزومتري من شكل الحدود كان نظام الإسقاط أفضل.

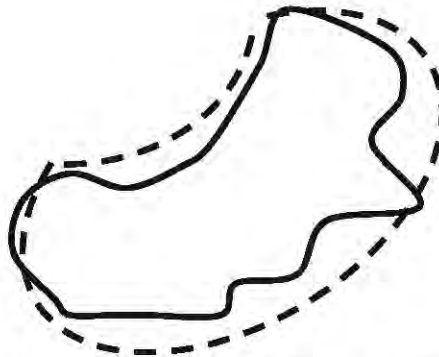
إذاً من هنا نفهم بأن الخط الإيزومتري يفضل أن يكون مغلقاً. وكما هو معروف بالنسبة لنظم الإسقاط التقليدية، تتحقق هذه الخاصية في نظام الإسقاط الستيريوغرافي، الذي يعطياً خطأ إيزومترياً بشكل دائرة. أما نظم الإسقاط الأسطوانية والمخروطية، فتعطي خطوطاً إيزومترية متوازية.

إن شكل الحدود المعمم لمنطقة ما ليس من الضروري أن يكون دائرياً ليناسب نظام الإسقاط الستيريوغرافي، ولا أن يكون متطاولاً كثيراً ليناسب نظام الإسقاط الأسطواناني أو المخروطي. ولكن يمكننا اعتبار الحالتين الرئيسيتين التاليتين:

- ١- شكل حدود المنطقة المعمم لمنطقة ما يمكن إلباسه بشكل قطع ناقص، ينطبق محوره الكبير مع الامتداد الأعظمي للمنطقة (الشكل رقم ١٣٣).
- ٢- حدود المنطقة المعمم يمكن إلباسه بشكل قطع ناقص مضغوط من إحدى جهاته، أي أن الشكل المعمم للحدود غير متناظر (الشكل رقم ١٣٤).



الشكل رقم (١٣٣). شكل المنطقة قطع ناقص



الشكل رقم (١٣٤). شكل المنطقة قطع ناقص مضغوط

انطلاقاً من المذكور آنفاً عن نظام الإسقاط المركب، واعتباراً للحالة الأولى، يمكن الحصول على خط إيزومتري بشكل قطع ناقص، وذلك بتركيب نظام إسقاط ستيريوغرافي مع نظام إسقاط أسطوانتي مائل مطابق، خطوطه الإيزومترية توازي الامتداد الأعظمي للمنطقة، واعتبار جملة المحاور المتعامدة oxy، منطقة مع الاتجاهات الرئيسة، بحيث o تنطبق مع مركز المنطقة، ox مع الامتداد الأعظمي، oy باتجاه قطب الإحداثيات الكروية المعتمد.

ومن أجل الحالة الثانية، يمكن تركيب نظام الإسقاط الستيريوغرافي مع نظام إسقاط مخروطي مائل مطابق، نختار قطبه بحيث نحصل على أفضل انطباق، بين الخطوط الإيزومترية له مع امتداد المنطقة.

طبعاً لا يمكن الحكم على أفضل انطباق، ومن ثم أفضل اختيار للقطب الجديد، بواسطة رسم الخطوط الإيزومترية وإجراء المطابقة الشكلية. لأن ذلك عمل مضمّن، ويتطلب وقتاً طويلاً، عدا عن أن الحسابات التالية لاختيار القطب الجديد تعتبر معقدة، مما يستدعي استخدام الحاسوب في حل هذه المسائل.

يمكن اختيار عدد كبير من النقاط، كقطب للإحداثيات الكروية، وفي كل مرة يتم تقييم هذا الاختيار باستخدام معيار ما، مثل حساب التشوه الأعظمي، أو التشوه المتوسط التربيع في مجال المنطقة المدروسة.

(١٣,٣) تطبيق عددي

لنفرض أننا نريد تمثيل منطقة لها شكل بيضوي _ وهي تعتبر الحالة العامة بالنسبة لشكل المنطقة _ محدودة بخطي العرض $8^{\circ} \pm \varphi$ وخطي الطول $\lambda \pm$ 10° . من الطبيعي أن الاختيار الأول سيكون نظام الإسقاط الأسطوانتي المطابق

(ميركاتور)، بحيث تنطبق الخطوط الإيزومترية مع الامتداد الأعظمي للمنطقة. في هذه الحالة إذا اعتبرنا الأسطوانة ماسة للكرة، فإن العلاقات التي تعبر عن الإحداثيات والمقياس المحلي ستأخذ الشكل [١١]:

$$\begin{aligned} X_1 &= \lambda \\ Y_1 &= \ln \tan (45^\circ + \varphi / 4) \\ m_1 &= \sec \varphi \\ (\text{اعتبرنا أن } R &= 1) \end{aligned} \quad (١٣, ١٧)$$

مرسم المنطقة سيكون محاطاً بالخطين الإيزومترين $m_1 = 1.00983$. إذاً سنحصل على تشوه أعظمي في المرسوم قيمته 0.00983. أما إذا مثلنا نفس المنطقة بنظام الإسقاط الستيريوغرافي، بحيث ينطبق مركزه مع النقطة O، فإن علاقات نظام الإسقاط تعطى بالشكل:

$$\begin{aligned} X_2 &= 2 \tan (z / 2) \sin a \\ Y_2 &= 2 \tan (z / 2) \cos a \\ m_2 &= \sec^2 (z / 2) \end{aligned} \quad (١٣, ١٨)$$

ومن علاقات الهندسة الكروية نستنتج قيم z و a

$$\begin{aligned} z &= \arccos (\cos \varphi \cos \lambda) \\ a &= \arctan (\tan \varphi \sin \lambda) \end{aligned} \quad (١٣, ١٩)$$

الخطوط الإيزومترية عبارة عن دوائر متمركزة في O.

المنطقة ستكون محاطة بالخط الإيزومترى $m_2 = 1.01254$ ، أي أن التشوه الأعظمي في مرسوم المنطقة هو 0.01254.

الآن باعتبار نظرية نظم الإسقاط المركبة، نطبق العلاقة (١٣, ١٣)

$$m^{*2} = k_1^2 m_1^2 + k_2^2 m_2^2 + \frac{2k_1 k_2}{\cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \lambda} \frac{\partial x_2}{\partial \lambda} + \frac{\partial y_1}{\partial \lambda} \frac{\partial y_2}{\partial \lambda} \right)$$

وسنعتبر أن التركيب متجانس ، أي $K_1 = K_2 = 0.5$. وباعتبار العلاقات (١٣،١٦) و (١٣،١٧) و (١٣،١٨) ، نوجد التفاضلات الجزئية في العلاقة (١٣،١٣) ، وذلك من أجل أقصى نقطتين في المنطقة. بالنتيجة نحصل على قيمة المقياس المحلي الأعظمي في نظام الإسقاط المركب $m^* = 1.00736$.

إذاً التشوه الأعظمي في المرسوم أقل مما هو في كلا نظامي الإسقاط ويساوي هنا 0.00736.

نستنتج من ذلك أن عملية تركيب نظامي إسقاط تعيد توزيع التشوهات بشكل أفضل ، بحيث يصبح نظام الإسقاط المركب إسقاطاً قريباً من المثالي ، الذي ينطبق فيه الخط الإيزومتري مع شكل الحدود ، والذي افترضناه هنا بوضوحاً.

إن ما ذكر آنفاً ، يعتبر مثلاً عن تطبيق نظرية نظم الإسقاط المركبة ، ومن الممكن أن تستخدم نظم إسقاط أخرى بدلاً من الستيريوغرافي و الأسطواناني والمخروطي.

إن نتائج هذه النظرية تؤدي إلى فتح باب جديد لإيجاد نظم إسقاط مطابقة ، أكثر ملاءمة من تلك التقليدية المطبقة في كثير من البلدان ، والتي بمفهومها الهندسي لا يمكن تطويرها. عدا عن ذلك ، هذه الطريقة الجديدة تعتمد على ربط علاقات نظم الإسقاط المعروفة ، ومن ثم فإن عملية البحث عن نظام إسقاط جديد ترتبط بعدد ثنائيات نظم الإسقاط الممكن من جهة ، وإمكانية التكيف بثوابت نظام الإسقاط المركب من جهة أخرى. بعبارة أخرى هناك عدد كبير جداً من نظم الإسقاط الحاصلة ، مما يجعل مسألة اختيار الأفضل أكثر مرونة وخاصة بوجود الحاسوب.