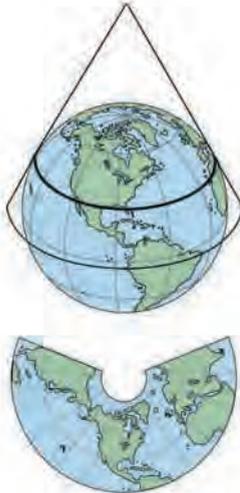


نظم الإسقاط المخروطية

(٥, ١) العلاقات العامة لنظم الإسقاط المخروطية

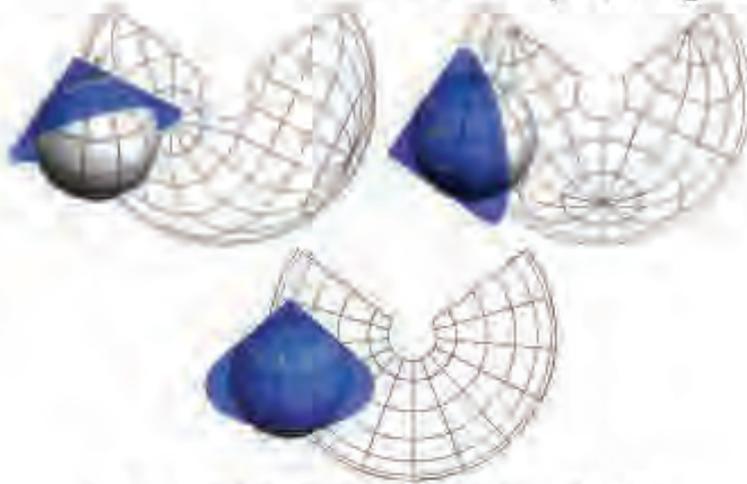
يمكن فهم نظم الإسقاط المخروطية هندسياً كما يلي: إسقاط شبكة خطوط الطول والعرض لسطح الإهليلج على سطح مخروط مغلف، ومن ثم ينشر المخروط حسب أحد مولداته على المستوي.

المخروط يمكن أن يكون ماساً أو قاطعاً لسطح الإهليلج. الشكل رقم (٥٩) يوضح مبدأ هذا النظام.



الشكل رقم (٥٩). مبدأ الإسقاط المخروطي [٢].

يمكن أن تصنف نظم الإسقاط المخروطية أيضاً حسب ميل المخروط. فنظم الإسقاط القائمة هي التي ينطبق فيها محور المخروط مع محور دوران الإهليلج. نظم الإسقاط المعترضة هي التي يقع محور المخروط فيها بمستوي الاستواء. أما الثالثة فهي التي يكون فيها محور المخروط منطبقاً مع الناطم على الإهليلج ولا ينطبق مع أحد محاوره. يوضح الشكل رقم (٦٠) مبدأ هذه الحالات.



الشكل رقم (٦٠). الحالات المختلفة للإسقاط المخروطي. [٦]

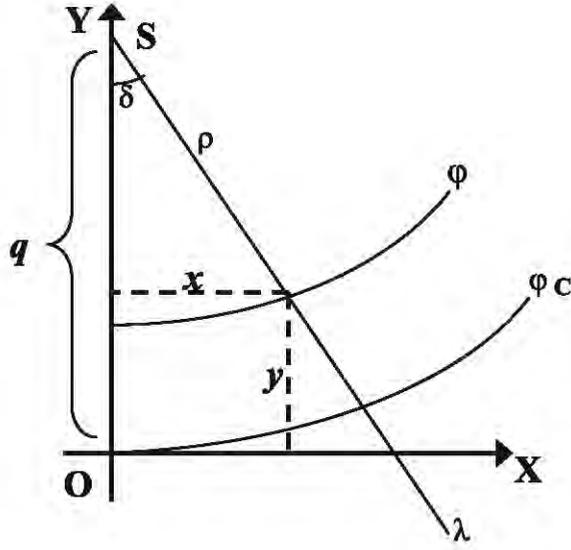
إن مرسم خطوط الطول في نظم الإسقاط المخروطية القائمة، عبارة عن مستقيمات متلاقية في نقطة واحدة، تمثل رأس المخروط، وتتبادل زاوي فيما بينها، يتناسب مع التبادل الزاوي لتظيرها على سطح الإهليلج. أما مرسم خطوط العرض، فهو عبارة عن أقواس دوائر متمركزة في نفس نقطة تلاقي مرسمات خطوط الطول، بالنسبة لمجموعة المحاور الإحداثية المتعامدة oxy تعتمد بالشكل التالي: محور oz غالباً ينطبق مع مرسم خط الطول الأوسط للمنطقة. أما محور ox فهو معامد له في نقطة مرور مرسم خط العرض الأوسط (الشكل رقم ٦١). إن وضعية هذه المحاور هي

مسألة اعتبارية ولا علاقة لها بتوزيع التشوهات. فيمكن اعتبار مبدأ الإحداثيات في نقطة، بحيث نحصل على قيم إحداثيات موجبة فقط.



الشكل رقم (٦١)، شبكة الإسقاط المخروطي.

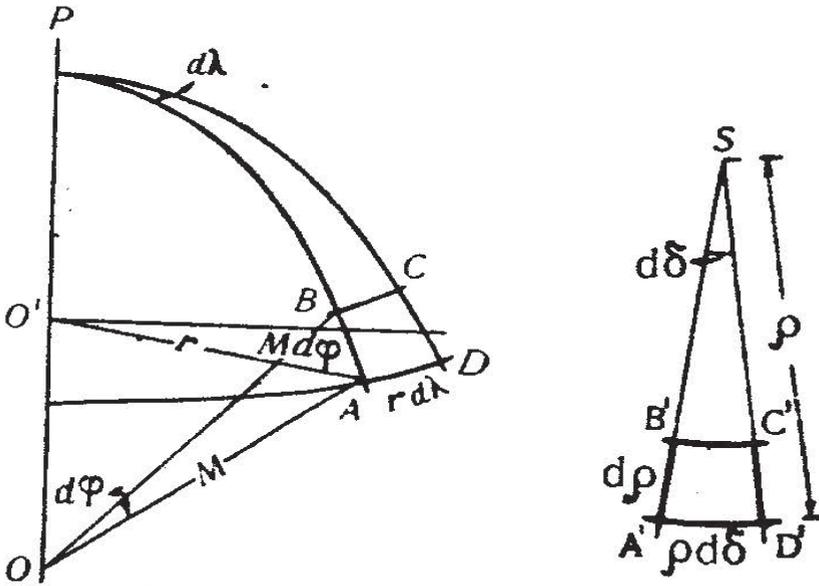
باعتبار شكل مرسم الشبكة، نجد أنه من المفضل استخدام الإحداثيات القطبية (الفقرة ١.١٢) فحسب الشكل رقم (٦٢) يمكن التعبير عن الإحداثيات الديكارتية بدلالة الإحداثيات القطبية كالتالي:



الشكل رقم (٦٢). الإحداثيات المستخدمة في الإسقاط المخروطي.

$$(٥,١) \quad \begin{cases} x = \rho \sin \delta \\ y = q - \rho \cos \delta \end{cases}$$

حيث q - المسافة بين القطب S ومبدأ الإحداثيات O .
 يمكن الحصول على معادلات المقياس المحلي والتشوهات من مقارنة الشبه
 منحرف الإهليلجي اللامتاهي بالصغر $ABCD$ ومرتسمه في المستوي $A'B'C'D'$
 (الشكل رقم ٦٣).



الشكل رقم (٦٣). تحليل هندسي لمسقط جزء صغير من سطح الأرض.

لدينا على سطح الإهليلج

$$(٥,٢) \quad \begin{cases} AB = Md\varphi \\ AD = rd\lambda \end{cases}$$

مساحة شبه المنحرف الإهليلجي وباعتباره لامتناه بالصغر

$$(٥,٣) \quad F(ABCD) = AB \cdot AD = Mrd\varphi d\lambda$$

في المرسم نظير هذه العناصر هي

$$(٥,٤) \quad \begin{cases} A'B' = d\rho \\ A'D' = \rho d\delta \\ F(A'B'C'D') = \rho d\rho d\delta \end{cases}$$

ومن ثم المقياس المحلي الخطي حسب خطوط الطول

$$(٥,٥) \quad m = \frac{A'B'}{AB} = \frac{-d\rho}{M d\varphi}$$

إشارة (-) في العلاقة (٥,٥) جاءت من كون تفاضل في الزاوية φ يقابله تفاضل في ρ بإشارة مخالفة.

المقياس المحلي حسب خطوط العرض

$$(٥,٦) \quad n = \frac{A'D'}{AD} = \frac{\rho d\delta}{r d\lambda}$$

ولكن بما أن δ تتناسب مع λ فيمكن كتابة (٥,٦) بالشكل:

$$(٥,٧) \quad n = \frac{\alpha \rho}{r}$$

المقياس المحلي المساحي باعتبار الشبكة متعامدة ($i = 90^\circ$)

$$(٥,٨) \quad \mu_s = mn = \frac{\rho d\rho d\delta}{Mr d\varphi d\lambda}$$

(٥,٢) نظم الإسقاط المخروطية المطابقة

في هذا النوع من نظم الإسقاط تنتقل الزوايا من سطح الإهليلج إلى المستوي بدون تشوه. أي تتحقق شروط المطابقة أو شروط (كوشي-ريمان). فباعتبار أن الشبكة متعامدة في هذه الإسقاطات نفرض شرط استقلالية المقياس عن الاتجاه أي $m = n$. فحسب (٥,٥) و(٥,٧):

$$(٥,٩) \quad \begin{aligned} \frac{d\rho}{M d\varphi} &= \frac{\alpha \rho}{N \cos \varphi} \\ \frac{d\rho}{\rho} &= -\alpha \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi} \end{aligned}$$

نلاحظ الآن عندما يتغير العرض φ من \circ إلى φ ، فإن ρ تبعاً لذلك تتغير من ρ_E إلى ρ ، حيث ρ_E نصف قطر مرتسم الاستواء. بإجراء التكامل:

$$\int_{\rho_E}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -\alpha \int_0^{\varphi} \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi}$$

التكامل في الطرف الأيمن سبق وأن استنتجناه (الفقرة ٤,٣):

$$\int_0^{\varphi} \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi} = \ln U$$

حيث:

$$U = \frac{\tan(45^\circ + \frac{\varphi}{2})}{\tan(45^\circ + \frac{\psi}{2})}$$

$$\psi = \arcsin(e \sin \varphi)$$

أما الطرف الأيسر فتكامله قياسي ويساوي:

$$-\int_{\rho_E}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = \ln \frac{\rho_E}{\rho}$$

ومن ثم:

$$(٥,١٠) \quad \frac{\rho_E}{\rho} = U^\alpha$$

إذاً:

$$(٥,١١) \quad \rho = \frac{\rho_E}{U^\alpha}$$

وتعتبر ρ_E , α ثوابت نظام الإسقاط.

من العلاقة (٥,١١) واضح بأن $\rho = \rho_E$ عندما $\varphi = 0$. وأن $\rho = 0$ عندما $\varphi = 90^\circ$. إذاً مرسم القطب في هذا الإسقاط عبارة عن نقطة وهي نقطة تلاقي مولدات المخروط.

المقياس المحلي الخطي والمساحي في نظام الإسقاط المخروطي المطابق (ويسمى أيضاً نظام إسقاط لامبير) يساوي حسب (٥,٧):

$$(٥,١٢) \quad m = n = \frac{\alpha \rho}{r} = \frac{\alpha \rho_E}{r U^\alpha}$$

$$(٥,١٣) \quad \mu_s = m^2 = n^2$$

لنحدد الآن وفق أي خط عرض يكون المقياس المحلي الخطي أصغرياً، ومن ثم التشوهات. نقوم بحساب المشتق في العلاقة (٥,٧):

$$(٥,١٤) \quad \frac{dn}{d\varphi} = \frac{\alpha \left(\frac{d\rho}{d\varphi} r - \frac{dr}{d\varphi} \rho \right)}{r^2}$$

ولكن من (٥,٩):

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{\alpha \rho M}{N \cos \varphi}$$

ولدينا $r = N \cos \varphi$. إذاً:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dN}{d\varphi} \cos \varphi - N \sin \varphi$$

$$(٥,١٥) \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{ae^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \frac{a \sin \varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} = -M \sin \varphi$$

ومن ثم:

$$(٥,١٦) \quad \frac{dn}{d\varphi} = \frac{\alpha \rho M}{r^2} (\sin \varphi - \alpha)$$

إذاً n تأخذ قيمة حدية عندما:

$$(٥,١٧) \quad \left(\frac{dn}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

وهذا يتحقق من أجل:

$$(٥,١٨) \quad \alpha = \sin \varphi_0$$

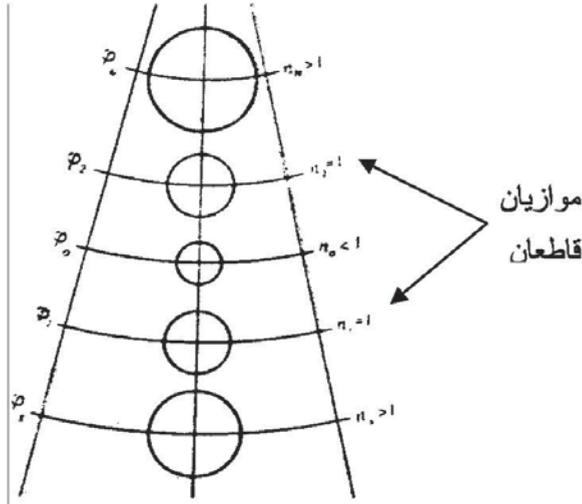
إذاً خط العرض المماس للمخروط في المرسم سيكون بدون تشوهات. وهذا يتوافق مع التصور الهندسي.

في الواقع يجب إيجاد المشتق الثاني لـ n بالنسبة لـ φ لنتمكن من القول بأن المقياس حسب φ_0 حدي و أصغري. ولكن واختصاراً للجهد نعطي النتيجة مباشرة لأنه عمل تحليلي بحت.

$$(5,19) \quad \left(\frac{d^2 n}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\varphi_0} = n_0 \frac{M_0}{N_0}$$

الطرف الأيمن دائماً موجب ومن ثم المقياس المحلي n حسب خط العرض φ_0 يعتبر أصغرياً.

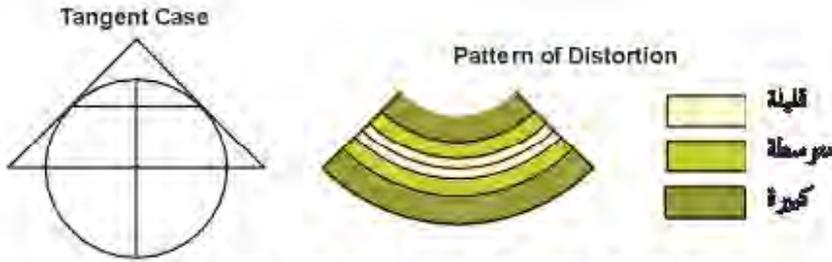
بما أن المقياس المحلي في نظم الإسقاط المخروطية المطابقة لا يتعلق بالاتجاه، فإن قطع التشوهات سيكون بشكل دائرة، ذات نصف قطر أصغري عند مرسم خط العرض φ_0 . ليس بالضرورة أن يكون خط تماس المخروط مع الإهليلج بل يمكن أن يكون واقعاً بين الموازيين المشتركين مع المخروط القاطع). الشكل رقم (٦٤) يوضح ذلك.



الشكل رقم (٦٤). توزع التشوهات في الإسقاط المخروطي.

ذكرنا سابقاً أن كلاً من α, ρ_g يمثلان ثوابت نظام الإسقاط. فما هي طرق تحديدتهما؟

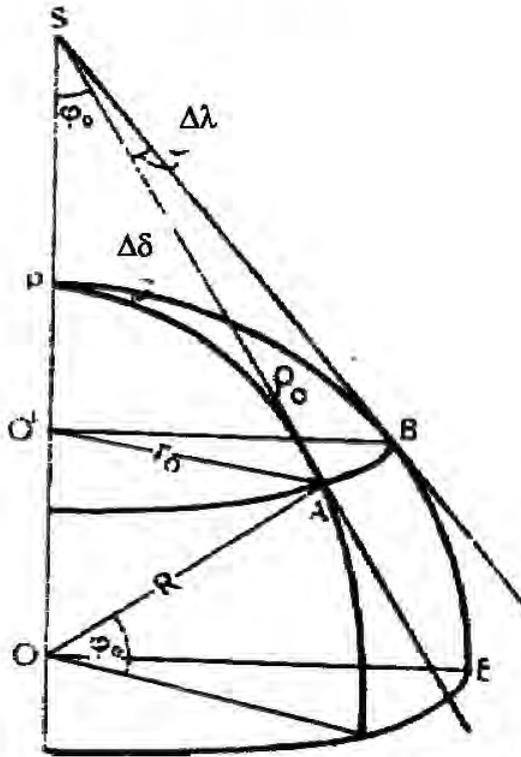
(٥, ٢, ١) تحديد الثوابت α, ρ_g في حالة المخروط المماس (مخط مشترك واحد) (الشكل رقم ٦٥)



الشكل رقم (٦٥). التشوهات في حالة المخروط المماس.

من أجل تحديد قيمة الثابت α نستعين بالمفهوم الهندسي. لنعتبر في الشكل رقم (٦٦) المخروط يمرس الكرة حسب خط العرض ρ_0 . ولنعتبر منه عنصراً خطياً AB . وطول هذا العنصر الخطي على سطح الكرة هو:

$$AB = r_0 \Delta \lambda$$



الشكل رقم (٦٦). حساب التوابت في حالة المخروط المماس.

بعد نشر المخروط فإن العنصر AB سيحافظ على طوله، ويمكن حساب طوله في المستوي من العلاقة:

$$AB = \rho_0 \Delta \delta$$

إذاً:

$$\rho_0 \Delta \delta = r_0 \Delta \lambda$$

ولكن باعتبار الشكل رقم (٦٦):

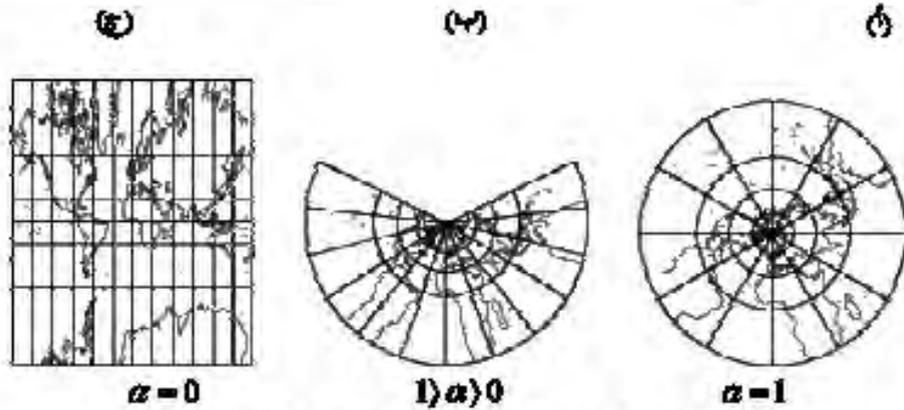
$$(R \operatorname{ctan} \varphi_0)(\alpha \Delta \lambda) = r_0 \Delta \lambda$$

(٥,٢٠)

$$\alpha = \sin \varphi_0$$

من العلاقة (٥.٢٠) نستنتج أن α دائماً أقل من الواحد ومن ثم α أصغر دوماً من ٢.

عندما $\alpha = 1$ نكون قد انتقلنا إلى نظام الإسقاط السمعي القائم (الشكل رقم ٦٧ أ)، أما عندما $\alpha = 0$ فهذا يعني أن مولد المخروط يوازئ محور الإهليلج ومن ثم أصبح نظام الإسقاط أسطوانياً (الشكل رقم ٦٧ ج).



الشكل رقم (٦٧). شكل الشبكة حسب قيمة α .



الشكل رقم (٦٨). شكل الشبكة في حالة $\alpha = 0.5$ [٧].

بحسب أبعاد وشكل المنطقة المصورة، يعتبر المخروط ماساً أو قاطعاً، أي المحافظة على الطول حسب خط عرض واحد أو اثنين. في الحالة الأولى يستخدم نظام الإسقاط لتمثيل منطقة قليلة الامتداد بالعرض. أما في الحالة الثانية فعندما يكون الامتداد كبيراً نسبياً، وذلك بهدف الإقلال من تفاوت التشوهات بالقيمة المطلقة. يسمى خط العرض في هذه الحالة بالموازي الأساسي.

المقياس المحلي حسب خط عرض مفروض φ_0 (غالباً هو المار بمنتصف المنطقة)، أصغري ويساوي الواحد. في هذه الحالة من (٥,٢٠) نجد:

$$\alpha = \sin \varphi_0$$

ومن (٥,١٢) نجد:

$$\frac{\alpha \rho_E}{r_0 U_0^\alpha} = 1$$

إذاً:

$$(٥,٢١) \quad \rho_E = \frac{r_0 U_0^\alpha}{\alpha}$$

هذا الشرط يعني:

$$n_s = n_N$$

من (٥,١٢):

$$(٥,٢٢) \quad \begin{aligned} \frac{\alpha \rho_E}{r_s U_s^\alpha} &= \frac{\alpha \rho_E}{r_N U_N^\alpha} \\ r_s U_s^\alpha &= r_N U_N^\alpha \\ \alpha &= \frac{\ln r_s - \ln r_N}{\ln U_N - \ln U_s} \end{aligned}$$

ومنه يمكن معرفة φ_0

$$\sin \varphi_0 = \alpha$$

ثم نطبق العلاقة (٥,٢١) فنحصل على ρ_E .

(٥,٢,٢) تحديد الثوابت α, ρ_E في حالة

المخروط القاطع (مخطين مشعركين) (الشكل رقم ٦٩)



الشكل رقم (٦٩). المشوهات في حالة المخروط القاطع.

يمكن فرض الشرط بأن $n_1 = n_2 = 1$ أي المقياس المحلي حسب موازيين مفروضين ϕ_1, ϕ_2 متساويين ويساويان الواحد. فباعتبار أن $n_1 = n_2$ يمكن حسب (٥.١٢) استنتاج α كما يلي:

$$\frac{\alpha \rho_E}{r_1 U_1^\alpha} = \frac{\alpha \rho_E}{r_2 U_2^\alpha}$$

إذا:

$$(٥.٢٣) \quad \alpha = \frac{\ln r_1 - \ln r_2}{\ln U_2 - \ln U_1}$$

وباعتبار المساواة مع الواحد فإن:

$$(٥.٢٤) \quad \rho_E = \frac{r_1 U_1^\alpha}{\alpha} = \frac{r_2 U_2^\alpha}{\alpha}$$

وهناك طرق أخرى لتحديد ثوابت نظام الإسقاط وقد اقتصرنا هنا على ذكر الرئيسة منها.

وحسب نظرية (تشييتشيف) [٥]، فإن أفضل نظام إسقاط مطابق (نظام الإسقاط المثالي)، هو الإسقاط الذي ينطبق أحد خطوطه الإيزومترية، مع حدود المنطقة. فبالنسبة لمنطقة متطاولة حسب خط العرض، يمكن اعتبار تأثير عرض المنطقة

على طولها قليل. مثال ذلك منطقة شمال أفريقيا (منطقة الوطن العربي). ومن ثم يعتبر نظام الإسقاط المخروطي نظام إسقاط مناسب لهذه المنطقة.

(٥,٣) نظم الإسقاط المخروطية المكافئة

للحصول على علاقات هذه النظم نطبق شرط تساوي المساحات (التكافؤ)، على العلاقات العامة لنظم الإسقاط المخروطية:

$$\mu_s = mn = 1$$

وحسب (٥,٥) و (٥,٧):

$$-\frac{\alpha \rho d\rho}{M r d\varphi} = 1$$

$$\rho d\rho = -\frac{1}{\alpha} M r d\varphi$$

$$(٥,٢٥) \quad \rho^2 = -\frac{2}{\alpha} \int M r d\varphi$$

التكامل في الطرف الأيمن يمثل مساحة شبه منحرف إهليلجي، ذي امتداد طول قدره راديان واحد، وقد رمزنا لهذا التكامل بالرمز S حسب (٤,٤٧). إذاً:

$$(٥,٢٦) \quad \rho^2 = \frac{2}{\alpha} (c - S)$$

S يمكن حسابها بالعلاقة (٤,٤٨). c ثابت التكامل الذي يمثل الثابت الثاني لنظام الإسقاط بعد α .

المقياس المحلي الخطي يعطى بالعلاقة:

$$(٥,٢٧) \quad n = \frac{1}{m} = \frac{\alpha \rho}{r}$$

تشوه الزوايا الأعظمي يعطى بالعلاقة (٤,٦٢):

$$\tan(45^\circ + \frac{\omega}{4}) = a$$

لندرس طبيعة تغير المقياس المحلي n . فحسب (٥,٢٧):

$$\frac{dn}{d\varphi} = \frac{\alpha \left(\frac{d\rho}{d\varphi} r - \frac{dr}{d\varphi} \rho \right)}{r^2}$$

ولكن سبق أن استنتجنا المقدار $\frac{dr}{d\varphi}$ من (٥,١٥):

$$\frac{dr}{d\varphi} = -M \sin\varphi$$

ومن شرط التكافؤ لدينا:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{Mr}{\alpha\rho}$$

نعوض هذه القيم فنحصل على:

$$\frac{dn}{d\varphi} = \frac{\alpha \left[\frac{-Mr^2}{\alpha\rho} + \frac{M\rho\sin\varphi}{r^2} \right]}{r^2} = \alpha M \left(-\frac{1}{\alpha\rho} + \frac{\rho}{r^2} \sin\varphi \right)$$

$$\left(\frac{dn}{d\varphi} \right)_0 = \alpha M_0 \left(-\frac{1}{\alpha\rho_0} + \frac{\rho_0}{r_0^2} \sin\varphi_0 \right) = 0$$

$$\frac{1}{\alpha\rho_0} = \frac{\rho_0}{r_0^2} \sin\varphi_0$$

$$(٥,٢٨) \quad n_0^2 = \frac{\sin\varphi_0}{\alpha}$$

بإجراء عملية الاشتقاق مرة ثانية لـ n نجد أن المقياس الحدي في (٥,٢٧) هو أصغري. إذاً فالعلاقة (٥,٢٧) تربط بين الثابت α وخط العرض φ_0 والمقياس الحدي الأصغري حسب φ_0 .

قبل معرفة أسلوب تحديد الثوابت α و C في نظام الإسقاط، نوجز معادلاته

بالشكل التالي:

(٥,٢٩)

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \sin \delta \\ y = q - \rho \cos \delta \\ \delta = \alpha \lambda, \quad q = \rho^* \\ \rho^2 = \frac{2}{\alpha} (C - S) \\ \alpha, C = \text{const.} \\ n = \frac{\alpha \rho}{r}, \quad m = \frac{1}{n} \\ \mu_s = mn \\ \tan\left(45^\circ + \frac{\omega}{4}\right) = n \end{array} \right.$$

ρ^* - نصف قطر مرتمم خط عرض مفروض، وغالباً يمتد خط العرض المار بمنتصف المنطقة، أو خط العرض الجنوبي بحيث تكون إشارة قيم الإحداثيات موجبة في كافة نقاط المنطقة. الشكل رقم (٧٠) يوضح شكل الشبكة في هذا النظام.



الشكل رقم (٧٠). شبكة الإسقاط المخروطي المكافئ.

الآن لتحديد قيم الثوابت α و C نعتبر الحالتين التاليتين :

(٥,٣,١) حالة المخروط المماس

في هذه الحالة نفرض شرط أن المقياس n حسب خط العرض φ_0 هو أصغري ويساوي الواحد.

إذا طبقنا العلاقة (٥,٢٧)، مع فرض أن $n_0 = 1$ ، نكون قد حققنا شرط أن يكون أصغري ويساوي الواحد. إذاً من (٥,٢٧) نجد أن :

$$(٥,٣٠) \quad \alpha = \sin \varphi_0$$

أما قيمة ρ من أجل φ_0 وباعتبار أن $n_0 = 1$ فإن :

$$1 = \frac{\alpha \rho_0}{r_0} = \frac{\sin \varphi_0 \rho_0}{N_0 \cos \varphi_0}$$

$$(٥,٣١) \quad \rho_0 = N_0 \tan \varphi_0$$

وهو طول عامد المخروط ذو القاعدة r_0 (الشكل رقم ٦٦).

من (٥,٣٠) و (٥,٣١) نحسب قيمة الثابت C من علاقة ρ

$$\rho_0^2 = \frac{2}{\alpha} (C - S)$$

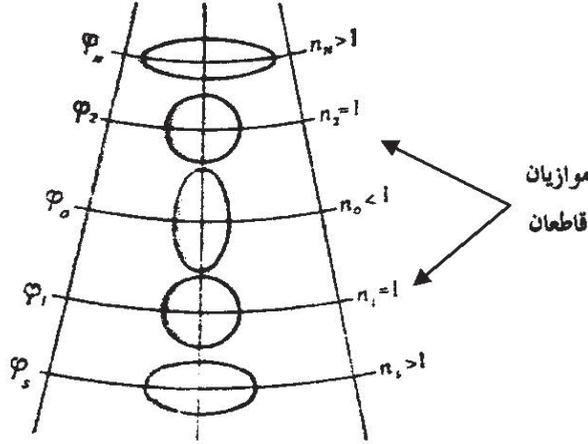
$$(٥,٣٢) \quad C = \frac{\alpha \rho_0^2}{2} + S$$

من العلاقة (٥,٣٢) نستنتج أنه عندما $\varphi = 90^\circ$ فإن $\rho \neq 0$ ، هذا يعني أن مرسم القطب في هذا الإسقاط ليس نقطة بل قوس دائرة. وعند اعتماد سطح الكرة لدينا المعادلة التفاضلية :

$$\rho d\rho = -\frac{R^2}{\alpha} \cos \varphi d\varphi$$

$$(٥,٣٣) \quad \rho^2 = \frac{2R^2}{\alpha} (C - \sin \varphi)$$

هنا يتم اختيار R نصف قطر الكرة المكافئة المحسوبة بالعلاقة (٢،١٧) إن خطوط تساوي التشوهات في هذه الإسقاطات تنطبق مع مرتسمات خطوط العرض. وأما محاور قطوع التشوهات في كل قطع تتناسب عكساً مع بعضها. يبين الشكل رقم (٧١) شكل قطوع التشوهات لنظام إسقاط مخروطي مكافئ بموازيين أساسيين (مخروط قاطع).



الشكل رقم (٧١). قطوع التشوهات لإسقاط مخروطي مكافئ (مخروط قاطع).

(٥،٣،٢) حالة المخروط القاطع

في هذه الحالة بفرض شرط تساوي المقياس المحلي n_1 و n_2 حسب موازيين أساسيين φ_1 و φ_2 بحيث تكون قيمة المقياس مساوية للواحد. أي:

$$(0,34) \quad \left(\frac{\alpha \rho_1}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{\alpha \rho_2}{r_2}\right)^2 = 1$$

بتعويض قيمة ρ من (٥،٢٦) نجد:

$$2\alpha (S_2 - S_1) = r_1^2 - r_2^2$$

$$(0,35) \quad \alpha = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2(S_2 - S_1)}$$

بمعرفة α يمكن حساب ρ_1 ، ρ_2 من (٥,٣٤):

$$\rho_1 = \frac{r_1}{\alpha} , \rho_2 = \frac{r_2}{\alpha}$$

الآن يمكن حساب الثابت c من (٥,٢٦):

$$(٥,٣٦) \quad c = \frac{\alpha \rho_1^2}{2} + S_1 = \frac{\alpha \rho_2^2}{2} + S_2$$

أما بالنسبة للكرة فبشكل مشابه نحصل على:

$$(٥,٣٧) \quad \alpha = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2R(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)}$$

$$(٥,٣٨) \quad c = \frac{\alpha \rho_1^2}{2R^2} + \sin\varphi_1 = \frac{\alpha \rho_2^2}{2R^2} + \sin\varphi_2$$

بشكل عام فإن نظم الإسقاط المخروطية المكافئة تستخدم للخرائط ذات المقياس الصغير، وفي بعض الحالات للخرائط ذات المقياس المتوسط.

(٥,٤) نظم الإسقاط المخروطية المتساوية المسافات

إن المقصود هنا بالشبكة المتساوية المسافات، هو المحافظة على تباعد متساو بين خطوط العرض، وهذا التباعد يؤخذ بحيث ترسم خطوط الطول بدون تشوهات. نذكر هنا بأن التباعد بين خطوط الطول محقق من العلاقات العامة لنظم الإسقاط المخروطية، حيث لدينا $\delta = \alpha \lambda$ ، ولكن هذا لا يعني أن مرسم خطوط العرض بدون تشوه.

إذا الشرط الرئيسي في هذه الإسقاطات هو $m=1$ ، ومن ثم:

$$(٥,٣٩) \quad m = \frac{-dp}{M d\varphi} = 1$$

من هذه العلاقة يجب الحصول على شكل التابع $\rho = f(\varphi)$ في العلاقات العامة.

$$d\rho = -M d\varphi$$

بإجراء التكامل نحصل على:

$$(٥,٤٠) \quad \rho = c - s$$

حيث c ثابت التكامل، s طول قوس من خط الطول محصور بين 0 و φ .
من العلاقة (٥,٤٠) نجد أنه عندما $\varphi = 0$ فإن $s = 0$ ومن ثم فإن:

$$(٥,٤١) \quad c = \rho_0$$

أي أن الثابت يساوي نصف قطر مرتسم خط الاستواء. الشكل رقم (٧٢) يبين شكل الشبكة في هذا النظام.



الشكل رقم (٧٢). شبكة الإسقاط المخروطي المتساوي المسافات.

لندرس الآن تغيرات المقياس المحلي μ . حسب (٥,٧) لدينا:

$$\frac{dn}{d\varphi} = \alpha \left[\frac{\frac{d\rho}{d\varphi} r - \frac{dr}{d\varphi} \rho}{r^2} \right]$$

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -M, \quad \frac{dr}{d\varphi} = -M \sin\varphi$$

$$\frac{dn}{d\varphi} = \alpha \left[\frac{-Mr + M\rho \sin\varphi}{r^2} \right]$$

$$\left(\frac{dn}{d\varphi} \right)_0 = \frac{\alpha M_0}{r_0} \left(\frac{\rho_0}{r_0} \sin\varphi_0 - 1 \right) = 0$$

(٥,٤٢)

$$\rho_0 = N_0 \operatorname{ctan} \varphi_0$$

إذا المقياس حدي وفق خط التماس بين المخروط والإهليلج. أما بالاشتقاق مرة أخرى لقيمة n ، فنستنتج أن المقياس حسب φ_0 أصغري أيضاً. ومن ثم يمكن الحصول على α من العلاقة (٥,٤٢):

$$\frac{\rho_0}{r_0} = \frac{1}{\sin \varphi_0}$$

$$\frac{n_0}{\alpha} = \frac{1}{\sin \varphi_0}$$

أي:

(٥,٤٣)

$$\alpha = n_0 \sin \varphi_0$$

لحساب ثوابت نظام الإسقاط لدينا الحالتان الآتيتان:

(٥, ٤, ١) حالة المخروط المماس

في هذه الحالة يفرض الشرط بأن المقياس المحلي حسب خط العرض φ_0 حدي، ويساوي الواحد. فحسب العلاقة (٥, ٤٣) نجد أن:

$$(٥, ٤٤) \quad \alpha = \sin \varphi_0$$

وباعتبار (٥, ٤٠) نجد:

$$(٥, ٤٥) \quad c = \rho_0 + s_0$$

(٥, ٤, ٢) حالة المخروط القاطع

يفرض شرط تساوي المقياس المحلي n_1 ، n_2 حسب خطي العرض φ_1 ، φ_2 ، وقيمة المقياس تساوي الواحد.

$$n_1 = n_2 = 1$$

$$\alpha(c - S_1) = r_1$$

$$\alpha(c - S_2) = r_2$$

(٥, ٤٦)

$$\alpha = \frac{r_1 - r_2}{S_1 - S_2}$$

ومنه نجد أن:

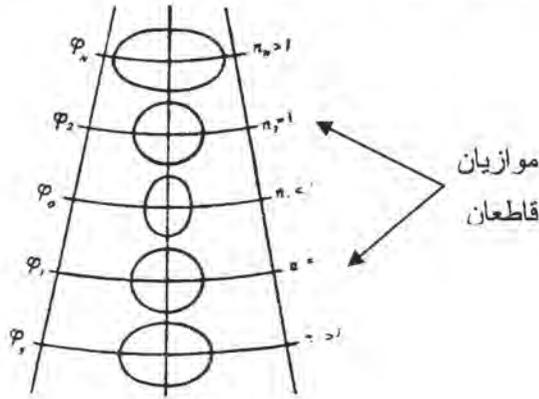
$$(٥, ٤٧) \quad c = r_1 \left(\frac{S_2 - S_1}{r_1 - r_2} \right) + S_1 = r_2 \left(\frac{S_2 - S_1}{r_1 - r_2} \right) + S_2$$

من أجل سطح الكرة نعتبر في العلاقات السابقة أن:

$$M = N = R, \quad r = N \cos \varphi = R \cos \varphi$$

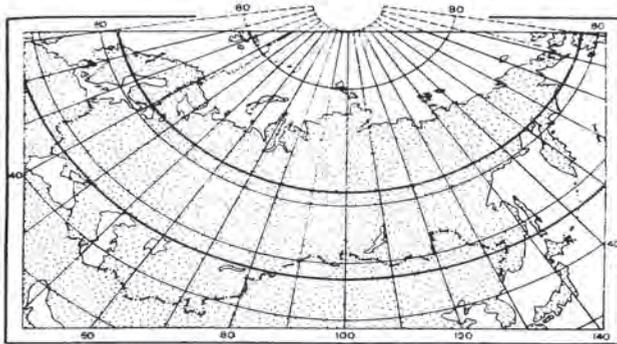
φ_0 يتم اختيارها مساوية لعرض الموازي المار بمتصف المنطقة المدروسة.

في هذه الإسقاطات باعتبار أن $m=1$ ، فإن قطوع التشوهات لها نصف قطر مساو للواحد، باتجاه مرتسمات خطوط الطول. نصف قطر القطوع المعامد للمذكور أعلاه، يكون مساوياً للواحد، بالنسبة للقطع الواقع على مرتسمي خطي العرض φ_1, φ_2 ، وأصغر من الواحد، بالنسبة للقطع الواقعة بينهما، وأكبر من الواحد، بالنسبة للقطع خارج المجال المذكور. يوضح الشكل رقم (٧٣) طبيعة هذه القطوع.



الشكل رقم (٧٣). قطوع التشوهات لإسقاط مخروطي متساوي المسافات (مخروط قاطع).

الشكل رقم (٧٤) يبين خارطة لقسم كبير من آسيا، بنظام الإسقاط المخروطي، ذي الشبكة المتساوية التباعد، بموازيين أساسيين.



الشكل رقم (٧٤). خارطة آسيا بإسقاط مخروطي متساوي المسافات [٥].

أخيراً نذكر أنه بشكل عام، يوصى باستخدام نظم الإسقاط المخروطية، لتصوير المناطق الواقعة على خطوط العرض الوسطى، أي بين منطقة الاستواء والمنطقة القطبية. فنظم الإسقاط المخروطية تعطي توزيع تشوهات أفضل مما هو عليه في نظم الإسقاط الأسطوانية، وذلك من أجل منطقة واقعة في المجال المذكور. والسبب في ذلك، هو إمكانية إمرار موازين أساسيين في المنطقة المصورة. بخلاف نظم الإسقاط الأسطوانية، حيث يمكن إمرار موازٍ واحد. ومن ثم فإن تفاوت قيم التشوهات يكون أقل. طبعاً ما يقال عن خطوط العرض فوق الاستواء، يصح من أجل الخطوط تحت الاستواء، حيث يستخدم مخروط يقع رأسه على الامتداد الجنوبي لمحور الأرض.

(٥, ٥) نظم الإسقاط المخروطية المائلة والمعرضة

إن نظم الإسقاط المخروطية القائمة كما ذكر أعلاه، تناسب المناطق الممتدة حسب خط عرض ما. ولكن في حالة كون المنطقة ممتدة حسب اتجاه يصنع زاوية حادة مع خطوط العرض (أو قائمة)، ولا ينطبق الخط الأوسط لامتداد المنطقة مع دائرة عظمى. عندئذ نلجأ لاستخدام نظم الإسقاط المخروطية المائلة (أو المعرضة). على سبيل المثال، نظام الإسقاط المخروطي المائل يناسب مناطق: الجزيرة العربية مع سورية والأردن والعراق، المغرب، فيتنام، البيرو، المكسيك. أما نظام الإسقاط المخروطي المعرض، فيناسب مناطق: تشيلي، السودان، نيوزيلندا.

في هذه النظم يعتمد سطح الكرة بدلاً من سطح الإهليلج، وهذه تعتبر تقريباً قاعدة عامة من أجل نظم الإسقاط المائلة، وذلك من أجل تطبيق علاقات الهندسة الكروية بسهولة. تتمثل شبكة نظم الإسقاط المخروطية المائلة بشبكة العرض والطول

المائلة والتي لا تنطبق مع الشبكة الطبيعية، ولها نفس شكل الشبكة الطبيعية، ولكن منسوبة للقطب المائل. الاتجاهان الرئيسيان للمقياس المحلي ينطبقان مع اتجاه خطوط العرض والطول المائلة.

المعادلات العامة لهذه الإسقاطات تعطى بالشكل:

$$\delta = \alpha \lambda'$$

$$\rho = f(\varphi')$$

حيث φ', λ' الإحداثيات الكروية المنسوبة للقطب المائل.

أما الإحداثيات التربيعية فتعطى بنفس العلاقات المعروفة:

$$x = \rho \sin \delta$$

$$y = q - \rho \cos \delta$$

ولكن هنا نشير إلى أن جملة المحاور هذه موجهة، بحيث ينطبق محور oy مع مرتسم خط الطول المائل الرئيسي، (مستقيم)، أما ox فمع مماس أحد خطوط العرض المائلة، ويعامد oy . إذاً نلاحظ أن مسألة حساب نظام الإسقاط المائل، تؤول إلى إيجاد العلاقة بين الإحداثيات الكروية المائلة λ', φ' و الإحداثيات الجغرافية λ, φ ، ومن ثم تطبيق نفس علاقات نظام الإسقاط المخروطي القائم. ومن أجل أن يكون توجيه المحاور الإحداثية عملياً، فيمكن تطبيق دوران على هذه المحاور، بعد حساب عناصر نظام الإسقاط، لأن ذلك يتم في المستوي ولا يؤثر على طبيعة توزيع التشوهات.

أما من أجل اختيار موقع القطب المائل ذي الإحداثيات (λ_0, φ_0) ، فيمكن فرض أن هناك خط عرض مائل يمر بالامتداد الأعظمي للمنطقة المصورة، وهو يقع على مسافة سمتية متساوية من القطب المائل. لذلك نختار ثلاث نقاط نفترض أن خط

العرض المائل المذكور، يمر خلالها. ثم نطبق العلاقات الآتية لحساب إحداثيات القطب المائل [١].

$$\tan \lambda_0 = \frac{\cos \varphi_A \cos \lambda_A (1-J) + J \cos \varphi_c \cos \lambda_c - \cos \varphi_B \cos \lambda_B}{\cos \varphi_A \sin \lambda_A (J-1) - J \cos \varphi_c \sin \lambda_c + \cos \varphi_B \sin \lambda_B}$$

$$\tan \varphi_0 = \frac{\cos \varphi_A \cos(\lambda_0 - \lambda_A) - \cos \varphi_B \cos(\lambda_0 - \lambda_B)}{\sin \varphi_B - \sin \varphi_A}$$

$$J = \frac{\sin \varphi_A - \sin \varphi_B}{\sin \varphi_A - \sin \varphi_C} \quad \text{حيث إن}$$

حيث A, B, C ثلاث نقاط من المنطقة يمر منها خط عرض مائل.

الجدير بالذكر هنا أن توزع التشوهات يتعلق بموقع القطب المائل وذلك من خلال العلاقات التالية:

$$(٥,٤٨) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = m' = \frac{-d\rho}{Rd\varphi'} \\ \mu_2 = n' = \frac{\alpha\rho}{R\cos\varphi'} \\ \mu_s = \mu_1 \mu_2 \end{array} \right.$$

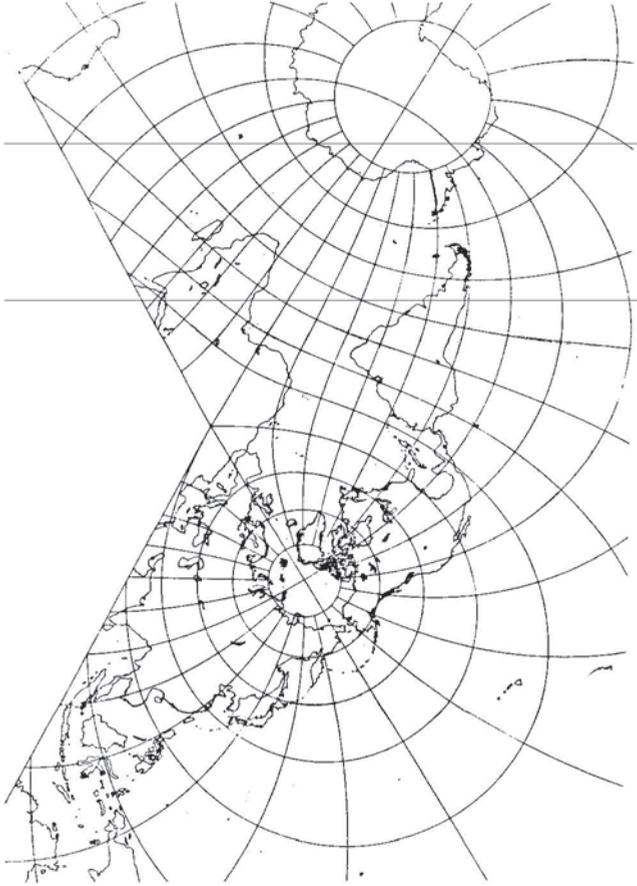
ومن ثم فإن التشوهات ترتبط باختيارنا لخط العرض المائل المار بمنتصف المنطقة المصورة. إذاً الاختيار هذا يجب أن يكون صحيحاً وذلك للإقلال ما أمكن من

التشوهات. في الوقت الحاضر وبوجود الحاسوب يمكن برمجة هذه المسألة بحيث - ومن خلال حساب عدة حالات لموقع القطب- يتم اختيار الحل الأفضل.

بالنسبة لخطوط تساوي التشوهات، فهي تتبع لموقع القطب كما في نظام الإسقاط المخروطية القائمة. إذاً فهي تنطبق مع مرتسمات أشباه خطوط العرض. نستنتج أن كل ما ذكرناه في نظم الإسقاط المخروطية القائمة، ينطبق على المائلة والمعتزلة، بمجرد الانتقال من الإحداثيات الجغرافية (φ, λ) ، إلى الإحداثيات الكروية المائلة (φ', λ') ، بواسطة علاقات الهندسة الكروية. فيما يلي، نورد على سبيل المثال، علاقات نظام الإسقاط المخروطي المائل ذي الشبكة المتساوية التباعد:

$$(٥,٤٩) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \rho \sin \delta, y = q - \rho \cos \delta \\ q = \rho_s, \mu_1 = m' = 1 \\ \mu_2 = n' = \frac{\alpha \rho}{R \cos \varphi'}, \mu_s = \mu_2 \\ \tan(45^\circ + \frac{\omega}{4}) = \sqrt{\mu_2}, \delta = \alpha \lambda' \\ \alpha = \frac{R(\cos \varphi'_1 - \cos \varphi'_2)}{S'_2 - S'_1} \\ \rho = c - R \varphi', c = \frac{R(\varphi'_2 \cos \varphi'_1 - \varphi'_1 \cos \varphi'_2)}{\cos \varphi'_1 - \cos \varphi'_2} \end{array} \right.$$

الشكل رقم (٧٥) يعطي نموذج عن نظم الإسقاط المخروطية المائلة. في الشكل تظهر شبكة مرتسمات خطوط الطول والعرض الطبيعية في نظام الإسقاط المخروطي المطابق المائل.



الشكل رقم (٧٥). شبكة الإسقاط المخروطي المائل [٦].