

حل المعادلات غير الخطية ذات المتغير الواحد

Solving Nonlinear Equations With One Variable

يناقش هذا الفصل مسألة إيجاد حلول (جذور) المعادلات غير الخطية والتي تسمى أيضاً مسألة أصفار الدوال. لهذه المسألة أهمية كبيرة في حياتنا اليومية حيث إنها تنشأ في الكثير من التجارب العملية والهندسية. فعلى سبيل المثال، أثناء دراسة انحرافات الضوء تكون هناك حاجة لإيجاد جذور المعادلة:

$$\tan x - x = 0$$

وهي معادلة غير خطية بالمتغير x . وكمثال عليها في المجال الهندسي، ليكن لدينا عمودين للكهرباء ونريد أن نصلهما بسلك كهربائي علماً بأن المسافة بينهما مائة متر ونريد أن يكون السلك متديلاً عشرة أمتار وسط المسافة بين العمودين. لإيجاد طول هذا السلك فإننا نحل المعادلة غير الخطية:

$$x \cosh \frac{50}{x} = x + 10$$

حيث إن حل هذه المعادلة هو طول السلك المطلوب.

ندرس في هذا الفصل بعض الطرائق العددية لحساب حلول تقريبية للمعادلة

غير الخطية:

$$f(x) = 0$$

(2.1)

إذا وُجدَ عدد α بحيث إن $f(\alpha) = 0$ ، فإن α هو حل للمعادلة (2.1). أيضاً، تسمى α صفر أو جذر الدالة $f(x)$. بناءً على ذلك، فإن الطرائق العددية التي سوف ندرسها تحسب قيم تقريبية للحل α . سوف يتضمن نقاشنا دراسة تحليلية للأخطاء المرافقة لهذه الطرائق، كما سوف ندرس معدل تقارب بعضها.

(٢, ١) طريقة التنصيف

Bisection Method

إن من أقدم الطرائق المعروفة لإيجاد جذر المعادلة (2.1) هي طريقة التنصيف والتي تقوم بتحديد الحل في فترة معينة ومن ثم تعمل على تصغير هذه الفترة تدريجياً حتى ينحصر الحل في أصغر فترة ممكنة. لاستخدام هذه الطريقة يتعين أولاً تحديد الثابتين a و b بحيث إن $f(a)f(b) < 0$ ، وبافتراض أن f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ فإنه حسب نظرية القيمة المتوسطة يوجد عدد واحد على الأقل، وليكن α ، في الفترة (a, b) بحيث إن $f(\alpha) = 0$. بالرغم من أنه يمكن استخدام طريقة التنصيف في حالة وجود أكثر من حل في الفترة $[a, b]$ إلا أننا سوف نفترض أن α حل وحيد للمعادلة (2.1) في هذه الفترة.

هدفنا هو إيجاد قيمة α وذلك بحساب متتالية من الفترات يكون طول كل فترة منها عبارة عن نصف الفترة التي قبلها وأن كل واحدة من هذه الفترات تحتوي على الحل α .

إذا تم اختيار الفترة $[a, b]$ والتي تحتوي على α فإننا نضع $a_1 = a$ ، $b_1 = b$ و $x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ (وهي نقطة الوسط للفترة $[a, b]$). ثم نحسب قيمة $f(x_1)$ ، والتي تعطينا أحد الاحتمالات الثلاثة التالية:

١ - $f(x_1) = 0$ ، وهذا يعني أن $\alpha = x_1$ هو الحل المطلوب.

٢- $f(a_1)f(x_1) < 0$ ، ومنه تستنتج أن الحل α موجود في الفترة $[a_1, x_1]$.

٣- $f(x_1)f(b_1) < 0$ ، أي أن $\alpha \in [x_1, b_1]$.

من الواضح أنه في حالة الحصول على الاحتمال الأول فإننا نوقف العمليات الحسابية لأننا نكون قد حصلنا على الحل المطلوب. أما بالنسبة للحالتين الثانية والثالثة فإنه يستوجب متابعة الحساب.

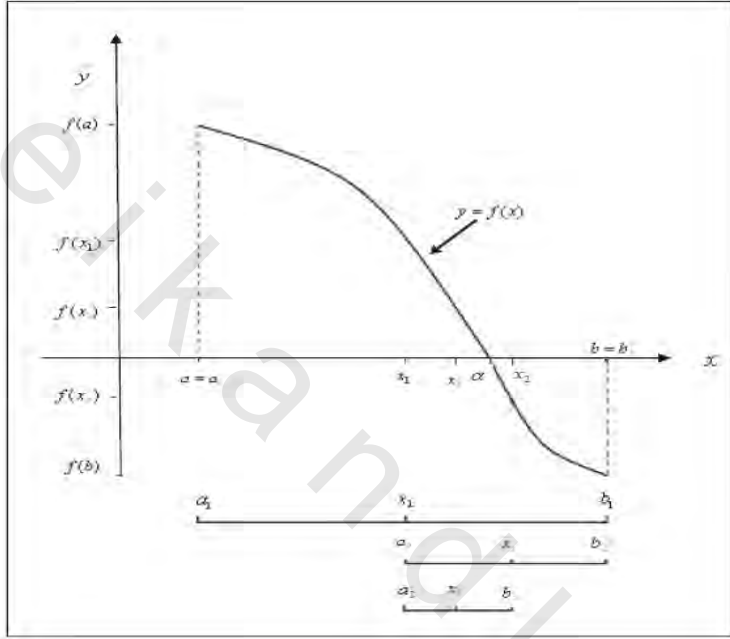
لنفترض أن $f(x_1) \neq 0$ وأن $f(a_1)f(x_1) < 0$ فإن الخطوة التالية في طريقة التنصيف تكون وضع $a_2 = a_1$ ، $b_2 = x_1$ و $x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$ والذي بدوره يعطينا الاحتمالات الثلاثة آنفة الذكر بالنسبة لـ a_2 ، b_2 و x_2 . لنفترض الآن أن $f(x_2) \neq 0$ وأن $f(x_2)f(b_2) < 0$ فإن هذا يعني أن الحل α موجود في الفترة $[x_2, b_2]$. ومن ثم نضع $a_3 = x_2$ ، $b_3 = b_2$ و $x_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}$. انظر الشكل رقم (٢، ١).

تكرر هذه الكيفية للحصول على متتالية من الأعداد $x_1, x_2, \dots, x_n$ حيث إن:

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad n \geq 1 \quad (2.2)$$

حتى يتم الحصول على $f(x_n) = 0$. ولكن عملياً من غير المرجح أن تكون قيمة $f(x_n)$ مساوية للصفر في الحاسب الآلي وذلك بسبب أخطاء التدوير المرتبطة بالعمليات الحسابية. وبناء على ذلك، فإنه لا يمكن اعتبار $f(x_n) = 0$ كشرط لإيقاف العمليات الحسابية. من ناحية أخرى، يمكن السماح بتفاوت حول الصفر وذلك بوضع ε حيث $|f(x_n)| \leq \varepsilon$ إن ε عدد حقيقي موجب صغير (عادة يوضع

$\varepsilon = 5 \times 10^{-t}$ ، $t \geq 1$ عدد صحيح). راجع الخوارزمية (٢، ١) والتي تستعرض خطوات هذه الطريقة.



الشكل رقم (٢، ١). التقسيمات الثلاثة الأولى للفترة $[a, b]$.

نشير هنا إلى أنه يمكن إيقاف العمليات الحسابية وذلك إذا تحقق الشرط

$$\frac{b_n - a_n}{2} \leq \varepsilon \quad \text{من أجل } n \geq 1. \text{ وحيث إن } \alpha \text{ تنتمي إلى } [a_n, x_n] \text{ أو } [x_n, b_n] \text{ فإن}$$

هذا الشرط يعني أن الحل التقريبي x_n يحقق $|x_n - \alpha| \leq \varepsilon$ ، وبالتالي نكون قد

حصلنا على حل تقريبي يبعد عن الحل المضبوط بمقدار لا يتجاوز التفاوت المسموح

به. عادة ما يكون ذلك كافياً للحصول على الحل التقريبي المطلوب ولكن إذا كان تأثير

أخطاء التدوير المرتبطة بالحسابات لعب دوراً في القيم العددية للحلول فإنه قد لا

يكون من الممكن الحصول على الحل التقريبي المنشود. من ناحية أخرى، هناك بعض المشاكل التي قد تواجهها العمليات الحسابية إذا ما استخدم شرط الوقوف المدرج في الخوارزمية (٢, ١). على كل حال قد يكون من المناسب استخدام الشرطين معاً وذلك بكتابة الخطوة ٥ كما يلي:

$$\text{الخطوة ٥: إذا كان } |f(x_n)| \leq eps \text{ أو } \frac{b_n - a_n}{2} \leq eps$$

وبالتالي يمكن الحصول على التقريب المطلوب إذا تحقق أحد الشرطين. سوف ندرس شروط الإيقاف بالتفصيل في الفقرة (٢, ٣).

خوارزمية (٢, ١): طريقة التنصيف

تستخدم هذه الخوارزمية طريقة التنصيف لحل المعادلة غير الخطية $f(x) = 0$ في الفترة $[a, b]$ حيث إن $f(a)f(b) < 0$. إذا أعطينا a, b, M (العدد الأقصى للتكرار) و eps (التفاوت المسموح به)، فإن الخوارزمية تحسب الحل التقريبي x_n للمعادلة.

الخطوة ١: ضع $n = 1$.

الخطوة ٢: ضع $a_n = a$ و $b_n = b$.

الخطوة ٣: كرر الخطوات ٤-٧ طالما $n \leq M$.

الخطوة ٤: ضع $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$.

الخطوة ٥: إذا كان $|f(x_n)| \leq eps$ فاطبع (الحل التقريبي هو " x_n ")؛ قف.

الخطوة ٦: ضع $n = n + 1$.

الخطوة ٧: إذا كان $f(a_n)f(x_n) < 0$ فضع $b_n = x_n$ وإلا فضع $a_n = x_n$.

الخطوة ٨: اطبع (الطريقة فشلت في حساب التقريب المنشود بعد ' M ' تكرار).

مثال (٢، ١)

للمعادلة $x^2 - x - 2 = 0$ حل وحيد في الفترة $[1.5, 3]$. استخدم طريقة التنصيف لإيجاد حلاً تقريبياً بدقة 5×10^{-3} .

في البداية نلاحظ أن $f(x) = x^2 - x - 2$ ، $f(1.5) = -1.25 < 0$ ، و $f(3) = 4 > 0$ ، وبوضع $a_1 = 1.5$ و $b_1 = 3$ فيكون لدينا $x_1 = \frac{1.5+3}{2} = 2.25$.
 وحيث إن $f(x_1) = 0.81250 > 0$ فإن الحل يكون موجود في الفترة $[1.5, 2.25]$ وبالتالي فإننا نضع $a_2 = 1.5$ و $b_2 = 2.25$. النتائج العددية مدرجة في الجدول رقم (٢، ١) والذي يوضح تقارب متتالية الأعداد إلى الحل التقريبي المنشود حيث تم إيقاف الحسابات عندما تحقق $|f(x_n)| \leq 5 \times 10^{-3}$.

الجدول رقم (٢، ١). النتائج العددية للمثال (٢، ١).

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\frac{b_n - a_n}{2}$
1	1.50000	3.00000	2.25000	0.81250	0.75000
2	1.50000	2.25000	1.87500	-0.35938	0.37500
3	1.87500	2.25000	2.06250	0.19141	0.18750
4	1.87500	2.06250	1.96875	-0.09277	0.09375
5	1.96875	2.06250	2.01563	0.04712	0.04688
6	1.96875	2.01563	1.99219	-0.02338	0.02344
7	1.99219	2.01563	2.00391	0.01173	0.01172
8	1.99219	2.00391	1.99805	-0.00586	0.00586
9	1.99805	2.00391	2.00098	0.00293	0.00293

من العمود الأخير في الجدول رقم (٢, ١) نلاحظ أن قيمة حاصل القسمة

$$\frac{b_n - a_n}{2}$$

تتناقص مع ازدياد n وهذا يؤدي إلى أن x_n تقترب إلى الحل المضبوط α

بزيادة n وذلك لأنه محصور بين العددين a_n و b_n . النظرية التالية توضح أن متتالية الأعداد التي تحسبها طريقة التنصيف تتقارب دائماً إلى الحل المضبوط للمعادلة غير

الخطية (2.1).

نظرية (٢, ١)

لتكن f دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ بحيث إن $f(a)f(b) < 0$.

فإن طريقة التنصيف تكوّن متتالية من الأعداد الحقيقية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تحقق المتباينة:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^n}, \quad n \geq 1 \quad (2.3)$$

البرهان:

بما أن الحل α موجود في الفترة $[a_n, b_n]$ من أجل $n \geq 1$ ، فإنه من (2.2)

ينتج لدينا:

$$|x_n - \alpha| = \left| \frac{a_n + b_n}{2} - \alpha \right| \leq \left| \frac{a_n + b_n}{2} - a_n \right| = \left| \frac{b_n - a_n}{2} \right| \quad (2.4)$$

أيضاً نلاحظ أن:

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2},$$

$$b_3 - a_3 = \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{b-a}{2^2},$$

وبشكل عام، يكون لدينا:

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}, \quad n=1,2,3,\dots$$

وبالتعويض عن ذلك في (2.4) نحصل على المتباينة (2.3).

من المعلوم أن المتتالية $\{2^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب إلى الصفر عندما n تؤول إلى ما لا نهاية، وبالتالي فإنه من المتباينة (2.3) والتعريف (١,٧) نستنتج أن المتتالية $\{x_n - \alpha\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب إلى الصفر و بمعدل تقاربي $O(2^{-n})$. وبناء على ذلك، فإن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب إلى الحل المضبوط α بمعدل تقاربي $O(2^{-n})$. أيضاً، يمكن الاستنتاج من النظرية (٢, ١) أن طريقة التنصيف مضمونة التقارب إذا حققت الدالة f شروط النظرية.

نشير هنا إلى أن الطرف الأيمن في المتباينة (2.3) يمثل حداً أعلى للخطأ المرافق للحل التقريبي x_n ($|x_n - \alpha|$). المثال التالي يوضح ذلك.

مثال (٢, ٢)

هنا سوف نحسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بالحل التقريبي x_6 في المثال (٢, ١)، حيث إن:

$$|x_6 - \alpha| \leq \frac{3-1.5}{2^6} = \frac{1.5}{64} \approx 0.02344$$

نعلم أن الحل المضبوط للمعادلة الموجودة في المثال (٢, ١) هو $\alpha = 2$ وبالتالي فإن الخطأ المضبوط المتعلق بالحل التقريبي x_6 هو $|x_6 - \alpha| = 0.00781$. وهو أقل من الحد الأعلى كما يجب أن يكون.

لتفترض الآن أننا نريد استخدام طريقة التنصيف لحساب حلاً تقريبياً x_N بدقة $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$ حيث إن $t \geq 1$ عدد صحيح، أي أنه يحقق الشرط $|x_N - \alpha| \leq \varepsilon$. فإنه يمكن استخدام نظرية (٢, ١) لحساب عدد التكرارات اللازمة للحصول على هذا الحل كما يلي: في البداية نلاحظ أن:

$$|x_N - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^N} \leq 5 \times 10^{-4}$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$2^N \geq \frac{10^t (b-a)}{5}$$

وبأخذ $\ln$ الطرفين نحصل على:

$$N \ln 2 \geq \ln \{10^t (b-a)\} - \ln 5$$

ومنه يكون لدينا:

$$N \geq \frac{\ln \{10^t (b-a)\} - \ln 5}{\ln 2} \quad (2.5)$$

هذه المتباينة تعطينا حداً لعدد التكرارات المطلوبة. فمثلاً، إذا كان لدينا معادلة غير خطية معرفة على الفترة [1,2] ونريد حساب عدد التكرارات اللازمة لإيجاد حلاً عددياً بدقة 5×10^{-5} وذلك باستخدام طريقة التنصيف فإنه بالتعويض في (2.5) يكون لدينا $N \geq 14.2877$ ، وبالتالي يمكن وضع $N = 15$. نذكر هنا أنه إذا كانت الدقة المطلوبة للحل العددي هي $\varepsilon = 10^{-t}$ فإن عدد التكرارات اللازمة يحقق المتباينة:

$$N \geq \frac{\ln \{10^t (b-a)\}}{\ln 2} \quad (2.6)$$

كما هو متضمن في المثال التالي:

مثال (٢،٣)

هنا نحسب عدد التكرارات اللازمة للحصول على حل تقريبي بدقة 10^{-3} للمسألة الموجودة في المثال (٢،١). بما أن $a = 1.5$ و $b = 3.5$ فإنه من المتباينة (2.6) نحصل على:

$$N \geq \frac{\ln [(1.5)(10^3)]}{\ln 2} \approx 10.55$$

مما يعني أنه للحصول على الحل التقريبي بالدقة المطلوبة قد نحتاج إلى ١١ تكراراً.

(٢,٢) طريقة الوضع الخاطئ

Regula Falsi Method

نحن نعلم أن طريقة التنصيف توجد قيماً متتالية لـ x_n وذلك استناداً على إشارات $f(a_n)$ و $f(b_n)$ فقط دون أي اعتبار لقيمتها المطلقة. فمثلاً، إذا كان $f(a_n) = 0.1$ و $f(b_n) = -10$ فإن طريقة التنصيف تحسب x_n وهي نقطة الوسط للفترة $[a_n, b_n]$ بينما الحل α يكون أقرب إلى a_n منه إلى b_n ، لماذا؟ وبناء على ذلك، فإنه من المناسب اختيار x_n بحيث تكون قيمتها أقرب إلى a_n . إن طريقة الوضع الخاطئ توفر لنا أسلوب لاختيار مثل هذه القيمة لـ x_n والذي يمكن وصفه كما يلي:

لتكن $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ بحيث إن $f(a)f(b) < 0$. لنضع $a_1 = a$ و $b_1 = b$ ولنقرّب منحنى الدالة f بالمستقيم الواصل بين النقطتين $(a_1, f(a_1))$ و $(b_1, f(b_1))$. وبالتالي نقرب حل المعادلة (2.1) في الفترة $[a, b]$ بجذر هذا المستقيم، وليكن x_1 . نلاحظ أن قيمة x_1 هي قيمة x التي عندها يقطع المستقيم محور x ، (الشكل رقم ٢,٢). بالرمز لإحداثيات النقاط $(a_1, f(a_1))$ ، $(b_1, f(b_1))$ و $(x_1, 0)$ بالرموز A ، B و C ، بالترتيب، فإنه يمكن إيجاد x_1 بمساواة ميل المستقيم AB بميل المستقيم BC ، أي أن:

$$\frac{0 - f(b_1)}{x_1 - b_1} = \frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1}$$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة لـ x_1 نحصل على:

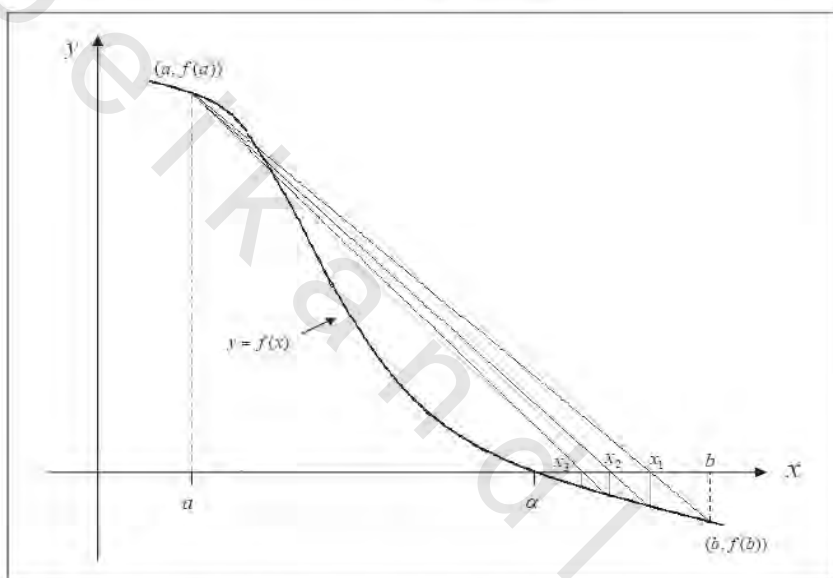
$$x_1 = \frac{a_1 f(b_1) - b_1 f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}$$

الآن كما هو الحال بالنسبة لطريقة التنصيف، إذا كان $f(x_1) = 0$ فإن هذا يعني أن x_1 هو الحل وعندها نوقف العمليات الحسابية. من ناحية أخرى، إذا كان $f(x_1) \neq 0$ فيكون لدينا أحد الاحتمالين؛ إما $f(a_1)f(x_1) < 0$ أو

$f(a_1)f(x_1) > 0$. وبفرض أن الاحتمال الأول هو المتحقق فلإن الحل α يقع في

الفترة $[a_1, x_1]$. وبالتالي نضع $a_2 = a_1$ و $b_2 = x_1$ ويكون لدينا:

$$x_2 = \frac{a_2 f(b_2) - b_2 f(a_2)}{f(b_2) - f(a_2)}$$



الشكل رقم (٢،٢). التكرارات الثلاثة الأولى في طريقة الوضع الخاطئ.

مرة أخرى، إذا كان $f(x_2) = 0$ فإن x_2 هو الحل وإلا فإنه يكون إما

$f(a_2)f(x_2) < 0$ أو $f(a_2)f(x_2) > 0$. وبفرض أن الاحتمال الثاني هو المتحقق

فإننا نضع $a_3 = x_2$ و $b_3 = b_2$ ونحسب قيمة x_3 . يكرر هذا الأسلوب للحصول

على متتالية الأعداد $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ حيث إن:

$$x_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} \quad (2.7)$$

من أجل $n \geq 1$ ، حتى يتحقق الشرط $|f(x_n)| \leq \varepsilon$ حيث إن $\varepsilon > 0$ يمثل مقدار الدقة المطلوبة للحل التقريبي الذي نصبوا إليه. راجع الخوارزمية (٢،٢).

خوارزمية (٢،٢): طريقة الوضع الخاطئ

تستخدم هذه الخوارزمية طريقة الوضع الخاطئ لحل المعادلة غير الخطية $f(x) = 0$ في الفترة $[a, b]$ حيث إن $f(a)f(b) < 0$. إذا أعطينا M ، b ، a ، (العدد الأقصى للتكرار) و ε (التفاوت المسموح به)، فإن الخوارزمية تحسب الحل التقريبي x_n للمعادلة.

الخطوة ١: ضع $n = 1$

الخطوة ٢: ضع $a_n = a$ و $b_n = b$

الخطوة ٣: كرر الخطوات ٤-٧ طالما $n \leq M$

الخطوة ٤: ضع $x_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$

الخطوة ٥: إذا كان $|f(x_n)| \leq \varepsilon$ فاطبع (الحل التقريبي هو ' x_n ')؛ قف.

الخطوة ٦: ضع $n = n + 1$

الخطوة ٧: إذا كان $f(a_n)f(x_n) < 0$ فضع $b_n = x_n$ وإلا فضع $a_n = x_n$.

الخطوة ٨: اطبع (الطريقة فشلت في حساب التقريب المنشود بعد ' M ' تكرار).

مثال (٢،٤)

هنا سوف نستخدم خوارزمية الوضع الخاطئ لحل المسألة الموجودة في المثال

(٢،١).

بمعرفة القيم $a_1 = 1.5$ و $b_1 = 3$ فإن:

$$x_1 = \frac{(1.5)f(3) - (3)f(1.5)}{f(3) - f(1.5)} = \frac{6 + 3.75}{4 + 1.25} = 1.85714$$

وحيث إن $f(x_1) = -0.40816 < 0$ فإننا نضع $a_2 = x_1$ و $b_2 = b_1$. يحتوي الجدول رقم (٢, ٢) على النتائج العددية لهذه المسألة حيث إنه قد تم إيقاف الحسابات عندما تحقق الشرط $|f(x_n)| \leq 5 \times 10^{-3}$.

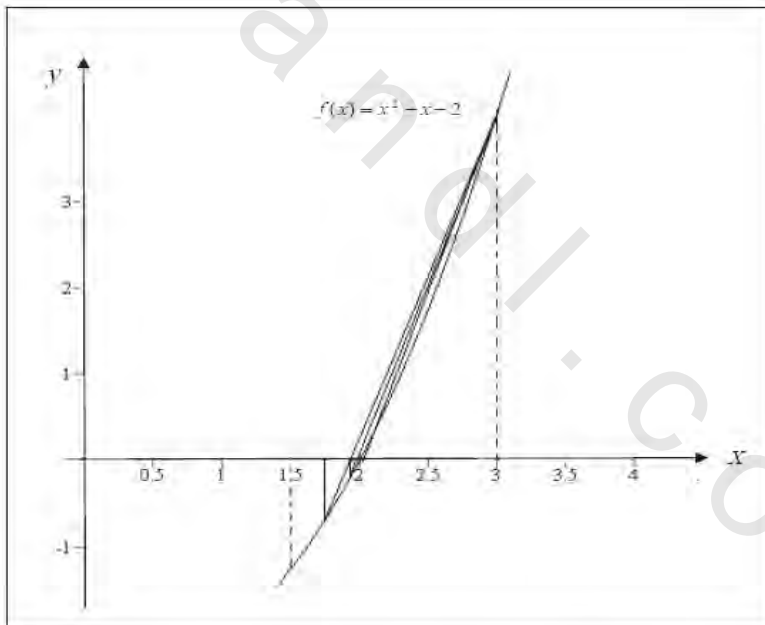
الجدول رقم (٢, ٢). النتائج العددية للمثال (٢, ٤).

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
1	1.50000	3.00000	1.85714	-0.40816
2	1.85714	3.00000	1.96293	-0.10974
3	1.96293	3.00000	1.99065	-0.02795
4	1.99065	3.00000	1.99766	-0.00702
5	1.99766	3.00000	1.99942	-0.00175

من الجدول رقم (٢, ٢) يمكن ملاحظة أن قيم الدالة دائماً سالبة وهذا يعني أن $b_n = 2$ و $a_n = x_{n-1}$ من أجل $n \geq 2$. الشكل رقم (٢, ٣) يوضح تقارب متتالية الأعداد $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ إلى الحل $\alpha = 2$ ، حيث يمكن ملاحظة أن نقاط تقاطع المستقيمات المتتالية والواصلة بين طرفي المنحنى مع محور x تقترب إلى النقطة (2, 0).

بمقارنة النتائج الموجودة في الجدول رقم (٢, ٢) مع تلك الموجودة في الجدول رقم (٢, ١) نجد أن دقة الحل العددي x_5 والذي تم الحصول عليه باستخدام طريقة الوضع الخاطئ هي (تقريباً) مساوية لتلك بالنسبة للحل العددي x_9 الذي حصلنا عليه باستخدام طريقة التنصيف، حيث إن الفرق $|x_5 - \alpha| = 0.00058$

و $|x_0 - \alpha| = 0.00098$ بالنسبة للطريقتين بالتتالي. إذن، نلاحظ من هذه النتائج أن متتالية الأعداد $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ المكونة باستخدام طريقة الوضع الخاطئ تتقارب إلى الحل بشكل أسرع من تلك التي يتم الحصول عليها باستخدام طريقة التنصيف. في الواقع، هذا صحيح بشكل عام، حيث إنه قد تم تصميم طريقة الوضع الخاطئ لتعطي تقارباً أسرع من طريقة التنصيف. في البند السابق كنا قد درسنا معدل التقارب لطريقة التنصيف وذلك من خلال نظرية (٢،١). أما بالنسبة لطريقة الوضع الخاطئ فإننا سوف نناقش معدل تقاربها في البند (٢،٧) وذلك عندما نناقش تحليل الخطأ ومعدلات التقارب للطرائق العددية.



الشكل رقم (٢،٣). تقارب المتتالية $\{x_n\}$ إلى الحل $x = 2$ باستخدام طريقة الوضع الخاطئ.

(٢,٣) معايير الوقوف

Stopping Criteria

لإيجاد جذر المعادلة $f(x) = 0$ ، فإننا نوجد متتالية من الأعداد $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ بحيث إن $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ ، حيث α حل لهذه المعادلة. نحن نريد أن نحسب x_N بحيث يكون الفرق $|x_N - \alpha|$ أقل أو يساوي δ ، حيث إن δ عدد حقيقي موجب و هو التفاوت المسموح به حول الحل الفعلي α (أو بعبارة أخرى، الدقة المطلوبة للحل التقريبي x_N). بما أن قيمة α تكون عادة غير معلومة فإنه لا يمكن إيجاد قيمة x_N التي تحقق المتباينة $|x_N - \alpha| \leq \delta$. إذن، فالسؤال الذي يطرح نفسه هنا هو؛ كيف يمكن التأكد من الحصول على الحل التقريبي المطلوب x_N ؟ أو بعبارة أخرى، متى يمكن وقف حساب عناصر المتتالية $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ؟ في الواقع لا توجد إجابة محددة لهذا السؤال ولكن يمكن استخدام أحد الشروط (المعايير) التالية لوقف العمليات الحسابية:

$$|f(x_N)| \leq \varepsilon \quad (2.8)$$

$$|x_N - x_{N-1}| \leq \varepsilon \quad (2.9)$$

$$\frac{|x_N - x_{N-1}|}{|x_N|} \leq \varepsilon \quad (2.10)$$

حيث إن x_N و x_{N-1} هما الحلان التقريبيان عند التكرارين N و $N-1$ ، بالترتيب، و $\varepsilon > 0$ هو التفاوت المسموح به. عادة نضع $\varepsilon = \delta$ لإيجاد x_N وبناء على ذلك فإننا نأمل أن تحقق المتباينة $|x_N - \alpha| \leq \delta$.

يجدر الإشارة هنا إلى أن الشرط الثالث هو أفضل الشروط الثلاثة المدرجة سابقاً، حيث إنه قد تنشأ بعض المشاكل أثناء استخدام الشرطين الآخرين. فهناك دوال تكون قيمتها $f(x_n)$ تؤول إلى الصفر عندما n تؤول إلى ما لانهاية بينما، وفي

الوقت نفسه، تكون x_n تؤول إلى قيمة عددية بعيدة كل البعد عن الحل α . من ناحية أخرى، يوجد الكثير من الحالات التي يكون فيها الفرق $|x_n - x_{n-1}|$ يؤول إلى الصفر عندما n تؤول إلى ما لا نهاية وفي الوقت ذاته تكون قيمة x_n تؤول إلى ما لا نهاية. أي أن المتتالية $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تكون متباعدة. المثالان $(2, 5)$ و $(2, 6)$ يوضحان فشل استخدام الشرطين (2.8) و (2.9)، بالترتيب.

مثال (٢, ٥)

العدد $\alpha = 2$ هو الحل للدالة $f(x) = (2-x)^7$. المتتالية المعروفة بـ $x_n = 2 + \frac{1}{2n}$ ، $n \geq 1$ تؤول إلى α عندما n تؤول إلى ∞ . يمكن إثبات أن $|f(x_n)| \leq 10^{-4}$ لكل $n \geq 2$ ، بينما للحصول على $|x_N - \alpha| \leq 10^{-4}$ يجب أن تكون $N \geq 5000$. في البداية نلاحظ أن:

$$|f(x_n)| = \left| (2 - 2 - \frac{1}{2n})^7 \right| = \left| (-\frac{1}{2n})^7 \right| \leq \left(\frac{1}{4} \right)^7 \approx 0.00006 < 10^{-4}$$

ولكن:

$$|x_N - \alpha| = \left| 2 + \frac{1}{2N} - 2 \right| = \frac{1}{2N} \leq 10^{-4}$$

ومنه نحصل على $N \geq \frac{10^4}{2} = 5000$.

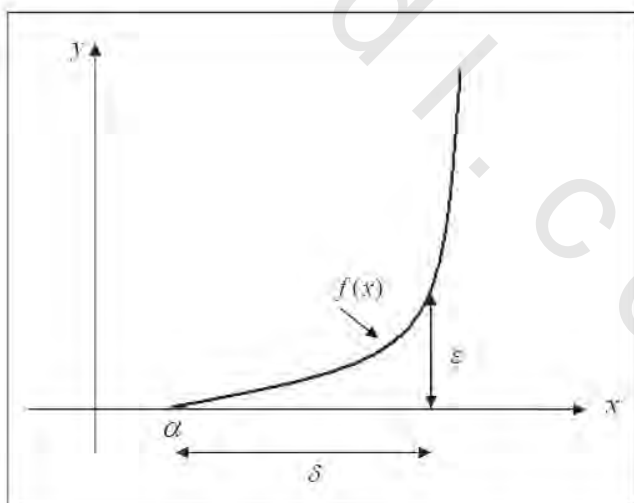
يمكن تفسير السبب المباشر في المشكلة المشار إليها في هذا المثال كالتالي: لنعتبر شرط الوقوف $|f(x_N)| \leq \varepsilon$ ، فهذا يعني أننا نأمل أن نحصل على $\delta = \varepsilon$ ، ولكن هذا لا يتحقق دائماً حيث إنه يمكن استخدام نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل لإثبات أن:

$$|x_N - \alpha| = \frac{|f(x_N)|}{|f'(\eta)|} \leq \frac{\varepsilon}{|f'(\eta)|} \quad (2.11)$$

حيث إن $\eta \in (x_N, \alpha)$ من الواضح أنه إذا كانت قيمة $|f'(\eta)|$ صغيرة جداً فإن شرط الوقوف المشار إليه سوف يفشل في إيقاف الحسابات في الوقت المناسب وذلك لأن الكسر $\frac{\varepsilon}{|f'(\eta)|} = \delta$ قد لا يكون بالعدد الصغير المرغوب فيه، وهذا يعني أن الحسابات قد توقفت قبل الوصول إلى الحل التقريبي المطلوب. وهذا هو الحال بالنسبة للمسألة الموجودة في المثال (٢، ٤) حيث إن:

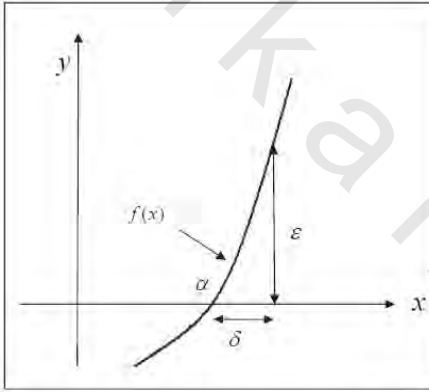
$$|f'(\eta)| = 7(2-\eta)^6 \leq 1.7 \times 10^{-3}$$

من أجل $\eta \in (\alpha, x_2)$. يوضح الشكل رقم (٢، ٤) العلاقة بين ε و δ في الحالات التي يكون فيها $|f'(\eta)| < 1$ ، كالحالة التي درست في المثال (٢، ٤). نلاحظ من الرسم أنه تم إيقاف الحسابات مبكراً حيث إن الفرق بين الحلين التقريبي x_N والفعلي α أكبر من قيمة $|f(x_N)|$ ، أي أن $\delta > \varepsilon$.

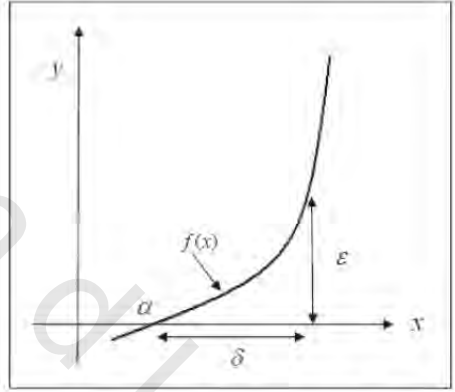


الشكل رقم (٢، ٤). العلاقة بين ε و $|f(x_N)|$ و $|x_N - \alpha| \leq \delta$ عندما يكون $|f'(\eta)| < 1$.

أيضاً يمكن الاستنتاج من المتباينة (2.11) أنه إذا كانت $|f'(\eta)| \gg 1$ فإن شرط الوقوف (2.8) قد يفشل وذلك لاحتمال أن يكون الفرق $|x_N - \alpha|$ صغير جداً بالمقارنة مع الدقة المطلوبة ε . بعبارة أخرى، سوف يتأخر وقوف الحسابات، وهذا يقودنا إلى حسابات غير ضرورية. هذه الحالة موضحة في الشكل رقم (٢،٥). من ناحية أخرى، إذا كانت $|f'(\eta)| \approx 1$ فإن هذا الشرط لا يفشل وذلك لأن $\varepsilon \approx \delta$ ونستطيع الحصول على الحل التقريبي المرغوب فيه، انظر الشكل رقم (٢،٥).



(ب) عندما يكون $|f'(\eta)| \gg 1$



(أ) عندما يكون $|f'(\eta)| \approx 1$

الشكل رقم (٢،٥). العلاقة بين $|f(x_N)| \leq \varepsilon$ و $|x_N - \alpha| \leq \delta$.

يستعرض المثال (٢،٦) أحد الحالات التي قد يفشل فيها شرط الوقوف (2.10).

مثال (٢،٦)

لتكن $\{x_n\}$ متتالية معرفة بـ $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. إذن يكون لدينا:

$$x_n - x_{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n-1}$$

ومنه نلاحظ أن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

ولكن x_n عبارة عن المجموع الجزئي ذو الرتبة n من متسلسلة توافقية متباعدة. نستنتج من المناقشة السابقة أنه لا يمكن تركيب معيار للوقوف يكون عملياً لجميع الحالات. وبالمقابل فإنه يمكن إيقاف العمليات الحسابية إذا تحقق الشرط $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon |x_n| + \varepsilon$ وهو عبارة عن دمج للشرطين (2.9) و (2.10). على كل حال، فإنه من الناحية العملية، يستحسن وضع حد أقصى لعدد التكرارات وذلك لتلافي أي حسابات غير ضرورية.

(٢، ٤) طريقة تكرار النقطة الثابتة

Fixed-Point Iteration Method

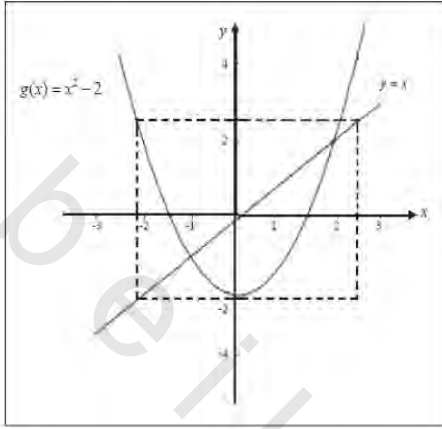
إن الفكرة الأساسية لطريقة النقطة الثابتة (أو ما تسمى بطريقة التكرار الدالي) لحل المعادلة غير الخطية (2.1) هي كتابة هذه المعادلة بالشكل المساوي:

$$x = g(x) \quad (2.12)$$

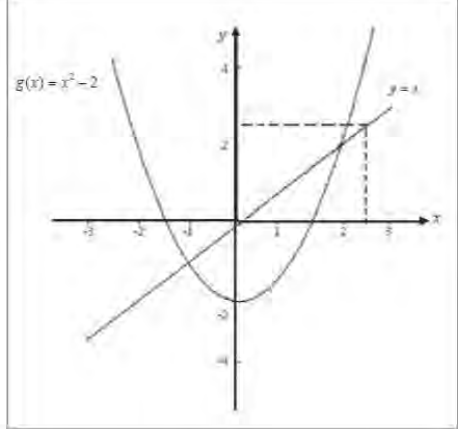
وبالتالي فإن أي حل للمعادلة (2.12) هو عبارة عن حل للمعادلة الأصلية (2.1). نشير هنا إلى أنه أي حل للمعادلة (2.12) يسمى عادة بالنقطة الثابتة للدالة g ، وهو ما يعني بأن الحل لا يتأثر بتطبيق الدالة g .

مثال (٢، ٧)

للدالة $g(x) = x^2 - 2$ نقطة ثابتة وحيدة في الفترة $[0, 2.5]$ بينما لها نقطتين ثابتتين في الفترة $[-2, 2]$ ، انظر الشكل رقم (٢، ٦) حيث يتضح أن منحنى الدالة $g(x)$ يتقاطع مرة واحدة مع المستقيم $x = y$ في المربع الذي طول ضلعه هو طول الفترة الأولى بينما يتقاطع مرتين مع نفس المستقيم في المربع الذي طول ضلعه مساوياً للفترة الأخرى.



(ب)



(ا)

الشكل رقم (٢، ٦). النقاط الثابتة للدالة $g(x) = x^2 - 2$ في الفترتين (ا) $[0, 2.5]$ و(ب) $[-2, 2]$.

يتضح مما سبق أن مسألة حل المعادلة (2.1) أصبحت إيجاد نقطة ثابتة للمعادلة (2.12). في الواقع هناك أكثر من وسيلة لكتابة المعادلة الأصلية (2.1) بالشكل المساوي (2.12)، وهذا يعني أن المشكلة الأساسية التي تواجهنا لحل المعادلة الأصلية على الفترة المغلقة $[a, b]$ باستخدام طريقة التكرار الدالي هي اختيار الدالة g المناسبة. وبما أننا اعتبرنا أن للمعادلة الأصلية حل وحيد في الفترة المعنية فإنه لا بد من اختيار الدالة g التي يكون لها نقطة ثابتة وحيدة في الفترة $[a, b]$ حتى نتمكن من استخدام هذا الأسلوب لحل المعادلة (2.1). نذكر هنا أنه بما أن الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $[a, b]$ ، فإن الدالة g تكون متصلة على هذه الفترة.

نستنتج مما تقدم أنه لاستخدام طريقة التكرار الدالي لإيجاد الحل الوحيد α في الفترة $[a, b]$ للمعادلة الأصلية (2.1) يجب اختيار الدالة g بحيث يوجد لها نقطة ثابتة وحيدة في هذه الفترة. النظرية التالية توضح لنا الشروط الكافية لوجود نقطة ثابتة وحيدة للدالة g .

نظرية (٢,٢)

لتكن $g \in C[a, b]$ و $g(x) \in [a, b]$ لكل $x \in [a, b]$ ، فإنه يوجد نقطة ثابتة للدالة g في الفترة $[a, b]$. إضافة إلى ذلك لتكن $|g'(x)| < 1$ لكل $x \in (a, b)$ فإن النقطة الثابتة تكون وحيدة.

البرهان:

إذا كان $g(a) = a$ أو $g(b) = b$ ، فإن وجود النقطة الثابتة يكون بديهياً. لنفترض أن هذا غير صحيح، إذن حسب المعطيات لا بد أن يكون لدينا $g(a) > a$ و $g(b) < b$. لنعرف الدالة $f(x) = g(x) - x$ وهي دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ وتحقق الشرطين $f(a) > 0$ و $f(b) < 0$. إذن فإنه حسب نظرية القيمة المتوسطة يوجد عدد α في الفترة (a, b) بحيث إن $f(\alpha) = 0$. وبناء على ذلك يكون لدينا $g(\alpha) - \alpha = 0$. أي أن $g(\alpha) = \alpha$ ، وهذا يعني أن α نقطة ثابتة للدالة g . لإثبات أن α نقطة ثابتة وحيدة للدالة g ، لنفترض أن α و β نقطتان ثابتتان للدالة g في الفترة $[a, b]$ بحيث إن $\alpha \neq \beta$. باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل والشرط $|g'(x)| < 1$ لكل $x \in (a, b)$ فإننا نحصل على:

$$|\alpha - \beta| = |g(\alpha) - g(\beta)| = |g'(\eta)| |\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|$$

حيث إن $\eta \in (a, b)$. وهذا تناقض، نلاحظ أن هذا التناقض يأتي بسبب أن $\alpha \neq \beta$ ، إذن لا بد أن يكون $\alpha = \beta$ وهذا يعني أن النقطة الثابتة وحيدة.

مثال (٢,٨)

للدالة $g(x) = \sqrt{x+2}$ نقطة ثابتة وحيدة في الفترة $[1.5, 3]$ ، يمكن استخدام النظرية (٢,٢) لإثبات ذلك كما يلي:

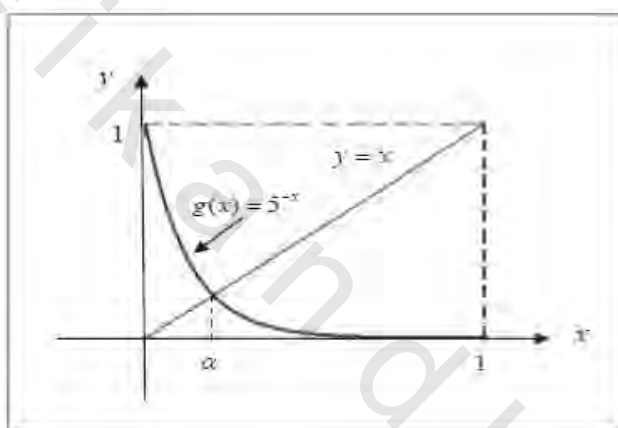
نلاحظ أولاً أن g دالة متصلة على الفترة $[1.5, 3]$ ، وبالتالي يمكن تطبيق شروط النظرية. الآن بوضع $x = 1.5$ نحصل على $g(1.5) = \sqrt{3.5} \in [1.5, 3]$. أيضاً إذا كان $x = 3$ فإن $g(3) = \sqrt{5} \in [1.5, 3]$ وبما أن $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0$ لكل $x \in [1.5, 3]$ فإن الدالة g تكون تزايدية على الفترة $[1.5, 3]$. وبما أن قيمها القصوى على الفترة $[1.5, 3]$ هي $\sqrt{3.5}$ و $\sqrt{5}$ فإنها تحقق الشرط $g(x) \in [1.5, 3]$ لكل $x \in [1.5, 3]$ وحسب نظرية $(2, 2)$ فإن هذا يعني أن النقطة الثابتة موجودة. أيضاً بما أن $1 < \frac{1}{2\sqrt{3.5}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = |g'(x)|$ لكل $x \in [1.5, 3]$ فإن نظرية $(2, 2)$ تضمن وحدانية النقطة الثابتة في الفترة $[1.5, 3]$.

في الواقع تعتبر شروط نظرية $(2, 2)$ شروط كافية وليست ضرورية لوجود نقطة ثابتة وحيدة في الفترة $[a, b]$. أي أنه إذا تحققت الشروط فإن وجود النقطة الثابتة الوحيدة يكون مضمون، وإذا لم تتحقق فإنه لا يمكن الجزم بعدم وجودها. تستعرض الأمثلة التالية بعض الحالات التي تكون فيها الدالة لا تحقق أحد أو كلا الشرطين الموجودين في النظرية $(2, 2)$ على الفترة المعطاة بالرغم من وجود النقطة الثابتة في هذه الفترة.

مثال (٢, ٩)

يوجد للدالة $g(x) = 5^{-x}$ نقطة ثابتة وحيدة في الفترة $[0, 1]$. تحقق من ذلك. بالنسبة لهذه الدالة يمكن إثبات أنها تحقق الشرط الأول لنظرية $(2, 2)$ بنفس الأسلوب المستخدم في المثال (٢, ٨) ونترك للقارئ ذلك. ولكن الشرط الثاني غير متحقق حيث إن $g'(x) = -(\ln 5)5^{-x}$ وبالتالي يكون لدينا $|g'(x)| \geq 1$ لكل $x \in (0, \frac{\ln(\ln 5)}{\ln 5}]$ ، في الواقع بالنسبة لهذه الدالة يكفي أن نذكر أن $g'(0) = \ln 5 > 1$

للدلالة على عدم تحقق الشرط الثاني للنظرية (٢,٢). وبناء عليه فإنه لا يمكن استخدام نظرية (٢,٢) للتحقق من وحدانية النقطة الثابتة. من ناحية أخرى فإن الشكل رقم (٢,٧) يوضح وجود نقطة ثابتة وحيدة في الفترة $[0,1]$ وذلك لأن منحنى الدالة g يقطع المحور $x=y$ مرة واحدة فقط في المربع الموضح بالرسم والذي طول ضلعه واحد.



الشكل رقم (٢,٧). النقطة الثابتة الوحيدة للدالة $g(x) = 5^{-x}$ في الفترة $[0,1]$.

مثال (٢,١٠)

الدالة $g(x) = \frac{5}{x}$ لا تحقق شروط نظرية (٢,٢) على الفترة $[2,3]$ وذلك لأن $g(3) \notin [2,3]$ و $|g'(x)| \geq 1$ لبعض قيم x في الفترة $[2,3]$. ولكن لهذه الدالة نقطة ثابتة وحيدة α في الفترة $[2,3]$ والتي يمكن الحصول عليها كما يلي:

$$\alpha = g(\alpha) = \frac{5}{\alpha} \Rightarrow \alpha^2 = 5 \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{5}$$

وحيث إن الجذر الموجب هو فقط الذي ينتمي للفترة $[2,3]$ ، فهذا يعني أن النقطة الثابتة وحيدة. أيضاً، يمكن استخدام الأسلوب الهندسي والذي تم استخدامه في المثال السابق للتحقق من ذلك.

(٢، ٤، ١) أسلوب طريقة تكرار النقطة الثابتة

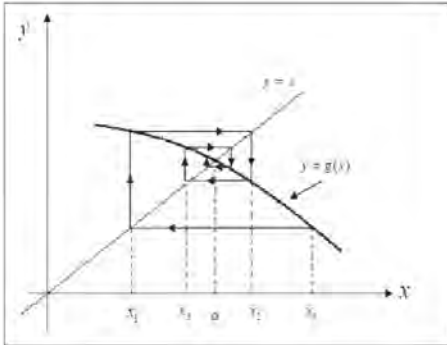
لحساب قيم تقريبية لنقطة ثابتة للمعادلة $x = g(x)$ ، فإننا نختار تقريب ابتدائي x_0 ونكوّن متتالية من الأعداد $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ وذلك باستخدام الصيغة التكرارية

$$x_n = g(x_{n-1}), \quad n \geq 1 \quad (2.13)$$

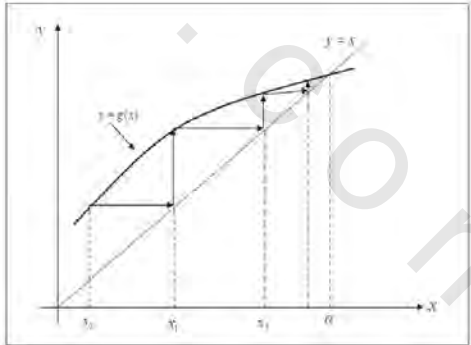
وإذا كانت المتتالية $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب إلى النقطة الثابتة α وكانت الدالة g متصلة فإنه يكون لدينا:

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_{n-1}) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}) = g(\alpha)$$

تسمى هذه الطريقة أيضاً طريقة التكرار الدالي وهي موضحة في الشكل رقم (٢، ٨)، حيث يتضح أنه إذا كان $0 < g'(x) < 1$ فإن المتتالية $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب طردياً إلى النقطة الثابتة α وأما إذا كان $-1 < g'(x) < 0$ فإن التقارب يكون تذبذبياً.



(ب) تقارب تذبذبى $-1 < g'(x) < 0$.



(أ) تقارب طردي $0 < g'(x) < 1$.

الشكل رقم (٢، ٨). تقارب طريقة تكرار النقطة الثابتة.

تستعرض الخوارزمية التالية استخدام طريقة تكرار النقطة الثابتة لإيجاد حل المعادلة غير الخطية (2.1) وذلك بعد كتابتها بالشكل المساوي (2.12).

خوارزمية (٢,٣): طريقة تكرار النقطة الثابتة

تستخدم هذه الخوارزمية طريقة تكرار النقطة الثابتة لحل المعادلة غير الخطية $f(x) = 0$. إذا أُعطينا الدالة $x = g(x)$ ، x_0 ، M (العدد الأقصى للتكرار) و eps (التفاوت المسموح به) فإن الخوارزمية تحسب الحل التقريبي x للمعادلة.

الخطوة ١: ضع $n = 0$

الخطوة ٢: كرر الخطوات ٣-٦ طالما $n \leq M$

الخطوة ٣: ضع $x = g(x_0)$

الخطوة ٤: إذا كان $|f(x_n)| \leq eps$ فاطبع (الحل التقريبي هو 'x')؛ قف.

الخطوة ٥: ضع $x_0 = x$

الخطوة ٦: ضع $n = n + 1$

الخطوة ٧: اطبع (الطريقة فشلت في حساب التقريب المنشود بعد 'M' تكرار).

مثال (٢,١١)

استخدم خوارزمية تكرار النقطة الثابتة لإيجاد حلاً تقريبياً بدقة

$\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$ للمعادلة غير الخطية $x^3 - x - 1 = 0$ وذلك بوضع $g(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ و $x_0 = 1.5$.

نشير هنا إلى أن الصيغة التكرارية لهذا المثال تأخذ الشكل $x_n = \sqrt{1 + \frac{1}{x_{n-1}}}$ ، من أجل

$n \geq 1$. وبوضع $x_0 = 1.5$ نحصل على $x_1 = \sqrt{1 + \frac{1}{x_0}} = \sqrt{1 + \frac{1}{1.5}} = 1.29094$

وبمعرفة x_1 يمكن حساب x_2 حيث إن $x_2 = \sqrt{1 + \frac{1}{x_1}} = 1.33214$ وهكذا يتم حساب عناصر المتتالية العددية $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. النتائج العددية التي تم الحصول عليها بحل هذا المثال مدرجة في الجدول رقم (٢,٣). يحتوي الجدول على القيم العددية لـ $|f(x_n)|$ حيث إنه تم إيقاف الحسابات عندما تحقق الشرط $|f(x_n)| \leq 5 \times 10^{-4}$. نشير هنا إلى أن الحل المضبوط لهذه المعادلة إلى سبعة أرقام عشرية معنوية هو $\alpha = 1.3247179$ وبالتالي فإن الخطأ المضبوط في هذه الحالة يكون $|x_5 - \alpha| = 7.79 \times 10^{-5}$.

الجدول رقم (٢,٣). النتائج العددية للمثال (٢,١١).

n	x_n	$ f(x_n) $
0	1.5	0.87500
1	1.29099	0.13934
2	1.33214	0.03187
3	1.32313	0.00677
4	1.32506	0.00146
5	1.32464	0.00031

لقد ذكرنا في مطلع هذه الفقرة أن هناك أساليب مختلفة لتحويل المعادلة $f(x) = 0$ إلى الشكل المساوي $x = g(x)$. نستعرض ذلك في المثال (٢,١٢). مثال (٢,١٢)

هنا سنستخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لحساب حلاً تقريبياً بدقة $\varepsilon = 10^{-5}$ للمعادلة غير الخطية $x^2 - x - 2 = 0$ في الفترة $[1.5, 3]$ وذلك بوضع $x_0 = 2.5$.

يمكن تحويل هذه المعادلة إلى عدة أشكال مساوية من النوع $x = g(x)$ ، نختار منها ما يلي:

$$x = g_1(x) = x^2 - 2 - 1$$

$$x = g_2(x) = 1 + \frac{2}{x} - 2$$

$$x = g_3(x) = \sqrt{x+2} - 3$$

وبوضع $x_0 = 2.5$ واستخدام الصيغ التكرارية $x_n = g_i(x_{n-1})$ ، $n \geq 1$ ، من أجل $i = 1, 2, 3$ حصلنا على النتائج الموجودة في الجدول رقم (٢، ٤). نشير هنا إلى أننا استخدمنا شرط الوقوف $|f(x_n)| \leq 5 \times 10^{-5}$ ، لإيقاف العمليات الحسابية. كما نشير هنا إلى أنه بالنسبة للخيار الثاني يكون لدينا $5 \times 10^{-5} < 3.9 \times 10^{-5} \leq |f(x_{15})|$ ولكننا أدرجنا x_{16} في الجدول لأنها تتفق مع التقريب x_8 الذي تم حسابه باستخدام الخيار الثالث وهذا سوف يساعدنا في المقارنة والتحليل الذي سيرد لاحقاً.

نلاحظ من الجدول رقم (٢، ٤) أن الصيغتين التكراريتين (٢) و (٣) تتقاربان إلى الحل الفعلي $\alpha = 2$ ولكن بسرعات متفاوتة حيث إن الصيغة الثالثة هي الأسرع وذلك لأنه قد تم الوصول إلى الحل التقريبي المطلوب بعد ثمانية تكرارات فقط بينما استغرق ذلك ستة عشر تكراراً بالنسبة للصيغة الثانية. من ناحية أخرى، نلاحظ من الجدول أن الصيغة التكرارية للاختيار الأول تنشئ متتالية متباعدة. أيضاً يمكن ملاحظة بأن تقارب المتتالية الممثلة بالاختيار الثاني هو تقارب تذبذبي بينما التقارب المرافق للصيغة الثالثة هو تقارب طردي وذلك لأن $0 < g'(x) < 1$ و $0 < g'(x) < 1$ لكل $x \in [1.5, 3]$ للصيغتين الثانية والثالثة، بالترتيب.

يتضح من المثال (٢, ١٢) مدى الحاجة إلى أسلوب أو مقياس يساعدنا على اختيار الدالة g المناسبة والتي تكون متتالية تتقارب إلى الحل α بأسرع ما يمكن. النظريتان التاليتان تتضمنان ذلك.

الجدول رقم (٢, ٤). النتائج العددية للمثال (٢, ١٢).

n	x_n		
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$
1	4.250000	1.800000	2.121320
2	16.06250	2.111111	2.030104
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
6	1.84×10^{19}	2.006711	2.000117
7	خرجت عن نطاق القدرة	1.996656	2.000029
8	الحسابية للجهاز	2.001675	2.000007
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
15	تتباعد	1.999987	2.000000
16		2.000007	2.000000

نظرية (٢, ٣) (نظرية النقطة الثابتة)

لتكن g دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ و أن $g(x) \in [a, b]$ لكل $x \in [a, b]$. إضافة إلى ذلك، لنفترض أن g' موجودة على الفترة $[a, b]$ بحيث إن $|g'(x)| \leq \lambda < 1$ لكل $x \in (a, b)$. إذا كانت x_0 أي عدد في الفترة $[a, b]$ فإن المتتالية المعرفة بـ $x_n = g(x_{n-1})$, $n \geq 1$ ، تتقارب إلى النقطة الثابتة الوحيدة α في الفترة $[a, b]$.

البرهان:

بالنسبة لبرهان وجود ووحدانية النقطة الثابتة راجع برهان نظرية (٢, ٢).

لنبرهن الآن أن المتتالية المعرفة بـ $x_n = g(x_{n-1})$ ، $n \geq 1$ ، تتقارب إلى النقطة الثابتة الوحيدة α لأي اختيار ابتدائي $x_0 \in [a, b]$. لعمل ذلك نلاحظ في البداية أنه بما أن $g(x) \in [a, b]$ لكل $x \in [a, b]$ و أن $x_0 \in [a, b]$ ، فإن المتتالية تكون معرفة وأن $x_n \in [a, b]$ لكل $n \geq 0$.

باستخدام المتباينة $|g'(x)| \leq \lambda < 1$ لكل $x \in (a, b)$ و نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل نحصل على:

$$|\alpha - x_n| = |g(\alpha) - g(x_{n-1})| = |g'(\eta)| |\alpha - x_{n-1}| \leq \lambda |\alpha - x_{n-1}| \quad (2.14)$$

حيث إن $\eta \in (a, b)$. و بتطبيق المتباينة (2.14) استدلالياً نجد أن:

$$|\alpha - x_n| \leq \lambda |\alpha - x_{n-1}| \leq \lambda^2 |\alpha - x_{n-2}| \leq \dots \leq \lambda^n |\alpha - x_0| \quad (2.15)$$

وبأخذ نهاية الطرفين عندما n تؤول إلى ∞ نحصل على:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha - x_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n |\alpha - x_0| \quad (2.16)$$

وبما أن $\lambda < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n = 0$ وبالتالي فإنه من (2.16) يكون لدينا $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$.

نظرية (٢, ٤)

إذا كانت g تحقق شروط نظرية النقطة الثابتة و أن $x_0 \in [a, b]$ ، فإن المتتالية

المعرفة بـ $x_n = g(x_{n-1})$ ، $n \geq 1$ ، تحقق المتباينة:

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |x_1 - x_0|, \quad n \geq 1 \quad (2.17)$$

البرهان:

بملاحظة أن:

$$|\alpha - x_0| \leq |\alpha - x_1| + |x_1 - x_0|$$

وباستخدام المتباينة (2.15) عندما $n = 1$ نحصل على:

$$|\alpha - x_0| \leq \lambda |\alpha - x_0| + |x_1 - x_0|$$

ومنه يكون لدينا:

$$|\alpha - x_0| \leq \frac{1}{1-\lambda} |x_1 - x_0|$$

وبالتعويض عن ذلك في المتباينة (2.15) نحصل على المطلوب.

نلاحظ من النظريتين (٢,٣) و (٢,٤) أن هناك علاقة بين العدد الحقيقي

الموجب λ وسرعة تقارب المتتالية $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ، حيث إنه كلما قلت قيمة λ كان التقارب أسرع. بناء على ذلك، فإنه يمكن تلخيص ما يستفاد من هاتين النظريتين بالتالي: لضمان تقارب المتتالية المعرفة في المعادلة (2.13) يجب اختيار الدالة g التي تحقق شرطي نظرية النقطة الثابتة. وللحصول على تقارب أسرع لابد من مراعاة أن تكون قيمة λ أقرب ما يمكن إلى الصفر. نشير هنا إلى أننا سوف نناقش موضوع سرعة تقارب الطرائق التكرارية في بند لاحق حيث إننا سوف نرى أن سرعة التقارب تتأثر بتفاضل الدالة g من الرتبة الأولى والرتب العليا.

باستخدام النظريتين السابقتين، يمكننا الآن مناقشة الصيغ التكرارية

الموجودة في المثال (٢, ١٢) من حيث التقارب وسرعته.

مثال (٢, ١٣)

بالنسبة للاختيار الأول $g(x) = x^2 - 2$ فإننا نلاحظ أن $g(1) = -1$

والعدد -1 لا ينتمي إلى الفترة $[1.5, 3]$. وهذا يعني أن الشرط الأول لنظرية النقطة

الثابتة غير متحقق. إضافة إلى ذلك فإن $g'(x) = 2x > 1$ لكل $x \in [1.5, 3]$ ، وبالتالي

فإن الشرط الآخر للنظرية غير متحقق أيضاً. إذن، تقارب المتتالية المعرفة بـ

$g(x_n) = x_{n+1}^2 - 2$ ، $n \geq 1$ يكون غير مضمون. في الواقع العملي، كما هو موضح في

الجدول رقم (٢، ٤)، فإن هذه المتتالية متباعدة. أما بالنسبة للاختيارين الثاني والثالث
 $g(x) = 1 + \frac{2}{x}$ و $g(x) = \sqrt{x+2}$ ، على الترتيب، فإنه يمكن إثبات أنهما يحققان
 شرطي النظرية (انظر مثال ٢، ٨)، وبالتالي فإن المتتابعتين المعرفتين بـ
 $g(x_n) = 1 + \frac{2}{x_{n-1}}$ و $g(x_n) = \sqrt{x_{n-1}+2}$ من أجل $n \geq 1$ تتقاربان إلى النقطة
 الثابتة $\alpha = 2$. وهذا ما حصل فعلاً حسب النتائج العددية الموجودة في الجدول رقم
 (٢، ٤). ومن هذه النتائج نلاحظ أن تقارب الصيغة التكرارية المقرونة بالاختيار
 الثالث أسرع من تقارب تلك المعتمدة على الاختيار الثاني، وذلك لأن قيمة λ بالنسبة
 للصيغة التكرارية $g(x_n) = \sqrt{x_{n-1}+2}$ هي تقريباً 0.27 بينما قيمة λ المرافقة
 للصيغة التكرارية $g(x_n) = 1 + \frac{2}{x_{n-1}}$ هي تقريباً 0.89. وبالتالي فإنه حسب
 النظريتين (٢، ٣) و (٢، ٤) يكون تقارب الصيغة الثالثة أسرع من تقارب الصيغة
 الثانية. بناء على ذلك فإن الاختيار الثالث هو الأفضل.

نشير هنا أن شروط نظرية النقطة الثابتة (٢، ٣) هي شروط كافية وليست
 ضرورية كما يوضحه المثال (٢، ١٤).

مثال (٢، ١٤)

لنعتبر الصيغة التكرارية $g(x_n) = 1 + \frac{2}{x_{n-1}}$ ، $n \geq 1$ لحل المعادلة الموجودة
 في المثال (٢، ١٢) في الفترة [1,3] وذلك بوضع $x_0 = 1$ حيث حصلنا على النتائج
 العددية المدرجة في الجدول رقم (٢، ٥) والتي منها يتضح أن المتتالية تتقارب إلى الحل
 $x = 2$. لقد أوقفنا الحسابات عندما تحقق الشرط $|f(x_n)| \leq 5 \times 10^{-5}$ وهو نفس
 الشرط الذي تم استخدامه في المثال (٢، ١٢).

الجدول رقم (٢, ٥). النتائج العددية للمثال (٢, ١٤).

n	x_n	$ f(x_n) $
1	3.000000	4.000000
2	1.666667	0.888888
3	2.200000	0.640000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
16	1.999977	0.000069
17	2.000011	0.000033

إذن النتائج العددية تدل على أن شروط نظرية النقطة الثابتة هي شروط كافية وليست ضرورية، وهذا يعني أننا لا نستطيع الجزم بتقارب أو تباعد الصيغة التكرارية عندما لا تتحقق شروط نظرية النقطة الثابتة.

استكمالاً للمناقشة السابقة فإننا نستعرض فيما يلي النتيجة التي تساعدنا، في حالة معرفة النقطة الثابتة، على ما إذا كانت الصيغة التكرارية سوف تتقارب إلى النقطة الثابتة أو تتباعد عنها. ونترك برهان هذه النتيجة للقارئ.

نظرية (٢, ٥)

لنفترض أن $g(x)$ و $g'(x)$ دالتان متصلتان من أجل $c < x < d$ و أن الفترة (c, d) تحتوي على النقطة الثابتة α . إضافة، لنفترض أن:

$$|g'(\alpha)| < 1 \quad (2.18)$$

فإنه يوجد فترة $[a, b]$ حول النقطة الثابتة α والتي عليها تتحقق شروط نظرية النقطة الثابتة (٢, ٣)، أي أن المتتالية المعرفة بـ $x_n = g(x_{n-1})$ ، $n \geq 1$ تتقارب إلى النقطة الثابتة α . من ناحية أخرى، إذا كان $|g'(\alpha)| > 1$ فإن هذه المتتالية تتباعد.

تجدر الإشارة هنا أنه إذا كان $|g'(x)| > 1$ لكل x في الفترة المعنية، كما هو الحال بالنسبة للاختيار الأول في المثال (٢، ١٢)، وأن الحل α ينتمي إلى هذه الفترة فإن المتتالية تكون متباعدة. كما نشير إلى أنه إذا كان $|g'(\alpha)| = 1$ فلا يمكن تحديد فيما إذا كانت المتتالية متقاربة أم متباعدة. في الواقع، حتى إذا كان التقارب موجود في هذه الحالة فإنه يكون بطيء جداً بحيث لا يمكن استخدامها عملياً.

على ضوء هذه النتيجة يمكن دراسة الحالات الواردة في المثال (٢، ١٢) من حيث التباعد أو التقارب وسرعته كما يستعرضه المثال (٢، ١٥).

مثال (٢، ١٥)

في البداية نحن نعلم أن النقطة الثابتة هي $\alpha = 2$. إذن بالنسبة للحالة الأولى $g(x) = x^2 - 2$ يكون لدينا $|g'(2)| = 2 > 1$ مما يعني أن المتتالية المعروفة بـ $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ تكون متباعدة. أما بالنسبة للحالتين الثانية $g(x) = 1 + \frac{2}{x}$ و الثالثة $g(x) = \sqrt{x+2}$ فإنه يكون لدينا $|g'(2)| = \frac{1}{2} < 1$ و $|g'(2)| = \frac{1}{4} < 1$ وبالتالي فإنهما تكونان متتابعتين متقاربتين وأن الصيغة الثالثة تعطينا تقارب أسرع. لاحظ هنا أنه حسب قيم $|g'(2)|$ للصيغتين فإن سرعة تقارب الصيغة الثالثة هو ضعف سرعة تقارب الصيغة الثانية، وبالرجوع إلى النتائج العددية الموجودة في الجدول رقم (٢، ٤) نجد أنها تتوافق مع هذا الاستنتاج.

وأخيراً نذكر هنا أنه كما هو الحال بالنسبة للمتباينة (2.3) المتعلقة بطريقة التنصيف، يمكن استخدام المتباينة (2.17) لحساب حداً أعلى للخطأ المرتبط بالحل التقريبي x_n . أيضاً، يمكن استخدامها لحساب عدد التكرارات اللازمة، N ، للحصول على حل تقريبي x_N بدقة معينة (ولتكن $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$ ، $t \geq 1$ عدد صحيح). المثال (٢، ١٦) يستعرض ذلك.

مثال (٢, ١٦)

بالنسبة للاختيار الثالث في المثال (٢, ١٢) احسب ما يلي:

١- حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب x_4 .

٢- عدد التكرارات اللازمة للحصول على حل تقريبي x_N بدقة

$\varepsilon = 5 \times 10^{-5}$ لحساب الحد الأعلى للخطأ المتعلق بالتقريب x_4 فإنه يكون لدينا:

$$|\alpha - x_4| \leq \frac{\lambda^4}{1-\lambda} |x_1 - x_0| = \frac{(0.26)^4}{1-0.26} |2.12132 - 2.5| \approx 0.002338$$

نشير هنا إلى أن الخطأ المضبوط هو $|x_4 - \alpha| = 0.001877$ وهو أصغر من

الحد الأعلى كما ينبغي.

أما بالنسبة لحساب عدد التكرارات اللازمة، فإنه يكون لدينا:

$$|\alpha - x_N| \leq \frac{\lambda^N}{1-\lambda} |x_1 - x_0| \leq 5 \times 10^{-5}$$

ومنه نحصل على:

$$\frac{(0.26)^N}{1-0.26} |2.12132 - 2.5| \leq 5 \times 10^{-5}$$

ويأخذ $\log$ الطرفين نجد أن:

$$N \log 0.26 \leq \log 9.771 \times 10^{-5}$$

ومنه نحصل على $N \geq 6.8545$ وبالتالي فإن $N = 7$. أي أننا قد نحتاج إلى سبعة

تكرارات للحصول على الحل التقريبي المطلوب. لاحظ هنا أنه من النتائج العددية

الموجودة في الجدول رقم (٢, ٤) يكون لدينا:

$$|x_6 - 2| = 1.8 \times 10^{-4} > 5 \times 10^{-5} \quad \text{و} \quad |x_7 - 2| = 2.9 \times 10^{-5} < 5 \times 10^{-5}$$

وبالتالي لو أننا وضعنا الشرط $|x_n - \alpha| \leq 5 \times 10^{-5}$ ، حيث إن $\alpha = 2$ ، للوقوف في

المثال (٢, ١٢) فإن الحسابات سوف تقف عند التكرار السابع، ولكننا استخدمنا شرط

الوقوف $|f(x_n)| \leq 5 \times 10^{-5}$ مما أدى إلى وقف العمليات الحسابية عند التكرار الثامن وذلك لأن:

$$|f(x_8)| \leq 2.1 \times 10^{-5} < 5 \times 10^{-5}$$

بينما:

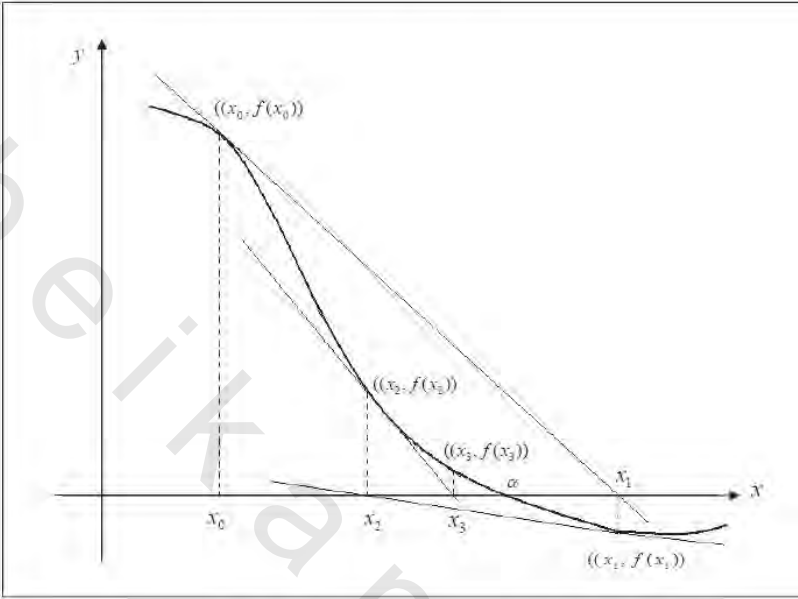
$$|f(x_7)| \leq 8.7 \times 10^{-4} > 5 \times 10^{-5}$$

(٢, ٥) طريقة نيوتن - رافسون

Newton-Raphson Method

تعد طريقة نيوتن - رافسون (أو كما تسمى عادة طريقة نيوتن) من أشهر الطرائق العددية المعروفة لحل المعادلة (2.1) وذلك لسهولة استخدامها و سرعة تقاربها. كما أنها عبارة عن حالة خاصة من طريقة تكرار النقطة الثابتة والتي درسناها في البند السابق. يمكن استنتاج الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن - رافسون باستخدام عدة أساليب سنناقش هنا أسلوبين فقط ، كما أننا نترك للقارئ استنتاجها بأسلوب ثالث في التمارين.

ليكن للدالة f جذر α في الفترة $[a, b]$ ، ولنبدأ بتقريب ابتدائي x_0 للجذر α . ثم نرسم المستقيم المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ ونرمز لنقطة تقاطع هذا المستقيم مع محور x بالرمز x_1 ، انظر الشكل رقم (٢, ٩).



الشكل رقم (٢,٩). التكرارات الثلاثة الأولى لطريقة نيوتن-رافسون.

يمكن كتابة معادلة المستقيم المماس الذي يمر بالنقطة $(x_0, f(x_0))$ وميله هو $f'(x_0)$ بالشكل:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

الآن بما أن المستقيم المماس يقطع محور x عند النقطة $(x_1, 0)$ ، فإنه يكون لدينا المعادلة:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة لـ x_1 نحصل على:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

وهو تقريب أفضل من x_0 للجذر α بشرط أن يكون $f'(x_0) \neq 0$. بالمثل، من معادلة المستقيم المماس عند النقطة $(x_1, f(x_1))$ والذي يقطع محور x عند النقطة $(x_2, 0)$ يمكن الحصول على:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

وبالاستمرار بنفس الأسلوب نحصل على:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (2.19)$$

من أجل $n \geq 1$ ، وبشرط أن يكون $f'(x_{n-1}) \neq 0$ لجميع قيم n . المعادلة (2.19) هي الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن - رافسون.

الأسلوب الآخر لاستنتاج طريقة نيوتن يركز على كثيرة الحدود تايلور والمعرفة في نظرية (١, ٦) في الفصل الأول. لنفترض أن $f \in C^2[a, b]$ وأن $\bar{x}$ حل تقريبي للمعادلة غير الخطية (2.1) بحيث إن $f'(\bar{x}) \neq 0$ و $|\bar{x} - \alpha|$ عدد صغير. إذن يمكن كتابة كثيرة الحدود تايلور ذات الرتبة الأولى للدالة f حول العدد $\bar{x}$ بالشكل:

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2!} f''(\eta(x))$$

حيث إن $\eta(x)$ تقع بين x و $\bar{x}$. بوضع $x = \alpha$ واستخدام الحقيقة أن $f(\alpha) = 0$ نحصل على:

$$f(\bar{x}) + (\alpha - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(\alpha - \bar{x})^2}{2!} f''(\eta) = 0$$

حيث إن η تقع بين α و $\bar{x}$. الآن باعتبار أن الفرق $|\bar{x} - \alpha|$ صغير بحيث يمكن إهمال الحد الذي يحتوي على $(\alpha - \bar{x})^2$ فإنه يكون لدينا:

$$f(\bar{x}) + (\alpha - \bar{x})f'(\bar{x}) \approx 0$$

ويحل هذه المعادلة بالنسبة لـ α نحصل على:

$$\alpha \approx \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \quad (2.20)$$

يعد الحد الموجود في الطرف الأيمن للمعادلة (2.20) تقريب أفضل من $\bar{x}$ للحل α . تضع هذه المعادلة حجر الأساس لطريقة نيوتن-رافسون والتي تبدأ بالتقريب x_0 لتنشأ المتتالية $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ والمعرفة بالمعادلة (2.19).

كما سبق أن ذكرنا في بداية هذا البند، تعد طريقة نيوتن-رافسون حالة خاصة من طريقة التكرار الدالي والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$x_n = g(x_{n-1}), \quad n \geq 1$$

حيث إن:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (2.21)$$

بناء على ذلك، فإن خوارزمية طريقة نيوتن-رافسون هي خوارزمية تكرار النقطة الثابتة (٢,٣) مع الأخذ بالاعتبار أن الدالة $g(x_0)$ والموجودة في الخطوة ٣ تأخذ الشكل المعرف في المعادلة (2.21).

مثال (٢, ١٧)

ابتداء من الحل التقريبي $x_0 = 2.5$ استخدم طريقة نيوتن-رافسون لحساب حلاً تقريبياً بدقة 10^{-5} للمعادلة غير الخطية $x^2 - x - 2 = 0$.

بوضع $f(x) = x^2 - x - 2$ يكون لدينا $f'(x) = 2x - 1$ وبالتالي فإن الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن-رافسون لحل هذه المسألة تأخذ الشكل:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - x_n - 2}{2x_n - 1}$$

من أجل $n \geq 0$. و بوضع $x_0 = 2.5$ حصلنا على النتائج العددية الموضحة في الجدول رقم (٢, ٦).

الجدول رقم (٢, ٦). النتائج العددية للمثال (٢, ١٧).

n	x_n	$ f(x_n) $
1	2.0652000	0.1914063
2	2.0012500	0.0037516
3	2.0000005	0.0000015

بمقارنة هذه النتائج مع تلك الموجودة في الجدول رقم (٢, ٤) والتي تم الحصول عليها بواسطة الصيغتين التكراريتين اللتين تمت مناقشتها في الأمثلة (٢, ١٢) - (٢, ١٥) نلاحظ أنه تم الحصول على الحل التقريبي بالدقة المطلوبة بعد ثلاثة تكرارات عندما استخدمنا طريقة نيوتن-رافسون. مما يدل على أن تقاربها إلى الحل يكون أسرع من الصيغتين اللتين تم طرحهما في المثال (٢, ١٢). سوف نناقش معدل تقارب الصيغ التكرارية في بند لاحق حيث سوف نرى أن معدل تقارب طريقة نيوتن-رافسون يكون تربيعياً بينما معدل الصيغتين المذكورتين في المثال (٢, ١٢) يكون خطياً.

يشير استنتاج طريقة نيوتن-رافسون باستخدام كثيرة الحدود تايلور إلى أهمية اختيار التقريب الابتدائي x_0 ، حيث إنه إذا كانت قيمته المطلقة بعيدة عن الحل α فإنه قد لا تتقارب المتتالية المعروفة بالمعادلة (2.19) إلى α . والسبب في ذلك هو أن الفرض بأن القيمة $|\bar{x} - \alpha|$ صغيرة بشكل كاف لإهمال الحد الذي يتضمن $(\alpha - \bar{x})^2$ يعد فرضاً أساسياً في الاستنتاج. على كل حال هناك بعض الحالات التي تتقارب فيها طريقة نيوتن-رافسون بالرغم من أن الاختيار الابتدائي x_0 ليس قريباً (نسبياً) من الحل α ، انظر التمارين. تناقش النظرية التالية مدى أهمية الاختيار الابتدائي لضمان تقارب طريقة نيوتن-رافسون.

نظرية (٢, ٦)

لتكن $f \in C^2[a, b]$ و $\alpha \in [a, b]$ بحيث $f(\alpha) = 0$ و $f'(\alpha) \neq 0$ ، فإنه يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث إن طريقة نيوتن-رافسون تكون متتالية $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تقتارب إلى α لأي اختيار ابتدائي x_0 يقع في الفترة $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$.
البرهان:

يعتمد البرهان على اعتبار طريقة نيوتن-رافسون كحالة خاصة من طريقة تكرار النقطة الثابتة $x_n = g(x_{n-1})$ ، $n \geq 1$ حيث $g(x)$ هي الدالة المعرفة في (2.21). الهدف هو إيجاد فترة $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ بحيث إن الدالة g تنقل هذه الفترة إلى نفسها و $1 < \lambda \leq |g'(x)|$ لكل $x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ ، حيث $\lambda > 0$ عدد حقيقي. أي، بعبارة أخرى، بحيث تحقق الدالة g شروط نظرية النقطة الثابتة على هذه الفترة.

الآن بما أن $f'(\alpha) \neq 0$ وأن f' دالة متصلة، فإنه يوجد عدد $\delta_1 > 0$ بحيث إن $f'(x) \neq 0$ لكل $x \in [\alpha - \delta_1, \alpha + \delta_1] \subset [a, b]$. وهذا يعني أن الدالة g معرفة و متصلة على الفترة $[\alpha - \delta_1, \alpha + \delta_1]$. أيضاً بما أن:

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

لكل $x \in [\alpha - \delta_1, \alpha + \delta_1]$ ، وأن $f \in C^2[a, b]$ فإن $g \in C^1[\alpha - \delta_1, \alpha + \delta_1]$. باستخدام الحقيقة أن $f(\alpha) = 0$ فإننا نحصل على:

$$g'(\alpha) = \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2} = 0 \quad (2.22)$$

وبما أن g' دالة متصلة، فإن المعادلة (2.20) تؤدي إلى أنه لأي $\lambda < 1$ يوجد δ بحيث إن $0 < \delta < \delta_1$ وأن $|g'(x)| < \lambda$ لكل $x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$.

الآن لنثبت أن الدالة g تنقل الفترة $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ إلى نفسها. إذا كانت $x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ فإن نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل تؤدي إلى وجود عدد η يقع بين x و α بحيث إن:

$$|g(x) - \alpha| = |g(x) - g(\alpha)| = |g'(\eta)| |x - \alpha| \leq \lambda |x - \alpha| < |x - \alpha|$$

وبما أن $x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ فإن هذا يعني أن $|x - \alpha| < \delta$ ومنه نحصل على $|g(x) - \alpha| < \delta$ والذي يعني أن الدالة g تنقل الفترة $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ إلى نفسها. إذن مما سبق يتضح أن الدالة g والمعرفة في المعادلة (2.19) تحقق شروط نظرية النقطة الثابتة. بناء على ذلك، فإن المتتالية المعرفة بـ $x_n = g(x_{n-1})$ ، $n \geq 1$ تتقارب إلى النقطة الثابتة α لأي اختيار ابتدائي x_0 في الفترة $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$.

على الرغم من أن طريقة نيوتن-رافسون تستخدم على نطاق واسع إلا أن هناك بعض السلبيات التي قد تعيق استخدامها أو تحد من سرعة تقاربها. فمثلاً، إذا كان $f'(x_n) = 0$ لأي $n \geq 0$ فإنه يتضح من المعادلة (2.19) أنه لا يمكن استخدام الطريقة عندما يكون $f(x_n) \neq 0$ حيث إن حاصل القسمة الموجود في (2.19) يكون مالاً لنهاية. أما عندما يكون $f(x_n) = 0$ لنفس قيمة n فإن تقارب الطريقة، إن وُجد، يكون بطيئاً. إضافة إلى ذلك، إذا كانت $f'(x_n) \approx 0$ (قريبة جداً من الصفر) لأي $n \geq 0$ فإن ذلك قد يؤدي إلى عدم تقارب الطريقة وذلك إذا كان $f(x_n)/f'(x_n) \gg 1$. في الواقع، إذا كان $f'(x_n)$ تؤول إلى الصفر و $f(x_n)$ تؤول أيضاً إلى الصفر فإن ذلك يؤدي إلى تقارب بطيء أو عدم التقارب. سوف ندرس مثل هذه الحالات في بند لاحق. ومن السلبيات الواردة عملياً هي أنه إذا كانت

f' دالة معقدة بحيث يتطلب حسابها عمليات حسابية كثيرة فإن ذلك يزيد من احتمال تأثير أخطاء التدوير المتعلقة بالعمليات الحسابية خصوصاً وأنها، أي $f'(x_n)$ ، تُحسب عند كل تكرار n .

مما سبق يتضح أن وجود تفاضل الدالة f في مقام حاصل القسمة الموجود في الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن - رافسون يؤدي إلى معظم سلبيات الطريقة. وبالتالي، فإن التخلص من وجود f' يعني القضاء على هذه السلبيات. أحد الطرائق المستخدمة لعمل ذلك هي طريقة القاطع والتي تركز على تقريب تفاضل الدالة f عند التكرار x_n بدلاً من القيمة الفعلية للتفاضل. هذا ما سنناقشه في البند التالي.

(٢, ٦) طريقة القاطع

The Secant Method

مما سبق نعلم أن الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن - رافسون يمكن كتابتها بالشكل:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0$$

والتي من أهم سلبيات استخدامها وجود الحد $f'(x_n)$. للتغلب على هذه المشكلة لنفترض أن x_n و x_{n-1} قيمتان تقريبيتان (جيدتان) للحل α ولنقرب هذا التفاضل بـ:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \quad (2.23)$$

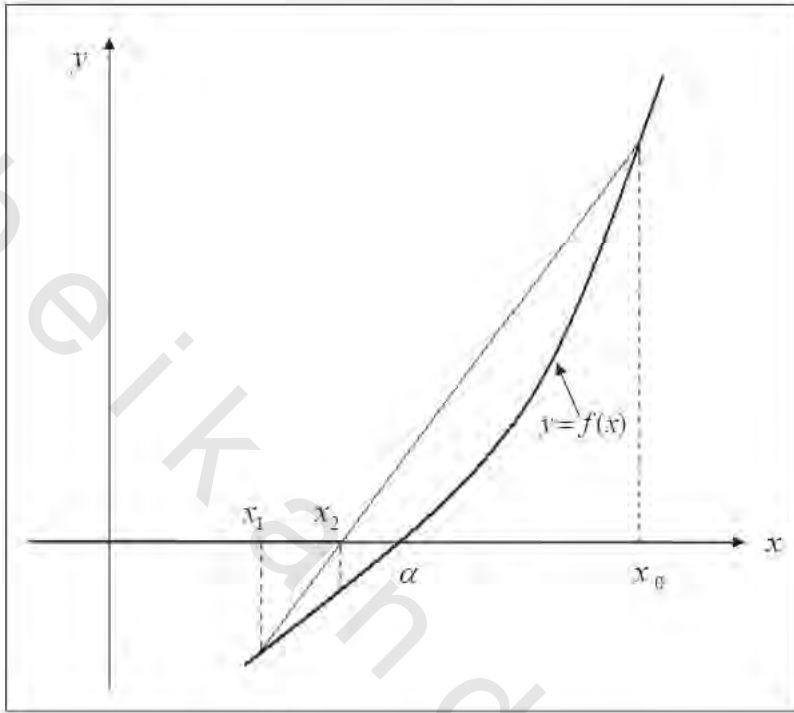
وبالتعويض عن هذا التقريب في الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن - رافسون نحصل على:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n \geq 1 \quad (2.24)$$

وهي الصيغة التكرارية لطريقة القاطع. بالرغم من أن هذه الطريقة تخلصت من مشكلة تواجد $f'(x_n)$ إلا أنها تواجه بعض السليبيات. إحدى هذه السليبيات هي الحاجة إلى تكرارين سابقين لحساب التكرار الجديد، وهذا يعني أننا نحتاج إلى قيمتين ابتدائيتين x_0 و x_1 للبدء في استخدام الطريقة. عموماً إذا كان المتوفر لدينا قيمة ابتدائية واحدة فإنه يمكن إيجاد القيمة الأخرى باستخدام أي أسلوب عددي يمكن استخدامه، عادة يتم استخدام طريقة التنصيف، انظر الخوارزمية (٤, ٢).

نذكر هنا أن استبدال القيمة الفعلية للتفاضل $f'(x_n)$ بالقيمة التقريبية (2.23) له ثمنه، حيث إن سرعة تقارب طريقة القاطع أبطأ من تلك لطريقة نيوتن - رافسون. سوف نناقش معدل تقارب هاتين الطريقتين في البند (٧, ٢) عندما ندرس تحليل الخطأ للطرائق التكرارية.

التمثيل الهندسي لطريقة القاطع يشبه ذلك لطريقة نيوتن - رافسون عدا أنه في هذه الحالة نستبدل المستقيم المماس بالمستقيم القاطع، انظر الشكل رقم (١٠, ٢).



الشكل رقم (١٠، ٢). التكرارات الثلاثة الأولى لطريقة القاطع.

مثال (١٨، ٢)

لنستخدم طريقة القاطع لإيجاد حلاً تقريبياً بدقة $\varepsilon = 10^{-6}$ للمعادلة غير الخطية $x^2 - x - 2 = 0$ وذلك ابتداءً من القيمتين التقريبتين $x_0 = 1.5$ و $x_1 = 2.5$. بوضع $f(x) = x^2 - x - 2$ تكون الصيغة التكرارية لطريقة القاطع بالشكل:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n^2 - x_n - 2)(x_n - x_{n-1})}{x_n^2 - x_n - x_{n-1}^2 + x_{n-1}}, \quad n \geq 1$$

النتائج العددية لهذا المثال موجودة في الجدول رقم (٧، ٢).

خوارزمية (٢, ٤): طريقة القاطع

تستخدم هذه الخوارزمية طريقة القاطع لحل المعادلة غير الخطية $f(x) = 0$ إذا أعطينا الدالة $x = g(x)$ ، x_0 ، x_1 ، M (العدد الأقصى للتكرار) و eps (التفاوت المسموح) به فإن الخوارزمية تحسب الحل التقريبي x للمعادلة.

الخطوة ١: ضع $n = 0$

الخطوة ٢: كرر الخطوات ٣-٦ طالما $n \leq M$

الخطوة ٣: ضع $x = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$

الخطوة ٤: إذا كان $eps \leq |f(x)|$ فاطبع (الحل التقريبي هو 'x')؛ وقف.

الخطوة ٥: ضع $x_0 = x_1$ و $x_1 = x$

الخطوة ٦: ضع $n = n + 1$

الخطوة ٧: اطبع (الطريقة فشلت في حساب التقريب المنشود بعد 'M' تكرار).

الجدول رقم (٢, ٧). النتائج العددية للمثال (٢, ١٨).

n	x_n	$ f(x_n) $
2	1.9166667	0.2430556
3	1.9878049	0.0364367
4	2.0003499	0.0010545
5	1.9999986	0.0000047

بمقارنة النتائج الموجودة في الجدول (٢, ٧) مع تلك الموجودة في الجدول رقم (٢, ٦) والمتعلقة باستخدام طريقة نيوتن - رافسون لحل المعادلة المتضمنة في المثال (٢, ١٨)

وذلك ابتداء من $x_0 = 2.5$ نلاحظ أن تقارب طريقة نيوتن تكون أسرع من طريقة القاطع وهذا صحيح بشكل عام كما سوف نرى في البند (٢,٧) عندما نناقش تحليل الخطأ ومعدل التقارب للطرائق التكرارية. على كل حال، نذكر هنا أن استبدال تفاضل الدالة بالتقريب (2.23) هو السبب الذي جعل تقارب طريقة القاطع يكون أبطأ من ذلك لطريقة نيوتن - رافسون.

نختتم هذا البند بالإشارة إلى أن طريقة القاطع ليست الأسلوب الوحيد للتخلص من مشكلة وجود f' في الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن - رافسون، حيث إنه توجد عدة أساليب أخرى نذكر منها طريقة ستفنسن والتي يمكن كتابة صيغتها التكرارية بالشكل:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}, \quad n \geq 0 \quad (2.25)$$

نشير هنا إلى أن أحد سلبيات هذه الطريقة هي حساب قيمتين للدالة عند كل تكرار بينما تتطلب طريقة القاطع حساب قيمة واحدة للدالة فقط. نترك للقارئ استخدام هذه الصيغة لحل المعادلة $x^2 - x - 2 = 0$ للمناقشة في التمارين.

(٢,٧) تحليل الخطأ ومعدل التقارب

Error Analysis and Rate of Convergence

سوف نناقش في هذا البند تحليل الخطأ للطرائق التكرارية بصورة عامة و سنركز على دراسة هذا التحليل بالنسبة لطريقتي نيوتن - رافسون والقاطع. نعني بالخطأ هو المقدار $e_n = x_n - \alpha$ لكل $n \geq 0$ ، حيث x_n هو الحل التقريبي للمعادلة غير الخطية $f(x) = 0$ و α هو حلها المضبوط. في الواقع لقد ذكرنا ذلك في البند (٢,١) عندما ناقشنا الخطأ المتعلق بطريقة التنصيف (راجع نظرية ٢,١)، حيث أثبتنا

أن $|e_n| = (b-a)/2^n$ ، $n \geq 1$. مما يعني أن سرعة تقارب طريقة التنصيف محدودة من الأعلى بسرعة تقارب المتتالية $\{1/2^n\}$ إلى الصفر. أيضاً لقد أثبتنا في البند (٤، ٢) أن الخطأ المتعلق باستخدام الطرائق التكرارية يحقق المتباينة:

$$|e_n| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_1 - x_0|$$

من أجل $n \geq 1$. ولقد أشرنا إلى أن سرعة تقارب الطريقة التكرارية مرتبط بـ سرعة تقارب المتتالية $\{\lambda^n\}$ إلى الصفر، حيث إن $|\lambda| < 1$ ، $|g'(x)| \leq \lambda$. هنا سندرس معدل تقارب الطرائق التكرارية وذلك بمناقشة بعض الشروط المفروضة على الدالة g . سنبدأ بتحليل الخطأ المتعلق بطريقة نيوتن-رافسون، حيث إنه يكون لدينا:

$$\begin{aligned} e_n &= x_n - \alpha \\ &= x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} - \alpha \\ &= e_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \\ &= \frac{e_{n-1}f'(x_{n-1}) - f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \end{aligned} \quad (2.26)$$

وباستخدام نظرية تايلور نحصل على:

$$f(x) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x - x_{n-1}) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_{n-1})^2$$

حيث إن ξ تقع بين x و x_{n-1} . وبوضع $x = \alpha$ يكون لدينا:

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(\alpha - x_{n-1}) + \frac{f''(\xi_{n-1})}{2!}(\alpha - x_{n-1})^2 = 0$$

حيث إن ξ_{n-1} تقع بين α و x_{n-1} .

الآن باستخدام الحقيقة أن $e_n = x_n - \alpha$ نجد أن:

$$f(x_{n-1}) - e_{n-1}f'(x_{n-1}) + e_{n-1}^2 \frac{f''(\xi_{n-1})}{2!} = 0$$

ومنه نحصل على:

$$e_{n-1}f'(x_{n-1}) - f(x_{n-1}) = e_{n-1}^2 \frac{f''(\xi_{n-1})}{2!} \quad (2.27)$$

وبقسمة طرفي المعادلة (2.27) على $f'(x_{n-1})$ والتعويض في المعادلة (2.26) يكون لدينا:

$$e_n = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_{n-1})}{f'(x_{n-1})} e_{n-1}^2 \quad (2.28)$$

الآن من أجل عدد موجب n كبير بشكل كافٍ، يمكن كتابة المعادلة بالشكل:

$$e_n \approx s e_{n-1}^2 \quad (2.29)$$

حيث إن $s \approx \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$ عدد ثابت. المعادلة (2.29) توضح أن المقدار e_n هو، تقريباً،

عبارة عن عدد ثابت مضروب في المقدار e_{n-1}^2 . أو بعبارة أخرى، الخطأ المرافق لطريقة

نيوتن عند التكرار n يساوي تقريباً مربع الخطأ عند التكرار الذي قبله مضروب بعدد

ثابت. وهذا يعني أن معدل تقارب طريقة نيوتن - رافسون تربيعي كما يتضح من

التعريف التالي:

تعريف (١، ٢)

إذا كانت المتتالية $\{x_n\}$ تتقارب إلى α ويوجد ثابتين موجبين r و s بحيث إن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_n - \alpha|}{|x_{n-1} - \alpha|^r} = s \quad (2.30)$$

فإن المتتالية $\{x_n\}$ تتقارب إلى α بمعدل تقاربي r وثابت خطأ تقريبي s .

مثال (١٩، ٢)

تتقارب المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ المعرفة بـ $x_n = \frac{1}{n}$ إلى الصفر، وذلك لأن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - 0}{\frac{1}{n-1} - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

وحسب التعريف (٢, ١) فإنها تتقارب إلى الصفر بمعدل تقاربي خطي و ثابت خطأ تقريبي واحد.

يقال إن الصيغة التكرارية $x_n = g(x_{n-1})$ ، $n \geq 1$ ذات رتبة تقارب r إذا كانت متتالية الأعداد $\{x_n\}$ التي تكونها هذه الصيغة تتقارب إلى الحل $\alpha = g(\alpha)$ بمعدل تقاربي r . من البديهي أنه كلما زادت قيمة معدل التقارب r حصلنا على تقارب أسرع. من ناحية أخرى، ثابت التقارب s لا يؤثر على رتبة التقارب ولكن له تأثير محدود على سرعة التقارب. نشير هنا إلى أنه إذا كانت $r = 1$ فإن معدل التقارب يسمى خطأً، وإذا كانت $r = 2$ فإنه يكون تربيعياً وهكذا.

يتضح مما سبق أن طريقة نيوتن - رافسون تربيعية التقارب وذلك لأن $r = 2$ في المعادلة (2.28). نود الإشارة هنا إلى أن هناك طرائق تكرارية لا يكون معدلها التقاربي r عدداً صحيحاً. فمثلاً لندرس الآن معدل التقارب لطريقة القاطع، بداية نلاحظ أنه يمكن كتابة الصيغة التكرارية لطريقة القاطع بالشكل:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \frac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n \geq 1$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x_{n+1} - \alpha = \frac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})} - \alpha \\ &= \frac{f(x_n)e_{n-1} - f(x_{n-1})e_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$= \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \left[\frac{f(x_n)/e_n - f(x_{n-1})/e_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \right] e_n e_{n-1}$$

وباستخدام نظرية تايلور نحصل على:

$$f(x_n) = f(\alpha + e_n) = f(\alpha) + e_n f'(\alpha) + \frac{1}{2} e_n^2 f''(\alpha) + O(e_n^3)$$

وبما أن $f(\alpha) = 0$ ، فإنه يكون لدينا:

$$\frac{f(x_n)}{e_n} = f'(\alpha) + \frac{1}{2}e_n f''(\alpha) + O(e_n^2) \quad (2.32)$$

وبالمثل بالنسبة للتكرار $n-1$ يكون لدينا:

$$\frac{f(x_{n-1})}{e_{n-1}} = f'(\alpha) + \frac{1}{2}e_{n-1} f''(\alpha) + O(e_{n-1}^2) \quad (2.33)$$

ويطرح المعادلة (2.33) من المعادلة (2.32) نحصل على:

$$\frac{f(x_n)}{e_n} - \frac{f(x_{n-1})}{e_{n-1}} = \frac{1}{2}(e_n - e_{n-1})f''(\alpha) + O(e_{n-1}^2) \quad (2.34)$$

وبما أن $x_n - x_{n-1} = e_n - e_{n-1}$ ويأهمل الحد $O(e_{n-1}^2)$ فإن المعادلة (2.34) تصبح بالشكل:

$$\frac{f(x_n)/e_n - f(x_{n-1})/e_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \approx \frac{1}{2}f''(\alpha) \quad (2.35)$$

وبوضع $\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \approx \frac{1}{f'(\alpha)}$ فإنه من العلاقة (2.35) نحصل على:

$$e_{n+1} \approx \frac{1}{2} \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} e_n e_{n-1} = C e_n e_{n-1} \quad (2.36)$$

نلاحظ هنا أن هذه العلاقة شبيهة بتلك المتعلقة بطريقة نيوتن والمعرفة في

المعادلة (2.28). يمكن الحصول على معدل التقارب لطريقة القاطع كما يلي: بداية

نلاحظ من العلاقة التقريبية:

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} \approx s$$

والتي تعني، كما سبق تعريفها، أن $s \rightarrow \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|}$ عندما $n \rightarrow \infty$. إذن، يكون لدينا:

$$|e_n| \approx s |e_{n-1}|^r$$

ومنه نحصل على:

$$|e_{n-1}| \approx \left(\frac{1}{s} |e_n|\right)^{\frac{1}{r}} \quad (2.37)$$

وبالتعويض عن قيم $|e_{n+1}|$ و $|e_{n-1}|$ في العلاقة (2.36) نحصل على:

$$s |e_n|^r \approx \frac{C}{s^{\frac{1}{r}}} |e_n| |e_n|^{\frac{1}{r}}$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$\frac{s^{1+\frac{1}{r}}}{C} \approx |e_n|^{1-r+\frac{1}{r}} \quad (2.38)$$

وبما أن الطرف الأيسر لهذه العلاقة يكون غير صفري بينما $e_n \rightarrow 0$ فإنه يكون لدينا:

$$1-r+\frac{1}{r}=0$$

ومنه نحصل على:

$$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$$

الآن لنوجد قيمة ثابت الخطأ s . بما أن قيمة الطرف الأيمن للعلاقة (2.38)

هي الواحد فإنه باستخدام المعادلة $1+\frac{1}{r}=r$ يكون لدينا:

$$s = C^{\frac{1}{1+1/r}} = C^{\frac{1}{r}} = C^{r-1} = C^{0.62} = \left[\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right]^{0.62} \quad (2.39)$$

وبالتالي فإنه من المعادلات السابقة يكون لدينا:

$$|e_{n+1}| \approx s |e_n|^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \quad (2.40)$$

وبما أن $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$ فإن سرعة تقارب طريقة القاطع يكون أسرع من خطي

ولكنها أبطأ من تربيعي. عادة تسمى سرعتها خطية مطورة.

نستعرض فيما يلي بعض النظريات التي تتضمن معايير يمكن استخدامها لمعرفة المعدل التقاربي لبعض الصيغ التكرارية وذلك إذا كان معدلها يُمثله عدد صحيح موجب r .

نظرية (٧, ٢)

لتكن $g \in C[a, b]$ وأنها تحقق شروط نظرية النقطة الثابتة. إذا كانت g' دالة متصلة على الفترة (a, b) و $g'(\alpha) \neq 0$ ، فإن المتتالية المعرفة بـ $x_n = g(x_{n-1})$ ، $n \geq 1$ تتقارب خطياً إلى النقطة الثابتة الوحيدة $\alpha = g(\alpha)$ في $[a, b]$ لأي اختيار ابتدائي $x_0 \in [a, b]$.

البرهان:

بما أن الدالة g تحقق شروط نظرية النقطة الثابتة فإن المتتالية تتقارب إلى α . وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل نجد أن:

$$x_n - \alpha = g(x_{n-1}) - g(\alpha) = g'(\xi_{n-1})(x_{n-1} - \alpha)$$

حيث إن ξ_{n-1} تقع بين x_{n-1} و α . الآن بما أن المتتالية $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب إلى α فإن المتتالية $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب أيضاً إلى α . وبما أن g' دالة متصلة على الفترة (a, b) فإنه يكون لدينا:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g'(\xi_{n-1}) = g'(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{n-1}) = g'(\alpha)$$

وبناء على ذلك فإن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - \alpha}{x_{n-1} - \alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} g'(\xi_{n-1}) = g'(\alpha)$$

ومنه نحصل على:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_n - \alpha|}{|x_{n-1} - \alpha|} = |g'(\alpha)|$$

وبما أن $g'(\alpha) \neq 0$ فإنه حسب التعريف (٢,١) يكون معدل التقارب خطياً.

يمكن أن نستنتج من نظرية (٢,٧) أن معدل التقارب للطريقة التكرارية يكون أسرع من خطي فيما إذا كان $g'(\alpha) = 0$ ، وهذا ما تنص عليه النظرية التالية.

نظرية (٢,٨)

لتكن g دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ وتحقق شروط نظرية النقطة الثابتة على هذه الفترة. إضافة لذلك، لتكن g'' دالة متصلة على الفترة المفتوحة (a, b) . إذا كانت $g'(\alpha) = 0$ حيث $\alpha = g(\alpha)$ ، فإنه لأي اختيار ابتدائي $x_0 \in [a, b]$ تتقارب المتتالية المعرفة بـ $x_n = g(x_{n-1})$ ، $n \geq 1$ إلى النقطة الثابتة الوحيدة α في $[a, b]$ بمعدل تقاربي تربيعي على الأقل.

البرهان:

بما أن الدالة g تحقق شروط نظرية النقطة الثابتة فإن المتتالية تتقارب إلى α . بنشر كثيرة الحدود تايلور ذات الدرجة الأولى للدالة g حول العدد α فإننا نحصل على:

$$g(x) = g(\alpha) + g'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{g''(\xi)}{2}(x - \alpha)^2$$

حيث إن ξ تقع بين x و α . الآن بما أن $\alpha = g(\alpha)$ و $g'(\alpha) = 0$ فإنه يكون لدينا:

$$g(x) = \alpha + \frac{g''(\xi)}{2}(x - \alpha)^2$$

وبوضع $x = x_{n-1}$ نجد أن:

$$x_n = \alpha + \frac{g''(\xi_{n-1})}{2}(x_{n-1} - \alpha)^2$$

حيث إن ξ_{n-1} تقع بين x_{n-1} و α . الآن بما أن المتتالية $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب إلى α فإن المتتالية $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب أيضاً إلى α . وبما أن g'' دالة متصلة على الفترة (a, b) فإنه يكون لدينا:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g''(\xi_{n-1}) = g''(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{n-1}) = g''(\alpha)$$

وبناء على فإنه يكون لدينا:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_n - \alpha|}{|x_{n-1} - \alpha|^2} = \frac{1}{2} |g''(\alpha)|$$

وبالتالي، وحسب التعريف (٢، ١)، فإن معدل التقارب يكون تربيعياً إذا كان $g''(\alpha) \neq 0$.

في الواقع يمكن تعميم نظرية (٢، ٧) لأي معدل تقاربي $r \geq 2$. ففرض أن $\alpha = g(\alpha)$ ، $g'(\alpha) = g''(\alpha) = \dots = g^{(r-1)}(\alpha) = 0$ و $g^{(r)}$ دالة متصلة على الفترة المفتوحة التي تحتوي على النقطة الثابتة α فإنه يمكن إثبات أن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_n - \alpha|}{|x_{n-1} - \alpha|^r} = \frac{1}{r!} |g^{(r)}(\alpha)| \quad (2.41)$$

ومنه نستنتج أن معدل التقارب يكون r إذا كان $g^{(r)}(\alpha) \neq 0$. (انظر التمارين).

مثال (٢، ٢٠)

نعلم من مثال سابق أن المتتالية $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ المعرفة بـ $x_n = 1 + \frac{2}{x_{n-1}}$ ، $n \geq 1$ تتقارب إلى $\alpha = 2$. هنا الدالة g تكتب بالشكل $g(x) = 1 + \frac{2}{x}$ حيث $g(2) = 1 + \frac{2}{2} = 2$ ، ونلاحظ أن $g'(x) = \frac{-2}{x^2}$ ، ومنه نحصل على $g'(2) = -0.5$ وحسب نظرية (٢، ٧) فإن معدل التقارب يكون خطياً وذلك لأن $g'(2) \neq 0$.

مثال (٢، ٢١)

لإيجاد معدل التقارب للمتتالية $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ المعرفة بـ $x_n = \frac{x_{n-1}^2 + 2}{2x_{n-1} - 1}$ ، $n \geq 1$ والتي تتقارب إلى $\alpha = 2$ نلاحظ أن $g(x) = \frac{x^2 + 2}{2x - 1}$ حيث إن $g(2) = 2$ ، و $g'(x) = \frac{2x^2 - 2x - 4}{(2x - 1)^2}$ وبالتالي فإن $g'(2) = 0$ ، وعليه فإن معدل التقارب يكون

أسرع من خطي. في مثل هذه الحالة نضطر لحساب التفاضل الثاني للدالة g وذلك من أجل الحصول على معدل التقارب. في الواقع، $g''(2) = \frac{2}{3} \neq 0$ وحسب نظرية (٢,٧) فإن معدل التقارب يكون تربيعياً.

نشير هنا إلى أنه إذا كانت قيمة التفاضل الثاني للدالة g عند النقطة الثابتة مساوياً للصفر فإننا نحسب التفاضل الثالث للدالة... وهكذا حتى نحصل على التفاضل الذي لا تكون قيمته عند النقطة الثابتة مساوية للصفر فيكون معدل التقارب هو درجة هذا التفاضل، (انظر التمارين).

لقد اعتبرنا في مناقشاتنا السابقة أن $f'(\alpha) \neq 0$ حيث α هو حل (جذر) للمعادلة غير الخطية $f(x) = 0$. كما أنه من خلال تعريف طريقة نيوتن-رافسون نلاحظ أنه قد تنشأ بعض الصعوبات إذا كانت $f'(x_n)$ تؤول إلى الصفر عندما $f(x_n)$ تؤول إلى الصفر. وبشكل خاص، إذا كان $f'(\alpha) = 0$. التعريف التالي يساعدنا على دراسة هذه الصعوبات واستدراج الأساليب الكفيلة للتغلب عليها.

تعريف (٢,٢)

نقول إن α جذر مكرر m مرة للمعادلة $f(x) = 0$ ، إذا أمكن كتابة $f(x)$

بالشكل:

$$f(x) = (x - \alpha)^m q(x) \quad (2.42)$$

حيث إن: $q(\alpha) \neq 0$.

مثال (٢,٢٢)

يعد $x=1$ جذر مكرر مرتين للمعادلة $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ وذلك لأنه

يمكن كتابتها بالشكل $(x-1)^2(x+1) = 0$. لاحظ هنا أن $q(x) = x+1$ وأن

$$q(1) = 2 \neq 0$$

يتضح من المثال (٢, ٢٢) أنه، بشكل عام، ليس من السهل كتابة المعادلة غير الخطية بالشكل (2.42) وبالتالي قد يكون من الصعب استخدام التعريف (٢, ٢) للتحقق فيما إذا كان الجذر مكرر أم لا. من ناحية أخرى، يمكن استخدام التعريف لإثبات النظرية التالية والتي تزودنا بأسلوب أسهل للتحقق فيما إذا كان الجذر مكرراً أم لا.

نظرية (٢, ٩)

لتكن $f \in C^m[a, b]$ ، يقال إن α جذر مكرر m مرة للمعادلة $f(x) = 0$ إذا وفقط إذا كان $f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$ ولكن $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$.
البرهان:

إذا كان للدالة جذر α مكرر m مرة فإن $f(\alpha) = 0$ و $f(x) = (x - \alpha)^m q(x)$ حيث إن $q(\alpha) \neq 0$.

بما أن $f \in C^m[a, b]$ فإنه يمكن إثبات أنه إذا كانت $n \leq m$ فإن:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= (x - \alpha)^m q^{(n)}(x) + \binom{n}{1} m(x - \alpha)^{m-1} q^{(n-1)} + \binom{n}{2} m(m-1)(x - \alpha)^{m-2} q^{(n-2)} \\ &+ \dots + \binom{n}{n-1} m(m-1) \dots (m-n+2)(x - \alpha)^{m-n+1} q'(x) \\ &+ m(m-1) \dots (m-n+1)(x - \alpha)^{m-n} q(x) \end{aligned} \quad (2.43)$$

حيث إن $\binom{n}{i}$ معاملات ذات الحدين.

الآن إذا كان $n < m$ فإنه باستخدام التعريف (٢, ٢) نجد أن:

$$f^{(n)}(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} [(x - \alpha)^m q^{(n)}(x) + \dots] = 0$$

وإذا كان $n = m$ فإننا نحصل على:

$$f^{(m)}(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f^{(m)}(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \alpha} [(x - \alpha)^m q^{(n)}(x) + \binom{n}{1} m(x - \alpha)^{m-1} q(x) + \dots]$$

$$= m! \lim_{x \rightarrow \alpha} q(x) \neq 0$$

نسبرهن الآن أنه إذا كان $f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$

و $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$ فإن α جذر مكرر m للدالة f . بنشر كثيرة الحدود لتايلور ذات الدرجة $m-1$ للدالة f حول العدد α نحصل على:

$$f(x) = f(\alpha) + (x - \alpha)f'(\alpha) + \dots + \frac{(x - \alpha)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(\alpha) + \frac{(x - \alpha)^m}{m!} f^{(m)}(\xi(x))$$

وباستخدام المعطيات يكون لدينا:

$$f(x) = \frac{(x - \alpha)^m}{m!} f^{(m)}(\xi(x))$$

وبما أن $f^{(m)}$ دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f^{(m)}(\xi(x)) = f^{(m)}(\lim_{x \rightarrow \alpha} \xi(x)) = f^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

وبوضع $q(x) = \frac{1}{m!} f^{(m)}(\xi(x))$ يكون لدينا $f(x) = (x - \alpha)^m q(x)$ حيث إن

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} q(x) \neq 0 \text{ وهذا يعني أن } \alpha \text{ جذر مكرر } m \text{ للدالة } f.$$

نظرية (٢, ١٠)

لتكن $f \in C[a, b]$ ، يكون α جذر بسيط للدالة f إذا وفقط إذا كان

$$f(\alpha) = 0 \text{ و } f'(\alpha) \neq 0.$$

هذه النتيجة عبارة عن حالة خاصة من النظرية (٢, ٨) وبرهانها مطروح

للمناقشة في التمارين.

لقد أثبتنا فيما سبق أن طريقة نيوتن - رافسون تكون تربيعية التقارب إذا كان

$f(\alpha) = 0$ و $f'(\alpha) \neq 0$ ، أي أنه إذا كان α جذر بسيط للدالة f . أما إذا كان الحل

غير بسيط فإنه بوضع $f(x) = (x - \alpha)^m q(x)$ يمكن إثبات أنه بالنسبة للصيغة التكرارية لطريقة نيوتن - رافسون يكون لدينا:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - \alpha}{x_{n-1} - \alpha} = 1 - \frac{1}{m} \quad (2.44)$$

وبالتالي فإن طريقة نيوتن - رافسون تكون خطية التقارب في حالة الجذور المكررة، (انظر التمارين).

يستعرض المثال (٢،٢٣) بعض النتائج العددية التي تشير إلى أن معدل تقارب طريقة نيوتن - رافسون ليس تربيعياً عندما يكون الجذر مكرراً. مثال (٢،٢٣)

العدد $x = 7$ جذراً مكرراً مرتين للمعادلة $x^3 - 13x^2 + 35x + 49 = 0$ وذلك لأن $f(7) = f'(7) = 0$ و $f''(7) \neq 0$. باستخدام طريقة نيوتن - رافسون حصلنا على النتائج العددية الموجودة في الجدول رقم (٢،٨) وذلك ابتداء من القيمة الابتدائية $x_0 = 9$. يتضح من الجدول رقم (٢،٨) أن معدل التقارب ليس تربيعياً وإنما خطياً على أفضل الأحوال.

في الواقع هناك الكثير من المعادلات غير الخطية التي تنشأ في مختلف التطبيقات العملية يكون لديها جذور مكرره يراد حسابها. ولكن طريقة نيوتن - رافسون تكون غير عملية لإيجاد مثل هذه الجذور وذلك لبطء تقاربها. وحيث إن هذه الطريقة مشهورة الاستخدام على نطاق واسع فإنه تم تطويرها بأساليب مختلفة للحفاظ على سرعة تقاربها بالنسبة للجذور المكررة. نستعرض فيما يلي طريقتين من طرائق نيوتن - رافسون المعدلة ونناقش معدلها التقاربي.

الجدول رقم (٢,٨) النتائج العددية للمثال (٢,٢٣).

n	x_n	$ x_n - \alpha $
1	8.0909095	1.0909095
2	7.5763293	0.5763293
3	7.2975327	0.2975327
4	7.1513864	0.1513864
5	7.0763896	0.0763896
6	7.0383746	0.0383746
7	7.0192340	0.0192340
8	7.0096280	0.0096280
9	7.0048168	0.0048168
10	7.0024092	0.0024092
11	7.0012048	0.0012048
12	7.0006024	0.0006024
13	7.0003012	0.0003012
14	7.0001506	0.0001506
15	7.0000753	0.0000753
16	7.0000377	0.0000377

إذا عُلِمَ مسبقاً أن الجذر مكرر m مرة فإنه يمكن استخدام طريقة نيوتن -

رافسون المعدلة:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{mf(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n \geq 1 \quad (2.45)$$

لحساب هذا الجذر. الصيغة التكرارية (2.45) تتقارب تريعيًا إلى الحل كما يوضحه المثال (٢,٢٤).

مثال (٢,٢٤)

ليكن α جذر مكرر m مرة للمعادلة غير الخطية $f(x) = 0$. أثبت أن معدل التقارب للصيغة التكرارية (2.45) يكون تريعيًا.

الإثبات:

إذا كان α جذر مكرر m مرة للدالة $f(x)$ فإنه حسب تعريف (٢,٢) يمكن كتابتها بالشكل $f(x) = (x - \alpha)^m q(x)$ حيث إن $q(\alpha) \neq 0$. وحيث إن $g(x) = x - \frac{mf(x)}{f'(x)}$ فإنه يكون لدينا:

$$g(x) = x - \frac{m(x - \alpha)^m q(x)}{(x - \alpha)^m q'(x) + m(x - \alpha)^{m-1} q(x)} = x - \frac{m(x - \alpha)q(x)}{(x - \alpha)q'(x) + mq(x)}$$

وبوضع $z(x) = \frac{q(x)}{(x - \alpha)q'(x) + mq(x)}$ يكون لدينا $g(x) = x - m(x - \alpha)z(x)$.

ومنه نحصل بسهولة على $g'(\alpha) = 0$ و $g''(\alpha) \neq 0$ وبالتالي فإنه حسب نظرية (٢,٧) يكون معدل تقارب الصيغة التكرارية (2.43) تريعيًا.

كما ذكرنا آنفًا فإنه يجب معرفة m لكي نتمكن من استخدام الصيغة التكرارية (2.45). بالمقابل إذا كانت m غير معروفة فإننا نستطيع استخدام طريقة نيوتن المعدلة التي صيغتها التكرارية:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}, \quad n \geq 0 \quad (2.46)$$

والتي يمكن الحصول عليها بتطبيق طريقة نيوتن - رافسون على الدالة:

$$h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (2.47)$$

وحيث إن الجذر α يكون دائماً جذراً بسيطاً للدالة $h(x)$ فإن الصيغة التكرارية (2.46) تكون تربيعية التقارب (انظر التمارين).

مثال (٢,٢٥)

من المثال (٢,٢٣) نعلم أن $\alpha = 7$ جذر مكرر للمعادلة $x^3 - 13x^2 + 35x + 49 = 0$. باستخدام الصيغتين التكراريتين (2.45) و (2.46) وانطلاقاً من $x_0 = 9$ حصلنا على النتائج العددية المدرجة في الجدولين رقمي (٢,٩) و (٢,١٠) حيث يتضح أن التقارب تربيعي لكلا الطريقتين.

الجدول رقم (٢,٩). النتائج العددية للمثال (٢,٢٥).

n	x_n	$ x_n - \alpha $
1	7.1818182	1.818×10^{-1}
2	7.0019980	1.998×10^{-3}
3	7.0000002	2.494×10^{-7}

الجدول رقم (٢,١٠). النتائج العددية للمثال (٢,٢٥).

n	x_n	$ x_n - \alpha $
1	6.8431373	1.569×10^{-1}
2	6.9984003	1.600×10^{-3}
3	6.9999998	1.610×10^{-7}

Δ^2 - طريقة ايتكن (٢, ٦)Atiken's Δ^2 -method

سوف نناقش في هذا البند زيادة سرعة تقارب المتتابعات البطيئة للصيغ التكرارية. الأسلوب الذي ستتبعه يُنسب إلى العالم الرياضي ايتكن (Aitken). لتكن المتتالية $\{x_n\}$ تتقارب خطياً إلى الجذر α ، نريد أن نستخدم عناصر هذه المتتالية لإنشاء متتالية $\{y_n\}$ تتقارب إلى α بحيث يكون معدل تقاربها أسرع من معدل تقارب المتتالية الأصلية $\{x_n\}$. الآن بما أن المتتالية $\{x_n\}$ تتقارب خطياً إلى α فإنه حسب التعريف (٢, ٢) يكون لدينا:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = s$$

وبالتالي إذا كانت n كبيرة نحصل على:

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} \approx s \quad (2.48)$$

وعندما x_n ؤول إلى α فإنها تبقى ثابتة (تقريباً) عند كل تكرار. بناء على ذلك فإنه عند التكرار التالي يكون لدينا:

$$\frac{x_{n+2} - \alpha}{x_{n+1} - \alpha} \approx s \quad (2.49)$$

إذا كانت n كبيرة فإنه من المعادلتين (2.48) و (2.49) نجد أن:

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} \approx \frac{x_{n+2} - \alpha}{x_{n+1} - \alpha}$$

وبناء عليه:

$$\begin{aligned} (x_{n+1} - \alpha)^2 &\approx (x_n - \alpha)(x_{n+2} - \alpha) \\ x_{n+1}^2 - 2\alpha x_{n+1} + \alpha^2 &\approx x_n x_{n+2} - \alpha x_n - \alpha x_{n+2} + \alpha^2 \\ \alpha(x_{n+2} + x_n - 2x_{n+1}) &\approx x_{n+2} x_n - x_{n+1}^2 \end{aligned}$$

وبحل المعادلة الأخيرة بالنسبة لـ α نحصل على:

$$\alpha \approx \frac{x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2}{x_{n+2} + x_n - 2x_{n+1}} \quad (2.50)$$

وبإضافة x_n^2 و $2x_nx_{n+1}$ إلى البسط ثم طرحهما نحصل على:

$$\alpha \approx \frac{(x_n^2 + x_{n+2}x_n - 2x_nx_{n+1}) - (x_n^2 - 2x_nx_{n+1} + x_{n+1}^2)}{x_{n+2} + x_n - 2x_{n+1}}$$

ومنه يكون لدينا:

$$\alpha \approx x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} \quad (2.51)$$

تعريف (٢,٣)

يكتب الفرق الأمامي للمتتالية $\{x_n\}$ بالشكل:

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

من أجل $n = 0, 1, 2, \dots$

باستخدام التعريف (٢,٣) يمكننا كتابة:

$$\begin{aligned} \Delta^2 x_n &= \Delta(\Delta x_n) = \Delta(x_{n+1} - x_n) \\ &= x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n \end{aligned}$$

وبالتالي يمكن كتابة المعادلة (2.51) بالشكل:

$$\alpha \approx x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} \quad (2.52)$$

وباستخدام المعادلة (2.52) يمكن تكوين متتالية عددية جديدة $\{\hat{x}_n\}$ معرفة بالشكل:

$$\hat{x}_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} \quad (2.53)$$

وبالتالي إذا كان لدينا المتتالية $\{x_n\}$ التي تتقارب خطياً إلى α فإنه يمكن استخدام

الصيغة التكرارية (2.53) لتكوين المتتالية $\{\hat{x}_n\}$ والتي أيضاً تتقارب إلى α في الواقع

يمكن إثبات أن المتتالية $\{\hat{x}_n\}$ تتقارب إلى α بشكل أسرع من المتتالية $\{x_n\}$ وذلك بإثبات أن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{x}_n - \alpha}{x_n - \alpha} = 0 \quad (2.54)$$

كما توضحه النظرية التالية والمعروفة باسم نظرية الإسراع لايتكن.
 نظرية (٢، ١١)

لتكن $\{x_n\}$ متتالية من الأعداد تتقارب خطياً إلى α و ثابت خطأ تقريبي s ، حيث $|s| < 1$ ، فإن المتتالية الجديدة $\{\hat{x}_n\}$ والمعروفة في (2.53) تتقارب إلى α بشكل أسرع وأن المعادلة (2.54) متحققة.
 البرهان:

من المعادلة (2.53) نحصل على:

$$\hat{x}_n = \frac{x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

وبإضافة α وطرحها من الطرف الأيسر لدينا:

$$\begin{aligned} \hat{x}_n - \alpha &= \alpha + \frac{x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} - \alpha \\ &= \alpha + \frac{x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2 - \alpha x_{n+2} + 2\alpha x_{n+1} - \alpha x_n}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} \end{aligned}$$

ومنه نحصل على:

$$\hat{x}_n - \alpha = \frac{(x_{n+2} - \alpha)(x_n - \alpha) - (x_{n+1} - \alpha)^2}{x_{n+2} - \alpha - 2(x_{n+1} - \alpha) + x_n - \alpha}$$

وبوضع $e_n = x_n - \alpha$ و $\hat{e}_n = \hat{x}_n - \alpha$ نجد أن:

$$\hat{e}_n = \frac{e_{n+2}e_n - e_{n+1}^2}{e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n}$$

بما أن $\{x_n\}$ تتقارب خطياً و أن $|s| < 1$ فإنه يوجد متتالية $\{\delta_n\}$ بحيث إن $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ و أن $e_{n+1} = (s + \delta_n)e_n$ و $e_{n+2} = (s + \delta_{n+1})(s + \delta_n)e_n$ وبناء على ذلك نحصل على:

$$\hat{e}_n = \frac{(s + \delta_{n+1})(s + \delta_n)e_n^2 - (s + \delta_n)^2 e_n^2}{(s + \delta_{n+1})(s + \delta_n)e_n - 2(s + \delta_n)e_n + e_n}$$

ومنه يكون لدينا:

$$\frac{\hat{e}_n}{e_n} = \frac{(s + \delta_{n+1})(s + \delta_n) - (s + \delta_n)^2}{(s + \delta_{n+1})(s + \delta_n) - 2(s + \delta_n) + 1}$$

و بأخذ نهاية الطرفين عندما n تؤول إلى ∞ نحصل على:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{e}_n}{e_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(s + \delta_{n+1})(s + \delta_n) - (s + \delta_n)^2}{(s + \delta_{n+1})(s + \delta_n) - 2(s + \delta_n) + 1} \\ &= \frac{s^2 - s^2}{s^2 - 2s + 1} = 0 \end{aligned}$$

وذلك لأن $s \neq 1$.

من النظرية (٢، ١١) نلاحظ أنه إذا كانت $|s|$ قريبة من الصفر يكون تقارب المتتالية $\{\hat{x}_n\}$ أسرع من تلك إذا كانت $|s|$ قريبة من الواحد. نشير هنا إلى أن النظرية (٢، ١١) تكون غير صحيحة إذا كانت $|s| = 1$.

مثال (٢، ٢٦)

لتكن $x_{n+1} = 1 + \frac{2}{x_n}$ ، $n \geq 0$ و $x_0 = 2.5$. استخدم طريقة إيتكن لتكوين متتالية عددية $\{\hat{x}_n\}$ والتي تتقارب إلى $\alpha = 2$ بشكل أسرع من تقارب المتتالية $\{x_n\}$.
نعلم أن:

$$\hat{x}_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

إذن لا بد أن يكون لدينا ثلاثة عناصر من المتتالية $\{x_n\}$ قبل البدء في حساب عناصر المتتالية $\{\hat{x}_n\}$.

عندما $n=1$ يكون لدينا:

$$\hat{x}_1 = x_1 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{x_3 - 2x_2 + x_1} = 1.8 - \frac{(2.1111111 - 1.8)^2}{1.947368 - 2(2.1111111) + 1.8} = 2.0038314$$

وإذا كانت $n=2$ نحصل على:

$$\hat{x}_2 = x_2 - \frac{(x_3 - x_2)^2}{x_4 - 2x_3 + x_2} = 2.111111 - \frac{(1.947368 - 2.111111)^2}{2.027027 - 2(1.947368) + 2.111111} = 2.0009569$$

وهكذا. النتائج العددية التي حصلنا عليها مدرجة في الجدول رقم (٢، ١١)، حيث تم

إيقاف العمليات الحسابية عندما تحقق الشرط $\frac{|\hat{x}_n - \hat{x}_{n-1}|}{|\hat{x}_n|} \leq 10^{-5}$.

الجدول رقم (٢، ١١). النتائج العددية للمثال (٢، ٢٦).

n	x_n	$\hat{x}_n$
1	1.8000000	2.003831
2	2.111111	2.000957
3	1.947368	2.000239
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
7	1.996656	2.000001
8	2.001675	2.000000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
15	1.999987	
16	2.000007	

يتضح من الجدول رقم (٢، ١١) أن تقارب المتتالية $\{\hat{x}_n\}$ أسرع من المتتالية

$\{x_n\}$. كما نشير إلى أن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = |g'(\alpha)| = \frac{1}{2} \neq 0$$

انظر مثال (٢، ١٥). وهذا يعني أن $s = 0.5 < 1$ وهو يوافق نظرية (٢، ١١).

(٢، ٩) جذور كثيرات الحدود

Roots of Polynomials

ندرس في هذا البند بعض الطرائق العددية لحل المعادلة غير الخطية (2.1) عندما تكون الدالة $f(x)$ دالة كثيرة حدود، أي أننا سوف نحسب جذور كثيرة الحدود $p(x)$. قبل البدء في دراسة الطرائق العددية سنستعرض بعض النظريات الأساسية المتعلقة بكثيرات الحدود.

نظرية (٢، ١٢)

إذا كانت $p(x) = 0$ كثيرة حدود تحتوي على معاملات حقيقية أو مركبة و درجتها $N \geq 1$ ، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل، α ، حقيقي أو مركب بحيث إن $p(\alpha) = 0$.

لنعتبر أن $p(x) = 0$ كثيرة حدود ذات الدرجة $N \geq 1$. إذا كانت $N = 1$ ، فإن حل المعادلة $p(x) = 0$ يعطينا جذر واحد. أما إذا كان $N > 1$ فإنه حسب النظرية (٢، ١٢) يوجد عدد حقيقي أو مركب z_1 بحيث إن $p(z_1) = 0$ ، وبقسمة $p(x) = 0$ على $(x - z_1)$ يكون لدينا $p(x) = (x - z_1)q_1(x)$ حيث $q_1(x)$ كثيرة حدود ذات الدرجة $N - 1$. الآن إذا كان $N - 1 \geq 1$ ، فإنه مرة أخرى، بواسطة نظرية (٢، ١٢) يكون لدينا $q_1(x) = (x - z_2)q_2(x)$ ، حيث إن $q_1(z_2) = 0$ ، وبالتالي نحصل على:

$$p(x) = (x - z_1)(x - z_2)q_2(x)$$

وهكذا فإنه يمكن كتابة $p(x) = (x - z_1)q_1(x)$ بالشكل:

$$p(x) = a_N (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_N) \quad (2.55)$$

حيث إن a_N ثابت حقيقي أو مركب. المعادلة (2.55) تعني أن كل كثيرة حدود ذات الدرجة N يمكن تحليلها إلى N معامل خطي، وهذا يعني أنه يوجد لها N جذر. نشير هنا إلى أنه ليس بالضرورة أن تكون هذه الجذور مختلفة. كما نشير إلى أنه يمكن كتابة كثيرة الحدود $p(x)$ ذات الدرجة N بالشكل:

$$p(x) = a_N (x - z_1)^{m_1} (x - z_2)^{m_2} \cdots (x - z_K)^{m_K} \quad (2.56)$$

حيث إن $z_1, z_2, \dots, z_K$ ثوابت حقيقية أو مركبة و $m_1, m_2, \dots, m_K$ أعداد صحيحة موجبة بحيث إن $\sum_{i=1}^K m_i = N$. نقودنا هذه المناقشة إلى النظرية التالية:

نظرية (٢، ١٣)

إذا كانت كثيرة الحدود $p(x)$ ذات الدرجة N فإنه يوجد لها N جذر. النظرية التالية تتضمن العلاقة بين كثيرتي حدود تكونان متساويتان عند أعداد مختلفة والتي سوف نستخدمها في هذا البند وفصول لاحقة.

نظرية (٢، ١٤)

لتكن $p(x)$ و $q(x)$ كثيرتي حدود ذات الدرجة N على الأكثر، وأنها متساويتان عند الأعداد المختلفة $z_1, z_2, \dots, z_K$ حيث $K > N$ فإن $p(x) = q(x)$ لجميع قيم x .

تعد مسألة إيجاد جذر كثيرة الحدود من المسائل الرياضية القديمة. هنا سوف نحسب جذور كثيرات الحدود التي تكون معاملاتها ثوابت حقيقية. يمكن كتابة كثيرة الحدود $p(x)$ ذات الدرجة N بالشكل:

$$p(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (2.57)$$

حيث إن $a_0, a_1, a_2, \dots, a_N$ ثوابت حقيقية، بحيث إن $a_N \neq 0$. نشير إلى أنه إذا كان $N = 1$ فإن لكثيرة الحدود $p(x)$ جذر واحد وهو $\alpha = -\frac{a_0}{a_1}$ ، وإذا كان $N = 2$ فإن جذري كثيرة الحدود يحققان المعادلة:

$$\alpha = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_1}$$

وكذلك يوجد صيغ رياضية لحساب جذور كثيرات الحدود ذات الدرجة الثالثة والرابعة. للقارئ المهتم يمكن الرجوع لكتاب Uspensky للإطلاع على هذه الصيغ. كما أننا نشير إلى أنه ليس من السهل استخدام هذه الصيغ لحساب الجذور، وبالتالي نادراً ما تستخدم؛ ولذلك يتم اللجوء إلى الطرائق العددية لحساب جذور كثيرات الحدود.

إذا كان لدينا كثيرة حدود فإنه يمكن استخدام طريقة نيوتن - رافسون لإيجاد جذورها الحقيقية. لإنجاز ذلك يجب علينا حساب قيمة كثيرة الحدود وتفاضلها الأول عند أعداد معينة. وبما أن $p(x)$ و تفاضلها عبارة عن كثيرتي حدود، فإن ذلك يتطلب جهد حسابي متداخل. في الواقع، يوجد أسلوب أفضل لحساب $p(x)$ و $p'(x)$ عند عدد ما r .

بداية إذا كانت $N = 4$ فإن كثيرة الحدود (2.56) تأخذ الشكل:

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (2.58)$$

وبالتالي لحساب $p(r)$ بواسطة الحسابات المباشرة فإننا نحتاج إلى سبع عمليات ضرب وأربع عمليات جمع على الأقل. بالمقابل يمكن كتابة المعادلة (2.58) بالشكل:

$$p(x) = \{[(a_4x + a_3)x + a_2]x + a_1\}x + a_0 \quad (2.59)$$

وعليه فإنه لحساب $p(r)$ باستخدام المعادلة (2.59) نحتاج إلى أربع عمليات ضرب وأربع عمليات جمع وفي ذلك توفير جهد حسابي معتبر.

بشكل عام إذا كانت $p(x)$ ذات الدرجة N فإنه يمكن كتابتها بالشكل:

$$p(x) = \{[(a_N x + a_{N-1})x + a_{N-2}]x + \dots + a_1\}x + a_0 \quad (2.60)$$

وبناء على ذلك فإنه يكون لدينا:

$$p(r) = \{[(a_N r + a_{N-1})r + a_{N-2}]r + \dots + a_1\}r + a_0$$

وبالتالي يمكن بسهولة حساب $b_{N-1} = a_N r + a_{N-1}$ ، ومن ثم حساب

$b_{N-2} = b_{N-1} r + a_{N-2}$ وبمواصلة ذلك نحصل على $p(r) = b_1 r + a_0$. يمكن

كتابة ذلك كنظام حسابي:

$$b_N = a_N \quad (2.61)$$

$$b_i = b_{i+1} r + a_i$$

من أجل $i = N-1, N-2, \dots, 1, 0$ ، وبالتالي فإنه من المعادلة (2.60) يكون لدينا

$p(r) = b_0 = b_1 r + a_0 = s_0$. يسمي هذا الأسلوب بطريقة هورنر والتي تحسب

قيمة $p(r)$ بشكل مشابه للمعادلة (2.60). ويتطلب ذلك عمليات ضرب عددها N

وعمليات جمع أيضاً عددها N ، انظر الخوارزمية (٥، ٢). أيضاً إذا كان لدينا كثيرة الحدود:

$$q(x) = b_N x^{N-1} + b_{N-1} x^{N-2} + \dots + b_2 x + b_1 \quad (2.62)$$

حيث إن الثوابت b_i ، من أجل $i = 1, 2, \dots, N$ كما هي معروفة في المعادلة (2.61).

وبالتالي يكون لدينا كثيرة الحدود:

$$(2.63)$$

$$\begin{aligned} (x-r)q(x) + b_0 &= (x-r)[b_N x^{N-1} + b_{N-1} x^{N-2} + \dots + b_2 x + b_1] + b_0 \\ &= b_N x^N + (b_{N-1} - r b_N) x^{N-1} + \dots + (b_1 - r b_2) x + b_0 - r b_1 \\ &= a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ &= p(x) \end{aligned}$$

وبالتالي يمكن كتابة كثيرة الحدود $p(x)$ بالشكل:

$$p(x) = (x-r)q(x) + b_0 \quad (2.64)$$

و بتفاضل طرفي المعادلة (2.64) بالنسبة لـ x نحصل على:

$$p'(x) = (x-r)q'(x) + q(x) \quad (2.65)$$

ومن هذه المعادلة يكون لدينا $p'(r) = q(r)$. هذا يعني أنه لحساب قيمة $p'(r)$ فإننا نوجد قيمة $q(r)$. هذه المناقشة تقودنا إلى النظرية التالية.

نظرية (٢، ١٥)

لتكن $p(x)$ كثيرة الحدود ذات الدرجة N والمعروفة في المعادلة (2.57) و b_i

من أجل $i = 0, 1, 2, \dots, N$ كما هي معرفة في المعادلة (2.61) فإن $p(r) = b_0$. إضافة،

إذا كانت كثيرة الحدود هي كثيرة الحدود ذات الدرجة $N-1$ والمعروفة في المعادلة

$$(2.62) \text{ فإن } p(x) = (x-r)q(x) + b_0 \text{ و } p'(r) = q(r).$$

نذكر هنا أنه يمكن استخدام طريقة هورنر لحساب قيم التفاضلات

$p^{(m)}(r)$ حيث $m = 1, 2, \dots, N$. لتوضيح ذلك لنجعل $q_1(x) = q(x)$ وهي كثيرة

الحدود المعرفة في المعادلة (2.62) ونكتبها بالشكل:

$$q_1(x) = \{(b_N x + b_{N-1})x + b_{N-2}\}x + \dots + b_2\}x + b_1 \quad (2.66)$$

وكذلك نضع $p(x) = (x-r)q_1(x) + b_0 = (x-r)q_1(x) + s_0$. الآن يمكن

استخدام طريقة هورنر لحساب قيمة $q_1(r)$. أي أنه يكون لدينا:

$$c_N = b_N \quad (2.67)$$

$$c_i = c_{i+1}r + b_i$$

من أجل $i = N-1, N-2, \dots, 1$. ومن المعادلة (2.66) نحصل على

$$c_1 = q_1(r) = p'(r) = s_1. \text{ بناء على ذلك يكون لدينا } q_1(x) = (x-r)q_2(x) + s_1$$

بالتالي نحصل على:

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (x-r)q_1(x) + s_0 \\
 &= (x-r)[(x-r)q_2(x) + s_1] + s_0 \\
 &= (x-r)^2 q_2(x) + s_1(x-r) + s_0
 \end{aligned}$$

وبالاستمرار بهذا الأسلوب نحصل على مفكوك تايلور لـ $p(x)$ عند $x=r$:

$$\begin{aligned}
 p(x) &= s_N(x-r)^N + s_{N-1}(x-r)^{N-1} + \dots + s_1(x-r) + s_0 \\
 s_m &= \frac{p^{(m)}(r)}{m!} \text{ و } p^{(m)}(r) = s_m m! \quad \text{وبالتالي يكون لدينا}
 \end{aligned}$$

خوارزمية (٢, ٥): طريقة هورنر

تُحسب هذه الخوارزمية قيمة كل من $p(x)$ و $p'(x)$ عند $x=r$ وذلك بتطبيق المعادلتين (2.61) و (2.67).

المعطيات N ، a_i من أجل $i=0,1,2,\dots,N$ و r .

الخطوة ١: ضع $b_N = a_N$

$$c_N = b_N$$

الخطوة ٢: من أجل $i = N-1, N-2, \dots, 1$ أعمل التالي

$$b_i = b_{i+1}r + a_i$$

$$c_i = c_{i+1}r + b_i$$

الخطوة ٣: ضع $b_0 = b_1r + a_0$

الخطوة ٤: اطبع c_1 و b_0 .

نشير هنا إلى أنه إذا كنا نستخدم آلة حاسبة يدوية (أي أننا ننجز الحسابات

يدوياً) فإنه من المناسب كتابة المعاملات a_i في سطر واحد، ثم نحسب المعاملات b_i

كما هو موضح في الجدول رقم (٢, ١٢). كما يمكن استخدام نفس الأسلوب لحساب

قيمة $p'(r)$.

الجدول رقم (٢، ١٢). استخدام طريقة هورنر لحساب $p(r)$.

a_N	a_{N-1}	a_{N-2}	$\dots$	a_i	$\dots$	a_2	a_1	a_0
	rb_N	rb_{N-1}	$\dots$	rb_{i+1}	$\dots$	rb_3	rb_2	rb_1
b_N	b_{N-1}	b_{N-2}	$\dots$	b_i	$\dots$	b_2	b_1	$b_0 = p(r)$

مثال (٢، ٢٧)

نستخدم طريقة نيوتن - رافسون مقرونة بطريقة هورنر لحساب $p(x_n)$

و $p'(x_n)$ من أجل $n \geq 0$ لحل كثيرة الحدود $p(x) = x^2 - x - 2$ وذلك بوضع $x_0 = 2.5$.

نحن نعلم أن الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن - رافسون لهذه المسألة تكون بالشكل:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)}$$

من أجل $n \geq 0$. وعندما $n = 0$ يكون لدينا:

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)}$$

وبما أن $x_0 = 2.5$ فإنه في البداية يجب أن نحسب $p(2.5)$ و $p'(2.5)$. سنستخدم

طريقة هورنر لعمل ذلك كما يلي:

نحسب $p(2.5)$ من الجدول رقم (٢، ١٣).

الجدول رقم (٢، ١٣). حساب $p(2.5)$ للمثال (٢، ٢٧).

$a_i :$	1	-1	-2
$rb_i :$		2.5	3.75
b_i	1	1.5	$1.75 = p(2.5)$

إذن حسب نظرية (٢, ١٥) يكون لدينا $p(x) = (x - 2.5)q(x) + 1.75$ ،
 حيث $q(x) = x + 1.5$. لاحظ أن $b_2 = 1$ ، $b_1 = 1.5$ و $b_0 = 1.75$. بناء على ذلك
 يكون لدينا $p'(2.5) = q(2.5) = 4$. وبتطبيق طريقة نيوتن - رافسون نحصل على
 $x_1 = 2.0652$.

نكرر الآن استخدام طريقة هورنر لحساب $p(x_1)$ و $p'(x_1)$ حيث يكون
 لدينا النتائج الموجودة في الجدول رقم (٢, ١٤) .

الجدول رقم (٢, ١٤) . حساب $p(x_1)$ للمثال (٢, ٢٧) .

$a_i :$	1	-1	-2
$rb_i :$		2.0652	2.19141
b_i	1	1.0652	$0.19141 = p(2.0652)$

وبالتالي نحصل على $q(x) = x + 1.0652$ و $p'(2.0652) = q(2.0652) = 3.1304$.
 وبتطبيق طريقة نيوتن مرة أخرى حصلنا على $x_2 = 2.00125$. وهكذا حتى نحصل على
 الحل التقريبي المطلوب . في الواقع هنا حصلنا على $x_3 = 2.0000005$ و حيث إن القيمة
 المضبوطة لجذر كثيرة الحدود هو العدد 2 فإن القيمة المطلقة للخطأ المرافق للحل التقريبي
 x_3 هو 5×10^{-7} وهو صغير جداً . قارن النتائج العددية التي حصلنا عليها هنا مع تلك
 الموجودة في الجدول رقم (٢, ٦) للمثال (٢, ١٧) . ماذا تلاحظ ؟ .

ملاحظة:

إذا أردنا إيجاد جذر مركب لكثيرة حدود فإن استخدام الطرائق التي ناقشناها
 هنا يكون صعباً ويتطلب حسابات مركبة و قيم ابتدائية مركبة .

لتكن كثيرة الحدود $x^2 - rx - s$ هي المعامل التربيعي التجريبي الذي يقع بالقرب
 من المعامل التربيعي لكثيرة الحدود:

$$p(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (2.68)$$

فإن:

$$(2.69)$$

$p(x) = (x^2 - rx - s)(b_N x^{N-2} + b_{N-1} x^{N-3} + \dots + b_3 x + b_2) + b_1(x - r) + b_0$
حيث إن b_0 و b_1 يكونان أصفاراً إذا كان $x^2 - rx - s$ قاسم مضبوط. يمكن كتابة المعادلة (2.69) بالشكل:

$$(2.70)$$

$$p(x) = b_N x^N + (b_{N-1} - rb_N) x^{N-1} + (b_{N-2} - rb_{N-1} - sb_N) x^{N-2} + \dots + (b_i - rb_{i+1} - sb_{i+2}) x^i + \dots + (b_1 - rb_2 - sb_3) x + (b_0 - rb_1 - sb_2)$$

ومن المعادلتين (2.68) و (2.70) نحصل على العلاقات التالية:

$$b_N = a_N,$$

$$b_{N-1} = a_{N-1} + rb_N, \quad (2.71)$$

$$b_i = a_i + rb_{i+1} + sb_{i+2}$$

من أجل $i = N-2, N-3, \dots, 1, 0$. باستخدام الحسابات اليدوية فإنه من الأسهل كتابة المعاملات a_i في سطر، ثم حساب $b_i = a_i + rb_{i+1} + sb_{i+2}$ كما هو موضح في الجدول رقم (٢، ١٥).

الجدول رقم (٢، ١٥). حساب b_i من أجل $i = 0, 1, 2, \dots, N$ باستخدام طريقة برستو.

	a_N	a_{N-1}	a_{N-2}	a_{N-3}	$\dots$	a_i	$\dots$	a_2	a_1	a_0
r		rb_N	rb_{N-1}	rb_{N-2}	$\dots$	rb_{i+1}	$\dots$	rb_3	rb_2	rb_1
s			sb_N	sb_{N-1}	$\dots$	sb_{i+2}	$\dots$	sb_4	sb_3	sb_2
	b_N	b_{N-1}	b_{N-2}	b_{N-3}	$\dots$	b_i	$\dots$	b_2	b_1	b_0

هذه المناقشة توضع حجر الأساس لطريقة برستو والتي يمكن وصفها كما يلي:

إذا أُعطينا القيمتين الابتدائيتين r_0 و s_0 ، فإننا نحسب b_i من أجل $i = 0, 1, 2, \dots, N$ باستخدام العلاقات:

$$\begin{aligned} b_N &= a_N, \\ b_{N-1} &= a_{N-1} + r_j b_N, \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$b_i = a_i + r_j b_{i+1} + s_j b_{i+2}$$

من أجل $i = N-2, N-3, \dots, 1, 0$ و $j = 0$. وكذلك يمكن حساب الثوابت c_i من أجل $i = 1, 2, \dots, N$ باستخدام العلاقات التالية:

$$\begin{aligned} c_N &= b_N, \\ c_{N-1} &= b_{N-1} + r_j c_N, \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$c_i = b_i + r_j c_{i+1} + s_j c_{i+2}$$

من أجل $i = N-2, N-3, \dots, 2, 1$ و $j = 0$. وبمعرفة قيم b_0, b_1, c_1, c_2 و c_3 يمكن حساب r_1 و s_1 باستخدام المعادلتين:

$$r_{j+1} = r_j + \frac{b_1 c_2 - b_0 c_3}{c_1 c_3 - c_2^2} \quad (2.74)$$

و

$$s_{j+1} = s_j + \frac{b_0 c_2 - b_1 c_1}{c_1 c_3 - c_2^2} \quad (2.75)$$

من أجل $j \geq 0$. وبمعرفة r_1 و s_1 نحسب b_i و c_i من أجل $i = 0, 1, 2, \dots, N$ باستخدام العلاقات (2.72) و (2.74) عندما $j = 1$. وبعد ذلك نستخدم القيم الجديدة لـ b_i و c_i لحساب r_2 و s_2 وذلك باستخدام المعادلتين (2.74) و (2.75) عندما $j = 1$. يتم تكرار هذا الأسلوب حتى تكون قيم b_0 و b_1 أصفراً. تطبيقاً يمكن إيقاف العمليات الحسابية إذا تحقق الشرطين:

$$|r_{j+1} - r_j| \leq \varepsilon$$

$$|s_{j+1} - s_j| \leq \varepsilon$$

و

حيث إن $j \geq 0$.

مثال (٢, ٢٨)

هنا سنستعرض طريقة برستو لإيجاد المعامل التربيعي لكثيرة الحدود

$p(x) = x^3 + 3x^2 - 25x + 21$ ، ثم نستخدم هذا المعامل لحساب جذورها.

لنبدأ بالمعامل التربيعي $x^2 - x - 1 = 0$ ، أي أنه يكون لدينا $r_0 = 1$ و $s_0 = 1$. بداية

نحسب b_i من أجل $i = 0, 1, 2, \dots, N$ كما هي مدرجة في الجدول رقم (٢, ١٦) حيث يكون لدينا:

الجدول رقم (٢, ١٦). حساب قيم b_i من أجل $i = 0, 1, 2, \dots, n$ للمثال (٢, ٢٨).

	1	3	-25	21
$r_0 = 1$		1	4	-20
$s_0 = 1$			1	4
	$b_3 = 1$	$b_2 = 4$	$b_1 = -20$	$b_0 = 5$

وبما أن العلاقات (2.73) والتي تحسب c_i من أجل $i = 1, 2, \dots, N$ هي

شبيهة إلى حد بعيد بالعلاقات (2.72) فإنه يمكن حسابها كما في الجدول (٢, ١٧):

الجدول رقم (٢, ١٧). حساب قيم c_i من أجل $i = 1, 2, \dots, N$ للمثال (٢, ٢٨).

	1	4	-20	5
$r_0 = 1$		1	5	-14
$s_0 = 1$			1	5
	$c_3 = 1$	$c_2 = 5$	$c_1 = -14$	$c_0 = -4$

بناءً على ذلك فإنه عندما $j = 0$ يكون لدينا:

$$r_1 = r_0 + \frac{b_1 c_2 - b_0 c_3}{c_1 c_3 - c_2^2} = 1 + \frac{(-20)(5) - (5)(1)}{(-14)(1) - (5)^2} = 1 + \frac{-105}{-39} = 3.69231$$

و

$$s_1 = s_0 + \frac{b_0 c_2 - b_1 c_1}{c_1 c_3 - c_2^2} = 1 + \frac{(5)(5) - (-20)(-14)}{(-14)(1) - (5)^2} = 1 + \frac{-255}{-39} = 7.53846$$

وبالحصول على قيم r_1 و s_1 نعيد بنفس الأسلوب حساب قيم b_i من أجل $i = 0, 1, 2, \dots, N$ و c_i من أجل $i = 1, 2, \dots, N$. وهكذا نتابع الحسابات حيث حصلنا على النتائج العددية لهذه المسألة مدرجة في الجدول رقم (٢، ١٨):

الجدول (٢، ١٨). النتائج العددية للمثال (٢، ٢٨).

j	r_j	s_j
1	3.69231	7.53846
2	4.11162	-4.06441
3	4.00224	-3.01272
4	4.00000	-3.00000

من هذه النتائج يتضح أن المعامل التربيعي هو $x^2 - 4x + 3$ ، وبالتالي يكون لدينا:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$$

أي أن العددين 1 و 3 جذران لكثيرة الحدود $p(x) = x^3 + 3x^2 - 25x + 21$. في الواقع، يمكن بسهولة التحقق من أن الجذر الثالث هو -7.

تتضمن الخوارزمية (٢، ٦) تنفيذ طريقة برستو لإيجاد جذور كثيرات الحدود.

خوارزمية (٦، ٢): طريقة برستو

تُحسب هذه الخوارزمية معاملاً تربيعياً $x^2 - rx - s$ لكثيرة حدود $p(x)$ ذات الدرجة $N \geq 3$ ، وذلك ابتداءً من قيم ابتدائية لـ r و s . المعطيات N ، a_i من أجل $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ، العدد الأقصى للتكرارات m ، الدقة المطلوبة eps والقيم الابتدائية r_0 و s_0 .

الخطوة ١: ضع $b_N = a_N$

$$c_N = a_N$$

$$j = 0$$

الخطوة ٢: طالما $k \leq m$ اعمل الخطوات ٣ - ٩:

الخطوة ٣: ضع $b_{N-1} = a_{N-1} + r_0 b_N$

$$c_{N-1} = b_{N-1} + r_0 c_N$$

الخطوة ٤: من أجل $i = N-2, N-3, \dots, 2, 1$

$$b_i = a_i + r_0 b_{i+1} + s_0 b_{i+2} \quad \text{ضع}$$

$$c_i = b_i + r_0 c_{i+1} + s_0 c_{i+2}$$

الخطوة ٥: ضع $b_0 = a_0 + r_0 b_1 + s_0 b_2$

الخطوة ٦: ضع $d = c_1 c_3 - c_2^2$

الخطوة ٧: ضع $r = r_0 + \frac{1}{d} [b_1 c_2 - b_0 c_3]$

$$s = s_0 + \frac{1}{d} [b_0 c_2 - b_1 c_1]$$

الخطوة ٨: إذا كان $|r - r_0| \leq eps$ و $|s - s_0| \leq eps$ ، اطبع r و s ؛ قف.

الخطوة ٩: ضع $r_0 = r$

$$s_0 = s$$

$$k = k + 1$$

الخطوة ١٠: اطبع "لم يتم الحصول على القيم المطلوبة، ابدأ بقيم جديدة لـ r_0 و s_0 ".

(٢, ١٠) تمارين

Exercises

١- أثبت أن للمعادلة $\ln x - x + 1.5 = 0$ حل وحيد في الفترة $[2, 3]$. ثم

استخدم طريقة التنصيف لحساب التقريب الرابع، x_4 ، ثم احسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي حصلت عليه.

٢- استخدم طريقة التنصيف لإيجاد قيمة تقريبية للجذر التربيعي $\sqrt[3]{16}$ بدقة 5×10^{-2} .

تلميح: ضع $f(x) = x^3 - 16$.

٣- استخدم طريقة التنصيف لحساب قيمة تقريبية بدقة 5×10^{-2} لمعكوس العدد $\mu = 3$.

تلميح: ضع $f(x) = \frac{1}{x} - 3$.

٤- اعتبر استخدام طريقة التنصيف لإيجاد حلاً تقريبياً بدقة 5×10^{-5} للمعادلة $x - 5^{-x} = 0$ على الفترة $[0, 1]$ أوجد عدد التكرارات اللازمة للحصول على هذا الحل. قارن العدد الذي تحصل عليه مع العدد العملي (الفعلي) الذي تطّكّب في تمرين ١ من قائمة تمارين الحاسب.

٥- اعتبر المعادلة الموجودة في مثال (١, ٢) على الفترة $[1, 3]$. أوجد عدد التكرارات اللازمة للحصول على حل تقريبي بدقة 5×10^{-6} . ثم استخدم طريقة التنصيف لحساب هذا الحل. ماذا تلاحظ؟ ماذا يمكنك أن تستنتج من هذا التمرين والتمرين ٤؟

٦- استخدم طريقة الوضع الخاطئ لإيجاد الحل التقريبي x_n للمعادلة $\ln x - x + 1.5 = 0$ في الفترة $[2, 3]$ والذي يحقق $|f(x_n)| \leq 10^{-2}$.

٧- أوجد قيمة تقريبية بدقة 5×10^{-2} للجذر التكعيبي $\sqrt[3]{16}$ وذلك باستخدام طريقة الوضع الخاطئ قارن النتائج التي تحصل عليها مع تلك التي حصلت عليها في التمرين ٢.

٨- استخدم طريقة الوضع الخاطئ لحساب قيمة تقريبية بدقة 5×10^{-2} لمعكوس العدد $\mu = 3$. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي حصلت عليها في التمرين ٣.

٩- أحد الطرائق المطورة لطريقة الوضع الخاطئ هي ما تسمى بطريقة الوضع الخاطئ المعدلة والتي يمكن تلخيصها فيما يلي: لتكن $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ بحيث إن $f(a)f(b) < 0$. ضع $a_0 = a$ ، $b_0 = b$ ، $p = f(a_0)$ ، $q = f(b_0)$ و $x_0 = a_0$ من أجل $n = 0, 1, 2, \dots$ حتى يتحقق المطلوب، عمل ما يلي:

$$x_{n+1} = \frac{qa_n - pb_n}{q - p} \quad \text{احسب}$$

إذا كان $f(a_n)f(x_{n+1}) < 0$ ضع $a_{n+1} = a_n$ ، $b_{n+1} = x_{n+1}$ و $q = f(x_{n+1})$.

وإذا كان أيضاً $f(x_n)f(x_{n+1}) > 0$ فضع $p = \frac{p}{2}$.

وإلا فضع $p = f(x_{n+1})$ و $b_{n+1} = b_n$ ، $a_{n+1} = x_{n+1}$.

وإذا كان أيضاً $f(x_n)f(x_{n+1}) > 0$ ، ضع $q = \frac{q}{2}$.

استخدم الطريقة الموضحة أعلاه لإيجاد حل للمعادلة $x^2 - x - 2 = 0$ في الفترة

$[1.5, 3]$ و يحقق الشرط $|x_{n+1} - x_n| < 5 \times 10^{-3}$. قارن النتائج التي تحصل عليها

مع نتائج المثالين (٢، ١) و (٢، ٤).

١٠- لتكن $f(x) = (x - \sqrt{2})^5$ ، من الواضح أن العدد $\alpha = \sqrt{2}$ حلاً

للمعادلة $f(x) = 0$. أثبت أنه لا يمكننا استخدام المتباينة $|f(x_n)| < 5 \times 10^{-5}$

كشرط لإيقاف حساب عناصر المتتالية $\{x_n\}$ والمعرفة بـ $x_n = \sqrt{2} + \frac{1}{n}$ ، $n \geq 1$ والتي تتقارب إلى الحل α .

١١- لتكن α حل للمعادلة $f(x) = 0$ و x_n حل تقريبي لهذه المعادلة. أثبت المتباينة (2.11).

١٢- للمعادلة $(x - \sqrt{2})^{\frac{1}{5}} = 0$ حل وحيد في الفترة $[1, 2]$. وضح بالتفصيل أنه قد تنشأ بعض الصعوبات الناتجة من استخدام شرط الوقوف (2.8).

تلميح: استنتج أن $|f'(\eta)| >> 1$ لكل $\eta \in (\alpha, x_n)$.

١٣- أثبت أنه يوجد نقطة ثابتة وحيدة لكل من الدوال التالية في الفترة المشار

إليها:

(أ) $g(x) = \sqrt[4]{4x+2}$ ، $[1, 2]$.

(ب) $g(x) = \ln\left(\frac{1}{3}(5 - x(3 - x))\right)$ ، $[0, 1]$.

(ج) $g(x) = x^2 \ln(x)$ ، $[1, 2]$.

١٤- لتكن $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}e^{-x} - 2$ و $g(x) = \sqrt{\frac{4 - e^{-x}}{2}}$ من أجل

$x \in [1, 2]$. استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لإيجاد حلاً تقريبياً للمعادلة غير

الخطية $x^2 + \frac{1}{2}e^{-x} - 2 = 0$ بدقة 5×10^{-2} .

١٥- ليكن لدينا المعادلة غير الخطية $x^4 - 4x - 2 = 0$ اعتبر استخدام

طريقة تكرار النقطة الثابتة لحل هذه المعادلة في الفترة $[1, 2]$.

(أ) أوجد صيغة تكرارية مناسبة لحل هذه المسألة.

(ب) استخدم الصيغة التكرارية التي أوجدتها في الفقرة (أ) لحساب الحل التقريبي

x_3 وذلك بوضع $x_0 = 1$. ثم احسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بهذا التقريب.

١٦- للدالة $g(x) = 4 - 6/x^2$ نقطة ثابتة وحيدة في الفترة $[3, 4]$. احسب عدد التكرارات اللازمة للحصول على قيمة تقريبية لهذه النقطة بدقة 5×10^{-5} وذلك بوضع $x_0 = 3$. قارن عدد التكرارات التي حسبتهما والعدد الفعلي الذي نتج من حل المسألة في التمرين ٣ من تمارين الحاسب. ماذا تلاحظ؟.

١٧- أثبت أنه يوجد نقطة ثابتة وحيدة للدالة $g(x) = \frac{3x}{x+1}$ في الفترة $[-0.5, 0.5]$ ، ولكننا لا نستطيع ضمان تقارب الصيغة التكرارية $x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n + 1}$ إلى هذه النقطة. $n \geq 0$

١٨- يوجد للمعادلة $x^2 - 3x - e^x + 5 = 0$ حل وحيد في الفترة $[1, 2]$. أثبت أنه لا يمكن ضمان تقارب الصيغة التكرارية $x_n = \sqrt{3x_{n-1} + e^{x_{n-1}} - 5}$ ، $n \geq 1$ ، إلى حل هذه المعادلة. اكتب صيغة تكرارية مناسبة لحل هذه المعادلة، ثم استخدمها لحساب التكرار الرابع. أوجد حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي تحصل عليه.

١٩- اعتبر إيجاد حل للمعادلة $ax^2 - e^x = 0$ ، حيث $a > 0$ عدد حقيقي، في الفترة $[3, 4]$ وذلك باستخدام الصيغة التكرارية $x_{n+1} = \ln(ax_n^2)$ ، من أجل $n \geq 0$:

(أ) أوجد أصغر قيمة لـ a بحيث إن الصيغة التكرارية المذكورة تحقق شروط نظرية النقطة الثابتة.

(ب) استخدم الصيغة التكرارية وقيمة a التي أوجدتها لحساب التكرار الثاني وذلك ابتداء من $x_0 = 3.5$ ، ثم احسب حداً أعلى للخطأ المتعلق بالتقريب الذي تحصل عليه.

٢٠- اعتبر الصيغتين التكراريتين التاليتين:

$$(i) \quad x_n = 0.5\sqrt{8 - x_{n-1}^3}$$

$$(ii) \quad x_n = 2\sqrt{2/(4 + x_{n-1})}$$

من أجل $n \geq 1$ ، حل المعادلة $x^3 + 4x^2 - 8 = 0$ في الفترة $[1, 1.5]$. حدد الصيغة الأفضل لحساب جذر هذه المعادلة. أسند إجابتك بالإثبات.

٢١- ادرس تقارب المتالتين التاليتين:

$$(i) \quad x_{n+1} = x_n + 1 - \frac{x_n^2}{5} \quad (ii) \quad x_{n+1} = \frac{1}{3} [3x_n + 1 - \frac{x_n^2}{5}]$$

واللتان تقاربان إلى العدد $\alpha = \sqrt{5}$. حدد أي الصيغتين يكون تقاربها أسرع.

٢٢- أثبت أن النظرية (٢, ٢) تكون صحيحة إذا استبدلنا الشرط الثاني

بالشرط $g'(x) < 1$.

٢٣- أثبت أن تقارب المتتالية المعرفة في نظرية النقطة الثابتة لا يكون مضمون

إذا أُستبدل الشرط الثاني بالشرط المذكور في التمرين ٢٢.

٢٤- أثبت النظرية (٢, ٥).

تلميح: لإثبات ذلك لاحظ أنه من اتصال $g'(x)$ والشرط $|g'(\alpha)| < 1$

يكون لدينا: $|g'(x) - g'(\alpha)| \leq \frac{1 - |g'(\alpha)|}{2} \Rightarrow |x - \alpha| \leq c$ حيث إن $c > 0$.

ادرس الدالة $g(x)$ (وبالتحديد حجم $g'(x)$) على الفترة $[\alpha - c, \alpha + c]$.

٢٥- استخدم طريقة نيوتن-رافسون لحساب التقريب الثاني x_2 لحل

المعادلات التالية وذلك ابتداء من التقريب المرافق لكل حالة:

$$(أ) \quad x^3 - x - 1 = 0, \text{ ضع } x_0 = 1.$$

$$(ب) \quad e^x = 3, \text{ ضع } x_0 = 3.$$

٢٦- استخدم طريقة نيوتن-رافسون لحساب قيمة تقريبية بدقة 5×10^{-2}

لنقطة تقاطع المنحنيين $y = \ln(x+2)$ و $y = e^{-x}$.

٢٧- اثبت أن الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن-رافسون لإيجاد قيمة تقريبية

للجذر التربيعي للعدد الحقيقي الموجب A يمكن أن تكتب بالشكل:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{A}{x_n} \right), \quad n \geq 0$$

ثم استخدم هذه الصيغة لحساب التقريب الثاني، x_2 ، للجذر $\sqrt{2}$ وذلك بوضع $x_0 = 1$. ما هو الخطأ الفعلي للتقريب الذي تحصل عليه.

٢٨- أثبت أن الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن-رافسون لإيجاد قيمة تقريبية

لـ الجذر $\sqrt[m]{A}$ ، $A > 0$ عدد حقيقي يمكن كتابته بالشكل:

$$x_{n+1} = \frac{1}{m} \left[(m-1)x_n + \frac{A}{x_n^{m-1}} \right], \quad n \geq 0$$

استخدم هذه الصيغة لحساب قيمة تقريبية بدقة 5×10^{-2} للجذر $\sqrt[4]{2}$ وذلك بوضع $x_0 = 1$.

٢٩- أوجد صيغة تكرارية لإيجاد المعكوس الضربي لعدد ما μ ، حيث إن

$\mu \neq 0$ ، وذلك باستخدام طريقة نيوتن-رافسون. ثم أثبت أنه يمكن كتابتها بالشكل:

$$x_{n+1} = x_n(2 - \mu x_n), \quad n \geq 0$$

تلميح: اعتبر $f(x) = \frac{1}{x} - \mu$.

٣٠- أثبت أن الصيغة التكرارية الموجودة في التمرين السابق تكون مضمونة

التقارب لأي اختيار ابتدائي $x_0 \in \left(\frac{1}{2\mu}, \frac{3}{2\mu} \right)$.

٣١- اعتبر الصيغة التكرارية $x_{n+1} = \sqrt{\frac{4 - e^{-x_n}}{2}}$ ، $n \geq 0$. أوجد المعادلة

غير الخطية التي تمثلها هذه الصيغة ثم استخدم طريقة نيوتن-رافسون لحساب حلاً عددياً لهذه المعادلة بدقة 5×10^{-2} وذلك ابتداء من $x_0 = 1$.

٣٢- استخدم طريقة القاطع لحساب التقريب x_3 لحل المعادلات التالية

وذلك ابتداء من الحلين التقريبيين المرافقين لكل معادلة:

$$(أ) \quad x^3 - x - 1 = 0, \quad \text{ضع } x_0 = 0.5, x_1 = 1.$$

ب) $e^x = 3$ ، ضع $x_0 = 3$ ، $x_1 = 2$.

٣٣- استخدم طريقة القاطع لإيجاد الحل التقريبي x_n للمعادلة

$$e^x - 3x^2 = 0 \text{ والذي يحقق } |f(x_n)| < 10^{-2} \text{ وذلك بوضع } x_0 = 0 \text{ و } x_1 = 1.$$

٣٤- أثبت أن الصيغة التكرارية لطريقة القاطع لإيجاد قيمة تقريبية للجذر

التربيعي للعدد الحقيقي الموجب A يمكن أن تكتب بالشكل:

$$x_{n+1} = \frac{(x_n x_{n-1} + A)(x_n - x_{n-1})}{x_n^2 - x_{n-1}^2}, \quad n \geq 1$$

ثم استخدم هذه الصيغة لحساب التقريب الثالث، x_2 ، للجذر $\sqrt{2}$ وذلك بوضع $x_0 = 1$. ما هو الخطأ الفعلي للتقريب الذي تحصل عليه.

٣٥- أثبت أن الصيغة التكرارية لطريقة القاطع لتقريب الجذر $\sqrt[n]{C}$ ، حيث

إن $C > 0$ عدد حقيقي، يمكن كتابتها بالشكل:

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1} x_n (x_{n+1}^{N-1} - x_n^{N-1}) + C(x_{n+1} - x_n)}{x_{n+1}^N - x_n^N}$$

من أجل $n \geq 0$.

٣٦- استخدم طريقة ستفنسن لحساب حلاً تقريبياً بدقة $\varepsilon = 10^{-5}$ للمعادلة

غير الخطية $x^2 - x - 2 = 0$ وذلك بوضع $x_0 = 2.5$. قارن النتائج التي تحصل عليها بتلك الموجودة في المثالين (٢، ١٧) و (٢، ١٨).

٣٧- أثبت أن المتتالية المعرفة بـ $x_n = \frac{1}{n^2}$ ، $n \geq 1$ ، تتقارب خطياً إلى الصفر.

ما هي قيمة n التي تحقق $|x_n - \alpha| \leq 5 \times 10^{-3}$.

٣٨- أثبت أن المتتالية المعرفة بـ $x_n = 10^{-2^n}$ ، $n \geq 1$ ، تتقارب تربيعياً إلى

الصفر.

٣٩- ما هو معدل التقارب للصيغة التكرارية $x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}$ ، $n \geq 1$ والتي تتقارب إلى العدد $\alpha = 2$.

٤٠- أوجد معدل التقارب للصيغة التكرارية $x_n = \frac{1}{2}[x_{n-1} + \frac{C}{x_{n-1}}]$ ، $n \geq 1$ والتي تتقارب إلى العدد $\sqrt{C}$ ، حيث إن C عدد حقيقي موجب.

٤١- اعتبر الصيغة التكرارية $x_{n+1} = 0.5cx_n + 4.5dx_n^{-1}$ ، $n \geq 0$ ، حيث إن c و d عددين حقيقيين، والتي تتقارب إلى العدد $\alpha = 3$. أوجد قيم c و d التي تجعل معدل التقارب يكون تربيعياً.

٤٢- أثبت المعادلة (2.41).

٤٣- الصيغة التكرارية لطريقة هالي يمكن كتابتها بالشكل:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)[1 - \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2(f'(x_n))^2}]}$$

لكل $n \geq 0$. أثبت أنه يمكن كتابة الصيغة التكرارية لطريقة هالي لإيجاد الجذر التربيعي للعدد A ، حيث إن $A > 0$ عدد حقيقي، بالشكل:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 3Ax_n}{3x_n^2 + A}, \quad n \geq 0$$

ثم أثبت أن معدل تقارب هذه الصيغة يكون أسرع من تربيعي. قارن هذه الصيغة مع صيغة نيوتن-رافسون.

٤٤- أوجد معدل التقارب لطريقة الوضع الخاطئ.

٤٥- ليكن لدينا المعادلة غير الخطية $f(x) = 0$ بحيث إن $f(\alpha) = 0$ و $f'(\alpha) \neq 0$.

اعتبر الصيغة التكرارية $x_n = g(x_{n-1})$ ، $n \geq 1$ حيث إن $g(x) = x - h(x)f(x)$

و $h(x)$ دالة عشوائية. استخدم نظرية (٢,٨) لاستنتاج طريقة نيوتن-رافسون كطريقة تربيعية التقارب.

٤٦- أثبت أن $\alpha = 0$ جذر مكرر للمعادلة $x = \ln(x+1)$. ثم استخدم طريقة نيوتن-رافسون والصيغة التكرارية (2.36) لإيجاد حلاً تقريبياً لهذه المعادلة بدقة 5×10^{-2} ، وذلك بوضع $x_0 = 1$. قارن النتائج العددية ماذا تلاحظ؟.

٤٧- أثبت أن $\alpha = 1$ جذر مكرر للمعادلة $x^3 - 3x + 2 = 0$. ثم استخدم طريقة نيوتن-رافسون والصيغة التكرارية (2.37) لإيجاد حلاً تقريبياً لهذه المعادلة بدقة 5×10^{-2} ، وذلك بوضع $x_0 = 1.5$. قارن النتائج العددية ماذا تلاحظ؟.

٤٨- أثبت النظرية (٢,١٠).

٤٩- ليكن α جذراً مكرراً m مرة ($m > 1$) للمعادلة غير الخطية $f(x) = 0$. أثبت أن طريقة نيوتن-رافسون تكون خطية التقارب في هذه الحالة.

٥٠- ليكن $f(x) = (x - \alpha)^m q(x)$ حيث إن $\lim_{x \rightarrow \alpha} q(x) \neq 0$ و α جذر مكرر m مرة للمعادلة غير الخطية $f(x) = 0$. أثبت صحة المعادلة (2.44).

٥١- ليكن للدالة $f(x)$ جذر مكرر عند α . أثبت أن للدالة $h(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ جذر بسيط عند α . ومن ثم أثبت أن معدل تقارب الصيغة التكرارية (2.46) يكون تربيعياً.

٥٢- المتتالية $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ والمعروفة بـ $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ ، $n \geq 0$ تتقارب خطياً إلى العدد $\alpha = 2$. استخدم طريقة إيتكن Δ^2 لإيجاد عناصر المتتالية $\{x_n\}$. أوقف العمليات الحسابية إذا تحقق الشرط $\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} \leq 10^{-3}$. قارن سرعة تقارب التي تحصل عليها مع تلك التي حصلنا عليها في مثال (٢,٢٦). هل هي أسرع؟ ولماذا؟.

تلميح: احسب الثابت s .

٥٣- استخدم طريقة هورنر لحساب $p(-1)$ و $p'(-1)$ حيث إن:

$$p(x) = 3x^3 + 6x^2 - 3x - 6$$

٥٤- استخدم طريقة هورنر لحساب $p(3)$ ، $p'(3)$ و $p''(3)$ إذا كانت:

$$p(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x + 12$$

٥٥- استخدم طريقة نيوتن-رافسون لحساب قيمة تقريبية بدقة 5×10^{-2}

لجذر كثيرة الحدود $p(x) = x^3 - 4x + 2$ الذي يقع بجوار العدد 1.5 وذلك

باستخدام طريقة هورنر لحساب $p(x_n)$ و $p'(x_n)$ عند كل تكرار $n \geq 0$.

٥٦- اعتبر كثيرتي الحدود.

$$p(x) = 3x^3 + 4x^2 - 6x - 6 \quad (أ)$$

$$p(x) = x^4 - 5x^2 + 4 \quad (ب)$$

احسب التكرارين الأولين لطريقة برستو وذلك بوضع $r_0 = s_0 = 1$.

تمارين للحاسب

ح ١ - استخدم الخوارزمية (٢, ١) لكتابة برنامج للحاسب الآلي باللغة التي تريد، ثم استخدم هذا البرنامج لحل المعادلة $x - 5^{-x} = 0$ في الفترة $[0, 1]$. احسب حلاً تقريبياً بدقة 5×10^{-5} .

ح ٢ - استخدم الخوارزمية (٢, ٢) لكتابة برنامج للحاسب الآلي باللغة التي تريد، ثم استخدم هذا البرنامج لحل المعادلة $x - 5^{-x} = 0$ في الفترة $[0, 1]$. احسب حلاً تقريبياً بدقة 5×10^{-5} .

ح ٣ - استخدم طريقة التنصيف لحل المسألة الواردة في التمرين ١٠ وذلك باستخدام الشرطين $|f(x_n)| < 5 \times 10^{-5}$ و $|x_n - x_{n-1}| < 5 \times 10^{-5}$ لوقف

الحسابات. أطبع كل من x_n ، $f(x_n)$ و $|x_n - x_{n-1}|$. قارن عدد التكرارات اللازمة لكل حالة، ماذا تلاحظ؟.

ح ٤ - أعد التمرين ٣ بالنسبة للمسألة الموجودة في التمرين ١٢.

ح ٥ - استخدم الخوارزمية (٢,٣) لكتابة برنامج للحاسب الآلي باللغة التي تريد، ثم استخدم هذا البرنامج لحل المعادلة $x^3 - 4x^2 + 6 = 0$ وذلك باستخدام الصيغة التكرارية $x_{n+1} = 4 - 6/x_n^2$ ، حيث $n \geq 0$ ، $x_0 = 3$. احسب حلاً تقريبياً بدقة 5×10^{-5} .

ح ٦ - للمعادلة $x^3 + 4x^2 - 8 = 0$ حل وحيد في الفترة $[1,2]$. أكتب ثلاث صيغ تكرارية لإيجاد هذا الحل، ثم استخدم طريقة تكرار النقطة الثابتة لحساب قيمة تقريبية للحل بدقة 5×10^{-5} . قارن النتائج التي تحصل عليها ثم اكتب ملاحظاتك.

ح ٧ - استخدم طريقة نيوتن-رافسون لحساب حلاً تقريبياً بدقة $\varepsilon = 5 \times 10^{-6}$ للمعادلة غير الخطية $e^x - 3 = 0$ وذلك ابتداء من $x_0 = 3$. قارن القيمة الفعلية بالتقريبية حتى تسعة أرقام عشرية، أي احسب $|x_n - \alpha|$ لكل $n \geq 1$.

ح ٨ - أعد التمرين السابق باستخدام طريقة القاطع وذلك بوضع $x_0 = 3$ ، $x_1 = 2$.

قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي حصلت عليها في التمرين السابق. ماذا تلاحظ؟.

ح ٩ - استخدم طريقة هالي (انظر التمرين ٤٣) لحساب حلاً تقريبياً بدقة $\varepsilon = 5 \times 10^{-6}$ للمعادلة $e^x - 3 = 0$ وذلك ابتداء من $x_0 = 3$. احسب الخطأ $|x_n - \alpha|$ لكل $n \geq 1$.

قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها بحل التمرين ح٧. ماذا يمكن أن تستنتج من هذه المقارنة.

ح١٠ - استخدم طريقة نيوتن - رافسون مقرونة بطريقة هورنر لحساب $p(x_n)$ و $p'(x_n)$ من أجل $n \geq 0$ لحل كثيرة الحدود $p(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x + 12$ وذلك بوضع $x_0 = 2.5$. احسب حلاً تقريبياً بدقة $\varepsilon = 5 \times 10^{-6}$.

ح١١ - استخدم طريقة برستو لحساب جذور كثيرة الحدود:

$$p(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x - 6$$

وذلك بوضع $r_0 = s_0 = 1$. أوقف الحسابات عندما تحصل على الدقة $|r_{j+1} - r_j| \leq \varepsilon$ و $|r_{j+1} - r_j| \leq \varepsilon$ من أجل $j \geq 0$ حيث إن $\varepsilon = 5 \times 10^{-5}$.