

مسائل القيم الحدية في

المعادلات التفاضلية العادية

Boundary Value Problems in ODE

لقد درسنا في الفصل السادس بعض الطرائق العددية لحل مسألة القيمة الابتدائية في المعادلات التفاضلية العادية. في هذا الفصل سوف ندرس بعض الطرائق العددية لحساب حلولاً تقريبية لمسائل القيم الحدية في المعادلات التفاضلية العادية والتي تتضمن شروطاً يجب أن تحققها دالة الحل عند طرفي الفترة التي تكون المسألة معرفة عليها.

تنشأ مسألة القيم الحدية في المعادلات التفاضلية العادية في العديد من التطبيقات العلمية والهندسية. فعلى سبيل المثال المشكلة المشهورة في الهندسة المدنية والتي تتعلق بدراسة إمالة شعاع المقطع العرضي لمستطيل خاضع لتحميل موحد تتطلب حل مسألة القيم الحدية:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{S}{EI} y + \frac{qx}{2EI} (x - l)$$

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0$$

حيث إن $y = y(x)$ الإمالة عند مسافة x من النهاية اليسرى للشعاع و S ، E ، I ، q و l تمثل، على التوالي، الإجهاد عند طرفي الشعاع، معامل المطاطية، عزم القصور الذاتي المركزي، كثافة الحمل الموحد و طول الشعاع. شرطاً الحد الموجودان في هذه

المسألة يحققان الفرضية أنه لا إمالة تحدث عند نهايات الشعاع. نذكر أنه إذا كان الشعاع من السمك الموحد، أي عندما يكون EI ثابت، فإنه يمكن الحصول على الحل المضبوط لهذه المسألة. ولكن في العديد من التطبيقات يكون السمك غير موحد، لذا فإن عزم القصور الذاتي I يكون دالة بالمتغير x ، و حل هذه المسألة يتطلب استخدام طرائق عددية (تقريبية).

(٨، ١) مفاهيم أساسية

Basic Principle

يمكن كتابة مسألة القيم الحدية ذات الدرجة الثانية في المعادلات التفاضلية العادية بالشكل:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b \quad (8.1a)$$

$$\gamma_1 y(a) + \gamma_2 y'(a) = \alpha \quad (8.1b)$$

$$\gamma_3 y(b) + \gamma_4 y'(b) = \beta$$

حيث إن الدالة $y(x)$ تمثل الحل المضبوط لهذه المسألة، a ، b ، α ، β و γ_i من أجل $i = 1, 2, 3, 4$ ثوابت حقيقية. المعادلتان الموجودتان في (8.1b) تتضمنان الشروط الحدية المرافقة لهذه المسألة. إذا كانت الدالة $f(x, y, y')$ دالة خطية بالنسبة لـ y و y' فإن المعادلة التفاضلية (8.1a) عادة تكتب بالشكل:

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x) \quad (8.2)$$

حيث إن $p(x)$ ، $q(x)$ و $r(x)$ دوال متصلة على الفترة $[a, b]$.

مثال (٨، ١)

المعادلات التفاضلية:

$$y'' = 4y + 4 \cosh 1$$

$$y'' = -y' + 2y$$

و

$$y'' = y + 2e^{x-1}$$

خطية. أما المعادلتين التفاضليتين:

$$y'' = \frac{1}{2}(x+y+1)^3$$

و

$$y'' = y^3 - yy'$$

فإنهما غير خطيتين.

النظرية التالية تتضمن الشروط الكافية لضمان وجود حل وحيد للمسألة (8.1).

نظرية (٨، ١)

لتكن $f(x, y, y')$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial y'}$ دوال متصلة على المجموعة:

$$D = \{(x, y, y') \mid a \leq x \leq b, y^2 + (y')^2 < \infty\}$$

وأن $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$ و $|\frac{\partial f}{\partial y'}| \leq M$ على المجموعة D حيث إن M ثابت موجب. إضافة،

إذا كان $\gamma_1 \gamma_2 \leq 0$ ، $\gamma_3 \gamma_4 \geq 0$ و $|\gamma_1| + |\gamma_3| \neq 0$ فإنه يوجد حل وحيد لمسألة القيم الحدية (8.1).

مثال (٨، ٢)

لنعتبر مسألة القيم الحدية:

$$y'' = 4y + 4 \cosh 1$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

هنا يكون لدينا $f(x, y, y') = y + x$ وبالتالي نحصل على $\frac{\partial f}{\partial y} = 4 > 0$ لكل

(x, y, y') وكذلك $|\frac{\partial f}{\partial y'}| = 0 \leq M$ لأي عدد ثابت موجب M . أيضاً، وبما أن

$\gamma_2 = \gamma_4 = 0$ فإنه يكون لدينا $\gamma_1 \gamma_2 = 0$ ، $\gamma_3 \gamma_4 = 0$ و $|\gamma_1| + |\gamma_3| = 2 \neq 0$ إذن

حسب النظرية (٨, ١) يوجد حل وحيد للمسألة. في الواقع الحل الوحيد الذي يحقق هذه المسألة هو $y(x) = \cosh(2x-1) - \cosh 1$. مثال (٨, ٣)

لنعتبر مسألة القيم الحدية:

$$y'' = -y$$

$$y'(0) = 0, \quad y'(\frac{\pi}{2}) = -1$$

بما أن $f(x, y, y') = -y$ فإن $\frac{\partial f}{\partial y} = -1 < 0$ وكذلك نلاحظ أن $|y_1| + |y_3| = 0$ وبالتالي لا يمكن استخدام النظرية (٨, ١) للتحقق من وجود حل وحيد لهذه المسألة. نشير هنا إلى أن للمسألة حل وحيد وهو $y(x) = \cos x$ من المثال (٨, ٣) يتضح أن شروط النظرية (٨, ١) هي شروط كافية وليست ضرورية.

نذكر هنا أن الطرائق العددية التي سندرسها في هذا الفصل، باستثناء طريقة الفروق المنتهية، تتناول الحلول العددية لمسألة القيم الحدية:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b \quad (8.3a)$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (8.3b)$$

وهي حالة خاصة من المسألة (8.1). يمكن للقارئ المهتم بالحلول العددية للمسألة (8.1) الرجوع إلى كتاب Keller.

من الواضح أن الشروط الحدية (8.3b) تحقق شروط النظرية (٨, ١) حيث إن $y_1 y_2 = 0$, $y_3 y_4 = 0$ و $|y_1| + |y_3| = 2 \neq 0$. وبالتالي فإن النظرية تنطبق أيضاً على مسألة القيم الحدية (8.3).

نشير هنا إلى أنه إذا كانت الدالة $f(x, y, y')$ الموجودة في المسألة (8.3) خطية فإنه يكون لدينا النتيجة التالية:

نظرية (٨,٢)

ليكن لدينا مسألة القيم الحدية:

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b \quad (8.4a)$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (8.4b)$$

وأن الدوال $p(x)$ ، $q(x)$ و $r(x)$ متصلة على الفترة $[a, b]$. إضافة ليكن $q(x) > 0$ لكل $x \in [a, b]$ ، فإنه يوجد حل وحيد لهذه المسألة.

هناك نظرية أعم من النظرية (٨,٢) فيما يخص حل مسألة القيم الحدية الخطية (8.4) ونطرحها في النظرية (٨,٣).

نظرية (٨,٣)

لتكن $p(x)$ ، $q(x)$ و $r(x)$ متصلة على الفترة $[a, b]$. فإنه لأي α و β البديلين التاليين متحققان: إما أن يكون لمسألة القيم الحدية (8.4) حلاً وحيداً أو لمسألة القيم الحدية المتجانسة المرافقة:

$$y'' - p(x)y' - q(x)y = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (8.5a)$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (8.5b)$$

حلاً تافهاً. المقصود بالحل التافه هو الحل المساوي للصفر، $y(x) = 0$ ، لجميع قيم x في الفترة $[a, b]$.

النظرية (٨,٣) تقول أنه يكون للمسألة (8.4) حلاً وحيداً إذا كان فقط إذا كان للمسألة (8.5) الحل التافه فقط.

طريقة الفروق المنتهية (٨,٢)

Finite Difference Method

سندرس طريقة الفروق المنتهية وهي من أشهر الطرائق العددية استخداماً لحل مسائل القيم الحدية الخطية وغير الخطية. في هذا البند نناقش حلول المسألة الخطية ونترك دراسة حلول المسألة غير الخطية إلى بند لاحق.

بداية لنعتبر مسألة القيم الحدية الخطية:

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b \quad (8.6a)$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (8.6b)$$

حيث إن $p(x)$ ، $q(x)$ و $r(x)$ دوال متصلة على الفترة $[a, b]$ ، α و β ثابتين حقيقيين. لنقطع الفترة $[a, b]$ إلى فترات صغيرة $[x_{i-1}, x_i]$ ، $i = 1, 2, \dots, N+1$

حيث إن:

$$x_i = a + ih \quad (8.7)$$

من أجل $i = 0, 1, 2, \dots, N+1$ ، $h = \frac{b-a}{N+1}$ ، $a = x_0$ و $b = x_{N+1}$. يمكن كتابة

المعادلة التفاضلية (8.6a) عند العقد الداخلية x_i ، $i = 1, 2, \dots, N$ بالشكل:

$$y''(x_i) = p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i) \quad (8.8)$$

وباستبدال التفاضليين الموجودين في المعادلة (8.8) بالصيغتين المركبتين:

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2} [y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))] - \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i) \quad (8.9)$$

حيث إن $x_{i-1} < \xi_i < x_{i+1}$ و:

$$y'(x_i) = \frac{1}{2h} [y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))] - \frac{h^2}{6} y^{(3)}(\eta_i) \quad (8.10)$$

حيث إن $x_{i-1} < \eta_i < x_{i+1}$ يكون لدينا:

$$(8.11)$$

$$\frac{1}{h^2} [y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}] - \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i) = p_i \left\{ \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} y'''(\eta_i) \right\} + q_i y_i + r_i$$

من أجل $i = 1, 2, \dots, N$. لاحظ أننا استخدمنا الرموز $y_j = y(x_j)$ ، من أجل

$$r_i = r(x_i) \text{ و } q_i = q(x_i), \quad p_i = p(x_i), \quad j = i-1, i, i+1$$

الآن لنفترض أن قيمة h صغيرة بحيث يمكننا إهمال الحدود التي تحتوي على h^2 ،

وبوضع $w_j \approx y_j$ ، من أجل $j = i-1, i, i+1$ نحصل على الصيغة العددية:

$$\frac{1}{h^2} [w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}] = \frac{1}{2h} p_i [w_{i+1} - w_{i-1}] + q_i w_i + r_i$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$(1 + \frac{h}{2} p_i) w_{i-1} - (2 + h^2 q_i) w_i + (1 - \frac{h}{2} p_i) w_{i+1} = h^2 r_i \quad (8.12)$$

من أجل $i = 1, 2, \dots, N$. علماً بأن الشروط الحدية تصبح بالشكل:

$$w_{N+1} = y_{N+1} = \beta \quad \text{و} \quad w_0 = y_0 = \alpha$$

تسمى الصيغة العددية (8.12) بصيغة الفروق المنتهية المركزية لحل مسألة القيم الحدية (8.6). المعادلة (8.12) تمثل نظاماً من المعادلات الخطية عددها N بالنسبة للمجهول w_i ، $i = 1, 2, \dots, N$. نذكر هنا أنه عندما $i = 1$ فإن المعادلة (8.12) تأخذ الشكل:

$$(1 + \frac{h}{2} p_1) w_0 - (2 + h^2 q_1) w_1 + (1 - \frac{h}{2} p_1) w_2 = h^2 r_1$$

وباستخدام الحقيقة أن $w_0 = \alpha$ يكون لدينا:

$$-(2 + h^2 q_1) w_1 + (1 - \frac{h}{2} p_1) w_2 = h^2 r_1 - (1 + \frac{h}{2} p_1) \alpha \quad (8.13)$$

وبالمثل، عندما $i = N$ فإن المعادلة (8.12) تأخذ الشكل:

$$(1 + \frac{h}{2} p_N) w_{N-1} - (2 + h^2 q_N) w_N = h^2 r_N - (1 - \frac{h}{2} p_N) \beta \quad (8.14)$$

لاحظ أننا استخدمنا الحقيقة أن $w_{N+1} = \beta$.

يمكن كتابة صبغة الفروق المنتهية المعروفة بالمعادلات (8.12) - (8.14) بالشكل المصفوفي

$$Aw = r \quad (8.15)$$

حيث إن A المصفوفة ثلاثية الأقطار:

$$A = \begin{bmatrix} -2 - h^2 q_1 & 1 - \frac{h}{2} p_1 & & & \\ 1 + \frac{h}{2} p_2 & -2 - h^2 q_2 & 1 - \frac{h}{2} p_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 + \frac{h}{2} p_{N-1} & -2 - h^2 q_{N-1} & 1 - \frac{h}{2} p_{N-1} \\ & & & 1 + \frac{h}{2} p_N & -2 - h^2 q_N \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} h^2 r_1 - (1 + \frac{h}{2} p_1) \alpha \\ h^2 r_2 \\ \vdots \\ h^2 r_{N-1} \\ h^2 r_N - (1 - \frac{h}{2} p_N) \beta \end{bmatrix}$$

و $w = [w_1, w_2, \dots, w_N]^T$ الحل المطلوب إيجاده.

للحصول على القيم التقريبية w_i ، $i = 1, 2, \dots, N$ حل المسألة (8.6) عند العقد الداخلية x_i ، $i = 1, 2, \dots, N$ ، نحل النظام الخطي (8.15) باستخدام الطرائق المباشرة أو التكرارية التي درسناها في الفصل الثالث. نشير هنا إلى أننا سوف نستخدم طريقة الحذف الجاوسي مع التعويض الخلفي لحل الأنظمة الخطية التي تنشأ في الأمثلة التي نناقشها في هذا الفصل ويمكن للقارئ استخدام أي من الطرائق الموجودة في الفصل الثالث.

يستعرض المثال (٤، ٨) كيفية استخدام صيغة الفروق المنتهية المركزية (8.12)

لحل مسألة القيم الحدية من شكل المعادلة (8.6).

مثال (٨، ٤)

لنعتبر مسألة القيم الحدية:

$$y'' = 2y' + 3y \quad (8.16a)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 2e \quad (8.16b)$$

نريد استخدام طريقة الفروق المنتهية المركزية (8.12) لحل هذه المسألة وذلك بوضع

 $h = \frac{1}{4}$ ، ثم مقارنة القيم التقريبية للحل عند x_i ، $i = 1, 2, 3$ مع تلك للحل المضبوط

 $y(x) = 2 \frac{\sinh 2x}{\sinh 2} e^x$. بداية، بما أن $p(x) = 2$ ، $q(x) = 3$ و $r(x) = 0$ فإن

المعادلة (8.12) تصبح بالشكل:

$$(1+h)w_{i-1} - (2+3h^2)w_i + (1-h)w_{i+1} = 0$$

وبوضع $h = \frac{1}{4}$ نحصل على:

$$\frac{5}{4}w_{i-1} - \frac{35}{16}w_i + \frac{3}{4}w_{i+1} = 0 \quad (8.17)$$

من أجل $i = 1, 2, 3$. وباستخدام القيم الحدية $w_0 = 0$ و $w_4 = 2e$ يمكن كتابة

المعادلة (8.17) بالشكل المصفوفي:

$$\begin{bmatrix} -2.18750 & 0.75000 & 0.00000 \\ 1.25000 & -2.18750 & 0.75000 \\ 0.00000 & 1.25000 & -2.18750 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 0.00000 \\ -4.07742 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة الحذف الجاوسي نحصل على:

$$\begin{bmatrix} -2.18750 & 0.75000 & 0.00000 \\ 0.00000 & -1.75893 & 0.75000 \\ 0.00000 & 0.00000 & -1.65451 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 0.00000 \\ -4.07742 \end{bmatrix}$$

وباستخدام التعويض الخلفي حصلنا على $w_2 = 1.05083$ ، $w_1 = 0.36028$ و $w_3 = 2.46443$ وهي القيم التقريبية للحل $y(x)$ عند $x_1 = 0.25$ ، $x_2 = 0.5$

و $x_3 = 0.75$ ، على الترتيب. وبمقارنة هذه القيم مع القيم المضبوطة
 $y(x_1) = 0.36898$ ، $y(x_2) = 1.06846$ و $y(x_3) = 2.48372$ نحصل على
 الأخطاء المضبوطة $|y(x_1) - w_1| = 0.00869$ ، $|y(x_2) - w_2| = 0.01764$
 و $|y(x_3) - w_3| = 0.02129$.

نشير هنا إلى أنه يمكن الحصول على حلول عددية أفضل وذلك باختيار قيم
 أصغر لـ h ، فمثلا عندما وضعنا $h = \frac{1}{10}$ حصلنا على نظام خطي يتكون من تسع
 معادلات وتسعة مجاهيل w_i ، $i = 1, 2, \dots, 9$ وبحله حصلنا على النتائج العددية
 الموجودة في الجدول رقم (٨، ١).

الجدول رقم (٨، ١). النتائج العددية للمثال (٨، ٤).

i	x_i	$y(x_i)$	w_i	$ y(x_i) - w_i $
0	0.0	0.00000	0.00000	0.00000
1	0.1	0.12218	0.12270	0.00052
2	0.2	0.27559	0.27665	0.00107
3	0.3	0.47227	0.47390	0.00164
4	0.4	0.72840	0.73060	0.00220
5	0.5	1.06573	1.06846	0.00220
6	0.6	1.51355	1.51669	0.00273
7	0.7	2.11133	2.11466	0.00315
8	0.8	2.91233	2.91543	0.00310
9	0.9	3.98841	3.99055	0.00214
10	1.0	5.43656	5.43656	0.00000

الخوارزمية (٨, ١) تتضمن كيفية استخدام طريقة الفروق المنتهية لحل مسألة القيم الحدية (8.6). نود الإشارة هنا إلى أنه إذا كان الحل المضبوط معلوم ويُراد مقارنة القيم التقريبية مع تلك المضبوطة عند العقد الداخلية x_i من أجل $i = 1, 2, \dots, N$ فإنه يمكن إضافة الخطوات اللازمة لعمل ذلك بعد الخطوة الثانية عشر. كما أنه يمكن إضافة الخطوات التي تتكفل بحساب القيمة العظمى (معيّار القيمة العظمى) للخطأ. نشير إلى أن ذلك ينطبق على جميع الطرائق العددية التي ندرسها في هذا الفصل.

خوارزمية (٨, ١): طريقة الفروق المنتهية

تستخدم هذه الخوارزمية طريقة الفروق المنتهية (8.12) لحل مسألة القيم الحدية (8.6). بداية يتم تعريف المصفوفة $A(i, j)$ المرافقة للطريقة وكذلك الطرف الأيمن $r(i)$ ، ثم تستخدم الحذف الجاوسي لحل النظام الخطي الناتج من تطبيق الطريقة. إذا كان الحل المضبوط متوفر فإنه يمكن إضافة الخطوات المتعلقة بحساب الأخطاء المضبوطة.

الخطوة ١: أدخل قيم a, b, N .

الخطوة ٢: ضع $h = \frac{b-a}{N+1}$.

الخطوة ٣: من أجل $i = 1, 2, \dots, N$ اعمل الخطوتين ٤ و ٥.

الخطوة ٤: $x(i) = a + ih$.

الخطوة ٥: $A(i, i) = -2 - h^2 q(x(i))$.

الخطوة ٦: من أجل $i = 1, 2, \dots, N-1$ اعمل الخطوتين ٧ و ٨.

الخطوة ٧: $A(i, i+1) = 1 - \frac{h}{2} p(x(i))$.

الخطوة ٨: $A(i+1, i) = 1 + \frac{h}{2} p(x(i+1))$.

الخطوة ٩: من أجل $i = 2, \dots, N-1$ ضع $r(i) = h^2 r(x(i))$.

$$R(1) = h^2 r(x(1)) - (1 + \frac{h}{2} P(x(1))) \alpha$$

$$R(N) = h^2 r(x(N)) - (1 - \frac{h}{2} P(x(N))) \beta$$

الخطوة ١٠: ضع

الخطوة ١١: حل النظام الخطي $\mathbf{Aw} = \mathbf{R}$ باستخدام الخوارزمية (١, ٣).

الخطوة ١٢: من أجل $i = 1, 2, \dots, N$ أطيح $w(i)$, $x(i)$.

يتضح من العلاقتين (8.9) و (8.10) أن صيغة الفروق المركزية المنتهية (8.12)

ذات رتبة تقاربية ثانية وأن الخطأ المحلي المقطوع هو:

$$\frac{1}{6} h^4 \left[\frac{1}{2} y^{(4)}(\xi_i) - p_i y'''(\eta_i) \right] \quad (8.18)$$

لنناقش الآن صيغة الفروق المركزية المنتهية ذات الرتبة التقاربية الرابعة لحل مسألة

القيم الحدية الخطية (8.6). لعمل ذلك نكتب المعادلة التفاضلية (8.6a) بالشكل:

$$u'' = f(x)u + g(x), \quad a \leq x \leq b \quad (8.19)$$

حيث إن $f(x)$ و $g(x)$ دالتين متصلتين على الفترة $[a, b]$ ، وذلك باستخدام دالة

التحويل:

$$y(x) = u(x) e^{\frac{1}{2} \int p(x) dx} \quad (8.20)$$

لاحظ هنا أن الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ معرفتان بالتالي:

$$f(x) = q(x) + \frac{1}{4} p^2(x) - \frac{1}{2} p'(x) \quad (8.21)$$

و

$$g(x) = r(x) e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx} \quad (8.22)$$

(انظر التمارين). نشير هنا إلى أنه إذا كان لدينا الحل $u(x)$ للمعادلة التفاضلية (8.19) فإنه يمكن الحصول على حل المعادلة التفاضلية (8.6a) من العلاقة (8.20).
يمكن كتابة صيغة الفروق المنتهية المركزية ذات الرتبة التقاربية الرابعة لحل مسألة القيم الحدية (8.19) بالشكل:

$$u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} = \frac{h^2}{12} [u_{i-1}'' + 10u_i'' + u_{i+1}''] + t_i \quad (8.23)$$

من أجل $i = 1, 2, \dots, N$ ، حيث إن t_i هو الخطأ المحلي المقطوع والمعرف بالتالي:

$$t_i = -\frac{1}{240} h^6 u^{(6)}(\eta_i) + O(h^8) \quad (8.24)$$

حيث إن $x_{i-1} < \eta_i < x_{i+1}$ من أجل $i = 1, 2, \dots, N$ ، والذي يمكن الحصول عليه باستخدام متسلسلة تايلور ونترك ذلك للمناقشة في التمارين. لاحظ هنا أننا استخدمنا الرموز $u_j = u(x_j)$ و $u_j'' = u''(x_j)$ من أجل $j = i-1, i, i+1$. الآن باستخدام الحقيقة أن $u_j'' = f_j u_j + g_j$ ، حيث إن $f_j = f(x_j)$ و $g_j = g(x_j)$ من أجل $j = i-1, i, i+1$ يمكن كتابة المعادلة (8.23) بالشكل التالي:

$$u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} = \frac{h^2}{12} [f_{i-1} u_{i-1} + g_{i-1} + 10(f_i u_i + g_i) + f_{i+1} u_{i+1} + g_{i+1}] + t_i$$

وبوضع $v_j \approx u_j$ وإهمال حد الخطأ تصبح المعادلة (8.25) بالشكل:

$$v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1} = \frac{h^2}{12} [f_{i-1} v_{i-1} + g_{i-1} + 10(f_i v_i + g_i) + f_{i+1} v_{i+1} + g_{i+1}]$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل:

$$(1 - \frac{1}{12} h^2) v_{i-1} - (2 + \frac{5}{6} h^2 f_i) v_i + (1 - \frac{1}{12} h^2 f_{i+1}) v_{i+1} = \frac{h^2}{12} [g_{i-1} + 10g_i + g_{i+1}] \quad (8.26)$$

من أجل $i = 1, 2, \dots, N$. تمثل المعادلة (8.26) نظاماً خطياً يتكون من معادلات خطية عددها N بالنسبة للمجهول v_i ، $i = 1, 2, \dots, N$ والتي عددها N . من الواضح أنه لحل هذا النظام الخطي نستخدم قيماً حدية عند طرفي الفترة $[a, b]$ والتي نحصل عليها من القيم الحدية (8.6b) والعلاقة (8.20). نشير هنا إلى أنه إذا تم حساب قيم v_i ، $i = 1, 2, \dots, N$ فإنه يمكن استخدام العلاقة (8.20) للحصول على القيم التقريبية w_i ، $i = 1, 2, \dots, N$ للحل $y(x)$ لمسألة القيم الحدية (8.6). يوضح المثال (٨، ٥) كيفية استخدام الصيغة العددية (8.26) لحل مسألة القيم الحدية (8.6).

مثال (٨، ٥)

نعتبر مسألة القيم الحدية الموجودة في المثال (٨، ٤). باستخدام العلاقتين (8.21) و (8.22) فإنه يكون لدينا $f(x) = 4$ و $g(x) = 0$. وبالتالي فإن المعادلة التفاضلية (8.16a) تصبح بالشكل:

$$u'' = 4u \quad (8.27a)$$

وباستخدام العلاقة (8.20) يكون لدينا $u(x) = y(x)e^{-\frac{1}{2}\int 2x dx} = y(x)e^{-x}$ ومن القيم الحدية (8.16b) نحصل على القيم الحدية:

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 2 \quad (8.27b)$$

الآن بتطبيق الصيغة العددية (8.26) لحل مسألة القيم الحدية المعرفة بـ (8.27) يكون لدينا:

$$(1 - \frac{1}{3}h^2)v_{i-1} - (2 + \frac{10}{3}h^2)v_i + (1 - \frac{1}{3}h^2)v_{i+1} = 0$$

من أجل $i = 1, 2, \dots, N$. وبوضع $N = 3$ واستخدام القيم الحدية (8.27b) نحصل على النظام الخطي:

$$\begin{bmatrix} -2.20833 & 0.99917 & 0.00000 \\ 0.99917 & -2.20833 & 0.99917 \\ 0.00000 & 0.99917 & -2.20833 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 0.00000 \\ -1.95833 \end{bmatrix}$$

وباستخدام الحذف الجاوسي حصلنا على:

$$\begin{bmatrix} -2.20833 & 0.99917 & 0.00000 \\ 0.00000 & -1.77417 & 0.99917 \\ 0.00000 & 0.00000 & -1.66793 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 0.00000 \\ -1.95833 \end{bmatrix}$$

و منه نحصل على $v_1 = 0.28732$ ، $v_2 = 0.64799$ و $v_3 = 1.17411$ وهي القيم التقريبية للحل $u(x)$ عند $x_1 = 0.25$ ، $x_2 = 0.5$ و $x_3 = 0.75$ ، على الترتيب. وبما أن الحل المضبوط لمسألة القيم الحدية (8.27) هو $u(x) = 2 \frac{\sinh 2x}{\sinh 2}$ ، فإنه يكون لدينا $u(x_1) = 0.28733$ ، $u(x_2) = 0.64805$ و $u(x_3) = 1.17417$ وبمقارنة القيم التقريبية مع المضبوطة حصلنا على الأخطاء المضبوطة $|u(x_1) - v_1| = 3.68 \times 10^{-5}$ ، $|u(x_2) - v_2| = 6.36 \times 10^{-5}$ و $|u(x_3) - v_3| = 6.32 \times 10^{-5}$. من ناحية أخرى، يمكن الحصول على القيم التقريبية w_i ، $i = 1, 2, 3$ لحل المسألة (8.17) وذلك باستخدام العلاقة (8.20) حيث يكون لدينا $w_i = v_i e^{x_i}$ من أجل $i = 1, 2, 3$. إذن نحصل على $w_1 = 0.36892$ ، $w_2 = 1.06836$ و $w_3 = 2.48589$ وبالتالي تكون الأخطاء المضبوطة $|y(x_1) - w_1| = 0.00005$ ، $|y(x_2) - w_2| = 0.00011$ و $|y(x_3) - w_3| = 0.00013$ وهي أصغر بكثير من تلك التي حصلنا عليها في المثال (٨، ٤) باستخدام صيغة الفروق المركزية ذات الرتبة التقاربية الثانية. أيضاً استخدمنا الصيغة رباعية التقارب (8.26) عندما $N = 9$ وحصلنا على النتائج العددية المدرجة في الجدول رقم (٨، ٢) وبمقارنتها مع تلك الموجودة في الجدول رقم (٨، ١) للمثال (٨، ٤) نلاحظ أنها أفضل.

الجدول رقم (٨,٢). النتائج العددية للمثال (٨,٥).

i	x_i	$u(x_i)$	v_i	$ u(x_i) - v_i $	$ y(x_i) - w_i $
0	0.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	0.1	0.11102	0.11102	3.89×10^{-7}	4.30×10^{-7}
2	0.2	0.22651	0.22651	7.65×10^{-7}	9.34×10^{-7}
3	0.3	0.35108	0.35108	1.11×10^{-6}	1.50×10^{-6}
4	0.4	0.48974	0.48974	1.41×10^{-6}	1.50×10^{-6}
5	0.5	0.64805	0.64805	1.63×10^{-6}	2.68×10^{-6}
6	0.6	0.83238	0.83238	1.74×10^{-6}	3.17×10^{-6}
7	0.7	1.05011	1.05011	1.70×10^{-6}	3.43×10^{-6}
8	0.8	1.30999	1.30999	1.45×10^{-6}	3.23×10^{-6}
9	0.9	1.62244	1.62244	9.09×10^{-7}	2.24×10^{-6}
10	1.0	2.00000	2.00000	0.00000	0.00000

نذكر هنا أن الصيغة العددية (8.26) معروفة باسم صيغة نيومروف (Numerov) وهي صيغة الفروق المنتهية المركزية ذات الثلاث نقاط الوحيدة التي تكون رتبته التقاربية رابعة. وذلك لأن جميع الصيغ الأخرى من الشكل (8.26) تكون رتبة تقاربها ثانية وسوف نتطرق لدراسة إحداها في بند لاحق ونناقش أخرى في التمارين.

(٨,٣) طريقة الفروق المنتهية لمسألة القيم الحدية المختلطة

Finite difference Method for Mixed B.V.P

هنا سوف ندرس طريقة الفروق المنتهية المركزية ذات الرتبة الثانية لحل مسألة القيم الحدية:

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b \quad (8.28a)$$

$$\gamma_1 y(a) + \gamma_2 y'(a) = \alpha \quad (8.28b)$$

$$\gamma_3 y(b) + \gamma_4 y'(b) = \beta$$

حيث إن $p(x)$ ، $q(x)$ و $r(x)$ دوال متصلة على الفترة $[a, b]$. هنا α ، β و γ_i ، $i = 1, 2, 3, 4$ ثوابت حقيقية.

كما هو الحال بالنسبة لمسألة القيم الحدية (8.6) فإنه باستبدال التفاضلين الموجودين في المعادلة التفاضلية (8.28a) بالصيغتين المركبتين (8.9) و (8.10) ووضع $j = i-1, i, i+1$ ، وإهمال حدي الخطأ نحصل على معادلة الفروق:

$$(1 + \frac{h}{2} p_i) w_{i-1} - (2 + h^2 q_i) w_i + (1 - \frac{h}{2} p_i) w_{i+1} = h^2 r_i \quad (8.29)$$

من أجل $i = 1, 2, \dots, N$ ، وهي تقريب للمعادلة التفاضلية (8.28a). المعادلة (8.29) تمثل نظاماً خطياً يتكون من N معادلة بالنسبة للمجاهيل w_i ، $i = 1, 2, \dots, N$ ، ويوضع $i = 1$ يكون لدينا:

$$(1 + \frac{h}{2} p_1) w_0 - (2 + h^2 q_1) w_1 + (1 - \frac{h}{2} p_1) w_2 = h^2 r_1 \quad (8.30)$$

من الملاحظ أنه لا يمكن الحصول مباشرة على قيمة w_0 من الشروط الحدية (8.28b) لذلك سوف نلجأ إلى تقريب التفاضل الأول $y'(a)$ والموجود في الشرط الحدي الأول باستخدام صيغة الفروق الأمامية:

$$y'(a) = \frac{1}{2h} [-3y(a) + 4y(x_1) - y(x_2)] + \frac{1}{3} h^2 y'''(\eta_0) \quad (8.31)$$

حيث إن $x_0 < \eta_0 < x_2$. باستخدام الصيغة (8.31) يمكن كتابة الشرط الحدي الأول بالشكل:

$$\gamma_1 w_0 + \gamma_2 \frac{-3w_0 + 4w_1 - w_2}{2h} = \alpha$$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة لـ w_0 يكون لدينا:

$$w_0 = \frac{2h\alpha - \gamma_2(4w_1 - w_2)}{2h\gamma_1 - 3\gamma_2} \quad (8.32)$$

وبالتعويض عن ذلك في المعادلة (8.30) نحصل على:

$$\begin{aligned}
 & -[(2+h^2q_1) + \frac{4\gamma_2(1+h/2p_1)}{2h\gamma_1-3\gamma_2}]w_1 + [(1-\frac{h}{2}p_1) + \frac{\gamma_2(1+h/2p_1)}{2h\gamma_1-3\gamma_2}]w_2 \\
 & = h^2r_1 - \frac{2h\alpha(1+h/2p_1)}{2h\gamma_1-3\gamma_2}
 \end{aligned} \quad (8.33)$$

الآن عندما $i = N$ فإن المعادلة (8.29) تصبح بالشكل:

$$(1+\frac{h}{2}p_N)w_{N-1} - (2+h^2q_N)w_N = h^2r_N - (1-\frac{h}{2}p_N)\beta \quad (8.34)$$

وبتقريب $y'(b)$ الموجود في الشرط الحدي الثاني باستخدام صيغة الفروق الخلفية:

$$y'(b) = \frac{1}{2h}[3y(b) - 4y(x_N) + y(x_{N-1})] + \frac{1}{3}h^2y'''(\eta_N) \quad (8.35)$$

حيث إن $x_{N-1} < \eta_N < x_{N+1}$ ، فإنه يمكن كتابة الشرط الحدي الثاني بالشكل:

$$\gamma_3 w_{N+1} + \gamma_4 \frac{3w_{N+1} - 4w_N + w_{N-1}}{2h} = \beta$$

ويحل هذه المعادلة بالنسبة لـ w_{N+1} يكون لدينا:

$$w_{N+1} = \frac{2h\beta - \gamma_4(w_{N-1} - 4w_N)}{2h\gamma_3 + 3\gamma_4} \quad (8.36)$$

وبالتعويض عن ذلك في المعادلة (8.34) نحصل على:

$$\begin{aligned}
 & [(1+\frac{h}{2}p_N) - \frac{\gamma_4(1-h/2p_N)}{2h\gamma_3+3\gamma_4}]w_{N-1} - [(2+h^2q_N) + \frac{4\gamma_4(1-h/2p_N)}{2h\gamma_3+3\gamma_4}]w_N \\
 & = h^2r_N - \frac{2h\beta(1-h/2p_N)}{2h\gamma_3+3\gamma_4}
 \end{aligned} \quad (8.37)$$

مما سبق يتضح أنه من أجل حل مسألة القيم الحدية (8.28) باستخدام طريقة

الفروق المنتهية يجب حل النظام الخطي المعرف بالمعادلة (8.29) $i = 2, 3, \dots, N-1$

والمعادلتين (8.33) و (8.37) للحصول على قيم w_i ، $i = 1, 2, \dots, N$ ، وهي القيم

التقريبية للحل $y(x)$ عند العقد الداخلية x_i ، $i = 1, 2, \dots, N$. المثال (٨، ٦) يوضح

كيفية استخدام هذه الطريقة لحل مسألة القيم الحدية المختلطة من الشكل (8.28). نود

الإشارة هنا إلى أن هذه الطريقة ذات رتبة تقاربية ثانية وذلك لأن جميع الصيغ المستخدمة لتقريب التفاضلات، بما في ذلك التفاضلين الموجودين في الشروط الحدية، هي صيغ ذات رتبة تقاربية ثانية.

مثال (٨، ٦)

هنا نستخدم طريقة الفروق المنتهية ذات الرتبة التقاربية الثانية والمعروفة في المعادلات (8.29)، (8.33) و (8.37) لحل مسألة القيم الحدية:

$$y'' = 4y \quad (8.38a)$$

$$y'(0) = \frac{4}{\sinh 2}, \quad y'(1) = 4 \coth 2 \quad (8.38b)$$

بداية بتطبيق هذه الطريقة لحل مسألة القيم الحدية (8.38) نحصل على النظام الخطي:

$$-(2 + 4h^2 - \frac{4}{3})w_1 + \frac{2}{3}w_2 = \frac{8h}{3 \sinh 2}, \quad i = 1$$

$$w_{i-1} - (2 + 4h^2)w_i + w_{i+1} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, N-1 \quad (8.39)$$

$$\frac{2}{3}w_{N-1} - (2 + 4h^2 - \frac{4}{3})w_N = -\frac{8}{3}h \coth 2, \quad i = N$$

وبوضع $h = \frac{1}{4}$ يصبح النظام الخطي (8.39) بالشكل:

$$\begin{bmatrix} -0.91667 & 0.66667 & 0.00000 \\ 1.00000 & -2.25000 & 1.00000 \\ 0.00000 & 0.66667 & -0.91667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.18381 \\ 0.00000 \\ -0.69154 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة الحذف الجاوسي حصلنا على:

$$\begin{bmatrix} -0.91667 & 0.66667 & 0.00000 \\ 0.00000 & -1.52273 & 1.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & -0.47886 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.18381 \\ 0.20052 \\ -0.60375 \end{bmatrix}$$

ويحل هذا النظام نحصل على $w_1 = 0.30589$ ، $w_2 = 0.69631$ و $w_3 = 1.26082$

وهي القيم التقريبية للحل $y(x) = \frac{2 \sinh 2x}{\sinh 2}$ عند $x_1 = 0.25$ ، $x_2 = 0.5$

و $x_3 = 0.75$ ، على الترتيب. وبمقارنة هذه القيم مع القيم المضبوطة
 $y(x_1) = 0.28735$ ، $y(x_2) = 0.64805$ و $y(x_3) = 1.17417$ نحصل على
الأخطاء المضبوطة $|y(x_1) - w_1| = 0.01853$ ، $|y(x_2) - w_2| = 0.04826$
و $|y(x_3) - w_3| = 0.08665$. كما هو الحال بالنسبة لطرائق الفروق المنتهية التي
درسناها في البند السابق يمكن الحصول على حلول عددية بدقة أفضل وذلك باختيار
قيم أصغر لـ h ، فمثلاً عندما $h = \frac{1}{10}$ حصلنا على النتائج العددية الموضحة في الجدول
رقم (٨، ٣) حيث يتضح أن القيمة العظمى للقيمة المطلقة للخطأ هي 0.02195.

الجدول رقم (٨، ٣). النتائج العددية للمثال (٨، ٦).

i	x_i	$y(x_i)$	w_i	$ y(x_i) - w_i $
0	0.0	0.00000	0.00000	0.00000
1	0.1	0.11102	0.11328	0.00225
2	0.2	0.22651	0.23036	0.00385
3	0.3	0.35108	0.35666	0.00558
4	0.4	0.48974	0.49722	0.00749
5	0.5	0.64805	0.65768	0.00962
6	0.6	0.83238	0.84444	0.01206
7	0.7	1.05011	1.06498	0.01487
8	0.8	1.30999	1.32812	0.01813
9	0.9	1.62244	1.64438	0.02195
10	1.0	2.00000	2.00000	0.00000

نود أن نذكر هنا أن خوارزمية هذه الطريقة هي نفس الخوارزمية (٨، ١) باستثناء التغيرات المتعلقة بالمصفوفة A وبالتحديد تلك المتعلقة بالعناصر $A(1,1)$ ، $A(1,2)$ ، $A(N,N)$ و $A(N-1,N)$. وكذلك التغيرات المتعلقة بالطرف الأيمن $b(1)$ و $b(N)$. نترك للقارئ مناقشة ذلك في التمارين. كما نود الإشارة إلى أنه يمكن استخدام صيغة النقطتين لتقريب التفاضل الأول الموجود في الشروط الحدية ولكن طريقة الفروق المنتهية الناتجة لن تكون ذات رتبة تقاربية ثانية على الفترة $[a, b]$ وذلك لأن معدل تقارب صيغة النقطتين خطي $O(h)$ ، (انظر التمارين).

(٨، ٤) طريقة الفروق المنتهية لحل مسألة القيم الحدية غير الخطية

Finite Difference Method for Solving Nonlinear B.V.P

سوف نناقش في هذا البند طريقة الفروق المنتهية المركزية لحساب الحلول

العددية لمسألة القيم الحدية غير الخطية:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b \quad (8.40a)$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (8.40b)$$

حيث إن f دالة غير خطية بالنسبة لـ y و/أو y' . يمكن كتابة المعادلة التفاضلية (8.40a) عند العقد الداخلية x_i ، $i = 1, 2, \dots, N$ بالشكل:

$$y''(x_i) = f(x_i, y(x_i), y'(x_i)) \quad (8.41)$$

من أجل $i = 1, 2, \dots, N$. لاحظ هنا أن العقد x_i كما هي معرفة في المعادلة (8.7). الآن باستخدام الصيغتين المركزيتين (8.9) و (8.10) لتقريب التفاضلين الثاني والأول ووضع $w_j \approx y_j$ ، $j = i-1, i, i+1$ وإهمال حدي الخطأ نحصل على معادلة الفروق المنتهية:

$$w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1} = h^2 f(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}) \quad (8.42)$$

من أجل $i = 1, 2, \dots, N$ ، وهي تقريب للمعادلة التفاضلية (8.41). لاحظ أنه عندما $i = 1$ تصبح المعادلة (8.42) بالشكل:

$$w_0 - 2w_1 + w_2 = h^2 f(x_1, w_1, \frac{w_2 - w_0}{2h})$$

وبما أن $w_0 = \alpha$ فإن هذه المعادلة تأخذ الشكل:

$$\alpha - 2w_1 + w_2 = h^2 f(x_1, w_1, \frac{w_2 - \alpha}{2h}) \quad (8.43)$$

وبالمثل عندما $i = N$ تصبح المعادلة (8.42) بالشكل:

$$w_{N-1} - 2w_N + \beta = h^2 f(x_N, w_N, \frac{\beta - w_{N-1}}{2h}) \quad (8.44)$$

وذلك لأن $w_{N+1} = \beta$

تمثل المعادلة (8.42) نظاماً من المعادلات غير الخطية عددها N بالنسبة للمجهول w_i ، $i = 1, 2, \dots, N$ والتي عددها N أيضاً. يمكن كتابة هذا النظام غير الخطي بالشكل المتجهي:

$$\mathbf{G}(\mathbf{w}) = \mathbf{0} \quad (8.45)$$

حيث إن $\mathbf{0} = [0, 0, \dots, 0]^T$ ، $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_N]^T$ ، $\mathbf{G} = [g_1, g_2, \dots, g_N]^T$

والدوال $g_i(\mathbf{w})$ من أجل $i = 1, 2, \dots, N$ معرفة كما يلي:

$$g_i(\mathbf{w}) = -w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1} + h^2 f(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}) \quad (8.46)$$

يمكن حل النظام غير الخطي (8.45) باستخدام أحد الطرائق التي ناقشناها في الفصل السابع. هنا سوف نستخدم طريقة نيوتن التكرارية لحل هذا النظام ونترك للقارئ المهتم استخدام الطرائق الأخرى. من الملاحظ أن كل معادلة غير خطية من المعادلات المعرفة في النظام غير الخطي (8.45) تحتوي على ثلاثة مجاهيل على الأكثر

وبالتالي فإن مصفوفة جاكوبي تكون مصفوفة ثلاثية الأقطار. نعلم من الفصل السابع أن طريقة نيوتن تكون متتالية من المتجهات $\{\mathbf{w}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ وذلك ابتداء من التقريب الابتدائي $\mathbf{w}^{(0)}$. لاحظ هنا أن $\mathbf{w}^{(k)} = [w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, \dots, w_N^{(k)}]^T$ من أجل $k \geq 0$. يمكن كتابة الصيغة التكرارية لطريقة نيوتن لحل النظام غير الخطي (8.45)

بالشكل:

$$\mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{w}^{(k)} + \mathbf{v}^{(k+1)} \quad (8.47a)$$

حيث إن المتجه $\mathbf{v}^{(k+1)}$ هو الحل للنظام الخطي:

$$\mathbf{J}(\mathbf{w}^{(k)})\mathbf{v}^{(k+1)} = -\mathbf{G}(\mathbf{w}^{(k)}) \quad (8.47a)$$

من أجل $k \geq 0$. المصفوفة $\mathbf{J}(\mathbf{w})$ هي مصفوفة جاكوبي من النوع $N \times N$ والمعروفة كما يلي:

$$\mathbf{J}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial w_1} & \frac{\partial g_1}{\partial w_2} & \frac{\partial g_1}{\partial w_3} & \dots & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial w_N} \\ \frac{\partial g_2}{\partial w_1} & \frac{\partial g_2}{\partial w_2} & \frac{\partial g_2}{\partial w_3} & \dots & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial w_N} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \frac{\partial g_{N-1}}{\partial w_1} & \dots & \dots & \frac{\partial g_{N-1}}{\partial w_{N-2}} & \frac{\partial g_{N-1}}{\partial w_{N-1}} & \frac{\partial g_{N-1}}{\partial w_N} \\ \frac{\partial g_N}{\partial w_1} & \dots & \dots & \frac{\partial g_N}{\partial w_{N-2}} & \frac{\partial g_N}{\partial w_{N-1}} & \frac{\partial g_N}{\partial w_N} \end{bmatrix} \quad (8.48)$$

و المتجه $\mathbf{v}^{(k+1)} = [v_1^{(k+1)}, v_2^{(k+1)}, \dots, v_N^{(k+1)}]$

بالتعويض عن قيم التفاضلات الموجودة في المصفوفة $\mathbf{J}(\mathbf{w})$ واستخدام القيم الحدية $w_0 = \alpha$ و $w_{N+1} = \beta$ نحصل على المصفوفة ثلاثية الأقطار:

$$J(w) = \begin{bmatrix} 2+h^2 f_1 & -1+\frac{h}{2} f_1 & & & \\ -1-\frac{h}{2} f_2 & 2+h^2 f_2 & -1+\frac{h}{2} f_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1-\frac{h}{2} f_{N-1} & 2+h^2 f_{N-1} & -1+\frac{h}{2} f_{N-1} \\ & & & -1-\frac{h}{2} f_N & 2+h^2 f_N \end{bmatrix} \quad (8.49)$$

حيث إن $f_i = f(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h})$ ، $f_1 = f(x_1, w_1, \frac{w_2 - \alpha}{2h})$ من أجل $i = 2, 3, \dots, N-1$ وكذلك الحال بالنسبة للمتجه $f_N = f(x_N, w_N, \frac{\beta - w_{N-1}}{2h})$ حيث يكون لدينا:

$$G(w) = \begin{bmatrix} 2w_1 - w_2 + h^2 f_1 - \alpha \\ -w_1 + 2w_2 - w_3 + h^2 f_2 \\ \vdots \\ -w_{N-2} + 2w_{N-1} - w_N + h^2 f_{N-1} \\ -w_{N-1} + 2w_N + h^2 f_N - \beta \end{bmatrix} \quad (8.50)$$

توضح الخوارزمية (٨،٢) كيفية تنفيذ طريقة الفروق المنتهية المركزية لحل مسألة القيم الحدية غير الخطية (8.40)، حيث يتم استخدام طريقة نيوتن لحل النظام غير الخطي الناشئ من المسألة.

خوارزمية (٢، ٨): طريقة الفروق المنتهية للمسألة غير الخطية

تستخدم هذه الخوارزمية طريقة الفروق المنتهية المركزية لحل مسألة القيم الحدية غير الخطية (8.40). بداية يتم تعريف مصفوفة جاكوبي $J(i, j)$ المرافقة للمسألة وكذلك الطرف الأيمن $G(i)$ ، ثم تستخدم طريقة نيوتن لحل النظام غير الخطي الناتج من تطبيق الطريقة. إذا كان الحل المضبوط متوفر فإنه يمكن إضافة الخطوات المتعلقة بحساب الأخطاء المضبوطة.

الخطوة ١: أدخل قيم $\alpha, \beta, M, N, b, a$ و α و β

الخطوة ٢: ضع $h = \frac{b-a}{N+1}$

الخطوة ٣: ضع $w(0) = \alpha$ و $w(N+1) = \beta$

الخطوة ٤: من أجل $i = 1, 2, \dots, N$ اعمل الخطوتين ٥ - ٦

الخطوة ٥: من أجل $i = 1, 2, \dots, N$ أدخل القيم الابتدائية $w(i)$

الخطوة ٦: ضع $x(i) = a + ih$

الخطوة ٧: طالما $k \leq M$ اعمل الخطوات ٨ - ١٦

الخطوة ٨: من أجل $i = 1, 2, \dots, N$

ضع $J(i, i) = 2 + h^2 f(x(i), w(i), \frac{w(i+1) - w(i-1)}{2h})$

الخطوة ٩: من أجل $i = 1, 2, \dots, N-1$ اعمل الخطوتين ١٠ و ١١

الخطوة ١٠: $J(i, i+1) = -1 + \frac{h}{2} f(x(i), w(i), \frac{w(i+1) - w(i-1)}{2h})$

الخطوة ١١: $J(i+1, i) = -1 + \frac{h}{2} f(x(i), w(i), \frac{w(i+1) - w(i-1)}{2h})$

الخطوة ١٢: من أجل $i = 1, 2, \dots, N$

ضع:

$$g(i) = -w(i-1) + 2w(i) - w(i+1) + h^2 f(x(i), w(i), \frac{w(i+1) - w(i-1)}{2h})$$

الخطوة ١٣: حل النظام الخطي $Jv = -G$ باستخدام الخوارزمية (٣, ١)الخطوة ١٤: إذا كان $\|v\| \leq eps$ ، اطبع الحل العددي w ؛ قفالخطوة ١٥: من أجل $i = 1, 2, \dots, N$

$$w(i) = w(i) + v(i) \text{ ضع}$$

الخطوة ١٦: ضع $k = k + 1$

مثال (٨, ٧)

هنا نستخدم طريقة الفروق المنتهية المركزية لحل مسألة القيم الحدية غير

الخطية:

$$y'' = \frac{1}{2}(x+y+1)^3 \quad (8.51a)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \quad (8.51b)$$

ونقارن الحلول العددية مع الحل المضبوط $y(x) = \frac{x^2 - x}{2 - x}$. بداية يكون لدينا نظام المعادلات غير الخطي:

$$-w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1} + \frac{1}{2}h^2(x_i + w_i + 1)^3 = 0 \quad (8.52)$$

من أجل $i = 1, 2, \dots, N$. وبوضع $h = \frac{1}{4}$ واستخدام القيم الحدية $w_0 = 0$ و $w_4 = 0$ يصبح لدينا النظام غير الخطي:

$$\begin{aligned}
g_1(\mathbf{w}) &= 2w_1 - w_2 + \frac{1}{32}(w_1 + 1.25)^3 = 0 \\
g_2(\mathbf{w}) &= -w_1 + 2w_2 - w_3 + \frac{1}{32}(w_2 + 1.5)^3 = 0 \\
g_3(\mathbf{w}) &= -w_2 + 2w_3 + \frac{1}{32}(w_3 + 1.75)^3 = 0
\end{aligned} \tag{8.53}$$

لاحظ هنا أننا استخدمنا القيم $x_1 = 0.25$ ، $x_2 = 0.5$ و $x_3 = 0.75$. مصفوفة جاكوبي للنظام غير الخطي (8.53) تكون بالشكل:

$$\mathbf{J}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 2 + \frac{3}{32}(w_1 + 1.25)^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 + \frac{3}{32}(w_2 + 1.5)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 + \frac{3}{32}(w_3 + 1.75)^2 \end{bmatrix} \tag{8.54}$$

وإذا وضعنا $\mathbf{w}^{(0)} = [-0.1, -0.1, -0.1]^T$ يكون لدينا التكرار الأول في طريقة نيوتن:

$$\mathbf{J}(\mathbf{w}^{(0)})\mathbf{v}^{(1)} = -\mathbf{G}(\mathbf{w}^{(0)})$$

و

$$\mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{w}^{(0)} + \mathbf{v}^{(1)}$$

حيث حصلنا على:

$$\begin{bmatrix} 2.12398 & -1.00000 & 0.00000 \\ -1.00000 & 2.18375 & -1.00000 \\ 0.00000 & -1.00000 & 2.25523 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05247 \\ -0.08575 \\ -0.04038 \end{bmatrix}$$

ويحل هذا النظام باستخدام الحذف الجاوسي والتعويض الخلفي نجد أن

$v_1^{(1)} = -0.00457$ ، $v_2^{(1)} = -0.06219$ و $v_3^{(1)} = -0.04548$ وبالتالي يكون لدينا

العددي $\mathbf{w}^{(1)}$ يمكن الحصول على الحل التقريبي عند التكرار الثاني في طريقة نيوتن بحل النظام الخطي:

$$\mathbf{J}(\mathbf{w}^{(1)})\mathbf{v}^{(2)} = -\mathbf{G}(\mathbf{w}^{(1)})$$

بالنسبة لـ $\mathbf{v}^{(2)}$ والتعويض في:

$$\mathbf{w}^{(2)} = \mathbf{w}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)}$$

وهكذا يتم حساب عناصر متتالية المتجهات $\{\mathbf{w}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ حتى نحصل على الحل التقريبي $\mathbf{w}^{(k)}$ بالدقة المطلوبة. في هذا المثال أوقفنا العمليات الحسابية عندما تحقق الشرط $\|\mathbf{w}^{(k+1)} - \mathbf{w}^{(k)}\| \leq 5 \times 10^{-6}$ (أو $\|\mathbf{v}^{(k+1)}\| \leq 5 \times 10^{-6}$). أي أننا أردنا الحصول على الحل العددي الذي يحقق هذه الدقة حيث حصلنا على $\mathbf{w}^{(3)} = [-0.10482, -0.16270, -0.14585]^T$ وبمقارنة هذا الحل العددي مع الحل المضبوط نجد أن $|y_1 - w_1^{(3)}| = 0.00233$ ، $|y_2 - w_2^{(3)}| = 0.00396$ و $|y_3 - w_3^{(3)}| = 0.00415$. كما هو الحال بالنسبة للمسألة الخطية فإنه يمكن الحصول على حلول عددية أفضل إذا كانت قيمة h أصغر. يحتوي الجدول رقم (٨، ٤) على النتائج العددية لهذه المسألة عندما $h = 0.1$ ، حيث يتضح أن الأخطاء المضبوطة أصغر من تلك المرافقة للحلول عندما $h = 0.25$. نود الإشارة هنا إلى النتائج العددية الموجودة في الجدول تم الحصول عليها عندما تم إيقاف العمليات الحسابية في طريقة نيوتن بتحقيق الشرط $\|\mathbf{w}^{(k+1)} - \mathbf{w}^{(k)}\| \leq 5 \times 10^{-6}$.

الجدول رقم (٨، ٤). النتائج العددية للمثال (٨، ٧).

i	x_i	$y(x_i)$	$w_i^{(3)}$	$ y(x_i) - w_i^{(3)} $
0	0.0	0.00000	0.00000	0.00000
1	0.1	-0.04737	-0.04720	0.00017
2	0.2	-0.08889	-0.08857	0.00032
3	0.3	-0.12353	-0.12308	0.00046
4	0.4	-0.15000	-0.14943	0.00057
5	0.5	-0.16667	-0.16600	0.00067
6	0.6	-0.17143	-0.17071	0.00072
7	0.7	-0.16154	-0.16081	0.00073
8	0.8	-0.13333	-0.13268	0.00065
9	0.9	-0.08182	-0.08138	0.00044
10	1.0	0.00000	0.00000	0.00000

(٨، ٥) طرائق تصغير دالة الترسيب

Methods of Minimizing the Residual Function

لقد درسنا في البنود السابقة بعض الطرائق العددية التي تحسب قيماً تقريبية للحل $y(x)$ عند العقد الداخلية x_i من أجل $i = 1, 2, \dots, N$. ندرس في البند الحالي والبند اللاحق طرائق عددية يمكنها حساب قيماً تقريبية للحل عند كل $x \in [a, b]$. في هذا البند نناقش بعض طرائق تصغير دالة الترسيب لحل مسألة القيم الحدية الخطية:

$$Ly = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (8.55a)$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (8.55b)$$

حيث إن $p(x)$ ، $q(x)$ و $f(x)$ دوال متصلة على الفترة $[a, b]$. لاحظ هنا أن تعريف هذه الدوال يختلف عن ذلك الذي تم استخدامه من قبل.

بداية لنعتبر الدوال $\varphi_j(x)$ ، من أجل $j = 0, 1, 2, \dots, N$ المستقلة خطياً و أن $\varphi_j(x) \in C^2[a, b]$ لكل قيم j ، بحيث إن:

$$\varphi_0(a) = \alpha, \quad \varphi_0(b) = \beta \quad (8.56)$$

$$\varphi_j(a) = 0, \quad \varphi_j(b) = 0 \quad (8.57)$$

من أجل $j = 1, 2, \dots, N$. يمكن أن يتم اختيار الدوال $\varphi_j(x)$ لتكون كثيرات حدود تحقق الشروط الحدية المرافقة للمسألة. للتسهيل، سوف نعتبر دوال القاعدة $\varphi_j(x) = \sin j\pi x$ و $\varphi_j(x) = x^j(1-x)$ من أجل $j = 1, 2, \dots, N$. يطلق على هذه الدوال اسم دوال الشكل، القاعدة أو الاستكمال، ذلك يعتمد على الدراسة المراد تطبيقها.

نحن نبحث عن حل تقريبي $W_N(x)$ لمسألة القيم الحدية (8.55) من الشكل:

$$W_N(x) = \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j(x) \quad (8.58)$$

حيث إن c_j ، $j = 1, 2, \dots, N$ ثوابت حقيقية يتم إيجادها. بتعويض الدالة $W_N(x)$ في المعادلة التفاضلية (8.55a) نحصل على دالة الترسيب:

$$R(x, c_1, c_2, \dots, c_N) = L W_N(x) - f(x) \quad (8.59)$$

ويستخدم العلاقة (8.58) يمكن كتابة المعادلة (8.59) بالشكل: (8.60)

$$R(x, c_1, c_2, \dots, c_N) = \varphi_0''(x) + p(x)\varphi_0'(x) + q(x)\varphi_0(x) + \sum_{j=1}^N c_j [\varphi_j''(x) + p(x)\varphi_j'(x) + q(x)\varphi_j(x)] - f(x)$$

الهدف هو إيجاد قيم الثوابت $c_j, j=1,2,\dots,N$ والتي تجعل قيمة دالة الترسب R أصغر ما يمكن. نود الإشارة هنا إلى أنه إذا كانت الدالة $W_N(x)$ هي حل مضبوط للمسألة (8.55) فإنه يكون لدينا $R(x, c_1, c_2, \dots, c_N) = 0$.

يوجد عدة أساليب لإيجاد الثوابت $c_j, j=1,2,\dots,N$ التي تجعل قيمة الدالة $R(x, c_1, c_2, \dots, c_N)$ أصغر ما يمكن. فيما يلي سندرس أسلوبين من هذه الأساليب:

١- طريقة الرصف

تتضمن هذه الطريقة وضع دالة الترسب R مساوية للصفر عند العقد الداخلية $x_i, i=1,2,\dots,N$ في الفترة $[a, b]$. هذا يعني أن المعادلة (8.60) تأخذ الشكل:

$$\begin{aligned} R(x_i, c_1, c_2, \dots, c_N) &= \phi_0''(x_i) + p(x_i)\phi_0'(x_i) + q(x_i)\phi(x_i) \\ &+ \sum_{j=1}^N c_j [\phi_j''(x_i) + p(x_i)\phi_j'(x_i) + q(x_i)\phi_j(x_i)] - f(x_i) \end{aligned} \quad (8.61)$$

من أجل $i=1,2,\dots,N$ والذي يمكن اختزالها إلى الشكل:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N c_j [\phi_j''(x_i) + p(x_i)\phi_j'(x_i) + q(x_i)\phi_j(x_i)] \\ = f(x_i) - \phi_0''(x_i) - p(x_i)\phi_0'(x_i) - q(x_i)\phi(x_i) \end{aligned}$$

من أجل $i=1,2,\dots,N$. تمثل العلاقة (8.62) نظاماً خطياً من المعادلات التي عددها N بالنسبة للمجهول $c_j, j=1,2,\dots,N$. يمكن كتابة العلاقة (8.62) بالشكل المصفوفي:

$$Ac = b \quad (8.63)$$

حيث إن عناصر مصفوفة المعاملات A عبارة عن المجاميع الموجودة في الطرف الأيسر للمعادلة (8.63)، عناصر متجه العمود b هي الطرف الأيمن للمعادلة (8.63) و عناصر المتجه c هي المجاهيل c_j ، $j = 1, 2, \dots, N$ المطلوب إيجادها. نترك كتابة عناصر المصفوفة A والمتجه c للمناقشة في التمارين.

مثال (٨,٨)

هنا نستخدم طريقة الرصف لحل مسألة القيم الحدية:

$$y'' = 4y \quad (8.64)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 2$$

وذلك بوضع $h = \frac{1}{4}$ ، واستخدام دوال القاعدة $\varphi_0(x) = 2x$ و $\varphi_j(x) = \sin j\pi x$ من أجل $j = 1, 2, 3$. من الملاحظ أنه يكون لدينا $x_0 = 0$ ، $x_1 = 0.25$ ، $x_2 = 0.5$ ، $x_3 = 0.75$ و $x_4 = 1.0$. وأن الدالة المعرفة في المعادلة (8.58) تصبح بالشكل:

$$W_3(x) = 2x + \sum_{j=1}^3 c_j \sin j\pi x \quad (8.65)$$

يمكن بسهولة التأكد من أن هذا الحل يحقق الشروط الحدية الموجودة في المعادلة (8.64).

بالتعويض عن الحل المعروف في المعادلة (8.65) وتفاضله الثاني في المعادلة التفاضلية الموجودة في المعادلة (8.64) نحصل على:

$$\sum_{j=1}^3 c_j [j^2 \pi^2 + 4] \sin j\pi x = -8x$$

وبوضع $x = x_i$ في هذه المعادلة يكون لدينا:

$$\sum_{j=1}^3 c_j [j^2 \pi^2 + 4] \sin j\pi x_i = -8x_i$$

من أجل $i = 1, 2, 3$. وبالتعويض عن قيم x_i من أجل $i = 1, 2, 3$ نحصل على النظام الخطي:

$$\begin{bmatrix} 9.80729 & 43.4784 & 65.6382 \\ 13.8696 & 0.00000 & -92.8264 \\ 9.80719 & -43.4784 & 65.6382 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

وبحل هذا النظام حصلنا على $c_2 = 0.045995$ ، $c_1 = -0.348130$ و $c_3 = -0.008925$. وبالتعويض عن هذه القيم في المعادلة (8.65) يكون لدينا الحل التقريبي:

(8.66)

$W_3(x) = 2x - 0.34813 \sin \pi x + 0.045995 \sin 2\pi x - 0.008925 \sin 3\pi x$ وهو حلاً تقريبياً لمسألة القيم الحدية (8.64). نلاحظ هنا أنه يمكن استخدام هذا الحل لحساب قيماً تقريبية لأي x في الفترة $[0,1]$ وهي الفترة المعروفة عليها مسألة القيم الحدية التي تم حلها. فمثلاً، عندما $x = 0.1$ يكون لدينا $W_3(0.1) \approx 0.112237$ وبما أن القيم المضبوطة للحل هي $y(0.1) = 0.11102495$ (مقربة إلى سبعة أرقام عشرية معنوية) فإن الخطأ يكون $|y(0.1) - W_3(0.1)| = 0.00123$. وعندما $x = 0.25$ (وهي أحد عقد الاستكمال) فإنه يكون لدينا $W_3(0.25) \approx 0.285519$ والخطأ المرافق هو $|y(0.25) - W_3(0.25)| = 0.00183$. يمكن للقارئ أن يقارن القيم التقريبية والمضبوطة للحل عند قيم مختلفة لـ x .

كما هو الحال بالنسبة لطرائق الفروق المنتهية، فإنه يمكن الحصول على حلول تقريبية أفضل إذا استخدمنا قيم أصغر لـ h و نترك ذلك للمناقشة في التمارين.

٢- طريقة جالركن

تعتمد هذه الطريقة على مفهوم تعامد الدوال. وهذا يعني أننا نختار دوال القاعدة التي تكون متعامدة مع دالة الترسيب R . أي أنه يكون لدينا:

$$\int_a^b R(x, c_1, \dots, c_N) \phi_i(x) dx = 0 \quad (8.67)$$

من أجل $i = 1, 2, \dots, N$. وبالتعويض عن ذلك في المعادلة (8.60) نحصل على:

$$\sum_{j=1}^N c_j \int_a^b [\varphi_j''(x) + p(x)\varphi_j'(x) + q(x)\varphi_j(x)]\varphi_i(x)dx$$

$$= \int_a^b [f(x) - \varphi_0''(x) - p(x)\varphi_0'(x) - q(x)\varphi_0(x)]\varphi_i(x)dx \quad (8.68)$$

من أجل $i = 1, 2, \dots, N$. تعطينا العلاقة (8.68) نظاماً خطياً يتكون من N معادلة بالنسبة للمجهول c_j ، $j = 1, 2, \dots, N$ والتي عددها N . يمكن كتابة هذا النظام بالشكل المصفوفي (8.63)، حيث إن عناصر المصفوفة A عبارة عن التكاملات الموجودة في الطرف الأيسر للمعادلة (8.68). أما عناصر المتجه b فهي التكاملات الموجودة في الطرف الأيمن للمعادلة (8.68). كما سبق فإن $c = [c_1, c_2, \dots, c_N]^T$ هو حل هذا النظام المطلوب إيجاده.

مثال (٨، ٩)

هنا نستخدم طريقة جالركن لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في المثال (٨، ٨). أيضاً، سنضع $h = \frac{1}{4}$ ونستخدم دوال القاعدة التي تم استخدامها في المثال السابق. أي يكون لدينا الحل التقريبي (8.65) حيث إن الثوابت c_j ، من أجل $j = 1, 2, 3$ يتم حسابها باستخدام طريقة جالركن.

بداية يتم التعويض عن الحل التقريبي (8.65) في المعادلة (8.68)، مع مراعاة أن $p(x) = 0$ ، $q(x) = -4$ ، $f(x) = 0$ ، حيث حصلنا على:

$$\sum_{j=1}^3 c_j \int_0^1 [-j^2\pi^2 - 4] \sin j\pi x \sin i\pi x dx = 8 \int_0^1 x \sin i\pi x dx \quad (8.69)$$

من أجل $i = 1, 2, 3$ ، وهذا نظاماً خطياً يتكون من ثلاث معادلات خطية بالنسبة للمجهول الثلاثة c_1 ، c_2 و c_3 .

الآن عندما يكون $i = 1$ تصبح المعادلة (8.69) بالشكل:

$$[\pi^2 + 4]c_1 \int_0^1 \sin^2 \pi x dx + [4\pi^2 + 4]c_2 \int_0^1 \sin 2\pi x \sin \pi x dx \\ + [9\pi^2 + 4]c_3 \int_0^1 \sin 3\pi x \sin \pi x dx = -8 \int_0^1 x \sin \pi x dx \quad (8.70)$$

لاحظ هنا أننا ضربنا طرفي المعادلة بسالب واحد. المطلوب الآن هو حساب التكاملات الموجودة في هذه المعادلة ومن ثم حساب قيمة الثابت c_1 . أولاً، بالنسبة للتكامل الأول الموجود في الطرف الأيسر فإنه يكون لدينا:

$$\int_0^1 \sin^2 \pi x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [1 - \cos 2\pi x] dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

أما بالنسبة للتكاملين الآخرين فيكون لدينا:

$$\int_0^1 \sin 3\pi x \sin \pi x dx = 0 \quad \text{و} \quad \int_0^1 \sin 2\pi x \sin \pi x dx = 0 \quad (\text{لماذا؟})$$

من ناحية أخرى، فإنه بالنسبة للتكامل الموجود في الطرف الأيمن يكون لدينا:

$$\int_0^1 x \sin \pi x dx = -\frac{x}{\pi} \cos \pi x + \frac{1}{\pi^2} \sin \pi x \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}$$

بناءً على ذلك، فإنه بالتعويض عن قيم هذه التكاملات في المعادلة (8.70) نحصل على:

$$\frac{[\pi^2 + 4]}{2} c_1 = -\frac{8}{\pi}$$

ومنه يكون لدينا:

$$c_1 = -\frac{16}{\pi[\pi^2 + 4]}$$

وبالمثل فإنه عندما يكون $i = 2$ تأخذ المعادلة (8.69) الشكل:

$$[\pi^2 + 4]c_1 \int_0^1 \sin \pi x \sin 2\pi x dx + [4\pi^2 + 4]c_2 \int_0^1 \sin^2 2\pi x dx \\ + [9\pi^2 + 4]c_3 \int_0^1 \sin 3\pi x \sin 2\pi x dx = -8 \int_0^1 x \sin 2\pi x dx \quad (8.71)$$

وبحساب التكاملات الموجودة في هذه المعادلة نحصل على:

$$c_2 = \frac{8}{\pi[4\pi^2 + 4]}$$

أيضاً، عندما $i = 3$ تصبح المعادلة (8.69) بالشكل:

$$\begin{aligned} & [\pi^2 + 4]c_1 \int_0^1 \sin \pi x \sin 3\pi x dx + [4\pi^2 + 4]c_2 \int_0^1 \sin 2\pi x \sin 3\pi x dx \\ & + [9\pi^2 + 4]c_3 \int_0^1 \sin^2 3\pi x dx = -8 \int_0^1 x \sin 3\pi x dx \end{aligned} \quad (8.72)$$

وبحساب التكاملات الموجودة في هذه المعادلة حصلنا على:

$$c_3 = -\frac{16}{3\pi[9\pi^2 + 4]}$$

نترك للقارئ إيجاد هذه التكاملات للمناقشة في التمارين.

الآن بالتعويض عن قيم c_1 ، c_2 و c_3 في المعادلة (8.65) يكون لدينا الحل التقريبي:

(8.73)

$$W_3(x) = 2x - \frac{16}{\pi(\pi^2 + 4)} \sin \pi x + \frac{8}{\pi(4\pi^2 + 4)} \sin 2\pi x - \frac{16}{3\pi(9\pi^2 + 4)} \sin 3\pi x$$

لمسألة القيم الحدية (8.64). يمكن مقارنة الحل التقريبي (8.73) مع الحل المضبوط

للمسألة عند كل x تنتمي للفترة $[0,1]$. فمثلاً، عندما $x = 0.1$ يكون لدينا

$$y(0.1) = 0.11102495 \quad W_3(0.1) \approx 0.106158$$

(مقربة إلى سبعة أرقام عشرية معنوية) فإن الخطأ يكون $|y(0.1) - W_3(0.1)| = 0.00486$.

وعندما $x = 0.25$ (وهي أحد عقد الاستكمال) فإنه يكون لدينا

$$W_3(0.25) \approx 0.286104 \quad \text{والخطأ المرافق هو } |y(0.25) - W_3(0.25)| = 0.00125$$

يمكن للقارئ أن يقارن القيم التقريبية والمضبوطة للحل عند قيم مختلفة لـ x . كما هو

الحال بالنسبة للطرائق الأخرى، فإنه يمكن الحصول على حلول تقريبية أفضل إذا

استخدمنا قياً أصغر لـ h و نترك ذلك للمناقشة في التمارين.

(٨, ٦) طريقة دالة الشريحة التكعيبة لحل مسألة القيم الحدية الخطية

.Cubic Spline Method for Solving Linear B.V.P

ندرس في هذا البند طريقة دالة الشريحة التكعيبة لحل مسألة القيم الحدية

الخطية:

$$y'' = f(x)y + g(x) \quad (8.74a)$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (8.74b)$$

حيث إن $f(x)$ و $g(x)$ دالتين متصلتين على الفترة $[a, b]$. يمكن تعميم هذه الطريقة لحل مسألة القيم الحدية الخطية (8.6)، راجع البند (٨, ٢) والتمارين. أيضاً، يمكن استخدامها لحل مسألة القيم الحدية غير الخطية:

$$y'' = \Phi(x, y), \quad (8.75a)$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (8.75b)$$

حيث إن Φ دالة غير خطية بالنسبة لـ y . (انظر التمارين).

نعلم أن دالة الشريحة التكعيبة يمكن تعريفها بالشكل:

$$s(x) = p_i(x), \quad (8.76)$$

لكل $x \in [x_i, x_{i+1}]$ من أجل $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ، حيث إن x_i كما هي معرفة في

المعادلة (8.7) و $p_i(x)$ كثيرة حدود ذات الدرجة الثالثة لكل i وأن

$s(x) \in C^2[a, b]$ ، راجع الفصل الرابع. باستخدام دالة الشريحة التكعيبة سوف

نُشئ تقريب أملس للحل المضبوط $y(x)$ عند كل x ينتمي للفترة $[a, b]$.

لتكن $p_i(x)$ كثيرة الحدود التكعيبة من الشكل:

$$p_i(x) = a_{i0} + a_{i1}(x - x_i) + a_{i2}(x - x_i)^2 + a_{i3}(x - x_i)^3 \quad (8.77)$$

من أجل $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ، حيث إن a_{i0} ، a_{i1} ، a_{i2} و a_{i3} من أجل

$i = 0, 1, 2, \dots, N$ ثوابت حقيقية. ولتكن s_i قيمة تقريبية للحل $y(x)$ عند $x = x_i$

تم الحصول عليها بواسطة كثيرة الحدود $p_i(x)$ والتي تمر خلال النقطتين (x_i, s_i)

و (x_{i+1}, s_{i+1}) . نشير هنا إلى أنه يتم الحصول على الحل التقريبي والمعروف في المعادلة (8.77) إذا تم حساب الثوابت a_{i0}, a_{i1}, a_{i2} و a_{i3} .

الآن باستخدام العلاقات التالية:

$$\begin{aligned} p_i(x_i) &= s_i, & p_i(x_{i+1}) &= s_{i+1} \\ p_i''(x_i) &= F_i, & p_i''(x_{i+1}) &= F_{i+1} \end{aligned} \quad (8.78)$$

حصلنا على:

$$\begin{aligned} a_{i0} &= s_i \\ a_{i1} &= \frac{1}{h}[s_{i+1} - s_i] - \frac{h}{6}[F_{i+1} + 2F_i] \\ a_{i2} &= \frac{1}{2}F_i \\ a_{i3} &= \frac{1}{6h}[F_{i+1} - F_i] \end{aligned} \quad (8.79)$$

من أجل $i = 0, 1, 2, \dots, N$. راجع البند (٤, ٦) للإطلاع على كيفية الحصول على هذه العلاقات. بما أن التفاضل الأول لدالة الشريحة التكميلية يكون متصلاً عند النقطة (x_i, s_i) فإنه يكون لدينا:

$$p'_{i-1}(x_i) = p'_i(x_i)$$

ومنه نحصل على:

$$a_{i-1,1} + 2a_{i-1,2}(x_i - x_{i-1}) + 3a_{i-1,3}(x_i - x_{i-1})^2 = a_{i1} \quad (8.80)$$

وبالتعويض عن قيم $a_{i-1,1}, a_{i-1,2}, a_{i-1,3}$ من العلاقات (8.79) في المعادلة (8.80)

نحصل على المعادلة:

$$\frac{1}{h}[s_i - s_{i-1}] - \frac{h}{6}[F_i - F_{i-1} + hF_{i-1}] + \frac{1}{2h}[F_i - F_{i-1}] = \frac{1}{h}[s_{i+1} - s_i] - \frac{h}{6}[F_{i+1} + 2F_i]$$

والتي يمكن اختزالها بالشكل:

$$s_{i-1} - 2s_i + s_{i+1} = \frac{h^2}{6} [F_{i-1} + 4F_i + F_{i+1}] \quad (8.81)$$

من أجل $i = 1, 2, \dots, N$ ، حيث إن $F_i = f_i s_i + g_i$ ، $f_i = f(x_i)$ و $g_i = g(x_i)$ لكل $j = i-1, i, i+1$. نشير هنا إلى أنه عندما $i = 1$ تصبح المعادلة (8.81) بالشكل:

$$s_0 - 2s_1 + s_2 = \frac{h^2}{6} [F_0 + 4F_1 + F_2]$$

وبما أن $s_0 = y(a) = \alpha$ ، الشرط الحدي عند الطرف الأيسر للفترة، فإن المعادلة الأخيرة تأخذ الشكل:

$$-2s_1 + s_2 = -\alpha + \frac{h^2}{6} [f_0 \alpha + g_0 + 4F_1 + F_2] \quad (8.82)$$

وبالمثل فإنه عندما $i = N$ يمكن استخدام الشرط الحدي عند الطرف الأيمن للفترة للحصول على:

$$s_{N-1} - 2s_N = -\beta + \frac{h^2}{6} [F_{N-1} + 4F_N + f_{N+1} \beta + g_{N+1}] \quad (8.83)$$

تمثل المعادلات (8.81) إلى (8.83) نظاماً خطياً يتكون من N معادلة خطية بالنسبة للمجهول s_i ، $i = 1, 2, \dots, N$. يمكن كتابة هذا النظام الخطي بالشكل المصفوفي:

$$As = r \quad (8.84)$$

حيث إن A المصفوفة ثلاثية الأقطار:

$$A = \begin{bmatrix} 2 + \frac{2}{3}h^2 f_1 & -1 + \frac{1}{6}h^2 f_2 & & & \\ -1 + \frac{1}{6}h^2 f_1 & 2 + \frac{2}{3}h^2 f_2 & -1 + \frac{1}{6}h^2 f_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 + \frac{1}{6}h^2 f_{N-2} & 2 + \frac{2}{3}h^2 f_{N-1} & -1 + \frac{1}{6}h^2 f_N \\ & & & -1 + \frac{1}{6}h^2 f_{N-1} & 2 + \frac{2}{3}h^2 q_N \end{bmatrix}$$

المتجه:

$$r = \begin{bmatrix} (1 - \frac{1}{6}h^2 f_0)\alpha - \frac{1}{6}h^2[g_0 + 4g_1 + g_2] \\ -\frac{1}{6}h^2[g_1 + 4g_2 + g_3] \\ \vdots \\ -\frac{1}{6}h^2[g_{N-2} + 4g_{N-1} + g_N] \\ (1 - \frac{1}{6}h^2 f_{N+1})\beta - \frac{1}{6}h^2[g_{N-1} + 4g_N + g_{N+1}] \end{bmatrix}$$

و $s = [s_1, s_2, \dots, s_N]^T$ هو الحل المطلوب إيجاده. نود الإشارة إلى أنه إذا كان $f(x) \geq 0$ على الفترة $[a, b]$ ، فإن المصفوفة A تكون قطعية السيطرة وبالتالي غير شاذة. مما يعني أنه في هذه الحالة يكون للنظام الخطي (8.85) حلاً وحيداً.

الآن، للحصول على حل دالة الشريحة التكميلية المعرف بالمعادلة (8.77) لمسألة

القيم الحدية (8.74) نحسب أولاً قيم s_i ، $i = 1, 2, \dots, N$ بحل النظام الخطي (8.84)

ثم يتم حساب F_i من أجل $i = 0, 1, 2, \dots, N+1$ باستخدام العلاقة

$F_i = f_i s_i + g_i$ والشروط الحدية (8.74b). بمعرفة قيم s_i و F_i من أجل $i = 0, 1, 2, \dots, N+1$ يمكننا حساب الثوابت $a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}$ من أجل $i = 0, 1, 2, \dots, N$ باستخدام العلاقات (8.79). بناء على ذلك، نكون قد أوجدنا الحل التقريبي الأملس $s(x) = p_i(x)$ والمعرف بالمعادلة (8.77) والذي يمكن استخدامه لحساب قيمة تقريبية للحل المضبوط $y(x)$ لكل x ينتمي للفترة $[a, b]$. في الواقع، يمكن استخدام حل دالة الشريحة (8.77) لتقريب تفاضلات الدالة $y(x)$ عند جميع قيم x التي تنتمي للفترة $[a, b]$. وهذه الخاصية تتميز بها هذه الطريقة مقارنة بالطرائق التي درسناها في البنود السابقة في هذا الفصل.

أخيراً، نشير إلى أن الخطأ المحلي المقطوع للعلاقة (8.81)، وهي العلاقة الرئيسة لطريقة دالة الشريحة التكميلية، هو:

$$t_i = -\frac{1}{12} h^4 y^{(4)}(\eta_i) + O(h^6) \quad (8.85)$$

حيث إن $x_{i-1} < \eta_i < x_{i+1}$ من أجل $i = 1, 2, \dots, N$. وهذا يعني أن الرتبة التقاربية لطريقة دالة الشريحة التكميلية تكون الثانية. (انظر التمارين).

يستعرض المثال (٨، ١٠) كيفية استخدام طريقة دالة الشريحة التكميلية لحل مسألة القيم الحدية حيث يتم حساب قيمة تقريبية للحل وكذلك تفاضليه الأول والثاني عند قيم مختلفة لـ x في الفترة التي تم تعريف المسألة عليها. مثال (٨، ١٠)

هنا نستخدم طريقة دالة الشريحة التكميلية لحل مسألة القيم الحدية:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{2}{x^2} y - \frac{1}{x} \\ u(2) &= 0, \quad u(3) = 0 \end{aligned} \quad (8.86)$$

وذلك بوضع $h = \frac{1}{2}$. بداية نلاحظ أن $N = 1$ وبما أن $F_i = \frac{2}{x_i} s_i - \frac{1}{x_i}$ من أجل $i = 0, 1, 2$ فإنه يكون لدينا:

$$F_0 = -\frac{1}{2}$$

$$F_1 = \frac{8}{25} s_1 - \frac{2}{5}$$

$$F_2 = -\frac{1}{3}$$

ومن العلاقة الرئيسة لطريقة دالة الشريحة التكميية (8.81) يكون لدينا:

$$s_0 - 2s_1 + s_2 = \frac{(1/2)^2}{6} [F_0 + 4F_1 + F_2]$$

وبالتعويض عن $s_0 = 0$ ، $s_2 = 0$ وقيم F_i ، $i = 0, 1, 2$ نحصل على:

$$-2s_1 = \frac{1}{24} \left[-\frac{1}{2} + 4 \left(\frac{8}{25} s_1 - \frac{2}{5} \right) - \frac{1}{3} \right]$$

ويحل هذه المعادلة بالنسبة لـ s_1 نحصل على:

$$s_1 = \frac{1825}{36960}$$

وهي القيمة التقريبية لـ $y(x_1)$. وبمعرفة w_1 نستطيع حساب قيمة F_1 حيث يكون لدينا:

$$F_1 = \frac{8}{25} s_1 - \frac{2}{5} = -\frac{355}{924}$$

الآن بمعرفة s_i و F_i من أجل $i = 0, 1, 2$ فإنه يمكن حساب الثوابت a_{i2} ، a_{i1} ، a_{i0}

و a_{i3} من أجل $i = 0, 1$ باستخدام العلاقات (8.79). ثم نعوض عنها في المعادلة

(8.77) للحصول على حل دالة الشريحة التكميية لمسألة القيم الحدية (8.86).

بداية عندما $i = 0$ فإنه يكون لدينا:

$$a_{00} = s_0 = 0$$

$$a_{01} = \frac{1}{(1/2)}[s_1 - s_0] - \frac{(1/2)}{6}[F_1 + 2F_0] = \frac{2374}{11088}$$

$$a_{02} = \frac{1}{2}F_0 = -\frac{1}{4}$$

$$a_{03} = \frac{1}{6(1/2)}[F_1 - F_0] = \frac{107}{2772}$$

وعندما $i = 1$ نحصل على:

$$a_{10} = s_1 = \frac{365}{7392}$$

$$a_{11} = \frac{1}{(1/2)}[s_2 - s_1] - \frac{(1/2)}{6}[F_2 + 2F_1] = -\frac{77}{11088}$$

$$a_{12} = \frac{1}{2}F_1 = -\frac{355}{1848}$$

$$a_{13} = \frac{1}{6(1/2)}[F_2 - F_1] = \frac{47}{2772}$$

وبالتعويض عن قيم هذه الثوابت في المعادلة (8.77) نحصل على الحل التقريبي:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{2374}{11088}(x-2) - \frac{1}{4}(x-2)^2 + \frac{107}{2772}(x-2)^3, & 2 \leq x \leq 2.5 \\ \frac{365}{7392} - \frac{77}{11088}(x-2.5) - \frac{355}{1848}(x-2.5)^2 + \frac{47}{2772}(x-2.5)^3, & 2.5 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

وهو حل دالة الشريحة التكميلية للمسألة (8.86). ننبه القارئ هنا إلى أن كثيرة الحدود المعرفة على الفترة الجزئية $[2, 2.5]$ هي $p_0(x)$ بينما تلك المعرفة على الفترة الجزئية $[2.5, 3]$ هي $p_1(x)$ وذلك حسب الرموز المستخدمة في هذا البند. أيضاً، يمكن بسهولة ملاحظة أن $s^{(m)}(2.5^-) = p_0^{(m)}(2.5) = p_1^{(m)}(2.5) = s^{(m)}(2.5^+)$ من أجل $m = 0, 1, 2$. أي أن الدالة وتفاضليها الأول والثاني تكون متصلة عند $x_1 = 2.5$

وهذه الخاصية التي تحققها دوال الشريحة التكميية. في الواقع بحساب هذه القيم ومقارنتها بالقيم المضبوطة $y^{(m)}(2.5)$ ، $m = 0, 1, 2$ حيث إن الحل المضبوط للمسألة هو:

$$y(x) = \frac{1}{38}[-5x^2 + 19x - \frac{36}{x}]$$

حصلنا على الأخطاء المرافقة:

$$|y'(2.5) - s'(2.5)| = 0.00357 \quad , \quad |y(2.5) - s(2.5)| = 0.00069$$

$$و \quad |y''(2.5) - s''(2.5)| = 0.00022$$

نود التأكيد هنا على أنه يمكن استخدام الحل التقريبي وتفاضلاته لحساب قيماً تقريبية للحل المضبوط وتفاضلاته لكل x في الفترة $[2, 3]$. فمثلاً، عندما $x = 2.75$ تم حساب $s^{(m)}(2.75)$ و $y^{(m)}(2.75)$ من أجل $m = 0, 1, 2$ وحصلنا على الأخطاء المرافقة $|y(2.75) - s(2.75)| = 0.00046$ ، $|y'(2.75) - s'(2.75)| = 0.00140$ و $|y''(2.75) - s''(2.75)| = 0.00450$.

تتضمن الخوارزمية (٨،٣) كيفية تنفيذ طريقة دالة الشريحة التكميية لحل مسألة القيم الحدية (8.74) حيث تحسب القيم التقريبية للحل المضبوط عند العقد x_i من أجل $i = 1, 2, \dots, N$ وكذلك الثوابت a_{i0} ، a_{i1} ، a_{i2} و a_{i3} من أجل $i = 0, 1, 2, \dots, N$. لاحظ أن $a_{i0} \approx y(x_i)$ ، $a_{i1} \approx y'(x_i)$ و $2a_{i2} \approx y''(x_i)$. يمكن للمستخدم إضافة الخطوات اللازمة لحساب قيماً تقريبية للحل وتفاضلاته عند قيم x الأخرى. كما يمكن إضافة الخطوات اللازمة لحساب الحل المضبوط وكذلك حساب الأخطاء المضبوطة $|y^{(m)}(x) - s^{(m)}(x)|$ من أجل $m = 0, 1, 2$ عند قيم مختلفة لـ x .

خوارزمية (٨,٣): طريقة دالة السبلين التكميلية

تستخدم هذه الخوارزمية طريقة دالة السبلين التكميلية لحل مسألة القيم الحدية (8.6). بداية يتم تعريف المصفوفة $A(i, j)$ المرافقة للطريقة وكذلك الطرف الأيمن $r(i)$.

الخطوة ١: أدخل قيم N, b, a

الخطوة ٢: ضع $h = \frac{b-a}{N+1}$

الخطوة ٣: من أجل $i = 1, 2, \dots, N$

ضع $x(i) = a + ih$

الخطوة ٤: من أجل $i = 1, 2, \dots, N$

ضع $A(i, i) = 2 + \frac{2}{3}h^2 f(x(i))$

الخطوة ٥: من أجل $i = 1, 2, \dots, N-1$ ضع:

$$A(i, i+1) = -1 + \frac{1}{6}h^2 f(x(i+1))$$

$$A(i+1, i) = -1 + \frac{1}{6}h^2 f(x(i))$$

الخطوة ٦: من أجل $i = 2, \dots, N-1$

$$r(i) = -\frac{1}{6}h^2 [g(x(i-1)) + 4g(x(i)) + g(x(i+1))]$$

الخطوة ٧: ضع:

$$r(1) = (1 - \frac{1}{6}h^2 f(x(0)))\alpha - \frac{1}{6}h^2 [g(x(0)) + 4g(x(1)) + g(x(2))]$$

$$r(N) = (1 - \frac{1}{6}h^2 f(x(N+1)))\beta - \frac{1}{6}h^2 [g(x(N-1)) + 4g(x(N)) + g(x(N+1))]$$

الخطوة ٨: حل النظام الخطي $Aw = R$ باستخدام الخوارزمية (٣, ١).

الخطوة ٩: من أجل $i = 0, 1, 2, \dots, N+1$

احسب $F(i) = f(x(i))s(i) + g(x(i))$

الخطوة ١٠: من أجل $i = 0, 1, 2, \dots, N$ احسب:

$$a(i, 0) = s(i)$$

$$a(i, 1) = \frac{1}{h} [s(i+1) - s(i)] - \frac{h}{6} [F(i+1) + 2F(i)]$$

$$a(i, 2) = \frac{1}{2} F(i)$$

$$a(i, 3) = \frac{1}{6h} [F(i+1) - F(i)]$$

الخطوة ١١: من أجل $i = 1, 2, \dots, N$ اطبع $a(i, 0) \quad a(i, 1) \quad a(i, 2) \quad a(i, 3)$

(٨, ٧) تمارين

Exercises

١- استخدم طريقة الفروق المنتهية المركزية ذات الرتبة الثانية لحل مسألة

القيم الحدية:

$$y'' = 4y + 4 \cosh 1$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

وذلك بوضع $N = 3$. احسب الأخطاء $|y(x_i) - w_i|$ من أجل $i = 1, 2, 3$ حيث إن

$$y(x) = \cosh(2x - 1) - \cosh 1$$

٢- استخدم طريقة الفروق المنتهية المركزية ذات الرتبة الثانية لحل مسألة

القيم الحدية:

$$y'' = y + 2e^{x-1}$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

وذلك بوضع $N = 4$. قارن الحل العددي الذي تحصل عليه مع الحل المضبوط

$$y(x) = xe^{x-1}, \quad \text{عند العقد } x_i, \text{ من أجل } i = 1, 2, 3, 4.$$

٣- استخدم طريقة الفروق المنتهية المركزية ذات الرتبة الثانية لحل مسألة

القيم الحدية:

$$y'' = -(1+x)y' + 2y + (1-x^2)e^{-x}$$

$$y(0) = -1, \quad y(1) = 0$$

وذلك بوضع $h = \frac{1}{3}$. ثم احسب الأخطاء المضبوطة $|y(x_i) - w_i|$ من أجل $i = 1, 2$ ، حيث إن $y(x) = (x-1)e^{-x}$ هو الحل المضبوط.

٤- استخدم طريقة نيروف Numerov لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في

التمرين ١. احسب الأخطاء المضبوطة $|y(x_i) - w_i|$ من أجل $i = 1, 2, 3$ ، ثم قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ١.

٥- استخدم طريقة نيروف Numerov لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في

التمرين ٢. احسب الأخطاء المضبوطة $|y(x_i) - w_i|$ من أجل $i = 1, 2, 3, 4$ ، ثم قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ٢.

٦- اعتبر الدالة $y(x) = u(x)e^{\frac{1}{2}\int p(x)dx}$. استخدم هذه الدالة لكتابة المعادلة

التفاضلية:

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x) \quad \text{بالشكل} \quad u'' = f(x)u + g(x)$$

٧- استخدم طريقة نيروف Numerov لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في

التمرين ٣. ثم احسب الأخطاء المضبوطة $|y(x_i) - w_i|$ من أجل $i = 1, 2$ ، ثم قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي حصلت في التمرين ٣.

٨- اكتب متسلسلة تايلور ذات الدرجة الخامسة للدالتين $u(x_{i-1})$ و $u(x_{i+1})$

ومتسلسلة تايلور ذات الدرجة الثالثة للدالتين $u''(x_{i-1})$ و $u''(x_{i+1})$ ثم عوض عن

$$\text{ذلك في المعادلة (8.23) لإثبات أن } t_i = -\frac{1}{240}h^6 u^{(6)}(\eta_i) + O(h^8)$$

٩- اكتب خوارزمية لتنفيذ طريقة الفروق المنتهية لحل مسألة القيم الحدية

(8.28).

١٠- استخدم طريقة الفروق المنتهية ذات الرتبة التقاربية الثانية لحل مسألة

القيم الحدية:

$$y'' = 4y + 4 \cosh 1$$

$$y(0) = 0, \quad y'(\frac{1}{2}) = 0$$

وذلك بوضع $h = \frac{1}{4}$. ثم احسب الأخطاء المضبوطة $|y(x_i) - w_i|$ من أجل

$i = 1, 2, 3$ ، حيث إن $y(x) = \cosh(2x - 1) - \cosh 1$ هو الحل المضبوط.

١١- استخدم طريقة الفروق المنتهية ذات الرتبة التقاربية الثانية لحل مسألة

القيم الحدية:

$$y'' = y + e^{x-1}$$

$$y'(0) = e^{-1}, \quad y'(1) = 2$$

وذلك بوضع $h = \frac{1}{4}$. ثم احسب الأخطاء المضبوطة $|y(x_i) - w_i|$ من أجل

$i = 1, 2, 3$ ، حيث إن $y(x) = xe^{x-1}$ هو الحل المضبوط.

١٢- استخدم صيغة النقطتين التي درسناها في الفصل الخامس لتقريب

التفاضلين $y'(a)$ و $y'(b)$ الموجودين في الشروط الحدية (8.28b)، ثم استنتج الطريقة

العددية لحل مسألة القيم الحدية (8.28). ماهي رتبة التقارب للطريقة التي أوجدتها؟

١٣- استخدم الطريقة العددية التي أوجدتها في التمرين السابق لحل مسألة

القيم الحدية الموجودة في التمرين ١٠ ثم قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا

مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ١٠.

١٤- استخدم الطريقة العددية التي أوجدتها في التمرين ١٢ لحل مسألة القيم

الحدية الموجودة في المثال (٨، ٦) وذلك بوضع $N = 3$ ثم احسب الأخطاء المضبوطة

وقارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي حصلنا عليها في المثال (٨,٦).

١٥- استخدم طريقة الفروق المنتهية ذات الرتبة الثانية لحل مسألة القيم الحدية غير الخطية:

$$y'' = y^3$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

وذلك بوضع $N = 3$. احسب التكرار الثاني في طريقة نيوتن، أي $w^{(2)}$. ثم احسب الخطأ $|y(x_i) - w_i^{(2)}|$ من أجل $i = 1, 2, 3$ حيث إن $y(x) = \frac{1}{x+1}$.

١٦- اعتبر استخدام طريقة الرصف لحل مسألة القيم الحدية (8.55) اكتب عناصر المصفوفة A والطرف الأيمن b في المعادلة (8.63).

١٧- استخدم طريقة الرصف لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في المثال (٨,٨) وذلك بوضع $h = 0.2$. احسب الحل التقريبي عندما $x = 0.1$ و $x = 0.25$ ثم احسب الخطأ المرافق لكل تقريب وقارن ذلك بالنتائج التي حصلنا في المثال (٨,٧). ماذا تلاحظ؟

١٨- استخدم طريقة الرصف لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ١ وذلك بوضع $\varphi_j(x) = \sin j\pi x$ من أجل $j = 0, 1, 2, 3$. أكتب الحل التقريبي $W_3(x)$ ثم احسب قيم تقريبية للحل عند $x_i = 0.2i$ من أجل $i = 1, 2, 3, 4$ ثم احسب الأخطاء المضبوطة $|y(x_i) - W_3(x_i)|$ حيث إن:

$$y(x) = \cosh(2x - 1) - \cosh 1$$

١٩- أعد حل التمرين السابق وذلك باختيار دوال القاعدة $\varphi_0(x) = 0$ و $\varphi_j(x) = x^j(1-x)$ من أجل $j = 1, 2, 3$. احسب قيم تقريبية للحل عند

تحصل عليها في التمرين السابق.

ثم قارن النتائج التي تحصل عليها هنا مع تلك التي

٢٠- استخدم طريقة الرصف لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ٢

وذلك بوضع $\varphi_j(x) = \sin j\pi x$ من أجل $j = 0, 1, 2, 3$. اكتب الحل التقريبي $W_3(x)$ ثم احسب قيم تقريبية للحل عند $x_i = 0.2i$ من أجل $i = 1, 2, 3, 4$ ثم احسب الأخطاء المضبوطة $|y(x_i) - W_3(x_i)|$ حيث إن $y(x) = xe^{x-1}$.

٢١- اعتبر استخدام طريقة جالركن لحل مسألة القيم الحدية (8.55) اكتب عناصر المصفوفة A والطرف الأيمن b في المعادلة (8.63).

٢٢- أوجد التكاملات الموجودة في المعادلتين (8.71) و (8.72) ثم احسب قيم الثابتين c_2 و c_3 .

٢٣- استخدم طريقة جالركن لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في المثال (٨،٩) وذلك بوضع $h = 0.2$. احسب الحل التقريبي عندما $x = 0.1$ و $x = 0.25$ ثم احسب الخطأ المرافق لكل تقريب وقارن ذلك بالنتائج التي حصلنا في المثال (٨،٧). ماذا تلاحظ؟.

٢٤- استخدم طريقة جالركن لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ١ وذلك بوضع $\varphi_j(x) = \sin j\pi x$ من أجل $j = 0, 1, 2, 3$. اكتب الحل التقريبي $W_3(x)$ ثم احسب قيم تقريبية للحل عند $x_i = 0.2i$ من أجل $i = 1, 2, 3, 4$ ثم احسب الأخطاء المضبوطة $|y(x_i) - W_3(x_i)|$ حيث إن:

$y(x) = \cosh(2x-1) - \cosh 1$. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ١٨.

٢٥- استخدم طريقة جالركن لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين

٢ وذلك بوضع $\varphi_j(x) = \sin j\pi x$ من أجل $j = 0, 1, 2, 3$. اكتب الحل التقريبي $W_3(x)$ ثم احسب قيم تقريبية للحل عند $x_i = 0.2i$ من أجل $i = 1, 2, 3, 4$ ثم احسب الأخطاء المضبوطة $|y(x_i) - W_3(x_i)|$ حيث إن:

$y(x) = \cosh(2x - 1) - \cosh 1$. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ٢٠.

٢٦- اكتب متسلسلة تايلور ذات الدرجة الثالثة للدالتين $y(x_{i-1})$

و $y(x_{i+1})$ ومتسلسلة تايلور ذات الدرجة الأولى للدالتين $y''(x_{i-1})$ و $y''(x_{i+1})$ ثم

عوض عن ذلك في المعادلة $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = \frac{h^2}{6}[y''_{i-1} + 4y''_i + y''_{i+1}] + t_i$

لإثبات أن الخطأ المحلي المقطوع لمعادلة الفروق (8.81) هو:

$$t_i = -\frac{1}{12}h^4 y^{(4)}(\eta_i) + O(h^6).$$

٢٧- استخدم طريقة دالة الشريحة التكميلية لحل مسألة القيم الحدية:

$$y'' = y + 1$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

وذلك بوضع $N = 1$ ، ثم استخدم حل دالة الشريحة الذي تحصل عليه لحساب قيماً

تقريبية للحل المضبوط $y(x)$ وتفاضليه $y'(x)$ و $y''(x)$ عندما

$x = 0.25$ ، $x = 0.5$ ، و $x = 0.75$. قارن هذه القيم مع القيم المضبوطة علماً بأن الحل

$$y(x) = \frac{\sinh x + \sinh(1-x)}{\sinh 1} - 1 \text{ المضبوط هو:}$$

٢٨- استخدم طريقة دالة الشريحة التكميلية لحل مسألة القيم الحدية الموجودة

في المثال (٨، ١٠) وذلك بوضع $N = 2$. احسب قيماً تقريبية للحل وتفاضليه الأول

والثاني عند $x = 0.75$. قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي

حصلنا عليها في المثال (٨، ٩).

٢٩- استخدم طريقة دالة الشريحة التكميية لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في المثال (٨,٤) وذلك بوضع $N=3$. احسب قيماً تقريبية للحل عند العقد x_i ، $i=1,2,3$ قارن هذه القيم مع تلك التي حصلنا عليها في المثال (٨,٥). ماذا تلاحظ؟.

٣٠- استخدم طريقة دالة الشريحة التكميية لحل مسألة القيم الحدية غير الخطية والموجودة في المثال (٨,٧) وذلك بوضع $N=3$. احسب قيماً تقريبية للحل عند العقد x_i ، $i=1,2,3$ قارن هذه القيم مع تلك التي حصلنا عليها في هذا المثال.

٣١- استخدم طريقة دالة الشريحة التكميية لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في المثال (٨,٨) وذلك بوضع $N=3$. احسب قيماً تقريبية للحل عند $x=0.1$ و $x=0.25$ وقارن هذه القيم مع تلك التي حصلنا عليها في المثالين (٨,٧) و (٨,٨).

٣٢- استخدم طريقة دالة الشريحة التكميية لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ١ وذلك بوضع $N=3$. احسب قيماً تقريبية للحل وتفاضليه الأول والثاني عند العقد x_i ، $i=1,2,3$. ثم قارن القيم التقريبية للحل عند هذه العقد مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ١. ماذا تلاحظ؟.

٣٣- اعتبر دالة الشريحة التربيعية $s(x) = Q_i(x)$ لكل $x \in [x_i, x_{i+1}]$ من

أجل:

$i=0,1,2,\dots,N$ ، حيث إن x_i كما هي معرفة في المعادلة (8.7) و

$$Q_i(x) = a_{i0} + a_{i1}(x - x_i) + a_{i2}(x - x_i)^2 \quad (8.87)$$

من أجل $i=0,1,2,\dots,N$ ، حيث إن a_{i0} ، a_{i1} و a_{i2} من أجل $i=0,1,2,\dots,N$ ثوابت حقيقية. بالتالي يكون لدينا $s(x) \in C^2[a,b]$. ولتكن s_i قيمة تقريبية للحل $y(x)$ عند $x = x_i$ تم الحصول عليها بواسطة كثيرة الحدود $Q_i(x)$ والتي تمر خلال النقطتين (x_i, s_i) و (x_{i+1}, s_{i+1}) . استخدم العلاقات:

$$Q_i(x_i) = s_i, \quad Q_i(x_{i+1}) = s_{i+1}$$

$$Q_i''(x_i) = \frac{1}{2}[F_i + F_{i+1}]$$

لكتابة الثوابت a_{i0}, a_{i1}, a_{i2} كدوال بـ s_i, s_{i+1}, F_i و F_{i+1} . ثم استخدم خاصية الاتصال $Q'_{i-1}(x_i) = Q'_i(x_i)$ لإثبات أن:

$$s_{i-1} - 2s_i + s_{i+1} = \frac{h^2}{6}[F_{i-1} + 4F_i + F_{i+1}]$$

من أجل $i = 1, 2, \dots, N$ حيث إن $F_j = f_j s_j + g_j$. بناء عليه فإنه بحل هذا النظام الخطي (إذا كانت المسألة خطية) يمكن معرفة قيم الثوابت a_{i0}, a_{i1}, a_{i2} وبالتالي حل دالة الشريحة (8.87) من أجل $i = 0, 1, 2, \dots, N$. أوجد الخطأ المحلي المقطوع لهذه الطريقة. ما هي رتبته التقاربية؟

٣٤- استخدم طريقة دالة الشريحة التربيعية الموضحة في التمرين السابق لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ٢٧. ثم استخدم حل دالة الشريحة الذي تحصل عليه لحساب قيماً تقريبية للحل المضبوط $y(x)$ وتفاضله $y'(x)$ عندما $x = 0.25, x = 0.5$ و $x = 0.75$. احسب الأخطاء $|y(x) - s(x)|$ و $|y'(x) - s'(x)|$ عند هذه القيم لـ x . قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك التي تحصل عليها في التمرين ٢٧.

٣٥- استخدم طريقة دالة الشريحة التربيعية لحل مسألة القيم الحدية غير الخطية والموجودة في المثال (٨,٧) وذلك بوضع $N = 3$. احسب قيماً تقريبية للحل عند العقد $x_i, i = 1, 2, 3$ قارن هذه القيم مع تلك التي حصلنا عليها في هذا المثال.

٣٦- استخدم طريقة دالة الشريحة التربيعية لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في المثال (٨,٨) وذلك بوضع $N = 3$. احسب قيماً تقريبية للحل عند $x = 0.1$ و $x = 0.25$ وقارن هذه القيم مع تلك التي حصلنا عليها في المثالين (٨,٧) و (٨,٨).

تمارين الحاسب

ح ١ - استخدم طريقة الفروق المنتهية المركزية (8.12) لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ١ وذلك عندما يكون h مساوياً لـ $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{10}$ ، $\frac{1}{20}$ و $\frac{1}{40}$ بالتالي. احسب القيمة العظمى للخطأ لكل حالة ثم قارنها. ماذا تلاحظ؟. هل يمكن الاستنتاج من النتائج العددية أن معدل تقارب الطريقة يكون تربيعياً؟. ملاحظة:

راجع البندين (٥,٢ و ٥,٣) وتمارين الفصل الخامس.

ح ٢ - استخدم طريقة نيوميروف (8.23) لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ١ وذلك عندما يكون h مساوياً لـ $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{10}$ ، $\frac{1}{20}$ و $\frac{1}{40}$ بالتالي. احسب القيمة العظمى للخطأ لكل حالة ثم قارنها. ماذا تلاحظ؟. هل يمكن الاستنتاج من النتائج العددية أن معدل تقارب الطريقة يكون رباعياً؟.

ح ٣ - استخدم طريقة الفروق المنتهية المركزية (8.12) لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ١١ وذلك عندما يكون h مساوياً لـ $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{10}$ ، $\frac{1}{20}$ و $\frac{1}{40}$ بالتالي. احسب القيمة العظمى للخطأ لكل حالة ثم قارنها. ماذا تلاحظ؟.

ح ٤ - استخدم طريقة نيوميروف (8.23) لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ١١ وذلك عندما يكون h مساوياً لـ $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{10}$ ، $\frac{1}{20}$ و $\frac{1}{40}$ بالتالي. احسب القيمة العظمى للخطأ لكل حالة ثم قارنها. ماذا تلاحظ؟. هل يمكنك استخدام صيغة عددية ذات رتبة تقارب رابعة لتقريب التفاضل الأول الموجود في الشروط الحدية. تلميح: راجع الصيغ العددية الموجودة في الفصل الخامس.

ح ٥ - استخدم طريقة دالة الشريحة التكميية لحل مسألة القيم الحدية الموجودة في التمرين ١ وذلك عندما يكون h مساوياً لـ $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{20}$ ، بالتتالي. ثم احسب $\max_i |y^{(m)}(x_i) - s^{(m)}(x_i)|$ ، من أجل $m = 0, 1, 2$. ماذا تلاحظ؟.

ح ٦ - استخدم طريقة دالة الشريحة التربيعية لحل مسألة القيم الحدية غير الخطية والموجودة في المثال (٨,٧) وذلك عندما يكون h مساوياً لـ $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{8}$ ، $\frac{1}{16}$. احسب القيمة العظمى للخطأ لكل حالة (فقط عند العقد x_i ، $i = 1, 2, \dots, N$).

ح ٧ - استخدم طريقة دالة الشريحة التكميية لحل مسألة القيم الحدية غير الخطية والموجودة في المثال (٨,٧) وذلك عندما يكون h مساوياً لـ $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{8}$ ، $\frac{1}{16}$. احسب القيمة العظمى للخطأ لكل حالة (فقط عند العقد x_i ، $i = 1, 2, \dots, N$).

ح ٨ - استخدم طريقة نيوميروف لحل مسألة القيم الحدية غير الخطية والموجودة في المثال (٨,٧) وذلك عندما يكون h مساوياً لـ $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{8}$ ، $\frac{1}{16}$. احسب القيمة العظمى للخطأ لكل حالة.

* بالنسبة للتمارين ح ٦ - ح ٨ قارن النتائج العددية التي تحصل عليها هنا مع تلك الموجودة في المثال (٨,٧). ماذا تلاحظ؟.

obeikandi.com

المراجع

References

- J. H. Ahlberg, E. N. Nilson and J. L. Walsh, The Theory of Spline and their Applications, Academic Press, New York 1967.
- E. L. Albasiny and W. D. Hoskins, Cubic spline solutions to two point boundary value problems, Computer Journal, Vol. 12 (1969), 151 ñ 153.
- K. Atkinson, An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, N. Y. 1989.
- K. Atkinson, Elementary Numerical Analysis, John Wiley & Sons, N. Y. 1993.
- L. V. Atkinson, P. J. Harley and G. D. Hudson, Numerical Methods with Fortran 77: A practical Introduction, Addison-Wesley Publishing company, Workingham, U.K. 1989.
- N.S. Asaithambi, Numerical Analysis Theory and Practice, Saunders, College Publishing, N.Y. 1995.
- R.G. Bartle, The Elements of Real Analysis, John Wiley and Sons, N.Y. 1976.
- C. G. Broyden, A class of methods for solving nonlinear simultaneous Equations, Mathematics of Computations, Vol. 19 (1967), 557 ñ 593.
- R. Burden and J. D. faires, Numerical Analysis, PWS-Kent Publishing Company, Boston, 2001.
- C. Butcher, The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations, John Wiley, Chichester, 1987.
- L. Collatz, The Numerical Treatment of Differential Equations, Springer-Verlag, N.Y. 1966.
- S. D. Conte and C. de Boor, Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach, McGraw-Hill Book Company, N.Y. 1980.
- G. Dahlquist, Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations, Math. Scand. Vol. 4 (1956), 33 ñ 53.
- G. Dahlquist, Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations, Kungl. Tekniska Hogskolons Handlingar No. 130, 1959.

- P. Davis, Interpolation and Approximation, Dover, N.Y. 1982.
- J. Dennis and R. Schnabel, Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1983.
- J. Dennis and J.J. More, Quasi-Newton methods, motivation and theory, SIAM Review, Vol. 19 (1977), 46 ff 89.
- P. Deuflhard and A. Hohmann, Numerical Analysis in Modern Scientific Computing: an introduction, Springer-Verlag N.Y. 2003.
- L. Fox, An Introduction to Numerical Algebra, Oxford University Press, Oxford 1964.
- W. Fulks, Advanced Calculus, John Wiley and Sons 1978.
- W. Gautschi, Numerical Analysis: An Introduction, Birkhauser, Boston 1997.
- G. Gear, Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. 1971.
- G. H. Golub and C. F. Van Loan, Matrix Computations, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland 1996.
- W. Hager, Applied Numerical Linear Algebra, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1988.
- P. Henrici, Discrete Variable Methods for Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, N. Y. 1962.
- P. Henrici, Elements of Numerical Analysis, John Wiley & Sons, N. Y. 1964.
- F. B. Hilderbrand, Introduction to Numerical Analysis, McGraw-Hill, N.Y. 1974.
- E. Isaacson and H. B. Keller, Analysis of Numerical Methods, John Wiley & Sons, N. Y. 1966.
- M. K. Jain, Numerical Solution of Differential Equations, Wiley Eastern, New Delhi 1984.
- H. B. Keller, Numerical Methods for Two-Point Boundary Value Problems, Blaisdell, Waltham, Massachusetts 1968.
- R. Kress, Numerical Analysis, Springer-Verlag, N.Y. 1998.
- L. Lapidus and J. H. Seinfeld, Numerical Solution of Ordinary Differential Equations, Academic Press, New York 1971.
- A. Neumaier, Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, Cambridge 2001.
- J.M. Ortega, Numerical Analysis in A second Course. Academic Press, N. Y. 1972.
- J.M. Ortega and W.G. Poole Jr., An Introduction to Numerical Methods for Differential Equations, Pitman Publishing Inc., Marshfield, MA 1981.
- J.M. Ortega and W. Rheinboldt, Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, N. Y. 1970.
- V. A. Patel, Numerical Analysis, Saunders College Publishing, N.Y. 1994.

- A. Ralston, A First Course in Numerical Analysis, McGraw-Hill, N. Y. 1965.
- M. Schatzman, Numerical Analysis: A Mathematical Introduction, Oxford University Press, Oxford 2002.
- G.W. Stewart, Introduction to Matrix Computations, Academic Press, N. Y. 1973
- J. Stoer and R. Bulirsch, Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, N.Y. 2002.
- G. Strang, Linear Algebra and its Applications, Harcourt Brace Jovanovich Publishers, San Diego 1988.
- E. Suli and D. Mayers, An Introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, Cambridge 2003.
- R. A. Usmani and S. A. Warsi, Quintic spline solution of boundary value problems, Computer Mathematics with Applications, Vol. 6 (1980), 197 ñ 203.
- V. Uspensky, Theory of Equations, McGraw-Hill Book Company, New York 1948.
- D. S. Warkins, Fundamental of Matrix Computaions, John Wiley & Sons, New York 1991.
- D.M. Young, Iterative Solution of Large Linear Systems, Academic Press, N. Y. 1971.

obeikandi.com

ثبت المصطلحات

أولاً: عربي - إنجليزي

١

rounding errors

أخطاء التدوير

partial pivoting

ارتكاز جزئي

significant digits

أرقام معنوية

data base

أساس معلومات

stability

استقرار

interpolation

استكمال

٢

dimension of vector

بُعد المتجه

dimension of matrix

بُعد مصفوفة

٣

decomposition

تحليل (تفريق)

numerical analysis

تحليل عددي

decomposition of matrix

تحليل مصفوفة

factorization of matrix

تحليل مصفوفة

binary notation

ترميز ثنائي

backward substitution

تعويض خلفي

partial derivative

تفاضل جزئي

numerical differentiation

تفاضل عددي

asymptotically

تقارباً

quadratic convergence

تقارب تربيعي

linear convergence

تقارب خطي

quartic convergence

تقارب رباعي

monotone convergence

تقارب طردي

accelerating convergence

تقارب متسارع

initial approximation

تقريب ابتدائي

gaussian integration

تكامل جاوس

romborg integration

تكامل رومبرغ

numerical integration

تكامل عددي

algebraic representation

تمثيل جبري

binary representation

تمثيل ثنائي



asymptotic error constant

ثابت الخطأ المقارب

binary

ثنائي



linear algebra

جبر خطي

matrix algebra

جبر المصفوفات

simple root

جذر بسيط

complex root

جذر مركب

multiple root

جذر مكرر (مضاعف)



computer

حاسب آلي، حاسوب

boundary of interval

حدود فترة

arithmetic, calculation

حساب

floating point arithmetic

حسابات النقطة العائمة

binary arithmetic

حساب النظام الثنائي

analytical solution

حل تحليلي

approximate solution

حل تقريبي

numerical solution

حل عددي

actual solution

حل فعلي

exact solution

حل مضبوط

م

global error

خطأ عام

actual error

خطأ فعلي

accumulating error

خطأ متراكم

local truncation error

خطأ محلي مقطوع

exact error

خطأ مضبوط

absolute error

خطأ مطلق

relative error

خطأ نسبي

ا

exponential function

دالة أسية

increasing function

دالة تزايدية

residual function

دالة الترسيب

function of several variable

دالة ذات عدة متغيرات

spline function

دالة شريحة

quadratic spline function

دالة شريحة تربيعية

cubic spline function

دالة شريحة تكعيبية

quintic spline function

دالة شريحة خماسية

polynomial function

دالة كثيرة حدود

continuous function

دالة متصلة

decreasing function

دالة متناقصة

bounded function

دالة محدود

degree of polynomial

درجة كثيرة حدود

accuracy

دقة

accuracy of the numerical solution

دقة الحل العددي

basis functions

دوال القاعدة (الأساس)

orthogonal functions

دوال متعامدة

د

order of derivative

رتبة التفاضل (المشتقة)

order of convergence

رتبة التقارب

rank of matrix

رتبة مصفوفة

order of differential equation

رتبة معادلة تفاضلية

digit

رقم

ص

pivotal row

صف ارتكازي

Newton-Cotes formulas

صيغ نيوتن-كوتس

binary form

صيغة ثنائية

Newton's divided difference formula

صيغة فروق القسمة لنيوتن

Newton's forward difference formula

صيغة الفروق الأمامية لنيوتن

Newton's backward difference formula

صيغة الفروق الخلفية لنيوتن

١

iterative refinement method

طريقة التصفية التكرارية

Euler's method

طريقة أولر

Modified Euler method

طريقة أولر المعدلة

Aitken's method

طريقة إيتكن

Taylor's method

طريقة تايلور

analytical method

طريقة تحليلية

fixed point iteration method

طريقة تكرار النقطة الثابتة

predictor-corrector method

طريقة التنبؤ والتصحيح

bisection method

طريقة التنصيف

Jacobi's method

طريقة جاكوبي

Galerkin method

طريقة جالركن

Gauss-Seidel method

طريقة جاوس-سيدال

Gaussian elimination method

طريقة الحذف الجاوسي

Doolittle's method

طريقة دوليتيل

collocation method	طريقة الرصف
Runge-Kutta method	طريقة رنج-كوتا
mathematical method	طريقة رياضية
Simpson's rule	طريقة سمبسون
trapezoidal rule	طريقة شبه المنحرف
Choleski's method	طريقة شولسكي
explicit method	طريقة صريحة (مباشرة)
implicit method	طريقة ضمنية
finite difference method	طريقة الفروق المنتهية
secant method	طريقة القاطع
Crout's method	طريقة كروت
direct method	طريقة مباشرة
multi-step method	طريقة متعددة الخطوات
consist method	طريقة متوافقة
stable method	طريقة مستقرة
zero-stable method	طريقة مستقرة صفرياً
midpoint method	طريقة نقطة الوسط
Newton's method	طريقة نيوتن
Newton-Raphson method	طريقة نيوتن-رافسون

modified Newton method

طريقة نيوتن المعدلة

Heun's method

طريقة هن

Regula falsi method

طريقة الوضع الخاطئ

ع

calculation factor

عامل حسابي

binary number

عدد ثنائي

condition number

عدد الشرط

decimal number

عدد عشري

mantissa

عدد عشري (معنوي)

finite decimal number

عدد عشري منته

decimal

عشري

node

عقدة

arithmetic operations

عمليات حسابية

binary operation

عملية ثنائية

elements of matrix

عناصر مصفوفة

pivotal element

عنصر ارتكاز

ف

divided difference

فرق قسمة

vector space

فضاء متجهات

ل

initial value	قيمة ابتدائية
approximate value	قيمة تقريبية
boundary value	قيمة حدية
minimum value	قيمة صغرى
maximum value	قيمة عظمى
optimal value	قيمة مثلى
absolute value	قيمة مطلقة

ك

Taylor's polynomial	كثيرة حدود تايلور
quadratic polynomial	كثيرة حدود تربيعية
cubic polynomial	كثيرة حدود تكعيبية
piece wise linear polynomial	كثيرة حدود خطية جزئية
quintic polynomial	كثيرة حدود خماسية
Lagrange polynomial	كثيرة حدود لاغرانج
Legendre's polynomial	كثيرة حدود ليجنדר
characteristic polynomial	كثيرة حدود مميزة
Hermite's polynomial	كثيرة حدود هيرميت

bicimals

كسور ثنائية

J

instability

لا استقرار (عدم الاستقرار)

infinity

لا نهاية

م

sequence

متتالية

arithmetic sequence

متتالية حسابية

divergent sequence

متتالية متباعدة

convergence sequence

متتالية متقاربة

residual vector

متجه ترسب

row vector

متجه صف

zero vector

متجه صفري

column vector

متجه عمود

harmonic series

متسلسلة توافقية

binomial series

متسلسلة ذات الحدين

divergent series

متسلسلة متباعدة

output

مُخرج

input

مدخل (إدخال)

binary digit	مرتبة ثنائية
initial value problem	مسألة القيمة الابتدائية
boundary value problem	مسألة القيم الحدية
homogeneous boundary value problem	مسألة القيم الحدية المتجانسة
tridiagonal matrix	مصفوفة ثلاثية الأقطار
Jacobian matrix	مصفوفة جاكوبي
well-behaved matrix	مصفوفة حسنة التصرف
ill-conditioned matrix	مصفوفة سيئة التصرف
singular matrix	مصفوفة شاذة (منفردة)
zero matrix	مصفوفة صفرية
nonsingular matrix	مصفوفة غير شاذة (منفردة)
strictly diagonally dominant matrix	مصفوفة قطعية السيطرة قطريا
symmetric matrix	مصفوفة متماثلة (متناظرة)
lower triangular matrix	مصفوفة مثلثية دنيا (سفلى)
upper triangular matrix	مصفوفة مثلثية عليا
identity matrix	مصفوفة محايدة
square matrix	مصفوفة مربعة
coefficient matrix	مصفوفة معاملات
positive definite matrix	مصفوفة موجبة بالتحديد

augmented matrix	مصفوفة موسعة
equivalent equations	معادلات متكافئة (متساوية)
pivotal equation	معادلة ارتكازية
partial differential equation	معادلة تفاضلية جزئية
ordinary differential equation	معادلة تفاضلية عادية
difference equation	معادلة فرق
rate of convergence	معدل التقارب
data	معلومات (بيانات)
significant	معنوي (هام)
Euclidean norm	مقياس إقليدي
maximum norm (infinity norm)	مقياس القيمة العظمى
vector norm	مقياس متجهي
matrix norm	مقياس مصفوفي
asymptotic	مُقارب
transpose of matrix	منقول مصفوفة

binary system	نظام ثنائي
linear system	نظام خطي
decimal system	نظام عشري

nonlinear system

نظام غير خطي

fundamental theorem of algebra

النظرية الأساسية في الجبر

taylor's theorem

نظرية تايلور

rolle's theorem

نظرية رول

extreme value theorem

نظرية القيمة القصوى

intermediate value theorem

نظرية القيمة المتوسطة

mean value theorem

نظرية القيمة المتوسطة

weighted mean value theorem for integral

نظرية القيمة المتوسطة للتكامل

fixed point theorem

نظرية النقطة الثابتة

boundary point

نقطة حدية

fixed point

نقطة ثابتة

floating point

نقطة عائمة

exponential growth

نمو أسي

limit of a function

نهاية دالة

limit of a sequence

نهاية متتالية



converge

يتقارب

compute

يحسب

approximate

يُقرَّب

ثانياً: إنجليزي - عربي

A

absolute error

خطأ مطلق

absolute value

قيمة مطلقة

accelerating convergence

تقارب متسارع

accumulating error

خطأ متراكم

accuracy

دقة

accuracy of the numerical solution

دقة الحل العددي

actual error

خطأ فعلي

actual solution

حل فعلي

aitken's method

طريقة إيتكن

algebraic representation

تمثيل جبري

analytical method

طريقة تحليلية

analytical solution

حل تحليلي

approximate

يُقرَّب

approximate solution

حل تقريبي

approximate value

قيمة تقريبية

arithmetic operations

عمليات حسابية

arithmetic sequence

متتالية حسابية

arithmetic, calculation

حساب

asymptotic

مُقارب

asymptotic error constant

ثابت الخطأ المُقارب

asymptotically

تقاربياً

augmented matrix

مصفوفة موسعة

B

backward substitution

تعويض خلفي

basis functions

دوال القاعدة (الأساس)

bicimals

كسور ثنائية

binary

ثنائي

binary operation

عملية ثنائية

binary representation

تمثيل ثنائي

binary arithmetic

حساب النظام الثنائي

binary digit

مرتبة ثنائية

binary form

صيغة ثنائية

binary notation

ترميز ثنائي

binary number

عدد ثنائي

binary system

نظام ثنائي

binomial series

متسلسلة ذات الحدين

bisection method	طريقة التنصيف
boundary of interval	حدود فترة
boundary point	نقطة حدية
boundary value	قيمة حدية
boundary value problem	مسألة القيم الحدية
bounded function	دالة محدود

C

calculation factor	عامل حسابي
characteristic polynomial	كثيرة حدود مميزة
choleski's method	طريقة شولسكي
coefficient matrix	مصفوفة معاملات
collocation method	طريقة الرصف
column vector	متجه عمود
complex root	جذر مركب
compute	يحسب
computer	حاسب آلي، حاسوب
condition number	عدد الشرط
consist method	طريقة متوافقة
continuous function	دالة متصلة

converge	يتقارب
convergence sequence	متتالية متقاربة
crout's method	طريقة كروت
cubic polynomial	كثيرة حدود تكعيبية
cubic spline function	دالة شريحة تكعيبية
D	
data	معلومات (بيانات)
data base	أساس معلومات
decimal	عشري
decimal number	عدد عشري
decimal system	نظام عشري
decomposition	تحليل (تفريق)
decomposition of matrix	تحليل مصفوفة
decreasing function	دالة متناقصة
degree of polynomial	درجة كثيرة حدود
difference equation	معادلة فرق
digit	رقم
dimension of matrix	بُعد مصفوفة
dimension of vector	بُعد المتجه

direct method	طريقة مباشرة
divergent sequence	متتالية متباعدة
divergent series	متسلسلة متباعدة
divided difference	فرق قسمة
doolittle's method	طريقة دوليتيل

E

elements of matrix	عناصر مصفوفة
equivalent equations	معادلات متكافئة (متساوية)
euclidean norm	معياري إقليدي
euler's method	طريقة أويلر
exact error	خطأ مضبوط
exact solution	حل مضبوط
explicit method	طريقة صريحة (مباشرة)
exponential function	دالة أسية
exponential growth	نمو أسي
extreme value theorem	نظرية القيمة القصوى

F

factorization of matrix	تحليل مصفوفة
finite decimal number	عدد عشري منته

finite difference method

طريقة الفروق المنتهية

fixed point

نقطة ثابتة

fixed point iteration method

طريقة تكرار النقطة الثابتة

fixed point theorem

نظرية النقطة الثابتة

floating point

نقطة عائمة

floating point arithmetic

حسابات النقطة العائمة

function of several variable

دالة ذات عدة متغيرات

fundamental theorem of algebra

النظرية الأساسية في الجبر

G

galerkin method

طريقة جالركن

gaussian elimination method

طريقة الحذف الجاوسي

gaussian integration

تكامل جاوس

gauss-Seidel method

طريقة جاوس-سيدال

global error

خطأ عام

H

harmonic series

متسلسلة توافقية

hermite's polynomial

كثيرة حدود هيرميت

heun's method

طريقة هن

homogeneous boundary value problem

مسألة القيم الحدية المتجانسة

I

identity matrix	مصفوفة محايدة
ill-conditioned matrix	مصفوفة سيئة التصرف
implicit method	طريقة ضمنية
increasing function	دالة تزايدية
infinity	لانهاية
initial approximation	تقريب ابتدائي
initial value	قيمة ابتدائية
initial value problem	مسألة القيمة الابتدائية
input	مدخل (إدخال)
instability	لا استقرار (عدم الاستقرار)
intermediate value theorem	نظرية القيمة المتوسطة
interpolation	استكمال
iterative refinement method	طريقة التصفية التكرارية

J

jacobian matrix	مصفوفة جاكوبي
jacobi's method	طريقة جاكوبي

L

lagrange polynomial	كثيرة حدود لاغرانج
---------------------	--------------------

legendre's polynomial

كثيرة حدود ليجندر

limit of a function

نهاية دالة

limit of a sequence

نهاية متتالية

linear algebra

جبر خطي

linear convergence

تقارب خطي

linear system

نظام خطي

local truncation error

خطأ محلي مقطوع

lower triangular matrix

مصفوفة مثلثية دنيا (سفل)

M

mantissa

عدد عشري (معنوي)

mathematical method

طريقة رياضية

matrix algebra

جبر المصفوفات

matrix norm

مقياس مصفوفي

maximum norm (infinity norm)

مقياس القيمة العظمى

maximum value

قيمة عظمى

mean value theorem

نظرية القيمة المتوسطة

midpoint method

طريقة نقطة الوسط

minimum value

قيمة صغرى

modified Euler method

طريقة أويلر المعدلة

modified Newton method

طريقة نيوتن المعدلة

monotone convergence

تقارب طردي

multiple root

جذر مكرر (مضاعف)

multi-step method

طريقة متعددة الخطوات

N

newton-Cotes formulas

صيغ نيوتن-كوتس

newton-Raphson method

طريقة نيوتن-رافسون

newton's backward difference formula

صيغة الفروق الخلفية لنيوتن

newton's divided difference formula

صيغة فروق القسمة لنيوتن

newton's forward difference formula

صيغة الفروق الأمامية لنيوتن

newton's method

طريقة نيوتن

node

عقدة

nonlinear system

نظام غير خطي

nonsingular matrix

مصفوفة غير شاذة (منفردة)

numerical integration

تكامل عددي

numerical analysis

تحليل عددي

numerical differentiation

تفاضل عددي

numerical solution

حل عددي

O

optimal value	قيمة مثلى
order of convergence	رتبة التقارب
order of derivative	رتبة التفاضل (المشتقة)
order of differential equation	رتبة معادلة تفاضلية
ordinary differential equation	معادلة تفاضلية عادية
orthogonal functions	دوال متعامدة
output	مُخرج

P

partial derivative	تفاضل جزئي
partial differential equation	معادلة تفاضلية جزئية
partial pivoting	ارتكاز جزئي
piece wise linear polynomial	كثيرة حدود خطية جزئية
pivotal element	عنصر ارتكاز
pivotal equation	معادلة ارتكازية
pivotal row	صف ارتكازي
polynomial function	دالة كثيرة حدود
positive definite matrix	مصفوفة موجبة بالتحديد
predictor-corrector method	طريقة التنبؤ والتصحيح

Q

quadratic convergence

تقارب تربيعي

quadratic polynomial

كثيرة حدود تربيعية

quadratic spline function

دالة شريحة تربيعية

quartic convergence

تقارب رباعي

quintic polynomial

كثيرة حدود خماسية

quintic spline function

دالة شريحة خماسية

R

rank of matrix

رتبة مصفوفة

rate of convergence

معدل التقارب

regula falsi method

طريقة الوضع الخاطئ

relative error

خطأ نسبي

residual function

دالة الترسيب

residual vector

متجه ترسيب

rolle's theorem

نظرية رول

romborg integration

تكامل رومبرغ

rounding errors

أخطاء التدوير

row vector

متجه صف

runge-Kutta method

طريقة رنج-كوتا

S

secant method	طريقة القاطع
sequence	متتالية
significant	معنوي (هام)
significant digits	أرقام معنوية
simple root	جذر بسيط
simpson's rule	طريقة سمبسون
singular matrix	مصفوفة شاذة (منفردة)
spline function	دالة شريحة
square matrix	مصفوفة مربعة
stability	استقرار
stable method	طريقة مستقرة
strictly diagonally dominant matrix	مصفوفة قطعية السيطرة قطريا
symmetric matrix	مصفوفة متماثلة (متناظرة)

T

taylor's method	طريقة تايلور
taylor's polynomial	كثيرة حدود تايلور
taylor's theorem	نظرية تايلور
transpose of matrix	منقول مصفوفة

trapezoidal rule

طريقة شبه المنحرف

tridiagonal matrix

مصفوفة ثلاثية الأقطار

U

upper triangular matrix

مصفوفة مثلثية عليا

V

vector norm

مقياس متجهي

W

weighted mean value theorem for integral

نظرية القيمة المتوسطة للتكامل

Z

zero matrix

مصفوفة صفرية

كشاف الموضوعات

تقارب ١٧

تقارب تذبذبي ٤٦

تقارب تربيعي ٧٥

تقارب خطي ٧٤

تقارب طردي ٤٦

تقريب ابتدائي ٤٦

تكامل جاوس ٣٢٦

تكامل رومبرغ ٣٢٠

تكامل عددي ٢٩٩

ث

ثابت الخطأ المقارب ٦٩

ثنائي ١١

ج

جذر بسيط ٧٩

جذر مركب ٩٦

جذر مكرر (مضاعف) ٧٧

أ

أخطاء التدوير ١٠، ١

ارتكاز جزئي ١٤٢

أرقام معنوية ١١

استقرار ١٩، ١

استكمال ٢٠٩، ٥

استكمال هيرميت ٢٣٨

ب

بعد المتجه ١١٨

بعد مصفوفة ١١٧

ت

تحليل عددي ١

تحليل مصفوفة ١٤٨

تعويض خلفي ١٢٧

تفاضل عددي ٢٧٦

م

حاسب آلي، حاسوب ١١

حسابات النقطة العائمة ١١

حساب النظام الثنائي ١١

حل تقريبي ١٧

حل عددي ١٧

حل فعلي ٣٧

حل مضبوط ٢٦

م

خطأ عام ٣٥٥

خطأ فعلي ٢٠

خطأ محلي مقطوع ٤٥٢، ٣٥٤

خطأ مضبوط ٤٨

خطأ مطلق ١٣

خطأ نسبي ١٤

خوارزمية الاسترخاء ١٩٠

خوارزمية الارتكاز الجزئي ١٤٤

خوارزمية أويلر ٣٥٢

خوارزمية برستو ١٠١

خوارزمية برويدن ٤٣١

خوارزمية التحليل المثلثي ١٥٨

خوارزمية تكامل رومبرغ ٣٢٤

خوارزمية تكرار النقطة الثابتة ٤٧

خوارزمية تكرار النقطة الثابتة للنظام

غير الخطي ٤١٤

خوارزمية التنصيف ٢٧

خوارزمية جاكوبي ١٨٢

خوارزمية الجذف الجاوسي ١٣٦

خوارزمية دالة الشريحة التكميلية

للاستكمال ٢٥٧

خوارزمية دالة الشريحة التكميلية لمسألة

القيم الحدية ٤٨٥

خوارزمية رنج-كوتا ٣٧٧

خوارزمية شبه المنحرف ٣٨٦

خوارزمية شولسكي ١٦٠

خوارزمية فروق القسمة ٢٢٩

خوارزمية الفروق المتهمة ٤٥١

خوارزمية الفروق المتهمة للمسألة غير

الخطية ٤٦٥

خوارزمية القاطع ٦٧

خوارزمية كثيرة حدود لاغرانج ٢١٩

ص

- صف ارتكازي ١٣٠
- صيغ نيوتن-كوتس المغلقة ٣٠٦
- صيغ نيوتن-كوتس المفتوحة ٣١١
- صيغة فروق القسمة لنيوتن ٢٢٥
- صيغة فروق القسمة الأمامية لنيوتن ٢٣٠
- صيغة الفروق الأمامية لنيوتن ٢٣١
- صيغة فروق القسمة الخلفية لنيوتن ٢٣٥
- صيغة الفروق الخلفية لنيوتن ٢٣٦

ط

- طريقة التصفية التكرارية ١٧٤
- طريقة أويلر ٣٥٠
- طريقة أويلر المعدلة ٣٧٣
- طريقة إيتكن ٨٤
- طريقة برستو ٩٧
- طريقة برويدن ٤٢٩
- طريقة تايلور ٣٦٢
- طريقة تكرار النقطة الثابتة ٤١، ٤١٢
- طريقة التنبؤ والتصحيح ٣٩٧

خوارزمية كثيرة حدود هيرميت ٢٤٣

خوارزمية نقطة الوسط ٣٦٠

خوارزمية نيوتن ٤٢٤

خوارزمية هورنر ٩٤

خوارزمية الوضع الخاطئ ٣٤

د

- دالة الترسيب ٤٧٠
- دالة شريحة ٢٤٨
- دالة شريحة خطية ٢٥٠
- دالة شريحة تربيعية ٤٩٢
- دالة شريحة تكعيبية ٢٥٢
- دالة شريحة خماسية ٢٥٩
- دالة كثيرة حدود تجزئية ٢٤٧
- دالة متصلة ٢
- درجة كثيرة حدود ٢١٨
- دقة الحل العددي ١٧
- دوال القاعدة (الأساس) ٤٧٠

ر

- رتبة التقارب ٦٨
- رتبة معادلة تفاضلية ٤٤١

طريقة نقطة الوسط ٣٥٨

طريقة نيوتن ٤٢٠

طريقة نيوتن بالفرق المنتهي ٤٢٦

طريقة نيوتن - رافسون ٥٧

طريقة نيوتن المعدلة ٨٢

طريقة هن ٣٧٣

طريقة هورنر ٩٢

طريقة الوضع الخاطئ ٣٢



عدد الشرط المصفوفة ١٧٠

عدد عشري ١١

عدد عشري (معنوي) ١١

عمليات حسابية ١٩

عناصر مصفوفة ١١٧

عنصر ارتكاز ١٣٠



فرق قسمة ٢٢٣



قيمة ابتدائية ٣٤٧

قيمة تقريبية ١٣،٩

طريقة التنصيف ٢٤

طريقة جاكوبي ١٧٩

طريقة جالركن ٤٧٣

طريقة جاوس - سيدال ١٨٥

طريقة الحذف الجاوسي ١٢٧

طريقة دالة الشريحة التكميلية ٤٧٧

طريقة دوليتيل ١٥٣

طريقة الرصف ٤٧١

طريقة رنج - كوتا ٢٦٨

طريقة سمبسون ٣٠٦

طريقة شبه المنحرف ٣٠٢

طريقة شولسكي ١٥٣

طريقة صريحة (مباشرة) ٣٨٤

طريقة ضمنية ٣٨٤

طريقة الفروق المنتهية ٣٤٩، ٤٤٥

طريقة القاطع ٦٤

طريقة كروت ١٥٣

طريقة متعددة الخطوات ٣٨٤

طريقة متوافقة ٣٩٤

طريقة مستقرة ٣٩٦

طريقة مستقرة صفرياً ٣٩٦

قيمة حدية ٤٤١

ك

كثيرة حدود برنستين ٢١١

كثيرة حدود تايلور ٧

كثيرة حدود خطية جزئية ٢٥٠

كثيرة حدود لاغرانج ٢١٦

كثيرة حدود ليجندر ٣٣١

كثيرة حدود مميزة ٣٩٥

كثيرة حدود هيرميت ٢٤٣

م

متتالية ١٧

متجه ترسب ٢١٧

متجه صف ١١٨

متجه صفري ١٢٣

متجه عمود ١١٨

متسلسلة توافقية ٤١

مسألة القيمة الابتدائية ٣٤٧

مسألة القيم الحدية ٤٤١

مسألة القيم الحدية المتجانسة ٤٤٥

مصفوفة ١١٧

مصفوفة ثلاثية الأقطار ١٢٤

مصفوفة جاكوبي ٤١٥

مصفوفة حسنة التصرف ١٧١

مصفوفة سيئة التصرف ١٧١

مصفوفة شاذة (منفردة) ١٢٢

مصفوفة غير شاذة (منفردة) ١٢٢

مصفوفة قطعية السيطرة قطريا ١٢٥

مصفوفة متماثلة (متناظرة) ١١٩

مصفوفة مثلثية دنيا (سفلى) ١٢١

مصفوفة مثلثية عليا ١٢١

مصفوفة محايدة ١٢١

مصفوفة مربعة ١١٧

مصفوفة معاملات ١٢٩

مصفوفة موجبة بالتحديد ١٢٦

مصفوفة موسعة ١٢٩

معادلات خطية ١١٥

معادلات غير خطية ٢٣، ٤٠٩

معادلة ارتكازية ١٣٠

معادلة تفاضلية جزئية ٣٤٥

معادلة تفاضلية عادية ٣٤٥

معدل التقارب ١٧، ٦٨

- نظرية رول ٤
- نظرية القيمة القصوى ٥
- نظرية القيمة المتوسطة ٢
- نظرية القيمة المتوسطة للتفاضل ٦
- نظرية القيمة المتوسطة للتكامل ٥
- نظرية النقطة الثابتة ٥٠
- نقطة ثابتة ٤١
- نقطة عائمة ١١
- نمو أسي ١٩
- نهاية دالة ١
- نهاية متتالية ١٧
- معايير الوقوف ٣٧
- معياري إقليدي ١٦٣
- معياري القيمة العظمى ١٦٣
- معياري متجهي ١٦٣
- معياري مصفوفي ١٦٥
- منقول مصفوفة ١١٨
- ن**
- نظام ثنائي ١١
- نظام خطي ١١٥
- نظام عشري ١٠
- نظام غير خطي ٤٠٩
- نظرية تايلور ٩،٧