

الإحصاءات الالعلمية

Nonparametric Statistics

معظم الاختبارات الإحصائية التي تمت مناقشتها في الفصول السابقة اعتمدت على توزيعات احتمالية خاصة أو توزيع المعاينة مثل التوزيع الطبيعي، t ، F ... إلخ. وقد تم عمل بعض الفروض حول التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات موضع الدراسة. وفي بعض المسائل، قد لا نرغب في فرض مثل هذه الفروض حول معالم المجتمع وعليه فإننا نستخدم اختبارات لا تعتمد على التوزيعات أو لا معلمية.

في معظم هذه المسائل البيانات ليست كمية في طبيعتها ولكنها تكون بيانات اسمية أو ترتيبية. في حالة البيانات الاسمية يتم تسمية الأنواع وليس أكثر من ذلك. لذا فإنه في حالة الثروة الحيوانية يمكن تصنيفها على شكل عجول، تبيعه، تبيع، أبقار، ثيران، ومجموعة الخضروات يمكن تصنيفها بالنوع مثل الهليون، الفلفل، الجزر... إلخ. أو الناخبين يمكن تسميتهم بالأحزاب السياسية،... إلخ. وشكل هذه البيانات يعتمد بصفة عامه على الرقم أو التكرار الذي يقع في كل فئة. البيانات الاسمية تعبر عن العلاقة الترتيبية وعليه يمكن استخدام الرتبة. لذا، المستهلكين يمكن أن يرتبوا طعامهم المفضل والصحافة يمكن أن ترتب فريق كرة القدم للكلية على مستوى الوطن، أو ربما

نرى ترتيبات موضوعية أخرى لبعض الأنواع من الخصائص الشخصية مثل الجمال أو التفضيلات. هذه الأنواع من البيانات لا تؤدي مباشرة لقياسات فعلية لأنه من غير الممكن على سبيل المثال القول كم تفضل المستهلك للحصول على طعامه من هذا الموقع مقارنة بالموقع الثاني أو الثالث.

لذا فعند التعامل مع بيانات اسميه أو ترتيبية فإننا نستخدم الاختبارات الإحصائية الواردة في الأجزاء التالية:

اختبار مان- وتني The Mann-Whitney Test

يتم استخدام اختبار مان- وتني لتحديد ما إذا كانت العينتين المسحوبتين من نفس المجتمع أو مجتمعات مختلفة. وهذا اختبار غير معلمي مشابه لاختبار عينتين مستقلتين باستخدام اختبار t . ولكن هذا الاختبار لا يتطلب افتراض أن تتبع المجتمعات التوزيع الطبيعي كما في اختبار t .

ويعتمد اختبار مان- وتني على مفهوم إذا تم سحب عيتين عشوائيتين مستقلتين من نفس المجتمع فإن متوسط رتب العينة $r(X_{1i})$ و $r(X_{2i})$ يجب أن يكون متساوياً. وفي المقابل، إذا كان متوسط الرتب $r(X_{1i})$ من العينة الأولى لا يساوي متوسط الرتب $r(X_{2i})$ للعينة الثانية، فإننا على الأرجح لدينا عيتين من مجتمعين مختلفين ونرفض فرض العدم بتساوي متوسطات العينات.

ولعمل هذا الاختبار نأخذ بيانات كلا العينات ثم نرتبها تصاعدياً على أساس أنها عينة واحدة تجميعية ونعطي كل مشاهدة رتبة، وفي حالة القيم المتكررة نأخذ متوسط الترتيب. ثم بعد ذلك يتم أخذ مجموع الرتب للعينة الأولى ونعرفه على أنه الإحصاء U . و U تقريباً تتوزع طبيعياً بمتوسط $E(U) = [n_1 n_2] / 2$ وتباين $\sigma_u^2 = [n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)] / 12$ وبذلك نحسب قيمة z باستخدام المعادلة رقم

(12.1) ونرفض فرض العدم إذا كانت قيمة z المحسوبة تزيد عن قيمه Z_α الجدوليه المتحصل عليها من الجدول رقم (٧) بالملحق كأبي اختبار لـ Z .

$$Z = \frac{u - \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2 + 1}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}} \quad (12.1)$$

وتكون قيمة Z المحسوبة سالبة إذا كانت U صغيره، وهذا يحدث عندما تكون البيانات في العينة الأولى أقل من بيانات العينة الثانية؛ نظراً لأنها عبارة عن حاصل الجمع للرتب الأقل. وعلى العكس فإن قيمة Z المحسوبة تكون موجبه عندما تكون U تمثل مجموع الرتب العليا وهذا يحدث عندما تكون البيانات للعينة الأولى أكبر. ويمكن إجراء هذا الاختبار في حالة اتجاه واحد أو اتجاهين للفرض البديل. ويمكن عرض ذلك من خلال المثال التالي:

يقوم عاملان بفحص نسبة الرطوبة في شاحنة جوب ذرة تم إحضارها للمخزن المحلي. قام العامل الأول بأخذ عشر عينات في الصباح بينما قام العامل الثاني بأخذ أحد عشرة عينة.

الجدول رقم (١٢.١). قراءات الرطوبة للعاملين.

العامل ٢		العامل ١	
١١	٦	٨	١٤
١٠	٧	٥	١٢
٩	٨	٤	١٥
١٢	٦	٦	١٣
٧	٤	١٦	٩
	٥		

يوضح الجدول قراءة نسبة الرطوبة لكل عامل. المطلوب هل هناك اختلاف في قراءات الرطوبة بين العاملين عند مستوى معنوية ٥٪. أولاً نكتب فرض العدم والفرض البديل كالتالي :

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

وحيث إن هذا عبارة عن اختبار اتجاهين تم الحصول على قيم Z الحرجة (الجدوليه) من جدول رقم (٧) بالملحق وكانت ± 1.96 عند مستوى معنوية ٥٪. بعد ذلك يتم إيجاد الرتب للبيانات التجميعية وتحديد ذلك لبيانات العينة الأولى باستخدام البنط العريض (الجدول رقم ١٢،٢) وذلك لحساب إحصاءة U.

$$U = \sum r(X_{ij}) = 1.5 + 3.5 + 6 + 10.5 + 12.5 + 16.5 + 18 + 19 + 20 + 21 = 128.5$$

$$E(u) = [n_1 n_2] / 2 = [(10)(11)] / 2 = 110/2 = 55$$

$$\sigma_u^2 = [n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)] / 12 = [10 \cdot 11 (10 + 11 + 1)] / 12 = [110(22)] / 12 = 2420/12 = 201.66.$$

لذا فإن Z المحسوبة يمكن إيجادها كالتالي :

$$Z = (u - E(u)) / \sigma_u = (128.5 - 55) / \sqrt{201.66} = 73.5 / 14.2 = 5.18$$

وبمقارنتها بقيمة Z الجدولية نجد أنها تقع في المنطقة الحرجة. وعليه فإننا نرفض فرض العدم بتساوي متوسط قراءات الرطوبة لكلا العاملين ونختم القول بأن قراءة العامل الأول أكبر.

الجدول رقم (١٢.٢). بيانات ترتيب قراءات الرطوبة.

القياس	٤	٤	٥	٥	٦	٦	٦	٧	٧	٨	٨
الرتبة	١,٥	١,٥	٣,٥	٣,٥	٦	٦	٦	٨,٥	٨,٥	١٠,٥	١٠,٥
القياس	٩	٩	١٠	١١	١٢	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	
الرتبة	١٢,٥	١٢,٥	١٤	١٥	١٦,٥	١٦,٥	١٨	١٩	٢٠	٢١	

اختبار الإشارة The Sign Test

اختبار الإشارة اختبار بسيط الإجراء وهو اختبار لا معلمي مكافئ لاختبار t المزدوج لعينتين غير مستقلتين. وهناك اختبارات أخرى مثل اختبار إشارة الرتب ويلكوكسن Wilcoxon ، والذي يعتبر مناسباً في مثل هذه الحالة. في اختبار الإشارة نحن نفترض عادة بيانات ترتيبية وعليه نقرر ما إذا كانت الملاحظة الأولى من كل زوج أكبر من الثانية فإننا نستبدلها بإشارة موجبه وإذا كانت أقل منها نستبدلها بإشارة سالبة. واختبار فرض العدم لاختبار الإشارة عادة لعينتين مأخوذة من مجتمعين لهما نفس الوسيط لذا فإن الاحتمال للإشارة الموجبة أو السالبة مساوٍ لـ ٠,٥ لكل زوج من البيانات. لذا فإن التوزيع ذي الحدين وتقريب التوزيع الطبيعي لتوزيع ذي الحدين تعتبر توزيعات معاينة مناسبة لهذا الاختبار. ويتم توظيف أو استخدام التوزيع الثاني إذا كان لدينا عينات كبيرة. ونعمل الاختبار للعينات الكبيرة ($n > 20$) باستخدام Z المحسوبة والمعرفة كما في المعادلة رقم (12.2) حيث R عبارة عن عدد الإشارات الموجبة و n تمثل عدد الأزواج للبيانات. ونقارن قيمه Z المحسوبة باستخدام المعادلة رقم (12.2) بقيمة Z الجدولية لقبول أو رفض فرض العدم.

$$Z = (2R - n) / \sqrt{n} \quad (12.2)$$

ويمكن إيضاح ذلك من خلال المثال التالي :

نفترض أنه تم سؤال مجموعة من ٢٢ شخصاً لتقييم منتجين غذائية جديدة باستخدام معيار من ١ - ٢٠ حيث يكون ٢٠ هو الأفضل. والبيانات موضحة في الجدول رقم (١٢,٣) التالي :

الجدول رقم (١٢,٣). ترتيب المستهلك لتوعين جديدة من منتجات الأغذية.

المستهلك	الطماطم الفرنسية المقلية	وجبة خفيفة من المشمش المجفف	الإشارة
١	١٥	١٨	-
٢	١٢	٨	+
٣	٤	١٨	-
٤	١٩	١١	+
٥	١٠	٥	+
٦	١٧	١٩	-
٧	١٣	١٦	-
٨	٩	١٥	-
٩	١٤	١٢	+
١٠	١٦	١٨	+
١١	١١	١٣	-
١٢	١٥	١٨	-
١٣	٨	١٢	-
١٤	١٢	١٧	-
١٥	١٦	١٩	-
١٦	١٧	١٥	+
١٨	١٣	١٥	-
١٩	١٨	١٥	+
٢٠	١٥	١٧	-
٢١	١٦	١٩	-
٢٢	١١	١٧	-

اختبر ما إذا كان وسيط الرتب لكلا المنتجين متساوي عند مستوى معنوية ٥٪.
نكتب فرض العدم والفرض البديل كالتالي:

$$H_0 : p = 0.5$$

$$H_a : p \neq 0.5$$

وحيث إن هذا اختباراً ذا اتجاهين ؛ لأنه لم يسأل هل أحد المنتجين أفضل من الآخر أم لا. عدد الإشارات الموجبة لهذه المجموعة من البيانات يساوي ٧. ولذلك نستخدم المعادلة رقم (12.2) لإيجاد قيمة Z ثم نقارنها بـ Z الحرجة (الجدولي) من الجدول رقم (٧) بالملحق والتي تساوي ± 1.96 لنقرر بقبول أو رفض فرض العدم، وحيث إن قيمة Z المحسوبة تساوي -1.71 لذا فإننا لا نستطيع رفض فرض العدم.

$$Z = (2R - n) / \sqrt{n} = (2(7) - 22) / \sqrt{22} = (14 - 22) / 4.69 = -1.71$$

وبذلك نقول بأنه ليس هناك تفضيل من المستهلكين لأحد المنتجات على الآخر.

اختبار التتابع The Runs Test

في الجزء السابق في اختبار الإشارة استخدمنا عدد الإشارات الموجبة، ولكن ربما يكون اهتمامنا في عدد تتابع الإشارات الموجبة والسالبة بحيث نفرق التتابع بتسلسل الأرقام بنفس الإشارة. لذا إذا كان لدينا التسلسل التالي:

- - - - + + + +

نلاحظ أنها تحتوي على تتابعين الأول بعدد ٤ إشارات سالبة والثاني بعدد أربع

إشارات موجبة. وفي المقابل فإن التسلسل:

- + - - + + - + + +

يحتوي على عدد ٦ تتابعات، الأول بعدد إشارة سالبة واحدة، والثاني بإشارة موجبة واحدة والثالث بإشارتين سالبتين والرابع بإشارتين موجبتين والخامس بإشارة سالبة واحدة والسادس بثلاث إشارات موجبة. وعدد مرات التابع في التسلسل يمكن أن يتراوح من واحد (جميع الإشارات هي نفسها) إلى n (الإشارات متناوبة). ويمكن اختبار فرض العدم العشوائية بتوقع عدد مرات التابع لعرض التسلسل العشوائي للأرقام في مجموعة البيانات. ويتم رفض فرض العدم إذا كان هناك عدد تتابعات قليل جداً أو كثير جداً في التسلسل.

ولإجراء الاختبار، نحدد الوسيط لمجموعة البيانات ثم نشير للملاحظات تحت الوسيط بإشارات سالبة والتي تلي الوسيط بإشارات موجبة. ولذلك يكون عدد المشاهدات للإشارات السالبة n_1 مساوي لعدد المشاهدات للإشارات الموجبة n_2 ؛ نظراً لحسابنا الوسيط. بعد ذلك نحسب عدد التتابعات r في البيانات ثم نقارن r بقيمة r الجدولي من الجدول رقم (١٣) بالملحق لاتخاذ القرار حيال فرض العدم برفضه أم لا.

ويمكن استخدام اختبار التابع لفحص عشوائية حد الخطأ في نموذج الانحدار وهناك مثال معطى لهذا التطبيق في التمارين في نهاية الفصل.

ويعبر المثال التالي والمتضمن بأن التسلسل التالي عبارة عن مجموعة عشوائية من الأرقام ذات القيم الأقل من ٥٠. استخدم اختبار التابع لبحث ما إذا كانت هذه البيانات عشوائية بمستوى معنوية ٥٪ والبيانات هي:

15	6	29	48	32	12	17	39	31	4
7	16	45	49	13	20	2	25	28	33

ولحل هذا المثال ، نحسب الوسيط ثم نكتب عدد الإشارات الموجبة والإشارات السالبة لتحديد القيم قبل وبعد الوسيط ثم نحدد عدد مرات التتابع. الوسيط يساوي ٢٢,٥ ونكتب الإشارات الموجبة كبديل للقيم الأكبر من الوسيط والإشارات السالبة كبديل للقيم الأقل من الوسيط وتكون الإشارات المتحصل عليها كالتالي :

- -+++ - -++ - - -++ - - -+++

ويكون العدد الكلي للتتابع من هذا الاختبار $r = 8$. ومن الجدول رقم (١٣) بالملحق حيث $n_1 = n_2 = 10$ نجد أن قيمه r الحرجة تساوي ٦ أو أقل. لذا فإننا لا نستطيع رفض فرض العدم للعشوائية عند مستوى معنوية ٥٪.

ارتباط الرتب لسبيرمان Spearman's Rank Correlation

تحليل الارتباط الذي تم بحثه سابقاً ينسب لبيرسون والمبني على افتراض قياس المتغيرات X و Y باستخدام مقياس فترتي. ولكن كما ناقشنا سابقاً، قياس الفترة قد يكون غير ممكن أو غير مناسب في بعض الحالات أو الظروف. وهو أيضاً يفترض أن X ، Y تتبع توزيعين طبيعيين. معامل ارتباط الرتب لسبيرمان r_s ، قد يكون هو الأنسب والمستعمل بكثرة كمقياس لا معلمي يقيس الارتباط ولا يتطلب الشروط المذكورة أعلاه. ويتم حساب الارتباط عادة باستخدام الرتب للبيانات وليس المشاهدات الأصلية.

وتفسير $r_s = +1$ يعني أن العيتين لها نفس الرتب بينما عندما $r_s = -1$ يعني أن العيتين لها نفس الرتب عكسياً وقيم r_s بين -١ و +١ تشير لدرجه ارتباط أقل من الارتباط التام.

ولحساب r_s فإننا أولاً نرتب البيانات في كل عينة من الأصغر إلى الأكبر. ثم نأخذ الفرق لكل زوج من الرتب d_i ثم نربعه ونوجد المجموع الكلي للمربعات ونعوض بالقيم في المعادلة رقم (12.3).

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)} \quad (12.3)$$

ولإيضاح ذلك نفترض المثال التالي الخاص بأصناف الجريب فروت. حيث تم اختيار عينه من الأسر (الزوج والزوجة) وتم سؤالهم لتقييم المنتج من ١ إلى ٢٠ بحيث يكون رقم ٢٠ هو الأفضل. والمطلوب تحديد ما إذا كان الترتيب مرتبط باستخدام مستوى معنوية ٥٪؟ للبيانات المعطاة في الجدول التالي رقم (١٢،٤).

الجدول رقم (١٢،٤). ترتيب تفضيلات الزوج والزوجة لمذاق الجريب فروت الأبيض.

d_i	رتب Y	رتب X	تفضيلات الزوجة	تفضيلات الزوج	الأسرة
			Y	X	
١,٥ -	٦	٤,٥	١٤	١٢	١
٥,٥	٤,٥	١٠	١٣	١٧	٢
٢ -	٣	١	١٢	٩	٣
٠	١١	١١	٢٠	١٨	٤
١ -	٩	٨	١٧	١٥	٥
٦	١	٧	١٠	١٤	٦
٠	٢	٢	١١	١٠	٧
٤,٥	٤,٥	٩	١٣	١٦	٨
١ -	٧	٦	١٥	١٣	٩
٧ -	١٠	٣	١٨	١١	١٠
٣,٥ -	٨	٤,٥	١٦	١٢	١١

$$r_s = 1 - \frac{6[-1.5^2 + 5.5^2 + (-2)^2 + 0^2 + (-1)^2 + 6^2 + 0^2 + 4.5^2 + (-1)^2 + (-7)^2 + (-3.5)^2]}{11(11^2 - 1)}$$

$$r = 1 - \frac{936}{1320} = 0.291$$

ونقارن r_s المحسوبة $r_s = 0.291$ والقيمة الحرجة لـ ρ والمتحصل عليها من الجدول رقم (١٤) بالملحق لعدد $n=11$ والتي تساوي 0.623 أو أكبر. وحيث إن قيمه r_s المحسوبة أقل فإننا لا نستطيع رفض فرض العدم المتضمن أن ρ تساوي الصفر. وعليه بالنسبة لمثالنا يمكن القول بأنه لا يوجد هناك ارتباط بين ترتيب الأزواج والزوجات لتفضيلاتهم.

تمارين Exercises

١- قام الطبيب البيطري بمعاملة مجموعتين من العجول بمظهر وذلك باستخدام جرعتين مختلفتين. حيث تم إعطاء المجموعة الأولى جرعة التعقيم المعيارية والمجموعة الثانية عقار جديد صنع خصيصاً لهذا الغرض. وتم تسجيل عدد الساعات اللازمة حتى تختفي الأعراض على النحو التالي:

الجرعة القياسية ١٥، ٩، ١٢، ٢٢، ١٤، ٩، ١٠، ١٣

العقار الجديد ٧، ٨، ١١، ٦، ٧، ٧، ٤، ١١، ١٣، ٥

المطلوب هل العقار الجديد أكثر فاعلية؟ استخدم اختبار مان-وتني U عند مستوى معنوية ٥٪.

٢- ترغب تعاونيه الحبوب المحلية في اختبار أسرع خطوط الشاحنات للنقل إلى حالة

التخزين ، والمخدومة بخطوط الشحن لشركتي رودهوق Roudheg وفرايت- آر - يو اس Freights-R-US. تمت مراقبة العينتين لتحديد وقت النقل لصالة التخزين بالساعات وتسجيل النتائج التالية :

شاحنات Roudheg ١٠ ، ٨ ، ١٣ ، ١٥ ، ١٧

شاحنات Freights-R-US ١٤ ، ٩ ، ١٢ ، ١٤ ، ١١ ، ٨ ، ١٣ ، ٢٠ ، ١٦

باستخدام اختبار مان- وتني U اختبر ما إذا كان هناك اختلاف في أداء خطي الشحن عند مستوى معنوية ٥٪ .

٣- مصنع لتغليف الخوخ يضع أنصاف الخوخ في علب سعة ١٦ أونصة. قام مدير المصنع بمعايرة الآلة لوضع متوسط ١٦.٠٥ أونصة في العلب. وقام موظفو التحكم بالجودة بسحب ١٥ علبه كل ساعة لتحديد ما إذا كانت عمليات التعبئة سليمة. وفي الساعة الأخيرة تم اختيار مجموعة من العلب ووزن كل علبه على حدة فإذا كان وزنها أكثر من الوزن المتوسط علّمت بـ H وإذا كان أقل من المتوسط علّمت بالرمز L استخدم اختبار التتابع للعينة عند متوسط معنوية ٥٪ اختبر ما إذا كان التتابع عشوائياً.

HLHLLLHHLHHLHLH

٤- يرغب أحد معلمي العلوم الزراعية في الثانوية العامة في اختبار مدى معرفة الطلاب بطريقتي تعليم للحكم على الثروة الحيوانية. الطريقة الأولى هي الإجراء القياسي وذلك بتعليم الطالب في المختبر باستخدام حيوانات حية. والطريقة الثانية هي استخدام سلسلة من مقاطع الفيديو المعدة من قبل خبير متخصص. قام بتقسيم طلاب الفصل لمجموعتين ووزع الطلاب بحيث يكون كل طالب في المجموعة له نظير في المجموعة الأخرى مشابه له في المهارات والموهبة. واستخدم التعليم القياسي

للمجموعة الأولى وتعليم الفيديو للمجموعة الثانية وبعد الانتهاء من الموضوع أعطي الطلاب نفس الاختبار. وكانت نتائجهم كما في الجدول التالي :

القياس	الفيديو
٦٦	٦٨
٦٥	٦٧
٧١	٧٤
٧٢	٦٦
٨٣	٨٠
٧٤	٧٧
٩٢	٩٦
٨١	٩٠
٨٣	٨٠
٧٦	٧٢
٨٧	٨٨
٩٥	٩٥
٩٠	٩٨
٨٥	٩٥
٨٩	٩٦
٧٥	٧٣
٩٣	٩٦
٧٩	٨٨
٨٨	٩٢
٨٢	٧٨
٧٣	٨٥

باستخدام اختبار الإشارة وعند مستوى معنوية ٥٪ هل التعليم باستخدام الفيديو أفضل.

٥- الجدول التالي يوضح البواقي لمسألة الانحدار المتعدد في التمرين رقم (١٣) للفصل الحادي عشر.

نتائج البواقي	المشاهدة	بدور الذرة المتوقعة	البواقي
١	٢٣٦,١٤١٧٩٤٥	- ١,١٤١٧٩	
٢	٢٤٧,١٩٠٦٠٩	- ٢,١٩٠٦١	
٣	٢٥٨,٨٣٣٥٦٥٨	١,١٦٦٤٣٤	
٤	٢٧٠,٤٧٦٥٢٢٥	- ٠,٤٧٦٥٢	
٥	٢٥٢,٧١٥٠١٦٣	٢,٢٨٤٩٨٤	
٦	٢٦٣,٧٦٣٨٣٠٨	١,٢٣٦١٦٩	
٧	٢٧٦,٠٠٠٩٢٩٨	- ١,٠٠٠٩٣	
٨	٢٤١,٦٦٦٢٠١٨	- ١,٦٦٦٢	
٩	٢٣١,٢١١٥٢٩٥	١,٧٨٨٤٧	

باستخدام اختبار التتابع عند مستوى معنوية ٥٪ اختبر ما إذا كانت الإشارات السالبة والموجبة تتوزع عشوائياً.

٦- البيانات التالية توضح البيانات التاريخية لأسعار القهوة والشاي. استخدم طريقه ارتباط الرتب لسييرمان لتحديد ما إذا كان هناك ارتباط بين الأسعار من عدمه مستخدماً مستوى معنوية ٥٪.

أسعار القهوة	أسعار الشاي
٢٠	٣٢
١٧	٣١
١٤	٢٧
١٥	٣٠
١٨	٣٢
١٩	٣٣
١٦	٣٠

٧- افحص مؤشرات السعر والإنتاج التالية لتحديد ما إذا كان هناك بينهما ارتباط مستخدماً طريقه ارتباط الرتب لسبيرمان عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

مؤشر الإنتاج	مؤشر السعر
٩٩	١٤٩
٨٨	١٢٨
١٠٢	٩٠
٩٦	٦٨
٩٦	٧٢
٩٣	٩٠
٩١	١٠٩
٩٤	١١٤
١٠٦	١٢٢
١٠٣	٩٧