الباب الثاني

الرياضيات الاكتوارية

- الفصل السابع: الدوال البيومترية
- الفصل الثامن: جداول الوفاة
- الفصل التاسع: تأمين الدفعات الدورية
- الفصل العاشر: تأمينات رؤوس الأموال
- الفصل الحادي عشر: عدد التبديلات
- الفصل الثاني عشر: علاوات التأمين
- الفصل الثالث عشر: احتياطات رياضية

الفصل السابع

الدوال البيومترية

Fonctions Biomètriques

في هذا الفصل سوف يتم تعريف قواعد الاحتمالات الضرورية للقيام بالعمليات الأكتوارية، حيث إن الرياضيات الأكتوارية تجمع بين الرياضيات المالية وحساب الاحتمالات، فتسديد الالتزامات الناتجة عن استثمار رأس مال لم يعد مؤكدا كما هو الحال في الرياضيات المالية بل مرتبط ببقاء الشخص على قيد الحياة، كما أن المدة التي يتم أثناءها صرف دخل ليست مؤكدة فهي مرهونة بحياة أو وفاة المؤمن له، فالمستحقات تصبح متغيرات عشوائية والقيم الحالية تتحول إلى توقعات رياضية.

لمزيد من المعلومات حول الاحتمالات يمكن للقارئ الرجوع إلى نظريات الاحتمالات التي وقع التطرق إليها في الفصل السابع عشر.

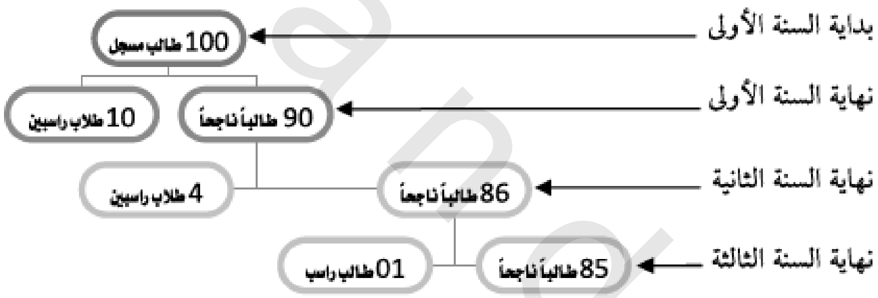
(7.1) احتمال الوفاة واحتمال البقاء على قيد الحياة

يمكن مقارنة الاحتمالات الرئيسية المستخدمة في العمليات الأكتوارية بالمثال التالي:

مثال: ليكن لدينا مدرسة مكونة من 100 طالب مسجلين في الصف الأول: هذه المؤسسة التعليمية التي لا تسمح بالرسوب في أي من فصولها، كانت قد سجلت خلال السنوات الدراسية الثلاث الماضية النتائج التالية:

- 10 طلاب رسبوا في السنة الأولى.
- 4 طلاب رسبوا في السنة الثانية.
- طالب واحد رسب في السنة الثالثة.

هذه الحالة يمكن عرضها على الشكل البياني التالي:

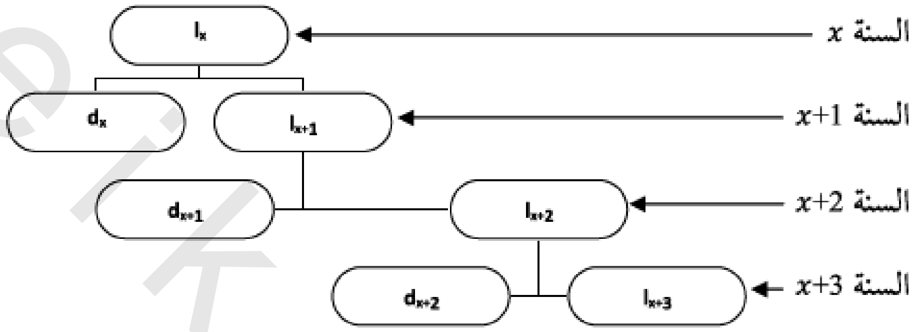


يمكن من خلال هذا الرسم إطلاق سلسلة من الاحتمالات:

- احتمال النجاح في السنة الأولى: $\frac{90}{100}$.
- احتمال الرسوب في السنة الأولى: $\frac{10}{100}$.
- احتمال النجاح في السنة الثانية لطالب مسجل في السنة الأولى: $\frac{86}{100}$.
- احتمال النجاح في السنة الثالثة لطالب مسجل في السنة الثانية: $\frac{85}{100}$.
- احتمال النجاح في السنة الثالثة لطالب مسجل في السنة الأولى: $\frac{85}{100}$.
- احتمال الرسوب في السنة الثالثة لطالب مسجل في السنة الأولى: $\frac{1}{100}$.
- احتمال الرسوب في السنوات الثلاث لطالب مسجل في السنة الأولى:

$$\frac{10+4+1}{100} = \frac{100-85}{100} = \frac{15}{100}.$$

يمكننا الآن تحويل نفس المثال أعلاه إلى العالم الأكتواري، ليصبح الرسم ذاته على النحو التالي:



وفي السياق ذاته للقالب (نجاح/رسوب) سوف نعد بعض الرموز والاحتمالات الأساسية للعمليات الأكتوارية.

الرموز:

x: سن رجل (و y سن امرأة).

l_x: عدد الأفراد الأحياء في سن x.

d_x: عدد الأفراد المتوفين بين السن x والسن $x+1$.

القيم l_x وd_x تقرأ في جدول حياة (وفاة) الذي سنتطرق إليه في الفصل القادم.

$$\boxed{d_x = l_x - l_{x+1}} \tag{7.1}$$

باستخدام نفس التحليل السابق يمكن إيجاد الاحتمالات التالية:

p_x: احتمال بقاء شخص في السن x على قيد الحياة إلى حين بلوغه السن x+1 .

$$\boxed{p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}} \tag{7.2}$$

q_x: احتمال وفاة شخص (وهو في السن x) بين السن x والسن x+1 .

$$\boxed{q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = 1 - p_x} \tag{7.3}$$

$_2p_x$: احتمال بقاء شخص في السن x على قيد الحياة إلى حين بلوغه السن x+2.

$$_2p_x = p_x \times p_{x+1} = \frac{l_{x+1}}{l_x}\frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} = \frac{l_{x+2}}{l_x}$$

$_np_x$: احتمال بقاء شخص في السن x على قيد الحياة إلى حين بلوغه السن x+n.

$$\boxed{_np_x = p_x \times p_{x+1} \times \dots = \frac{l_{x+n}}{l_x}} \quad (7.4)$$

$_{1|}q_x$: احتمال وفاة شخص (وهو في السن x) بين السن x+1 و السن x+2.

$$_{1|}q_x = p_x \times q_{x+1} = \frac{d_{x+1}}{l_x}$$

$_{n|}q_x$: احتمال وفاة شخص (وهو في السن x) بين السن x+n و السن x+n+1.

$$\boxed{_{n|}q_x = \ _np_x \times q_{x+n} = \frac{d_{x+n}}{l_x}} \quad (7.5)$$

$_nq_x$: احتمال وفاة شخص (وهو في السن x) خلال الـ n سنوات القادمة.

$$\boxed{_nq_x = 1 - \ _np_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}} \quad (7.6)$$

مفاهيم تكميلية:

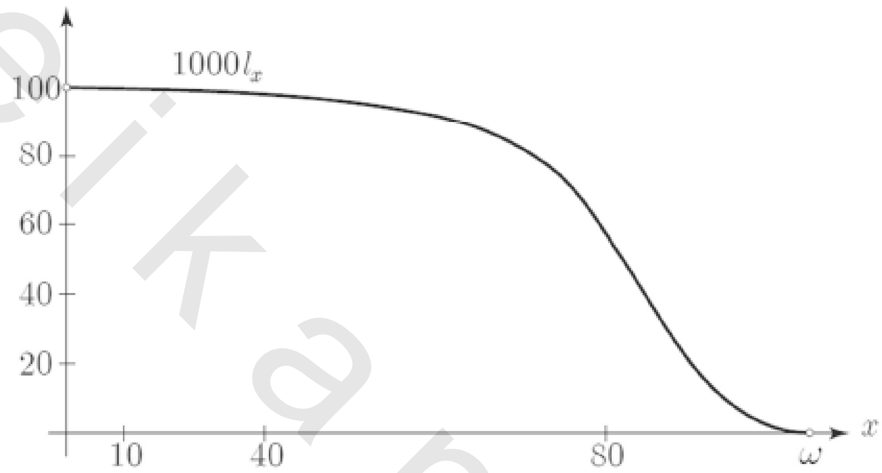
α: أصغر سن مشاهد في جدول الوفاة (انظر الفصل القادم) يقترن باحتمال وفاة غير صفري. في الغالب تبتدئ جداول الوفاة بعدد عشوائي $l_\alpha = 100'000$. كما تبدأ جداول المؤمن لهم بالأعداد ;α = 10 أو 15 أو 20، بينما جداول التعداد السكاني تبدأ بـ;α = 0 .

ω: آخر سن في الجدول يمكن أن نجد فيه أحياء.

$$\boxed{l_x = d_x + d_{x+1} + \dots + d_\omega = \sum_{u=x}^{\omega} d_u} \quad (7.7)$$

$$\boxed{l_{x+1} = l_x\,(1 - q_x)} \quad (7.8)$$

ملاحظة: الرسم البياني التالي يوضح أن سلسلة الأرقام $l_\omega;\dots;l_1;{}_0$ تمثل سلسلة واحد لواحد تنازلية وتسمى **ترتيب الأحياء**.



مثال: استخدم جدول الوفاة المتواجد بالملحق لإيجاد الاحتمالات التالية:

(أ) احتمال أن يبقى رجل في سن 20 على قيد الحياة إلى حين بلوغه سن 60.

(ب) احتمال أن يتوفى رجل في سن 20 قبل بلوغه سن 60.

(جـ) احتمال أن يتوفى رجل في سن 20 عند بلوغه سن 60.

(د) احتمال أن يتوفى رجل في سن 20 عندما يتراوح سنه بين 60 و70.

الحل نحتاج إلى الأرقام التالية لإيجاد الحل $_{20} = 98'439$ ، $l_{60} =$ $86'312$ ، $l_{70} = 71'040$ ، $d_{60} = l_{60} - l_{61} = 86312 - 85288$.

(أ) $_{40}p_{20} = \frac{l_{60}}{l_{20}} = \frac{86312}{98439} = 0.8768$.

(ب) $_{40}q_{20} = \frac{l_{20} - l_{60}}{l_{20}} = \frac{98439 - 86312}{98'439} = 0.1232$.

وبالتالي فإن: $_{40}p_{20} + {}_{40}q_{20} = .8768 + 0.1232 = 1$.

(جـ) $0.0104 = \frac{1{,}024}{98{,}439} = \frac{d_{60}}{l_{20}} = {}_{40|1}q_{20}$.

(د) $0.1551 = \frac{86312-71040}{98439} = \frac{l_{60}-l_{70}}{l_{20}} = {}_{40|10}q_{20} = {}_{20}p_{40} \times {}_{|10}q_{60}$.

(7.2) توقع الحياة

ليكن لدينا رجل على قيد الحياة في عيد ميلاده رقمx . عدد السنوات المتبقية في حياته هو متغير عشوائي يمكننا احتساب التوقع الرياضي له (انظر الفقرة 17.3.3). إذا أهملنا الأجزاء من السنة فإن هذا التوقع يساوي:

$$e_x = 0 \times q_x + 1 \times {}_{1|}q_x + 2 \times {}_{2|}q_x + \cdots + (\omega - x) \times {}_{\omega-x|}q_x$$

$$e_x = \frac{1}{l_x}\left(0 \times d_x + 1 \times d_{x+1} + 2 \times d_{x+2} + \cdots + (\omega - x) d_\omega\right)$$

ويمكن كتابة العبارة أيضا:

$$e_x = \frac{1}{l_x}\left(l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots + l_\omega\right)$$

كذلك يمكننا اختزال العبارة على النحو التالي (وهو ما يسمى **توقع الحياة المختزل**).

$$\boxed{e_x = \frac{1}{l_x}\sum_{t=1}^{\omega-x} l_{x+t}} \qquad (7.9)$$

أما إذا بدأنا بالجمع انطلاقا من صفر فإننا نحصل على **توقع الحياة الكلي**:

$$\boxed{\ddot{e}_x = \frac{1}{l_x}\sum_{t=0}^{\omega-x} l_{x+t}} \qquad (7.10)$$

غالبية جداول الوفاة تعرف المتوسط بين توقع الحياة المختزل وتوقع الحياة الكلي وهو ما يعرف **متوسط توقع الحياة**:

$$\boxed{\mathring{e}_x = \ddot{e}_x - 0.5 = e_x + 0.5} \qquad (7.11)$$

ملاحظة: المقادير d_x،l_x،q_x،p_x و $\overset{o}{e}_x$ تسمى القيم البيومترية. الجدول الذي يحتوى هذه القيم لجميع الأعمار يسمى جدول الوفاة. وهذا الجدول يمكن إعداده بسهولة حيث يكفي معرفة القيم x وكذلك القواعد (7.1) و (7.3) و (7.8) و (7.9).

معدلات توقع الحياة لبعض الدول:

البلد	الرجال	السيدات
اليابان	78	85
السويد	77	82
سويسرا	77	82
أستراليا	77	82
كندا	76	81
إيطاليا	76	82
أسبانيا	75	82
فرنسا	75	83
ألمانيا	74	81
الولايات المتحدة	74	79
يوغسلافيا	70	75
تونس	69	73
البرازيل	64	72
النيبال	58	58
نيجيريا	50	51
سيرا ليون	37	39

المصدر: تقرير الأمم المتحدة لسنة 2000.

(7.2.1) الاحتمالات على شخصين

ليكن لدينا x وy أعمار الشخصين (المؤمن لهما) في اللحظة التي بدأ فيها عقد التأمين نافذا. نتحدث عن انحلال الزوجين إذا حدثت الوفاة الأولى. الاحتمالات الرئيسية التي نعترضها لهذين الشخصين هي:

$_np_{xy}$:احتمال أن يبقى الزوجان على قيد الحياة بعد n سنة.

$$_np_{xy} = {}_np_x + {}_np_y = \frac{l_{x+n}}{l_x}\frac{l_{y+n}}{l_y} \qquad (7.12)$$

$_{|n}q_{xy}$:احتمال أن يتوفى أحد الزوجين خلال الـn سنة القادمة.

$$_{|n}q_{xy} = 1 - {}_np_{xy} = \frac{l_xl_y - l_{x+n}l_{y+n}}{l_xl_y} \qquad (7.13)$$

$_{n|}q_{xy}$:احتمال وفاة أحد الزوجين في السنة بعد nسنة.

$$_{n|}q_{xy} = \frac{l_{x+n}l_{y+n} - l_{x+n+1}l_{y+n+1}}{l_xl_y} \qquad (7.14)$$

ملاحظات:

الرموز التالية نجدها في بعض المؤلفات:

l_{xy}=l_xl_y و d_{xy}=$l_{xy} - l_{x+1:y+1} = l_xl_y - l_{x+1}l_{y+1}$

عند حساب الاحتمالات للوفاة في حالة الشخصين من الأفضل تعريف السن النهائي ω على الطريقة التالية:

$$\omega = \mathrm{MIN}\,(\omega_x, \omega_y) \qquad (7.15)$$

حيث ω_x: السن النهائي للشخص x.

وω_y: السن النهائي للشخص y.

مثال: تعاقد زوجان $x=30$ و$y=35$ مع مؤسسة تأمينية. العقد يقضي بدفع مبلغ 100000 ريال بعد عشر سنوات إذا كان أحد الزوجين أو الاثنين مع بعض ما زالا على قيد الحياة. أوجد هذا الاحتمال باستخدام جدول الوفاة الموجود في الملحق.

الحل

بالنظر إلى قاعدة اتحاد حادثين (أو قانون الجمع- راجع الفقرة (17.3.2).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P = \underbrace{{}_{10}P_{30}}_{M} + \underbrace{{}_{10}P_{35}}_{W} \quad - \underbrace{{}_{10}P_{30}}_{M} + \underbrace{{}_{10}P_{35}}_{W}$$

وهو ما يمكن كتابته على النحو التالي:

$$P = \frac{l_{40}}{l_{30}} + \frac{l_{45}}{l_{35}} - \frac{l_{40}}{l_{30}}\frac{l_{45}}{l_{35}} = \frac{95{,}257}{96{,}850} + \frac{97{,}181}{98{,}154} - \frac{95{,}257}{98{,}850} \times \frac{97{,}181}{98{,}154} = 0.99979$$

(7.3) تمارين

1- ما معنى الرمز: ${}_{8}P_{42}$ ؟

2- ما هو الرمز الذي يمكن استبداله بـ: $\frac{l_{65}-l_{75}}{l_{65}}$؟

3- دي موفر (عالم الرياضيات الفرنسي 1667-1754) كان قد أعد القاعدة التالية لحساب العبارة l_x: $l_x = -x + 86$. معرفا بذلك السن ω في عمر 85 سنة.

(أ) استخدم هذه القاعدة لحساب d_xو d_{x+t}. ماذا تستنتج؟

(ب) احسب التوقع المختزل للحياةe_x.

4-■ أنت مطالب بتقدير التكلفة الحالية لتمويل جراية عمرية في الحين (جراية مدفوعة فوريا مادام المؤمن له على قيد الحياة) تقدر بـ00024' يورو سنويا لمؤمن له كبير في السن يبلغ اليوم 59 سنة. استخدم نسبة فائدة تساوي 4%

وجدول الوفاة الموجود في الملحق، كيف يمكنك تقدير هذه القيمة بافتراض أنك لا تعلم القواعد المتعلقة بحساب الجرايات العمرية (الفصل التاسع من هذا الكتاب).

5- احسب التوقع المختزل للحياة ومتوسط توقع الحياة لشخص عمره 90 سنة، من خلال المعطيات التالية:

l_x	x	l_x	x
5	95	21	90
3	96	15	91
1	97	12	92
0	98	9	93
--	--	7	94

6- اكتب القواعد ثم احسب الاحتمالات التالية باستخدام جدول الوفاة في الملحق:

(أ) احتمال أن يعيش رجل سنة أخرى وهو في سن العشرين.

(ب) احتمال أن تعيش امرأة إلى سن 62 وهي حاليا عمرها 30 سنة.

(ج) احتمال أن تتوفى امرأة قبل بلوغها سن 62 وهي حاليا عمرها 30 سنة.

(د) احتمال أن يعيش رجلان مدة عشر سنوات علما بأن الأول عمره 30 والثاني 40 سنة.

(هـ) احتمال وفاة أحد الرجلين خلال العشر سنوات القادمة علما بأن أعمارهما هي على التوالي 30 و40 سنة.

7- مؤسسة تأمينية لديها 660 عميل أعمارهم 35 سنة وينتظر أن يحصلوا جميعهم على رأس مال في حال بلوغهم سن 65 سنة. باستخدام جدول الوفاة في الملحق ما هو عدد المؤمن لهم الذين من المحتمل أن يحصلوا على المبلغ في سن 65 سنة؟

8- ينص عقد التأمين على الحياة لزوجين بأن يتم دفع مبلغ مالي للسيدة بركلاز (y= 35) أو السيد فاذر (x=37) في حال بقاء أحدهما على قيد الحياة بعد 20 سنة. احسب احتمال حدوث ذلك باستخدام جدول الوفاة الموجود في الملحق.

9- ما هو احتمال أن يتوفى رجل عمره 20 سنة عند بلوغه سن السبعين أو سن الثمانين؟ اكتب القاعدة فقط.

10- ■ جدول الوفاة البلجيكي (HS 68/72)تم تعديله باستخدام قاعدة ماكهام Makeham (خبير أكتواري إنكليزي (1827–1891) التالية: $p_x = sg^{e^x(e-1)}$ حيث المعاملات المدرجة في القاعدة تبلغ:

$$s = 0.999407846, g = 0.99953439, e = 1.105046035$$

(أ) أوجد باستخدام هذه القاعدة احتمال وفاة شخص بعد سنة وهو في سن 30؟

(ب) دائما حسب هذه القاعدة، ما هو عمر رجل يقدر احتمال بقائه على قيد الحياة بعد سنة 0.700685؟

11-■ التعريفة التجميعية السويسرية *GRM 80* وقع تعديلها للقيم $x \geq 58$ باستخدام قانون باركس *Perks* (أكتواري إنكليزي 1902–1970) التالي:

$$1000q_x = \frac{C_0 + C_1 C^{x-65}}{1 + C_2 C^{x-65}}$$

حيث قيم المعاملات هي:

$$C_0 = 3.159, C_1 = 13.4, C_2 = 0.018, C = 1.1169$$

(أ) حسب هذه القاعدة، ما هو احتمال وفاة رجل في سن الستين بعد سنة؟

(ب) دائما حسب نفس القاعدة، ما هو العمر الذي يبلغ عنده احتمال وفاة رجل بعد سنة 0.1678؟

12- استخدم القاعدة التالية: $l_x = 10'000\sqrt{100-x}$ حيث $0 \le x \le 100$، لإيجاد المقادير التالية:

(أ) ${}_{17}P_{19}$.

(ب) ${}_{15}q_{36}$.

(ج) ${}_{15|13}q_{36}$.

(د) $\overset{\circ}{e}_{36}$.

13- استخدم القاعدة: $l_x = 1'000\ (1 - \frac{x}{120})$، لإيجاد المقادير التالية:

(أ) l_0.

(ب) l_{120}.

(ج) d_{33}.

(د) ${}_{30}q_{20}$.

14- إذا كانت: $p_x = 0.95$ مهما كانت قيمة x، أوجد:

(أ) p_{20} . (ب) ${}_{2}q_{30}$.

15- استخدم القاعدة: $l_x = 100'000(2 - 0.007x - 0.0007x^2)$ ، أكمل الجدول الآتي:

العمر x	l_x	d_x
0		
1		
2		
3		

16- أكمل الجدول الآتي:

العمر x	q_x	l_x	d_x
90	1/3	3000	
91	2/5		
92	1/2		
93	2/3		
94	4/5		
95	1		
96			

17- أكمل الجدول الآتي:

العمر x	l_x	d_x	p_x	q_x
0	'1000	100		
1				
2	750		.80	
3				
4	300			.60
5				
6	0			

18- ■إليك قاعدة مواقر التالية:$l_x = 100 - x$

ليكن لدينا شخصين عمرهما على التوالي 90 و 95 سنة يتبعان جدول الوفاة المذكور. أوجد احتمال ألا يتوفى الشخصان في نفس السنة.

الفصل الثامن

جداول الوفاة

Tables de Mortalitè

تكمن أهمية جدول الوفاة في الدور الذي تمثله بالنسبة للمؤمن على الحياة في وضع القواعد اللازمة لحساب التسعيرة والعلاوة. لإعداد جدول للوفاة يجب قياس معدلات الوفاة. فإذا أردنا - إذن - أن نتعرف على معدلات الوفاة في مجتمع ما، فبالإمكان الاعتماد على آخر تعداد عام للسكان بالإضافة إلى دفاتر الحالة المدنية.الأرقام الأولية التي نحصل عليها من خلال هذا التقييم للوفاة ترسم الصورة الأولية لمعطيات قابلة للتغيير، لذلك فهي أرقام لابد من تعديلها باستخدام بعض الطرق الرياضية التي سنتطرق إليها لاحقا.

يتكون جدول الوفاة أساسا من الاحتمالات السنوية للوفاة المستخرجة مباشرة من المقاييس المعدلة للوفاة.

فإذا كان لدينا مثلا 1000 رجل في سن 43 سنة وتبين لنا بعد سنة أن 3 منهم قد توفوا قبل بلوغهم سن 44 سنة، فإن احتمال وفاة سنوية لرجل في سن 43 تساوي 0.003 أو 3 بالألف.

(8.1) جداول الوفيات

يبين جدول الوفيات تطور معدل الوفيات النظرية لمجموعة (مغلقة) من الأشخاص عبر الزمن والتي تستخلص من الوفيات الفعلية المشاهدة على مجموعة سكانية محددة. وتشير جداول الوفيات إلى جانب عدد الوفيات السنوي لكل سن إلى عدد الأشخاص الباقين على قيد الحياة، وبالتالي يتعين تسميتها جدول الحياة أيضا. عموما، هذه الجداول تتضمن قيما بيومترية أخرى، كاحتمال الحياة وعدد التبديلات... إلخ

(8.1.1) جداول الأجيال

لإعداد هذه الجداول لابد من تحديد مجموعة من الأشخاص مولودين في سنة محددة ومتابعتهم سنة تلو الأخرى وتسجيل كل الوفيات إلى حين انقراض كافة المجموعة. وهي طريقة سهلة نظريا لكنها شبه مستحيلة عمليا لأنها تتطلب متابعة حياة جيل كامل. بالإضافة إلى أن فترة المتابعة كبيرة بدرجة تجعل من النتائج بعد تجميعها لا تمثل الواقع.

(8.1.2) جداول السكان

لإيجاد معدلات الوفيات في جداول السكان ننطلق من منظمة جماعية معرفة من خلال توزيع أفرادها حسب السن في تاريخ التعداد، ثم نحسب عدد الوفيات في مختلف الأعمار التي نجدها في الإحصاءات العامة للسكان والتي تقابل متوسط عدد الوفيات المسجلة في سنة التعداد وعدد الوفيات في السنة التالية لها. كذلك يجب الأخذ في الاعتبار الزيادة أو النقص في عدد السكان الناتجة عن حركة الهجرة بين الدول لكي تكون النتائج مطابقة تماما للواقع.

(8.1.3) جداول المؤمن لهم أو الخبرة

هي جداول خاصة بشركات التأمين وتعتمد على المشاهدات المتعلقة بعملائهم أو تلك المتعلقة بعملاء شركات التأمين في الدولة بأكملها، أو لمجموعة

من الدول التي تسجل معدلات وفيات متشابهة. وتتمثل عملية إعداد الجدول في مشاهدة الأشخاص المعرضين للخطر وعدد الوفيات في كل سنة ولمختلف الأعمار، ويجب التمييز بين الجداول التالية:

- جداول مطبقة على أفراد لتأمينات الحياة.
- جداول مطبقة على أفراد لتأمينات الوفاة.

الجداول الأولى تحتوي على احتمالات وفيات أقل من تلك المسجلة في جداول السكان بينما تحتوى الجداول الثانية على احتمالات وفيات أعلى من تلك المسجلة في جداول السكان. وهذا التباين يفسره الاختيار الذي يحدده أصحاب المعاشات أو المؤمن لهم عند تعاقدهم مع مؤسسات التأمين. هذه الجداول تتضمن - إذن - هوامش للوفاة.

كما تحتوي الجداول الثانية على نوع آخر من الجداول: جداول التحديد، حيث تبين لمؤسسات التأمين أن الوفيات عند المؤمن لهم الذين قاموا بالفحص الطبي عند التعاقد هي الأقل في السنوات الأولى من الوفيات عند المؤمن لهم الذين تم إعفاؤهم من الفحص الطبي. وهو ما أدى بشركات التأمين إلى إنشاء "جداول محددة" تحتوي على احتمالات أساسها العمر وكذلك عدد السنوات السابقة للتأمين.

(8.1.4) الجداول المحتملة

تعتمد هذه الجداول على تطور معدلات الوفيات في المستقبل على عكس الجدول الكلاسيكي، فهي تمكن من حساب عقود المعاشات بمزيد من الدقة والأمان، حيث يتم إيجادها عبر تمديدها للتقييم المسجل في وفيات السكان العام. وهو ما يجنب المؤمن من اللجوء إلى زيادة رأس مال الاحتياطي بسبب شيخوخة

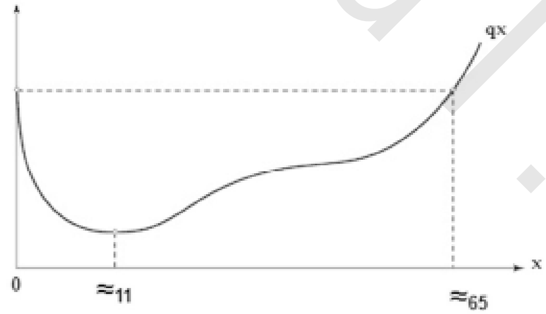
المجتمع. وتكمن الصعوبة في التعامل مع هذه الجداول في وجود جدول لكل سنة ميلاد للمؤمن لهم، كما تبقى هذه الجداول صالحة لسنة فقط. ولتسهيل عمل الأكتواريين في هذا المجال تم إنشاء جداول موحدة مستخرجة من الجداول المحتملة.

كمثال على ذلك في فرنسا حيث تم إنشاء جدول موحد (TPRV 93) ليأخذ مكان مجموعة من الجداول المحتملة. وهذا الجدول يمثل جدولا مكتملا لجيل 1950 حيث يقوم المؤمن بتعديله عبر تطبيق فارق عمري يحسب بحسب العمر الفعلي للمؤمن له.

(8.2) العوامل المؤثرة

(8.2.1) العمر

هو العامل الأكثر تأثيرا في حساب الاحتمالات السنوية للوفاة، فهو يقوم بالتالي بدور مهم في حساب التأمينات على الحياة، وتتغير الاحتمالات السنوية للوفاة حسب العمر بالطريقة التالية:



(8.2.2) الجنس

عموما معدلات الوفيات عند الإناث أقل من معدلات الوفيات عند الذكور وخاصة للأعمار القريبة من 20 سنة.

لفترات طويلة من الزمن تم اعتماد جدول للوفيات حسب الجنس. واعتبارا لمبدأ المساواة بين الجنسين (توجيهات الاتحاد الأوروبي) فإن الأمور تتجه شيئا فشيئا لاعتماد جدول موحد للجنسين.

(8.2.3) الزمن

الاحتمالات السنوية للوفاة في أيامنا هذه أصبحت أقل بكثير من مثيلاتها في بداية القرن الماضي، وهذا الأمر راجع أساسا إلى تطور الطب والنظافة والوقاية من الحوادث... إلخ. وسمي هذا الانخفاض بالتراجع القرني للوفيات. بمرور الزمن، أصبح التراجع ينعكس إيجابيا على توقعات الحياة. في سويسرا، مثلا ارتفعت توقعات الحياة من 50 سنة في بداية القرن الماضي إلى 80 سنة اليوم.

(8.2.4) أسباب أخرى

من الأسباب الأخرى نذكر تأثير المكان (بمعدلات وفيات أقل عادة عند بلدان الجزء الشمالي من الكرة الأرضية)، والحالة المدنية (بمعدلات وفيات أعلى عند المطلقين عادة) وأخيرا تأثير المهنة الذي دفع ببعض مؤسسات التأمين التي تقدم إليها عملاء ذوو مهن تكتسي بعض الخطورة إلى:

- رفض التعاقد (حالة قصوى).
- التعاقد مع إدراج بنود احترازية في العقد.
- التعاقد بشروط مالية عالية.

(8.3) طرق التعديل

(8.3.1) مقدمة

إذا قمنا بإدراج رسم بياني للاحتمالات السنوية للوفيات حسب العمر كما هي مشاهدة (الرسم المبين أسفل)، نستنتج أن منحنى القيم الأولية لهذه الوفيات ليس منتظما بل هو ينطوي على حركات فجائية ونترات. ويرجع ذلك

إلى العدد القليل للمشاهدات المتوفرة من ناحية وإلى مختلف الأسباب الأخرى التي تحدد التغييرات العشوائية للوفيات من ناحية أخرى (المكان، نمط الحياة، بيئة العمل ...إلخ). ورغم هذه التغييرات العشوائية فإن الوفيات، كمجموعة في حد ذاتها، تظهر اتجاها أساسيا واضحا، سبق الحديث عنه، وهذا الاتجاه يتضح أكثر عندما تكون مجموعات الأفراد المشاهدة لوفياتها ولبقائها على قيد الحياة أكبر وأكثر تجانسا. فإذا أردنا أن نعطي للوفيات صورة منصفة (وفية)، يتم من خلالها استبعاد الحوادث الراجعة للصدفة، فالمطلوب هو استخدام الطرق والوسائل المناسبة التي يمكن أن نعبر عنها نظريا بالتعديل أو التنعيم.

يجب أن تتضمن طرق التعديل شرطين أساسيين: التعديل يجب أن يكون له منحنى منضبط (تنعيم) دون وجود نقاط شاذة بعيدة جدا أو كثيرة، كذلك فإن القيم المعدلة يجب أن تضمن لفترة مشاهدة محددة صورة أمينة إلى أقصى حد ممكن للواقع (أمانة). يوجد طرق مختلفة للتعديل:

التعديل البياني

المشكلة تتمثل في إيجاد منحنى يكون أقرب ما يكون للأرقام الأولية التي تمثل سلسلة نقاط. تقرأ معدلات الوفاة بعد ذلك لكل عمر على هذا المنحنى.

التعديل الميكانيكي

القيم المعدلة تساوي المتوسط المرجح بعدد من المعدلات الإجمالية التي تسبق وتلحق مباشرة العمر. الطرق الأكثر استخداما وانتشارا هي طريقة Wittestein وطريقة Woolhouse وطريقة Karup

الرموز:

$\overline{q}_x$: إجمالي الاحتمال السنوي للوفاة.

q_x : الاحتمال السنوي المعدل للوفاة.

التعديل التحليلي

التعديل هنا يتم من خلال دالة تحليلية. نورد فيما يلي قاعدتين تحليليتين:

- قاعدة ماكهام Makeham.
- قاعدة المفاتيح بنقاط تقاطعية.

(8.3.2) قاعدة ماكهام Makeham

تكتب القاعدة على النحو التالي:

$$l_x = ks^x g^{e^x}$$

ولتعديلها (تنعيمها) نستخدم القاعدة:

$$\boxed{q_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - sg^{c^x\,(c-1)}} \qquad (8.1)$$

المطلوب هو إيجاد قيم المعاملات s,gوc. بينما المعلمة k هي قيمة ثابتة أولية في الجدول (مثلا k=100'000). يوجد أساسا طريقتان للحل: طريقة التكرار لنيوتن ورافسن (Newton-Raphson) وهي تتجاوز محتوى هذا الكتاب وطريقة كنج وهاردي (King-Hardy) السهلة والتي نورد فيما يلي طريقة استخدامها.

للتمكن من القيام بتعديل باستخدام هذه الطريقة يجب أن يتوفر عدد من الأرقام من أضعاف الرقم 3. نضع إذا:

$$t = \frac{x_n - x_1 + 1}{3}$$

حيث x_1 تمثل أول عمر مشاهد وx_n هي آخر عمر مشاهد. إذا عملنا أن $p_x = 1 - q_x$ يمكننا حساب القيم التالية داخل المجالات الثلاث:

$$\overline{S}_1 = \sum_{x=x_1}^{x_1+t-1} log\overline{p}_x \, ; \; \overline{S}_2 = \sum_{x=x_1+t}^{x_1+2t-1} log\overline{p}_x \; ; \overline{S}_3 = \sum_{x=x_1+2t}^{x_1+2t-1} log\overline{p}_x$$

نحسب بعد ذلك القيم المساعدة التالية:

$$a = \frac{\overline{S}_1\overline{S}_3 - \overline{S}_2^2}{t\,(\overline{S}_1 + \overline{S}_3 - 2\overline{S}_2\,)} \, ; \; c = \sqrt[t]{\frac{\overline{S}_3 - \overline{S}_2}{\overline{S}_2 - \overline{S}_1}} \, ; \; b = \frac{(c-1)\,(\overline{S}_2 - \overline{S}_1)}{c^{x_1}\,(c^t - 1)^2}$$

وأخيرا:

$$s = 10^a, \; g = 10^{\frac{b}{c-1}}$$

وهو ما يمكننا من إيجاد قاعدة ماكهام:

$$q_x = 1 - sg^{c^x\,(c-1)}$$

ملاحظة: دالة ماكهام هي دالة واحد لواحد، ذلك يعني أنها لا تستطيع أن تمثل سلاسل الأرقام الصحيحة المتزايدة أو سلاسل الأرقام الصحيحة المتناقصة.

مثال:

عدل إجمالي احتمالات الوفاة الستة التالية باستخدام قاعدة ماكهام:

i	x_i	$\overline{q}_{x_i}$	$\overline{p}_{x_i}$
1	20	.00410	.99590
2	21	.00440	.99560
3	22	.00520	.99480
4	23	.00580	.99420
5	24	.00610	.99390
6	25	.00630	.99370

الحل

$$x_1 = 20;\ x_n = 25;\ t = \frac{25-20+1}{3} = 2$$

نحسب بعد ذلك:

$$\overline{S}_1 = \sum_{x=20}^{21} log\overline{p}_x = -0.00369938$$

$$\overline{S}_2 = \sum_{x=22}^{23} log\overline{p}_x = -0.004790465$$

$$\overline{S}_3 = \sum_{x=24}^{25} log\overline{p}_x = -0.00540202$$

وهذا يمكننا من احتساب القيم المساعدة التالية:

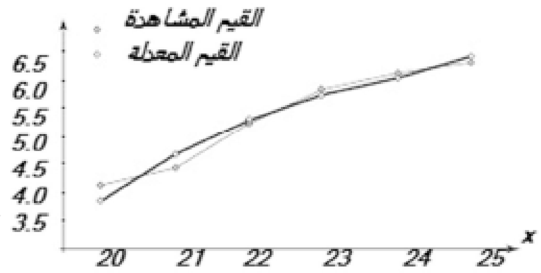
$$a = \frac{\overline{S}_1\overline{S}_3 - \overline{S}_2^2}{t\left(\overline{S}_1 + \overline{S}_3 - 2\overline{S}_2^2\right)} = -0.003090974$$

$$c = \sqrt{\frac{\overline{S}_3-\overline{S}_2}{\overline{S}_2-\overline{S}_1}} = 0.748666616$$

$$b = \frac{(c-1)\,(\overline{S}_2-\overline{S}_1)}{c^{20}\,(c^2-1)^2} = 0.463900683$$

أي: $s = 10^a = 0.992908037$ و $g = 10^{\frac{b}{c-1}} = 0.014264012$ وهذه القيم نضعها في المعادلة: $q_x = 1 - sg^{x\,(c-1)}$. وهو ما يمكّن من احتساب القيم المعدلة التالية:

x	q_x
20	.003840
21	.004660
22	.005270
23	.005730
24	.006070
25	.006330



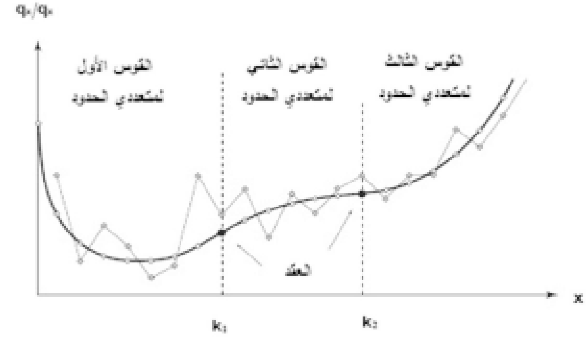
(8.3.3) طريقة المفاتيح بنقاط تقاطعية

تتطلب هذه الطريقة بعض المعلومات الرياضية المتعلقة بحساب المصفوفات. يمكن للقارئ مراجعة الفقرة 17.5 من هذا الكتاب حول المفاهيم الأساسية في حساب المصفوفات. تعتمد الطريقة على قاعدة صغرى المربعات، فهي بالتالي تعميم لطريقة الانحدار ولكنها مطبقة على متعددي الحدود بدرجات أعلى ومحددة بشروط (نقاط تقاطعية أو عقد).

وهذا يؤدي إلى وضع أقواس لمتعددي الحدود أو المفاتيح (من الدرجة الأولى أو الثانية أو حتى الثالثة) المترابطة ببعضها عبر الشروط الإضافية للعقد. وهذه الشروط هي:

اتصال متعددي الحدود ذوي الدرجات التي تزيد عن واحد: ميل وتقعر مماثل.

وهو ما يمكن تمثيله على النحو التالي:



للتسهيل سوف يتم اختيار أعداد صحيحة فقط لنقاط التقاطع $k_1 ; k_2 ; k_3 ;\cdots$.

الرموز:

n: عدد المشاهدات.

d: درجة الأقواس($d =1$ أو2 أو 3 في الغالب).

z: عدد النقاط التقاطعية (3 أو 4 كأقصى حد).

إذا عرفنا z على أنه عدد النقاط التقاطعية أي يوجد لدينا $z+1$ مجال، يمكننا تعريف $z+1$ معادلة لكل مجال على النحو التالي:

$$q_x^{(i)} = q_x^{(0)} + \sum_{i=1}^{z} c_{d+i+1}\,(x-k_i)^d \qquad (8.2)$$

معادلة الأقواس للمجال الأول يمكن تحريرها كما يلي:

$$q_x^{(i)} = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \cdots + c_{d+1}x^d = \textstyle\sum_{i=0}^{d} c_{i+1}x^i$$

المعامل c_1 ،c_2،c_3،...نجدها باستخدام المعادلة التالية:

$$C = (A^TA)^{-1}A^TQ \qquad (8.3)$$

$$Q_{n,1} = \begin{pmatrix} \overline{q}_{x_1} \\ \overline{q}_{x_2} \\ \vdots \\ \overline{q}_{x_n} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad C_{d+z+1,1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{d+z+1} \end{pmatrix}$$

المصفوفة $A_{n,d+z+1}$ تكتب كالآتي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^d & (x_1-k_1)_+^d & (x_1-k_2)_+^d & \cdots & (x_1-k_z)_+^d \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^d & (x_2-k_1)_+^d & (x_2-k_2)_+^d & \cdots & (x_2-k_z)_+^d \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^d & (x_3-k_1)_+^d & (x_3-k_2)_+^d & \cdots & (x_3-k_z)_+^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^d & (x_n-k_1)_+^d & (x_n-k_2)_+^d & \cdots & (x_n-k_z)_+^d \end{pmatrix}$$

حيث:

$$(x_i - x_j)_+^d = \begin{cases} (x_i - x_j)^d & \text{إذا} \quad x_i - x_j > 0 \\ 0 & \text{إذا} \quad x_i - x_j \geq 0 \end{cases}$$

ملاحظة:

- إذا كانت $d = 1, z = 0$ فذلك ينتج انحدار خطي.
- إذا كانت $d = 2, z = 0$ فذلك ينتج انحدار تربيعي.

مثال: نريد تنعيم 5 قيم إجمالية عشوائية باستخدام طريقة المفاتيح الخطية تحتوي على نقطة تقاطع في $x = 6$. ليكن لدينا الجدول التالي:

i	x	$\bar{q}_x$
1	3	2
2	4	6
3	6	3
4	8	4
5	10	7

لدينا المعطيات التالية: $n = 5, d = 1$ (أقواس خطية) و$z = 1$ (نقطة تقاطع واحدة عند $x = 6$).

القيم المعدلة تظهر في متعددي الحدود التالية:

$$q_x = \begin{cases} q_x^{(0)} & x \leq 6 \\ q_x^{(1)} & x > 6 \end{cases}$$

تكتب المعادلة لكل مجال على النحو التالي:

$$q_x^{(0)} = c_1 + c_2 x; \quad q_x^{(1)} = c_1 + c_2 x + c_3 (x - 6)$$

نستخدم المعادلة التالية لإيجاد المعامل c_1, c_2, c_3:

$$C = (A^T A)^{-1} A^T Q$$

وبذلك نحصل على:

$$\overline{Q}_{5,1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, A_{5,3} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & (x_1 - k_1)_+ \\ 1 & x_2 & (x_2 - k_1)_+ \\ 1 & x_3 & (x_3 - k_1)_+ \\ 1 & x_4 & (x_4 - k_1)_+ \\ 1 & x_5 & (x_5 - k_1)_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & 2 \\ 1 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

وأخيرا إذا استخدمنا القاعدة (8.3) نجد:

$$C_{3,1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.03 \\ 0.11 \\ 0.57 \end{pmatrix}$$

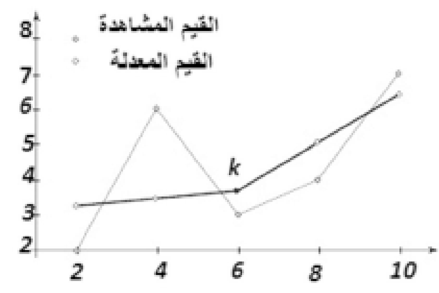
وبذلك تكتب المعادلات النهائية على النحو التالي:

$q_x^{(0)} = 3.03 + 0.11x$ عندما $x \leq 6$

$q_x^{(1)} = 3{,}03 + 0.11x + 0.57\,(x - 6)$ عندما $x > 6$

وبالتالي فإن القيم المعدلة سوف تصبح كالآتي:

i	x	$\overline{q}_x$	q_x
1	2	2	.253
2	4	6	.473
3	6	3	.693
4	8	4	.055
5	10	7	.416



(8.3.4) طريقة المتوسطات المتحركة

الأسلوب بشكل عام: نقوم بتجميع عدد فردي من المشاهدات (3 كحد أدنى) من خلال مجموعة من المشاهدات. احتمال الوفاةq_x يمكن صياغته في صورة القيم الإجمالية المتتالية وعددها 12+k التالية: $q_{x-k}, q_{x-k+1}, \dots, q_x, \dots, q_{x+k}$ اكتب المعادلة هنا.

بشكل عام نكتب:

$$q_x = \alpha(-k)\bar{q}_{x-k} + \alpha(-k+1)\bar{q}_{x-k+1} + \cdots + \alpha\,(k)\bar{q}_{x+k}$$

حيث: $\alpha(-k) + \cdots + \alpha(k) = 1$ و$\alpha(-k) = \alpha\,(k)$

فيما يلي القاعدتان المستخرجتان من طريقة المتوسطات المتحركة والمستخدمتان في الرياضيات الأكتوارية:

قاعدة ويتستاين Wittstein

يتم التعديل من خلال هذه القاعدة على 5 قيم متتالية$(k = 2)$

$$\boxed{q_x = 0.2\bar{q}_{x-2} + 0.2\bar{q}_{x-1} + 0.2\bar{q}_x + 0.2\bar{q}_{x+1} + 0.2\bar{q}_{x+2}} \qquad (8.4)$$

قاعدة كاروب Karup

يتم التعديل من خلال هذه القاعدة على 19 قيمة متتالية$(k = 19)$

$$\begin{aligned} q_x = &-0.0032\bar{q}_{x-9} - 0.0096\bar{q}_{x-8} - 0.0144\bar{q}_{x-7} 0.0128\bar{q}_{x-6} \\ &+0.0336\bar{q}_{x-4} + 0.0848\bar{q}_{x-3} + 0.1392\bar{q}_{x-2} + 0.1824\bar{q}_{x-1} \\ &+0.2\bar{q}_x \\ &+0.1824\bar{q}_{x+1} + 0.1392\bar{q}_{x+2} + 0.0848\bar{q}_{x+3} + 0.0336\bar{q}_{x+4} \\ &-0.0128\bar{q}_{x+6} - 0.0144\bar{q}_{x+7} - 0.0096\bar{q}_{x+8} - 0.0032\bar{q}_{x+9} \end{aligned} \qquad (8.5)$$

ملاحظة: تمتاز الطرق الميكانيكية بسهولتها، حيث إنه يمكن تصميمها داخل جدول وهذا ينطبق كليا على هذه الطريقة ولكن مساوئها تتمثل في الآتي:

- بصفتها متوسط مرجح فهي تقلل من أثر التغييرات الأساسية للدالة x .
- عدم قدرتها على تعديل القيم الشاذة في الجدول.

مثال: قم بتنعيم الاحتمالات الإجمالية للوفاة التالية باستخدام قاعدة Wittstein:

x	$\overline{q}_x$
1	2
2	4
3	6
4	3
5	8
6	6
7	9
8	8
9	10
10	8

الحل: باستخدام القاعدة نحصل على:

$$q_3 = 0.2\overline{q}_1 + 0.2\overline{q}_2 + 0.2\overline{q}_3 + 0.2\overline{q}_4 + 0.2\overline{q}_5 = 4.6$$

$$q_4 = 0.2\overline{q}_2 + 0.2\overline{q}_3 + 0.2\overline{q}_4 + 0.2\overline{q}_5 + 0.2\overline{q}_6 = 5.4$$

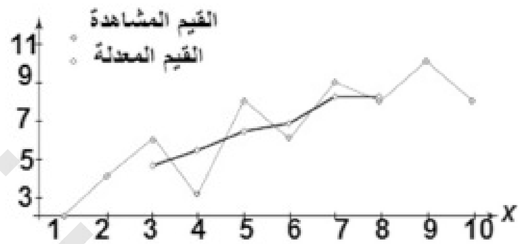
$$q_5 = 0.2\overline{q}_3 + 0.2\overline{q}_4 + 0.2\overline{q}_5 + 0.2\overline{q}_6 + 0.2\overline{q}_7 = 6.4$$

$$q_6 = 0.2\overline{q}_4 + 0.2\overline{q}_5 + 0.2\overline{q}_6 + 0.2\overline{q}_7 + 0.2\overline{q}_8 = 6.8$$

$$q_7 = 0.2\overline{q}_5 + 0.2\overline{q}_6 + 0.2\overline{q}_7 + 0.2\overline{q}_8 + 0.2\overline{q}_9 = 8.2$$

$$q_8 = 0.2\overline{q}_6 + 0.2\overline{q}_7 + 0.2\overline{q}_8 + 0.2\overline{q}_9 + 0.2\overline{q}_{10} = 8.2$$

وهو ما يمكننا تمثيله من خلال الرسم البياني الآتي:



(8.4) تمارين

1- قم بتعديل القيم المشاهدة التالية باستخدام قاعدة ماكهام Makeham ثم حمل النتائج على رسم بياني:

i	المشاهدة	المعدلة
1	2	
2	6	
3	5	
4	4	
5	9	
6	10	

2- قم بتعديل القيم المشاهدة التالية باستخدام قاعدة ماكهام Makeham ثم حمل النتائج على رسم بياني:

i	المشاهدة	المعدلة
1	2	
2	6	
3	5	
4	4	
5	9	
6	4	
7	8	
8	6	
9	12	

3- ■ إذا علمت أن ${}_{30} = 0.998, p_{45} = 0.994, p_{60} = 0.977$ ، استخدم قاعدة ماكهام Makeham لإيجاد قيم المعلمات: s, g, c.

4- قم بتعديل القيم المشاهدة الثلاثة التالية باستخدام قاعدة ماكهام Makeham ثم حمل النتائج على رسم بياني:

x_i	$f(x_i)$
1	4
2	2
3	7

5- تطورت أرباح إحدى الشركات خلال السنوات التسع الأخيرة على النحو التالي (بملايين يورو):

السنة	1996	1997	1998	1999	2000
الأرباح	2	5	2	5	3

السنة	2001	2002	2003	2004
الأرباح	9	12	10	18

(أ) أوجد التعديل الخطي دون استخدام نقاط التقاطع.

(ب) مثل القيم المشاهدة والمعدلة داخل رسم بياني.

(جـ) حسب هذه الطريقة ما هو الربح المنتظر خلال سنة 2005.

6- (نفس معطيات السؤال رقم 5). في تحليل معمق لنتائج الشركة تبين أن تطور الأرباح خلال الخمس سنوات الأولى كان بطيئا، بينما سجلت الشركة سرعة في الأرباح خلال السنوات التي تليها. وهو ما يؤدي إلى القيام بتعديل خطي مع وجود نقطة تقاطع عند سنة 2000.

(أ) اعتمادا على هذه الطريقة، مثل القيم المشاهدة والمعدلة داخل رسم بياني.

(ب) ما هو الربح المنتظر حسب هذه الطريقة دائما؟

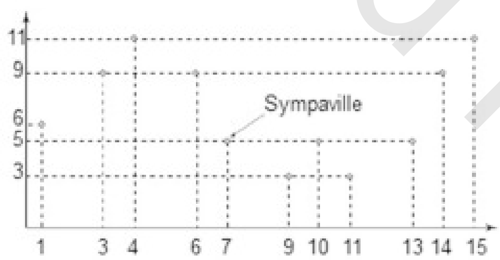
7- (نفس معطيات السؤال رقم 5). تقرر في الأخير تعديل جميع القيم باستخدام طريقة الانحدار التربيعي بدون نقاط تقاطعية:

(أ) اعتمد هذه الطريقة، لتمثل القيم المشاهدة والمعدلة داخل رسم بياني.

(ب) ما هو الربح المنتظر حسب هذه الطريقة دائما؟

8- يتوقع من الطريق السريعة المزمع إنشاؤها أن تمر بجانب المدن المبينة في الرسم البياني أدناه. يجب أن يكون مسار الطريق السريعة مضبوطا، من أجل ذلك تم الاعتماد على نموذج التعديل التربيعي مع نقطة تقاطعية في 'سيمبا فيل Sympaville'. الأرقام محسوبة بالكيلو متر.

مثل القيم المعدلة بيانيا:



الفصل التاسع

تأمين الدفعات الدورية

Assurances de Rentes

تناولنا في الفصل الرابع من هذا الكتاب دراسة الدفعات الدورية التي لم تعد تسدد بصفة مؤكدة، وفي هذا الفصل سوف نتناول بالدراسة الدفعات الدورية التي لم تعد تسدد على مدى الحياة. القيمة الحالية لدخل عمري أو مؤكد تقابل العلاوة الوحيدة (PU) وهو الثمن المطلوب دفعه للتمتع بهذا الدخل. في الرياضيات، يمكن اعتبار العلاوة الوحيدة (PU) على أنها توقعا رياضيا (انظر الفقرة (17.3.3)). كل ما يتغير هنا هو أن يتم ضرب كل عبارة في قاعدة الدخل باحتمال تسديدها.

مثال رقم (1): تعهدت شركة تأمين بصرف مبلغ 50000 فرنك سويسري إلى عميل في صورة بقائه على قيد الحياة خلال عشر سنوات، بالرجوع إلى جداول الوفاة المرفقة في الملاحق، ما العلاوة الوحيدة (PU) التي يجب على العميل دفعها إذا استعملنا نسبة فائدة تساوي 3%؟

الحل

احتمال البقاء على قيد الحياة إلى سن الخمسين لرجل عمره 40 سنة هو:

$${}_{10}p_{\text{'à}} = \frac{l_{50}}{l_{40}} = \frac{92659}{95257} = 0.972726$$

القيمة الحالية لاستثمار قدره 50000 فرنك سويسري (frs) يدفع بعد عشر سنوات هي:

$$50000\frac{1}{(1.03)^{10}} = 37204.70\ frs$$

بتركيب احتمال البقاء على قيد الحياة مع القيمة الحالية، نستطيع تعريف العلاوة الوحيدة للخدمة المقدمة على أنها:

$$PU = 37204,70 \times 0,972726 = 36189.98\ frs$$

بالحصول على هذا المبلغ يمكن للمؤمن أن يستثمره لمدة عشر سنوات بنسبة فائدة لا تقل عن 3%. إذا بقي المؤمن له على قيد الحياة بعد عشر سنوات فإنه سيكسب 'المباراة'، وفي حال حدوث عكس ذلك فإن المؤمن هو الذي سيكسب، وبطبيعة الحال في الواقع فإن المؤمن ليس لديه عميل واحد بل مجموعة من العملاء. وبذلك يكون المؤمن قد وازن مخاطره وفي المعدل لا المؤمن ولا المؤمن له يمكنه أن يكسب 'المباراة'.

مثال رقم (2): نرغب في صرف 'دخل ما بعد العد' بقيمة 10000 يورو لرجل عمره 40 سنة وذلك لفترة 3 سنوات. احسب العلاوة المطلوبة في كل حالة من الحالات الآتية:

لا يأخذ بالفائدة ولا بالوفيات في العمليات الحسابية.

الفائدة فقط هي التي يقع إدراجها في العمليات الحسابية.

الفائدة والوفيات يقع إدراجها في العمليات الحسابية.

الحل

$$PU = 1'000 + 1'000 + 1'000 = 1'000 \times 3$$

$$PU = 1'000v + 1'000v^2 + 1'000v^3 = 1'000 \times a_{\overline{3|}}$$

$$PU = 1'000v\frac{l_{41}}{l_{40}} + 1'000v^2\frac{l_{42}}{l_{40}} + 1'000v^3\frac{l_{43}}{l_{40}} = 1'000 \times \ddot{a}_{40:3}$$

(9.1) تركيبات كلاسيكية

(9.1.1) دخل عمري فوري

رموز:

$\ddot{a}_x$: القيمة الحالية (PU) للدخل العمري الوحدة تدفع مسبقا ("ما قبل العد" preanumerando) إلى حين وفاة المؤمن له.

a_x : القيمة الحالية (PU) للدخل العمري الوحدة تدفع مؤخرا ("ما بعد العد" postnumerando) إلى حين وفاة المؤمن له.

w : آخر قيمة في جدول الوفاة.

الدخل المسبق ("ما قبل العد" preanumerando)

$$\boxed{\ddot{a}_x = 1 + v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + \cdots + v^{w-x}\frac{l_w}{l_x} = \sum_{t=0}^{w-x} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}} \tag{9.1}$$

الدخل المؤخر ("ما بعد العد" postnumerando)

$$\boxed{a_x = v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + \cdots + v^{w-x}\frac{l_w}{l_x} = \sum_{t=1}^{w-x} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}} \tag{9.2}$$

العلاقة تربط بين $\ddot{a}$ و a_x :

$$\boxed{a_x = \ddot{a}_x - 1} \tag{9.3}$$

ملاحظة: على عكس الدخل المؤكد فإن الدخل العمري (المعاش) لا توجد له قواعد سهلة تمكّن من احتسابه سريعا. وهو ما يدفع إلى استخدام الجداول الإلكترونية أو البرمجة لنتمكن من حساب سريع للقيم الحالية للخدمات العمرية.

قبل دخول الحواسيب في العمليات الحسابية، كان لا بد من تصميم جداول مساعدة سميت بـ"عدد التبديلات" لكي تسمح بحساب مبسط للمداخيل العمرية. سوف نستعرض ذلك في الفصل الحادي عشر.

(9.1.2) الدخل العمري المؤجل

الرموز:

${}_{k|}\ddot{a}_x$: القيمة الحالية (PU) لدخل عمري "وحدة" مؤجل بعدد k من السنوات ومدفوع "ما قبل العد" إلى حين وفاة المؤمن له.

${}_{k|}a_x$: القيمة الحالية (PU) لدخل عمري "وحدة" مؤجل بعدد k من السنوات ومدفوع "ما بعد العد" إلى حين وفاة المؤمن له.

المداخيل العمرية المؤجلة تمثل أكثر عقود المعاشات استخداما؛ حيث يدفع المؤمن له علاوة وحيدة في مقابل حصوله على دخل عمري إذا بقي على قيد الحياة في سن معينة (عند بلوغه سن التقاعد مثلا).

الدخل المسبق (ما قبل العد» « preanumerando)

$$\boxed{{}_{k|}\ddot{a}_x = v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} + v^{k+1}\frac{l_{x+k+1}}{l_x} + \dots + v^{w-x}\frac{l_w}{l_x} = \sum_{t=k}^{w-x} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}} \qquad (9.4)$$

الدخل المؤخر (ما بعد العد« postnumerando»)

$$\boxed{{}_{k|}a_x = v^{k+1}\frac{l_{x+k+1}}{l_x} + v^{k+2}\frac{l_{x+k+2}}{l_x} + \dots + v^{w-x}\frac{l_w}{l_x} = \sum_{t=k+1}^{w-x} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}} \qquad (9.5)$$

(9.1.3) الدخل العمري المؤقت

الدخل العمري المؤقت يتمثل في دفع أقسام الرواتب للمؤمن له، ما دام على قيد الحياة وذلك لمدة أقصاها n سنة.

وهذا الدخل يستفاد منه في حساب العلاوات بالقيمة الحالية الذي سنستعرضه في الفصل الثاني عشر. حيث إن الدخل العمري للمؤمن له يصرف عادة ما دام هذا الأخير على قيد الحياة ولكن ذلك محدد بعدد أقصى من السنوات يساويn .

الرموز:

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ القيمة الحالية (PU)لدخل عمري وحدة مدفوع مسبقا (في بداية الفترة) ما دام المؤمن له على قيد الحياة ولمدة قصوى قدرها n سنة.

$a_{x:\overline{n}|}$ القيمة الحالية (PU) لدخل عمري وحدة مدفوع مؤخرا (في نهاية الفترة) ما دام المؤمن له على قيد الحياة ولمدة قصوى قدرها n سنة.

القواعد التالية يتم إنشاؤها قياسا على القواعد المبينة أعلاه:

الدخل المسبق ('ما قبل العد' preanumerando)

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + \cdots + v^{n-1}\frac{l_{x+n-1}}{l_x} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} \qquad (9.6)$$

الدخل المؤخر (ما بعد العد« postnumerando»)

$$a_{x:\overline{n}|} = v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + \cdots + v^{n}\frac{l_{x+n}}{l_x} = \sum_{t=1}^{n} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} \qquad (9.7)$$

مثال: حددت العلاوات السنوية لأحد العملاء الذي يبلغ 25 سنة من عمره بـ € 1500 تدفع كلها مسبقا طالما بقي العميل على قيد الحياة وحتى بلوغه 65 سنة من عمره. احسب القيمة الحالية لتلك العلاوات.

الحل

القيمة الحالية (PV) تحسب من خلال القاعدة التالية:

$$VA = 1500\ddot{a}_{25:\overline{65-25|}} = 1000\ddot{a}_{25:\overline{40|}}$$

(9.1.4) الدخل العمري المؤجل والمؤقت

الدخل العمري والمؤقت يتمثل في صرف راتب إنزال شهري مؤجل طالما المؤمن له على قيد الحياة ولمدة أقصاها n سنة، وهذا الراتب يصرف بعد عدد k من الفترات تسمى الفترات المؤجلة.

الرموز:

${}_{k|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$: القيمة الحالية (أو PU) لدخل عمري وحدة ومؤجل بعدد k من السنوات ومدفوع مسبقا قبل العد (preanumerando) طالما أن المؤمن له باق على قيد الحياة وذلك لمدة أقصاها n سنة.

${}_{k|}a_{x:\overline{n|}}$: القيمة الحالية (أو PU) لدخل عمري وحدة ومؤجل بعدد k من السنوات ومدفوع مؤخرا بعد العد (postnumerando) طالما المؤمن له باق على قيد الحياة وذلك لمدة أقصاها n سنة.

قياسا بالقواعد المبينة أعلاه نورد فيما يلي القواعد المناسبة بشكلها المختزل:

الدخل المسبق (ما قبل العد preanumerando)

$$\boxed{{}_{k|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=k}^{k+n-1} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}} \qquad (9.8)$$

الدخل المؤخر (ما بعد العد postnumerando)

$$\boxed{{}_{k|}a_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=k+1}^{k+n} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}} \qquad (9.9)$$

(9.1.5) الدخل العمري للاستمرار في الحياة:

في هذه الحالة يتم دمج الدخل المؤكد مع الدخل العمري.

$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$:القيمة الحالية (أو PU) لدخل 'الاستمرار في الحياة' الوحدة ومدفوع مسبقا قبل العد (preanumerando) إثر وفاة المؤمن له وذلك خلال المدة المتبقية في العقد.

$a_{x:\overline{n|}}$: القيمة الحالية (أو PU) لدخل 'الاستمرار في الحياة' الوحدة ومدفوع مؤخرا بعد العد (postnumerando)إثر وفاة المؤمن له وذلك خلال المدة المتبقية في العقد.

الدخل المسبق ('ما قبل العد' preanumerando)

$$\boxed{\ddot{a}_{x|\overline{n|}} = \ddot{a}_{\overline{n|}} - \ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \tag{9.10}$$

الدخل المؤخر ('ما بعد العد' postnumerando)

$$\boxed{a_{x|\overline{n|}} = a_{\overline{n|}} - a_{x:\overline{n|}}} \tag{9.11}$$

مثال: تقدّم مؤمن له بطلب قرض مشفوع برهن إلى إحدى البنوك وتعهد بتسديد مبلغ القرض خلال فترة 20 سنة بحساب 15000€ في السنة.في حالة الوفاة يرغب المؤمن له أن تدفع شركة التأمين عنه المبلغ المذكور. احسب العلاوة الوحيدة لهذا العقد؟

الحل

القيمة الحالية (PV) أو العلاوة الوحيدة ((PU تكتب على النحو التالي:

$$UP = 15000a_{x|\overline{20|}} = 15000a_{\overline{n|}} - 15000a_{x:\overline{n|}}$$

يحصل المؤمن له على مبلغ (15000−15000=0) طالما بقي على قيد الحياة، وفي حالة الوفاة، يصرف له الدخل المؤكد فقط المقدر بـ15000.

(9.2) الإيرادات المجزأة

تدرج في بنود عقد التأمين عادة ما يسمى بالعلاوات المجزأة في حالة السداد أو القبض. سوف نستخدم قواعد مشابهة للقواعد رقم (4.31) ورقم (4.32).

الرموز:

$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n|}}$: القيمة الحالية (أوUP) لدخل الوحدة العمري والمدفوع مسبقا قبل العد (preanumerando) بصورة مجزأة بحساب $\frac{1}{m}$ في كل جزء.

سوف نبين فيما يلي نوعين فقط من القيم الحالية، حيث بالإمكان الحصول على القيم الحالية الأخرى بنفس الطريقة.

الدخل المسبق (ما قبل العد) ولمدى الحياة

$$\boxed{\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{m(w-x)} v^{\left(\frac{t}{m}\right)} \frac{l_{x+\frac{1}{m}}}{l_x}} \qquad (9.12)$$

الدخل المؤخر (ما بعد العد) والمؤقت

$$\boxed{a_{x:\overline{n|}}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{nm} v^{\left(\frac{t}{m}\right)} \frac{l_{x+\frac{1}{m}}}{l_x}} \qquad (9.13)$$

لإيجاد قيمة $_{x+\frac{1}{m}}$ نستخدم طريقة التوليد الخطي بين عمرين صحيحين متتاليين:

$$l_{x+\frac{1}{m}} = \left(1 - \frac{t}{m}\right) l_x + \frac{t}{m} l_{x+1}$$

بشكل عام يمكن حساب الأعمار غير الصحيحة $_x$ بالطريقة التالية:

$$\boxed{l_{x+\theta} = (1-\theta)l_x + \theta l_{x+1}} \qquad (9.14)$$

يمكن للقارئ مراجعة الفقرة 17.2 من هذا الكتاب للتعرف عن كثب على طريقة التوليد الخطي.

مثال: احسب القيمة 24,3 بالنسبة لامرأة وذلك باستخدام جدول الوفاة الموجود بالملحق.

الحل

$$l_{24} = 98'778, l_{25} = 98'727$$

وبالتالي فإن: $l_{24,3} = 0{,}7 l_{24} + 0{,}3 l_{25} = 98'762$

(9.3) الدخل لشخصين

نستخدم نفس القوانين المبينة أعلاه ولكن بالأخذ في الاعتبار الشخص الثاني، حيث إن الخدمات التأمينية المقدمة لشخصين تميز بين الخدمات المقدمة عند وفاة الشخص الأول من الخدمات المقدمة عند وفاة الشخص الثاني.

الرموز:

$\ddot{a}_{xy}$: القيمة الحالية (UP) لدخل عمري فوري لشخصين يصرف في حالة بقاء أحدهما على قيد الحياة.

$\ddot{a}_{\overline{xy}}$ القيمة الحالية (UP) لدخل عمري فوري لشخصين يصرف بعد الوفاة الثانية (أي بعد وفاة الشخصين).

القواعد

$$\boxed{\ddot{a}_{xy} = \sum_{t=0}^{w-x} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} \frac{l_{y+t}}{l_y}} \qquad (9.15)$$

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{xy}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}} \qquad (9.16)$$

وبنفس الطريقة نحسب المداخيل الأخرى، حيث نحصل على:

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \ddot{a}_{y:\overline{n}|} - \ddot{a}_{xy:\overline{n}|}} \qquad (9.17)$$

(9.3.1) دخل البقاء على قيد الحياة

نعرّف الرموز التالية:

$\ddot{a}_{x|y}$: القيمة الحالية لدخل عمري ما قبل العد لشخصين يصرف في حال بقاء y فقط على قيد الحياة.

$\ddot{a}_{y|x}$: القيمة الحالية لدخل عمري ما قبل العد لشخصين يصرف في حال بقاء x فقط على قيد الحياة.

القواعد المناسبة لهذه الرموز هي:

$$\boxed{\ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}} \qquad (9.18)$$

$$\boxed{\ddot{a}_{y|x} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{xy}} \qquad (9.19)$$

(9.3.2) تركيبات عقود التأمين

يمكن للمؤمن له أن يرغب في تأمين شامل لشخصين من خلال عدة تركيبات حياة- وفاة. من أجل ذلك فإن حساب القيمة الحالية (PV) يجب أن يتبع القانون العام الآتي:

$$\boxed{PV = (A - D)PV_x + (B - D)PV_y + (C - B - A + D)PV_{xy} + DPV_{\overline{xy}}} \qquad (9.20)$$

حيث:

A: المبالغ المصروفة في حال بقاءx فقط على قيد الحياة.

B: المبالغ المصروفة في حال بقاء y فقط على قيد الحياة.

C: المبالغ المصروفة في حال بقاء الزوجين x و y على قيد الحياة.

D: المبالغ المصروفة في حال وفاة الزوجين x و y .

مثال: لدينا زوجان يعولان طفلا عمره 5 سنوات، طالما بقيا الزوجان على قيد الحياة فإنه لا ضرورة لصرف أي دخل. في حال وفاة الزوج يصرف مبلغ 15000 ف.س. طيلة 20 سنة. وفي حال وفاة الزوجة يصرف 10000 ف.س. وفي حال وفاة الزوجين يصرف 30000 ف.س طيلة عشرين سنة للمساهمة في العناية بالطفل. أوجد القيمة الحالية لهذه التركيبة من التأمينات.

الحل

A: المبالغ المصروفة في حال بقاءx فقط على قيد الحياة:10000 ف.س.

B: المبالغ المصروفة في حال بقاء y فقط على قيد الحياة:15000 ف.س.

C: المبالغ المصروفة في حال بقاء الزوجين x وy على قيد الحياة: 0 ف.س.

D :المبالغ المصروفة في حال وفاة الزوجين x و y :30000 ف.س.

وبالتالي:

$$\mathrm{VA} = -20'000\, \ddot{a}_{x:\overline{20}|} - 15'000\, \ddot{a}_{y:\overline{20}|} + 5'000\, \ddot{a}_{xy:20|} + 30'000\, \ddot{a}_{\overline{20}|}$$

ملاحظة:

إذا كانت $A = 1; B = 1, C = 1, D = 0$ فذلك يعني أن: $\ddot{a}_{\overline{xy}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$.

إذا كانت $A = 1; B = 0, C = 0, D = 0$ فذلك يعني أن: $\ddot{a}_{\overline{x|y}} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$.

(9.4) تمارين

1- استخدم جدول الوفاة المرفق بالملحق لإيجاد القيمة الحالية لدخل عمري ما قبل العد تم صرفه لمؤمن لها عمرها 105 سنوات طالما بقيت على قيد الحياة. نسبة الفائدة المستعملة: 4%.

2- باستخدام جدول الوفاة في الملحق، أوجد القيمة الحالية لدخل عمري ما بعد العد صرف لمؤمن لها عمرها 105 سنوات طالما بقيت على قيد الحياة. نسبة الفائدة المستعملة: 4%.

3- استخدم نتائج التمرينين الأول والثاني للتاكد من المعادلة التالية:

$$a_x = \ddot{a}_x - 1$$

4- استخدم جدول الوفاة المرفق بالملحق لإيجاد القيمة الحالية لدخل عمري ما بعد العد تم صرفه لمؤمن له عمره 40 سنة لمدة 4 سنوات طالما بقي على قيد الحياة. نسبة الفائدة المستعملة: 3%.

5- اكتب العبارة الأكتوارية لدخل ما قبل العد سنوي يقدر بـ 250 € ، تم صرفه طيلة 25 سنة لمؤمن لها عمرها 18 سنة.

6- سوف يصرف لمؤمن له عمره 35 سنة مبلغ 100000 € إذا بقي على قيد الحياة إلى حين بلوغه 65 سنة. ما هي القيمة الحالية لهذه التغطية التأمينية إذا اعتبرنا نسبة فائدة 2% وجدول الوفاة المرفق بالملحق.

7- اكتب العبارة الأكتوارية للقيمة الحالية لدخل سنوي ما بعد العد يقدر بـ 5000 ف.س يصرف لمؤمن له حال بلوغه سن 65. علما بأن عمره حاليا هو 18 سنة.

8- حددت علاوات بقيمة 4000 € وجب صرفها لمدة عامين ما قبل العد إذا بقي المؤمن له (30 سنة حاليا) على قيد الحياة.

(أ) احسب القيمة الحالية لتلك العلاوات دون اعتبار نسبة الفائدة ولا الوفيات.

(ب) احسب القيمة الحالية باعتبار الفائدة فقط التي تقدر نسبتها بـ3%.

(جـ) احسب القيمة الحالية باعتبار نسبة قائدة 3% وجدول الوفاة المرفق بالملحق.

9- استخدم الرموز الأكتوارية للتعبير عن القيمة الحالية لدخل مدى الحياة مبين في الشكل التالي. علما بأن المؤمن له عمره حاليا 40 سنة.

10- إذا علمت أن :

$$l_x = 1'000\,(1 - \frac{x}{120})$$

أوجد القيمة الحالية التالية باستخدام نسبة فائدة 5%:

$$a^{(2)}_{30:\overline{1}|}$$

11- فسر القاعدة التالية:

$$12'000\,{}_{25|}\ddot{a}_{40:\overline{8}|}$$

12- فسر القاعدة التالية:

$$12000\,{}_{5|}\ddot{a}^{(12)}_{25:30:\overline{10}|}$$

13- ■رأى زوجان في سن التقاعد أنه من الضروري لهما أن يحصلا على دخل سنوي يساوي 20000 ف.س طالما بقيا الاثنان على قيد الحياة وذلك بالإضافة إلى المعاش. إذا أصبحت الزوجة أرملة بفقدان زوجها فهي بحاجة إلى دخل يساوي 15000 ف.س. أما في صورة بقاء الزوج على قيد الحياة فهو يرغب في الحصول على مبلغ يساوي 8000 ف.س سنويا إضافة إلى راتبه التقاعدي. أوجد القيمة الحالية لهذه التركيبة التأمينية.

الفصل العاشر

تأمينات رؤوس الأموال
Assurances de Capitaux

يهتم الفصل الحالي أساسا بالتغطية في حالة الوفاة، ففي الفصل السابق وجب صرف دخل للمستفيدين بينما في هذا الفصل سوف يصرف لهم مبلغ في حالة وفاة المؤمن له خلال فترة الضمان. كما سيتم حساب العلاوة الوحيدة (UP) بنفس الطريقة المبينة في الفصل السابق أي بالاعتماد على اسلوب التوقع الرياضي. وهذا المفهوم تم التطرق إليه في الفقرة (17.3.3).

في حالة تحديد الفترة مسبقا فإن التأمين سيكون مؤقتا. أما في صورة وجود فترة ترقب قبل بداية تطبيق الضمان فإن التأمين يسمى تأمينا مؤجلا. في الغالب يقوم المؤمن بصرف المبلغ المحدد في العقد في نهاية السنة التي توفي خلالها المؤمن له. وهو ما يأخذ به في احتساب القيم الحالية.

مثال رقم (1): يوجب عقد التأمين المبرم بين إحدى الشركات وأحد عملائها صرف مبلغ 50000 € إذا فقدت المؤمن لها حياتها في تمام الأربعين من عمرها. تبلغ المؤمن لها حاليا 30 سنة.أوجد العلاوة الوحيدة (UP) المطلوب تسديدها من العميلة باستخدام جدول الوفاة في الملحق ونسبة فائدة 3%.

الحل

في حالة الوفاة قبل الأربعين لا يوجد أي تعويض. وفي صورة وفاة العميلة في سن الأربعين. فالمبلغ سوف يصرف في نهاية سنة الوفاة، أي بعد 11 سنة. وبالتالي فإن العلاوة الوحيدة (UP) تحسب كما يلي:

$$UP = 50'000 v^{11} \frac{d_{y+n}}{l_y} = 50'000 v^{11} \frac{d_{40}}{l_{30}}$$

أي:

$$UP = 50'000 v^{11} \frac{l_{40}-l_{41}}{30} = 35,95€$$

مثال رقم (2): ينص عقد التأمين المبرم بين شركة التأمين وأحد عملائها على صرف مبلغ 500 ف.س في حالة وفاة المؤمن له وعمره x خلال الثلاث سنوات القادمة.ما هي العلاوة الوحيدة المطلوبة على العميل لكي يستفيد من هذه التغطية؟

الحل

بما أن العلاوة الوحيدة (UP) هي متغير عشوائي، فإنها تكتب على النحو التالي:

$$UP = 500 v \frac{d_x}{l_x} + 500 v^2 \frac{d_{x+1}}{l_x} + 500 v^3 \frac{d_{x+2}}{l_x}$$

أي:

$$UP = 500 \sum_{t=0}^{2} v^{t+1} \frac{d_{x+t}}{l_x}$$

الرموز:

نستخدم حرف A بدلا من a لكتابة القيم الحالية لرؤوس الأموال.

مثال: $A_{x\overline{n}|}$,A_x. وسوف نستعرض في الفقرات القادمة الرموز المستخدمة حسب نوعية التغطية التأمينية. عند حساب القيم الحالية لرؤوس الأموال فإن مفاهيم ما

قبل العدْ وما بعد العدْ سوف تزول حيث إن المبلغ المتحصل عليه من المؤمن يتم صرفه دائما في نهاية السنة التي توفي فيها المؤمن له. لكن بعض الشركات تقوم بصرف المبلغ على إثر الوفاة مباشرة. في هذه الحالة، يفترض أن تتم العمليات الحسابية على أساس أن الوفاة حدثت في وسط السنة. وبالتالي فإن ذلك سيكون له تأثير على معامل الخصم فحسب.

مثال: ينص عقد التأمين المبرم بين شركة التأمين وأحد عملائها على صرف مبلغ 500 ف.س من قبل الشركة في حالة وفاة المؤمن له وعمره x خلال الثلاث سنوات القادمة.ما هي العلاوة الوحيدة المطلوبة على العميل لكي يستفيد من هذه التغطية، إذا تقرر صرف المبلغ مباشرة بعد حادث الوفاة؟

الحل

$$UP = 500v^{0.5}\frac{d_x}{l_x} + 500v^{1.5}\frac{d_{x+1}}{l_x} + 500v^{2.5}\frac{d_{x+2}}{l_x}$$

وهو ما يمكن كتابته كذلك على النحو التالي:

$$UP = 500\sum_{t=0}^{3} v^{t+0.5}\frac{d_{x+t}}{l_x}$$

(10.1) تركيبات كلاسيكية

النماذج الأكثر استخداما في تأمين رؤوس الأموال هي: التأمين لمدى الحياة، التأمين المؤقت أو المؤجل وخاصة التأمين المختلط.

(10.1.1) تأمين على رأس مال في حالة الوفاة

المبلغ يتم صرفه في حالة الوفاة خلال فترة حياة المؤمن له. المبلغ يتم صرفه إذا في كل الحالات.

الرموز:

A_x:القيمة الحالية (UP) لرأس مال وحدة يصرف عند وفاة المؤمن له.

القاعدة الكاملة

$$A_x = v\frac{d_x}{l_x} + v^2\frac{d_{x+1}}{l_x} + v^3\frac{d_{x+2}}{l_x} + \cdots + v^{w-x+1}\frac{d_w}{l_x} \tag{10.1}$$

القاعدة المختصرة

$$A_x = \sum_{t=0}^{w-x} v^t \frac{d_{x+t}}{l_x} \tag{10.2}$$

مثال: ما هي العلاوة الوحيدة (UP) لرأس مال مدى الحياة عند الوفاة قدره 100000 ف.س لمؤمن له عمره x؟

الحل

العلاوة الوحيدة أو القيمة الحالية تكتب على النحو التالي:$100'000A_x$.

(10.1.2) رأس مال مؤقت عند الوفاة

رأس المال لا يصرف إلا في حال حدوث الوفاة خلال n سنوات القادمة.

الرموز:

${}_{|n}A_x$: القيمة الحالية (UP) لرأس مال يصرف عند وفاة المؤمن له إذا حدث ذلك خلال n سنوات القادمة.

القاعدة الكاملة

$$ {}_{|n}A_x = v\frac{d_x}{l_x} + v^2\frac{d_{x+1}}{l_x} + v^3\frac{d_{x+2}}{l_x} + \cdots + v^n\frac{d_{x+n+1}}{l_x} \tag{10.3}$$

القاعدة المختصرة

$$ {}_{|n}A_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \frac{d_{x+t}}{l_x} \tag{10.4}$$

مثال: ينص عقد التأمين المبرم بين شركة التأمين وأحد عملائها على صرف مبلغ 35000 € من قبل الشركة في حالة وفاة المؤمن له وعمره 40 سنة خلال العشرين سنة القادمة.ما هي العلاوة الوحيدة المطلوبة على العميل لكي يستفيد من هذه التغطية؟

الحل

$$UP = 35'000_{\lfloor n}A_x$$

(10.1.3) رأس مال مؤجل عند الوفاة

لا يتم صرف رأس المال إلا بعد مرور فترة زمنية قدرها k غير مضمونة.يمكن لرأس المال أن يكون لمدى الحياة أو لفترة مؤقتة كما هو مبين في القوانين التالية:

الرموز:

$_{k|}A_x$ القيمة الحالية (UP) لرأس مال وحدة يصرف عند وفاة المؤمن له إذا حدثت الوفاة بعد k سنة.

$_{k|\,n}A_x$ القيمة الحالية (UP) لرأس مال وحدة يصرف عند وفاة المؤمن له إذا حدثت الوفاة بعد k سنة وخلال الـ n سنة التي تلي الـ k سنوات الأوائل للوفاة.

رأس مال مؤجل:

$$\boxed{_{k|}A_x = \sum_{t=k}^{w-x} v^{t+1}\frac{d_{x+t}}{l_x}} \qquad (10.5)$$

رأس مال مؤجل ومؤقت:

$$\boxed{_{k|\,n}A_x = \sum_{t=k}^{k+n-1} v^{t+1}\frac{d_{x+t}}{l_x}} \qquad (10.6)$$

العلاقة التالية تربط بين التغطية لمدى الحياة والتغطية المؤقتة والمؤجلة:

$$\boxed{A_x = {}_{n|}A_x + {}_{n|}A_x} \qquad (10.7)$$

مثال:اكتب العبارة التالية باستخدام الرموز الأكتوارية:

$$UP = 50'000v^{11}\frac{d_{40}}{l_{30}} + 50'000v^{12}\frac{d_{41}}{l_{30}}$$

الحل

$$UP = 50'000\,{}_{10|\,2}A_{30}$$

(10.1.4) رأس مال في حالة البقاء على قيد الحياة

يقوم رأس المال في حالة البقاء على قيد الحياة بدور مهم جدا، وخاصة في التأمينات المختلطة التي سنتطرق إليها لاحقا.

الرمز:

${}_nE_x$:القيمة الحالية (أو UP) لرأس مال وحدة يصرف في حال بقاء المؤمن له على قيد الحياة خلال n سنة.

القاعدة

$$\boxed{{}_nE_x = v^n\frac{l_{x+n}}{l_x}} \qquad (10.8)$$

مثال: ينص عقد التأمين المبرم بين شركة التأمين وأحد عملائها على أن تصرف الشركة مبلغ 100000 € إلى العميل الذي يبلغ من العمر 40 سنة في حال بقائه على قيد الحياة إلى سن 65. اكتب العلاوة الوحيدة (UP) لصورة هذا العقد باستخدام رمز أكتواري.

الحل

$$UP = 100'000\,{}_{25}E_{40}$$

(10.1.5) التأمينات المختلطة

هي تركيبة مختلفة من التأمينات حيث يتم مزج عقد التأمين المؤقت في حالة الوفاة مع عقد التأمين في حالة البقاء على قيد الحياة. عمليا يمكن لرأس المال في حالة الوفاة أن يكون مختلفا على رأس المال في حالة الوفاة. يجب -إذن- التعامل مع رأس المال في حالة البقاء على قيد الحياة ورأس المال في حالة الوفاة كل على حدة لكل مبلغ مؤمن.

الرمز:

$A_{x:\overline{n|}}$: القيمة الحالية (UP) لرأس مال وحدة يصرف في حالة وفاة المؤمن له خلال n سنة القادمة أو في حال بقاء المؤمن له على قيد الحياة عند نهاية الفترة.

القاعدة

$$\boxed{A_{x:\overline{n|}} = {}_{|n}A_x + {}_nE_x} \qquad (10.9)$$

العلاقة التالية تربط بين دخل عمري مؤقت وتأمين مختلط:

$$\boxed{A_{x:\overline{n|}} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \qquad (10.10)$$

مثال: إذا علمت أن $\ddot{a}_{20:\overline{2|}}$=1.969354 من خلال جدول الوفاة المرفق في الملحق، أوجد قيمة الرمز $_{20:\overline{2|}}$. استخدم نسبة فائدة تساوي 3%.

الحل

بما أن $d = \frac{i}{i+1} = \frac{0.03}{1.03} = 0.0291262$ إذاً:

$$A_{20:\overline{2|}} = 1 - 0.0291262 \times 1.969354 = 0.94264$$

(10.2) تأمين على الوفاة لشخصين

نميز التأمينات على الوفاة الأولى (الشخص الأول) من التأمينات على الوفاة الثانية (الشخص الثاني).

الرموز:

A_{xy}: القيمة الحالية (UP) لرأس مال مدفوع في حال حدوث الوفاة الأولى.

$A_{\overline{xy}}$: القيمة الحالية (UP) لرأس مال مدفوع في حال حدوث الوفاة الثانية.

نستخدم القواعد المتعلقة بتأمين رأس مال لشخص واحد بتوظيفها على حالة الشخصين لكي تصبح مثلا كما يلي:

$$A_{xy} = \sum_{t=0}^{w-x} v^{t+1} \frac{d_{x+t:y+t}}{l_{xy}} = \sum_{t=0}^{w-x} v^{t+1} \frac{l_{x+t}l_{y+t} - l_{x+t+1}l_{y+t+1}}{l_{xy}}$$

$$A_{\overline{xy}:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + A_{y:\overline{n}|} - A_{xy:\overline{n}|}$$

(10.3) تمارين

1- تعهدت مؤسسة تأمين بدفع مبلغ 15000 € حين يتوفى المؤمن له. اكتب عبارة (UP) لهذا العقد.

2- تعهدت مؤسسة تأمين بدفع مبلغ 15000 € إلى مؤمن له يبلغ من العمر 28 عاما وذلك عند وفاته قبل بلوغه سن 65 عاما. اكتب عبارة (UP) لهذا العقد.

3- تعهدت مؤسسة تأمين بدفع مبلغ 15000 € إلى مؤمن له يبلغ من العمر 28 عاما وذلك عند وفاته قبل بلوغه سن 65 عاما أو في حال بلوغه سن 65 عاما. اكتب عبارة (UP) لهذا العقد.

4- تعهدت مؤسسة تأمين بدفع مبلغ 10000 frs إلى مؤمن له يبلغ من العمر 30 عاما وذلك عند وفاته قبل بلوغه سن 40 عاما، و20000 frs إذا توفي بين 40

و50 عاما وأخيرا 15000 frs إذا بقي على قيد الحياة في سن 50 عاما.اكتب عبارة (UP) لهذا العقد.

5- من خلال جدول وفاة محدد ونسبة فائدة محددة حصلنا على القيم الحالية التالية التي تتضمن مؤمن له عمره 50 عاما ولفترة قدرها 10 سنوات:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 7.4856542 \quad \text{و} \quad A_{x:\overline{n|}} = 0.54312909$$

اعتمادا على العلاقة بين $\ddot{a}_{\overline{:n|}}$ و $A_{x:\overline{n|}}$أوجد نسبة الفائدة المستخدمة.

6- إذا كانت $_x = 100 - x$ حيث $0 \le x \le 100$ و$i = 0.05$ احسب $A_{40:\overline{25|}}$

7- ■أثبت ما يلي: ${}_{n|}A = {}_nE_x A_{x+n}$

8- إذا كانت: $A_x = 0.25$ و $A_{x+20} = 0.40$ و $A_{x:\overline{20|}} = 0.55$ احسب:

(أ) ${}_{20}E_x$.

(ب) ${}_{|20}A_x$.

9- استخدم جدول الوفاة المرفق في الملحق ونسبة فائدة 3% لإيجاد القيمة الحالية لرأس مال عند الوفاة ولمدى الحياة وذلك لرجل عمره 105 سنة.

10- ■ جدول الوفاة الافتراضي التالي يبين معدل الوفيات عند الذكور والإناث لمجموعة من الأعمار:

x	l_x	l_y
1	10	12
2	8	10
3	6	9
4	2	6
5	1	3
6	0	2

افترض كذلك أن نسبة الفائدة تساوي 10%.

(أ) أوجد A_y و $\ddot{a}_y$ لـ$y = 4$.

(ب) تأكد من المعادلة التالية باستخدام نتائج السؤال (أ):

$$A_y = 1 - d\ddot{a}_y$$

(جـ) احسب القيمة $A_{x:\overline{3|}}$ لـ$x = 2$ ، أوجد $\ddot{a}_{x:\overline{3|}}$.

(د) احسب القيمة الحالية لرأس مال في حالة البقاء على قيد الحياة لمؤمن له عمره سنتان.

(هـ) ليكن لدينا مؤمن له ومؤمن لها عمر كل منهما سنتان. احسب (UP) لرأس مال بقيمة 100 € ويصرف إذا بقي الزوجان على قيد الحياة إلى سن 5 سنوات.

(و) ليكن لدينا مؤمن له ومؤمن لها عمر كل منهما سنتان. احسب (UP) لرأس مال بقيمة 100 € ويصرف فقط في حالة بقاء y أو x على قيد الحياة إلى حين بلوغهما سن الخامسة. في المقابل لا يصرف أي مبلغ في حال بقاء الاثنين على قيد الحياة.

(ز) مؤمن له ومؤمن لها عمر كل منهما سنتان. احسب (UP) لرأس مال بقيمة 100 يصرف عند حدوث أول وفاة.

(ح) مؤمن له ومؤمن لها عمر كل منهما سنتان. احسب (UP) لرأس مال بقيمة 100 يصرف عند حدوث الوفاة الثانية.

11- ■ قدرت مؤسسة خسائرها المالية بمقدار 500000 frs لمدة ثلاث سنوات في حال وفاة مديرها العام. لذا قررت المؤسسة إبرام عقد تأميني مع إحدى شركات التأمين ينص على صرف مبلغ 500000 frs سنويا إلى المؤسسة لمدة ثلاث سنوات في صورة وفاة المدير العام خلال العشر سنوات القادمة. أوجد العلاوة الوحيدة (UP) لهذا العقد.

الفصل الحادي عشر

عدد التبديلات

Nombres de Commutation

تعد الأعداد التبديلية أعدادا مساعدة تجمع بين معامل الخصم وقانون الأحياء بهدف تسهيل العمليات الحسابية. وفي زمن كان الحساب اليدوي يلعب دورا كبيرا كسبت هذه الأعداد أهمية قصوى. ولا تزال هذه الأعداد تستخدم اليوم في عمليات حسابية فردية أو كجداول مساعدة مدرجة في الحاسب الآلي. عمليا، تمكن هذه الأعداد من كتابة القيم الحالية العادية التي تم تعريفها في الفصلين 9 و10 بطريقة أسهل وكذلك تمكن من حساب سريع للقيم الحالية والعلاوات في العقود التأمينية على رأس المال في حالة الوفاة أو في حالة البقاء على قيد الحياة.

(11.1) تبديلات الحياة

تمكن هذه التبديلات من نسخ القيم الحالية المتعلقة بالمداخيل؛ لذلك فهي تطبق خصوصا في عقود التأمين في حالة البقاء على قيد الحياة. الرموز المستخدمة هي:D,N,S. لن نقدم تعريفا للحرف S الذي يستخدم للمداخيل التصاعدية والتي لم يتم التطرق إليها في هذا الكتاب. الحروف D، N تأخذ مفهوما ذاكريا كما هو مبين في تعريفها الآتي:

- D تدل على عدد يوضع في أكثر الأحيان في بسط الكسر.
- تدل على عدد يوضع في أكثر الأحيان في مقام الكسر.

من المساوئ الأساسية لأعداد التبديلات هي وجود جدول للتبديلات لكل نسبة فائدة. في المقابل فهي تسهل بشكل كبير عمليات حساب القيم الحالية للدخل (العمري وغيره) ولرؤوس الأموال.

(11.1.1) التبديلات لفرد واحد

$$\boxed{D_x = l_x v^x} \tag{11.1}$$

$$\boxed{N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_w = \sum_{t=0}^{w-x} D_{x+t}} \tag{11.2}$$

كتابة القيمة الحالية حسب عدد التبديلات يستدعي بعض العمليات الحسابية.

نبدأ أولا بضرب البسط والمقام بـv^x بهدف الحصول على عبارة من نوع $l_x v^x$ وهو ما يمكن من تعريف D_x.

مثال: اكتب عبارة القيمة الحالية التالية في شكل عدد التبديلات:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

الحل

$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ هي:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^x \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

نضرب البسط والمقام بـv^x وهو ما يعطينا بعد عمل الاختزالات اللازمة:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^x \frac{l_{x+t}}{l_x} \frac{v^x}{v^x} = \frac{1}{l_x v^x} \sum_{t=0}^{n-1} v^{x+t}\, l_{x+t} = \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}$$

وهو ما يمكن كتابته كذلك:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

(11.1.2) القيم الحالية الأساسية بدلالة الأعداد التبديلية

$$\boxed{a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}} \tag{11.3}$$

$$\boxed{\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}} \tag{11.4}$$

$$\boxed{a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}} \tag{11.5}$$

$$\boxed{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}} \tag{11.6}$$

$$\boxed{{}_{k|}a_x = \frac{N_{x+k+1}}{D_x}} \tag{11.7}$$

$$\boxed{{}_{k|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+k}}{D_x}} \tag{11.8}$$

$$\boxed{{}_{k|}a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x}} \tag{11.9}$$

$$\boxed{{}_{k|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x}} \tag{11.10}$$

$$\boxed{a_x^{(m)} = \frac{N_{x+1} + \frac{m-1}{2m} D_x}{D_x}} \tag{11.11}$$

$$\boxed{\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{N_x + \frac{m-1}{2m} D_x}{D_x}} \tag{11.12}$$

$$\boxed{a_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1} + \frac{m-1}{2m}\,(D_x - D_{x+n})}{D_x}} \tag{11.13}$$

$$\boxed{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \frac{N_x - N_{x+n} - \frac{m-1}{2m}\,(D_x - D_{x+n})}{D_x}} \tag{11.14}$$

مثال: ما هي العلاوة الوحيدة (UP) التي يجب على مؤمن له دفعها لتمويل دخل تقاعدي يقدر بـ 12000€ سنويا يدفع ما قبل العد حين يبلغ من العمر 65 سنة؟ استخدم جدول التبديلات المرفق بالملحق وذلك لنسبة فائدة تساوي 3%.

الحل

العلاوة الوحيدة التي يجب على المؤمن له دفعها مقابل هذه الخدمة تكتب على النحو التالي:

$$UP = 12'000_{29|}\ddot{a}_{36} = 12'000\frac{N_{65}}{D_{36}}$$

وهو ما يعطينا في الأخير:

$$12'000 \times \frac{144'27}{33'84} = 52'567{,}88€$$

(11.1.3) التبديلات لشخصين

أعداد التبديلات لشخصين تعرف على النحو التالي:

$$\boxed{D_{xy} = l_x l_y v^{\frac{x+y}{2}}} \qquad (11.15)$$

$$\boxed{N_{xy} = D_{xy} + D_{x+1y+1} + D_{ww} = \sum_{t=0}^{w-x} D_{x+ty+t}} \qquad (11.16)$$

(11.2) التبديلات للوفاة

تمكن هذه التبديلات من نسخ القيم الحالية لرؤوس الأموال، وبالتالي فهي تطبق خاصة على التأمينات في حالة الوفاة.تظهر الرموز ثلاثة أنواع من الحروف: C, M, R. سوف لن نعرف الحرف R المستخدم للمستحقات التزايدية والتي لم نتطرق إليها في هذا الكتاب.

الحروف C, M تنطوي على مفهوم ذاكري وفعليا هي تعرف كالآتي:

C تدل على أنها الحرف الذي يسبق حرف D في ترتيب الحروف الأبجدية وهو الحرف الذي نجده في التبديلات عند البقاء على قيد الحياة.

M تدل على أنها الحرف الذي يسبق حرف N في ترتيب الحروف الأبجدية وهو الحرف الذي نجده في التبديلات عند البقاء على قيد الحياة.

(11.2.1) التبديلات لشخص واحد

$$\boxed{C_x = d_x v^{x+1}} \tag{11.17}$$

$$\boxed{M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + D_{w-1} = \sum_{t=0}^{w-x-1} C_{x+t}} \tag{11.18}$$

لإيجاد القيم الحالية لرؤوس الأموال من خلال التبديلات نقوم ببعض التغييرات على القواعد المماثلة المبينة في الفقرات السابقة، نبدأ بضرب البسط والمقام بـv^x لكي نوجد في الأخير العبارة C_x.

مثال: حرر القيمة الحالية من خلال عدد التبديلات لرأس مال في حالة الوفاة وذلك لمؤمن له عمره x ولمدى الحياة.

الحل

A_x تحسب كالآتي:

$$A_x = \sum_{t=0}^{w-x} v^{t+1} \frac{d_{x+t}}{l_x}$$

نضرب البسط والمقام بـv^x وهو ما يعطينا بعد اختزال الكسر:

$$A_x = \sum_{t=0}^{w-x} v^{t+1} \frac{d_{x+t}}{l_x} \frac{v^x}{v^x} = \frac{1}{l_x v^x} \sum_{t=0}^{w-x} v^{x+t+1} d_{x+t} = \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{w-x} C_{x+t}$$

وهو ما يكتب كذلك:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

(11.2.2) القيم الحالية الأساسية بدلالة الأعداد التبديلية

$$\boxed{A_x = \frac{M_x}{D_x}} \qquad (11.19)$$

$$\boxed{{}_{|n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}} \qquad (11.20)$$

$$\boxed{{}_{k|}A_x = \frac{M_{x+k}}{D_x}} \qquad (11.21)$$

$$\boxed{{}_{k|n}A_x = \frac{M_{x+k} - D_{x+n}}{D_x}} \qquad (11.22)$$

$$\boxed{A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}} \qquad (11.23)$$

$$\boxed{{}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}} \qquad (11.24)$$

مثال: احسب العلاوة الوحيدة لعقد تأمين مختلط بقيمة frs 15000 لفائدة مؤمن لها عمرها 50 سنة. المعطيات الأخرى: فترة التأمين: 12 سنة. القواعد الفنية للعمليات الحسابية: عدد التبديلات في الملحق بنسبة فائدة 3%.

الحل

العلاوة الوحيدة لهذه الخدمة تكتب على النحو التالي:

$$UP = 15'000A_{50:\overline{12}|} = \frac{M_{50} - M_{62} + D_{62}}{D_{50}}$$

وهو ما يعطي في النهاية:

$$15'000 \times \frac{8'557{,}43 - 7'746{,}65 + 14'702{,}83}{21'967{,}02} = 10'34\ frs$$

(11.2.3) التبديلات على شخصين

أعداد التبديلات على شخصين تعرف على النحو التالي:

$$\boxed{C_{xy} = d_{xy}v^{\frac{x+y}{2}+1}} \qquad (11.25)$$

$$M_{xy} = C_{xy} + C_{x+1y+1} + C_{ww} = \sum_{t=0}^{w-x} C_{x+ty+t} \qquad (11.26)$$

(11.3) جدول التبديلات

تبدأ جداول التبديلات عادة برقم أولي يساوي 100000 شخص بعمر صفر سنة رغم وجود احتمال الوفاة في عمر صفر سنة، لكن أي رقم آخر أولي يمكن أن يأخذ مكانه في هذا الجدول. حيث لو كان لدى مؤسسة تأمينية عملاء تتجاوز أعمارهم جميعا الثلاثين سنة فذلك لا يمنع المؤسسة من الاعتماد على جدول تبديلات يبدأ من عمر 30 سنة بـ 5000 شخص مثلا. وذلك لا يمكنه أن يؤثر على نتائج القيم الحالية.

يوجد عرف إضافي في التبديلات على شخصين. حيث إن العبارة $v^x l_x l_y$ عادة تكون كبيرة الحجم في كتابتها لذلك نعوضها بالعبارة $10^{-5} v^x l_x l_y$ إذا كان عدد الأشخاص يساوي 100000 (10^{-5}). وهذا يجعل العبارة أقل حجما وتقترب من حجم القيم l_y أو x .

في النهاية لا بد من التذكير بأن جدول التبديلات على شخصين يجب أن يصمم بالإشارة إلى فارق السن بين مؤمنين لهما. وإنشاء الجدول يصبح سهلا جدا باستخدام برنامج الجداول الإلكترونية إكسل. حيث يكفي التزود باحتمالات الوفاةq_x وq_y لكل الأعمار.

المثال التالي يبين كيفية إدخال القواعد في الخلايا الأولى لإنشاء جدول التبديلات بنسبة فائدة 3% وذلك بالاستعانة ببرنامج الجداول الإلكترونية إكسل. قيم l_x تأخذ من جدول الوفاة المرفق بالملحق.

تبديلات الحياة

D	C	B	A	
Nx	Dx	lx	x	1
=SUM(C2:C$110)	=B2*1.03^-A2	100000	0	2
=SUM(C3:C$110)	=B3*1.03^-A3	99246	1	3
=SUM(C4:C$110)	=B4*1.03^-A4	99183	2	4

تبديلات الوفاة

D	C	B	A	
Mx	Cx	lx	x	1
=SUM(C2:C$110)	=(B2-B3)*1.03^-(A2+1)	100000	0	2
=SUM(C3:C$110)	=(B3-B4)*1.03^-(A3+1)	99246	1	3
=SUM(C4:C$110)	=(B4-B5)*1.03^-(A4+1)	99183	2	4

ملاحظة: الأعمدة C, D, E, F يمكن نسخها بأكملها إلى أسفل في عملية واحدة. بعد التدرب قليلا على كتابة القوانين يمكن إنشاء جدول تبديلات بسرعة فائقة.

(11.4) تمارين

1- اكتب قانون العلاوة الوحيدة ثم احسب القيمة المناسبة لتأمين رأس مال في حالة الوفاة خلال السنة لمؤمن له عمره 20 سنة وذلك باستخدام أعداد التبديلات المرفق بالملحق. علما بأن رأس المؤمن هو: 80000 €.

2- اكتب قانون العلاوة الوحيدة ثم احسب القيمة المناسبة لتأمين رأس مال في حالة الوفاة لمدى الحياة لمؤمن له عمره 20 سنة وذلك باستخدام أعداد التبديلات المرفقة بالملحق، علما بأن رأس المؤمن هو: 80000 €.

3- استخدم جدول التبديلات المرفق بالملحق لحساب القيمة الحالية لدخل عمري ما قبل العد قيمته 48000 frs يصرف إلى مؤمن لها عمرها 45 سنة طالما بقيت على قيد الحياة.

4- استخدم جدول التبديلات المرفق بالملحق لحساب القيمة الحالية لدخل عمري ما قبل العد قيمته 4000 frs شهريا يصرف إلى مؤمن لها عمرها 45 سنة طالما بقيت على قيد الحياة.

5- ينص عقد تأمين على الحياة أن تصرف مؤسسة التأمين مبلغا قدره 15000 € إذا توفيت المؤمن لها وعمرها 28 سنة قبل بلوغها سن 62 أو إذا بقيت على قيد الحياة في سن 62. حرر واحسب العلاوة الوحيدة (UP) لهذا العقد باستخدام أعداد التبديلات في الملحق.

6- باستخدام جدول التبديلات في الملحق، احسب القيمة الحالية لدخل عمري سنوي ما بعد العد قيمته 4000 € يصرف لمؤمن له عمره 40 سنة لمدة أربع سنوات طالما بقي على قيد الحياة.

7- يوجب عقد التأمين على صرف مبلغ 10000 فرنك إذا توفي المؤمن له وعمره حاليا 30 سنة قبل بلوغه سن الأربعين و20000 فرنك إذا توفي بين الأربعين والخمسين و15000 فرنك إذا بقي على قيد الحياة في سن الخمسين. احسب العلاوة الوحيدة لهذا العقد باستخدام أعداد التبديلات في الملحق.

8- المطلوب توصيف نوعية التغطية الممثلة لكل من العبارات التالية:

(أ) $€\ 1'000\left(\frac{C_{43}}{D_{43}}\right)$.

(ب) $€\ 1'000\left(\frac{C_{43}+C_{44}+C_{45}+C_{46}}{D_{43}}\right)$.

(جـ) $€\ 2'000\left(\frac{N_{65}-N_{75}}{D_{20}}\right)$.

(د) $€\ 2'000\left(\frac{N_{65}}{D_{20}}\right)$.

(هـ) $€\ 5'000\left(\frac{M_{65}}{D_{20}}\right)$.

(و) $€\ 15'000\left(\frac{M_{25}-M_{50}+D_{50}}{D_{25}}\right)$.

(ز) $1'500\left(\frac{D_{65}}{D_{20}}\right)$ €.

9- احسب العبارات التالية مستعينا بأعداد التبديلات في الملحق (المؤمن له رجل):

(أ) $\ddot{a}_{55}$.

(ب) $a_{55:\overline{15|}}$.

(جـ) $\ddot{a}_{75:\overline{15|}}$.

(د) $\ddot{a}^{(12)}_{75:\overline{15|}}$.

(هـ) $A_{25:\overline{40|}}$.

(و) $A_{25:\overline{1|}}$.

10- اشرح العلاقة التالية باستخدام أعداد التبديلات:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - a_{x:\overline{n|}} = 1 - {}_nE_x$$

11- إذا علمت أن: $N_x = 40'713$, $N_{x+1} = 38'528$, $N_{x+2} = 36'433$, $i = 4\%$،
أوجد قيمة q_x.

12- ■ أبرم مؤمن له يبلغ من العمر 30 سنة عقد تأميني مع مؤسسة تأمينات لتأمين مؤقت عند الوفاة إلى حين بلوغه سن 65 عاما. وقد دفع في مقابل ذلك علاوة وحيدة تقدر بـ813,3853' frs. أوجد رأس المال المؤمن باستخدام أعداد التبديلات في الملحق؟

13- ■ تعاقد مؤمن له عمره 30 عاما مع شركة تأمين قصد تأمين مبلغ 40000 € لمدة 25 عاما وأبرم العقد في صورة تأمين مختلط. أوجد العلاوة الوحيدة المطلوب دفعها من المؤمن له إذا افترضنا أن المؤمن أضاف نسبة 2% من رأس المال المؤمن في مقابل مصروفات إدارية سنوية طالما المؤمن له باق على قيد الحياة خلال مدة التعاقد. حرر ثم احسب العلاوة الوحيدة لهذا العقد باستخدام أعداد التبديلات في الملحق.

الفصل الثاني عشر

علاوات التأمين

Primes d'assurance

تحدد علاوات التأمين من خلال 3 عناصر هي: الفائدة، الخطورة، وكذلك التكلفة المتعلقة بإدارة العقد من طرف المؤمن. وترتبط العلاوات الصافية بالفائدة والخطورة فحسب. أما العلاوات الإجمالية التي تسمى أيضا العلاوات التسعيرية فيضاف إليها التكاليف الإدارية الأخرى. سوف نستعرض في هذا الفصل عدة أنواع من العلاوات.

(12.1) المفاهيم المختلفة للعلاوات

شكل التأمين وطريقة تمويله تؤدي إلى تعريف العلاوات الآتية:

- **العلاوة الوحيدة (UP)**. نجد هذا النوع من العلاوات أساسا في عقود تأمين على الدخل. تدفع هذه العلاوة الوحيدة عند إبرام العقد. وهي تمثل القيمة الحالية للخدمات (المبالغ) المؤمنة مستقبلا.
- **العلاوة السنوية (AP)** وهي تدفع عادة مسبقا (ما قبل العد) طالما المؤمن له باق على قيد الحياة ولمدة محددة.

- **العلاوة المجزأة** (**FP**) يمكن لمؤمن له أن يرغب في دفع علاوته مجزأة بالشهر، بربع السنة أو بنصف السنة. في هذه الحال نتحدث عن علاوة مجزأة.
- **العلاوة الصافية** (**PP**) وهي تساوي القيمة الحقيقية للخدمات المقدمة (المبالغ المستحقة للمؤمن له). وهي لا تأخذ في الاعتبار سوى الفائدة والخطورة. جميع العلاوات المحسوبة في الفصل السابق هي في حقيقة الأمر علاوات صافية.
- **العلاوة التجارية** (**CP**) تمثل العلاوة الصافية زائد مصاريف المؤمن.
- **العلاوة المتدرجة** (**GP**) يدفع المؤمن له طيلة نفاذ العقد نفس العلاوة مهما كان عمره ومهما كانت خطورة وفاته. وهي تحدد مرة واحدة في بداية التعاقد.
- **العلاوة المعاد حسابها سنويا** (**PRA**) في هذه الحالة يتم حساب العلاوة كل سنة مع الأخذ في الاعتبار عمر المؤمن له وخطر وفاته.
- **العلاوة المتوسطة** (**AP**) نجد هذا النوع من العلاوات عند التأمين الجماعي، حيث يدفع كل مؤمن على عكس التأمين الفردي مبلغا واحدا مهما كان عمره.

(12.2) قاعدة العمل الأساسية

تتمثل قاعدة العمل الأساسية لحساب العلاوات في حالة التأمين الفردي في الآتي:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{القيمة الحالية للخدمات}\\ =\\ \text{القيمة الحالية للعلاوات}\end{array}} \qquad (12.1)$$

نتحدث في هذه الحالة عن مبدأ المعادلة الفردية.

بينما في حالة التأمين الجماعي (صناديق المعاشات التقاعدية مثلا) يطبق هذا المبدأ على مستوى إجمالي المؤمنين لهم. في هذه الحالة تمكننا قاعدة العمل التالية من حساب العلاوات:

$$\sum_{i=1}^{\text{عدد المؤمن لهم}} (\text{القيمةالحالية للخدمات}) = \sum_{i=1}^{\text{عدد المؤمن لهم}} (\text{القيمةالحالية للعلاوات}) \qquad (12.2)$$

نتحدث في هذه الحالة عن مبدأ المعادلة الجماعية.

(12.3) العلاوات المختلفة

(12.3.1) العلاوات السنوية المتدرجة

لكي نستوعب جيدا مفهوم العلاوات السنوية المتدرجة لنأخذ المثال الآتي:

مثال: يرغب رجل عمره x في الحصول على رأس مال يساوي 1000€ بعد عشر سنوات إن كان لايزال على قيد الحياة. في المقابل، فهو يتعهد بدفع علاوات سنوية مسبقة طيلة 5 سنوات (AP). احسب العلاوة السنوية المتدرجة المطلوب دفعها لكل من الفرضيات التالية:

(أ) لا تستخدم الفائدة ولا الوفيات في العمليات الحسابية.

(ب) الفائدة فقط تستخدم في الحساب.

(جـ) الفائدة والوفيات يتم استخدامهما في العمليات الحسابية.

الحلول:

جميع الحالات يمكن تمثيلها على النحو التالي:

(أ) $PA + PA + PA + PA + PA = 1'000$ قاعدة العمل (12.1)

$5PA = 1'000$ إظهار

$PA = \frac{1'000}{5} = 200€$ القسمة على 5

ب) $A + PAv + PAv^2 + PAv^3 + PAv^4 = 1'000v^{10}$ قاعدةالعمل (12.1)

$PA\,(1 + v + v^2 + v^3 + v^4) = 1'000v^{10}$ إظهار

$PA\ddot{a}_{\overline{5}|} = 1'000v^{10}$ اختزال

$PA = \frac{1'000v^{10}}{\ddot{a}_{\overline{5}|}}$ القسمة على $\ddot{a}_{\overline{5}|}$

جـ) $PA\ddot{a}_{x:\overline{5}|} = 1'000\ {}_nE_x$ قاعدة العمل (12.1)

$PA = \frac{1'000\ {}_nE_x}{\ddot{a}_{x:\overline{5}|}}$ القسمة على $\ddot{a}_{x:\overline{5}|}$

(12.3.2) العلاوات المجزأة

يمكن للعلاوة أن تثقل كاهل المؤمن له حين يختار دفعها سنويا. في بعض الحالات يسمح للمؤمن له تسديد علاواته شهريا أو ربع سنويا أو نصف سنويا. تجزئة العلاوة السنوية يؤدي إلى:

- تسديد علاوة سنوية إجمالية أعلى.
- الترفيع في المصاريف الإدارية للمؤمن وهو ما يتم تحميله على المؤمن له عند تحديد السعر النهائي.

مثال: احسب العلاوة الشهرية المدفوعة مسبقا لتأمين رأس مال عند الحياة إلى سن 67 سنة وذلك باستخدام أعداد التبديلات المرفقة في الملحق. العلاوة تدفع طالما المؤمن له على قيد الحياة ولكن بحد أقصى 67 سنة. علما بأن عمر المؤمن له 42 سنة والمبلغ المؤمن: 200000 frs.

الحل

لتكن AP العلاوة السنوية، اعتمادا على مبدأ المعادلة، لدينا فترة تأمين تساوي: 67−42=25 سنة:

$$AP\ddot{a}_{42:\overline{25}|}^{(12)} = 200'000\,{}_{25}E_{42}$$

وهكذا تصبح العلاوة السنوية:

$$AP = \frac{200'000\,{}_{25}E_{42}}{\ddot{a}_{42:\overline{25}|}^{(12)}}$$

نحسب القيم المطلوبة في العبارة:

$${}_{25}E_{42} = \frac{D_{67}}{D_{42}} = 0{,}387215$$

و

$$\ddot{a}_{42:\overline{25}|}^{(12)} = \frac{N_{42}-N_{67}-\frac{11}{24}(D_{42}-D_{67})}{D_{42}} = 16{,}791875$$

وبالتالي:

$$AP = \frac{200'000\times 0{,}387215}{16{,}791875} = 4'611{,}93\ frs$$

وهو ما يعطينا علاوة شهرية تساوي: $\frac{4611{,}93}{12} = 384{,}33\ frs$

(12.3.3) العلاوات الصافية والتجارية

العلاوة التجارية (CP) تساوي العلاوة الصافية زائد مصاريف المؤمن:

$$\boxed{CP = PP + \text{مصاريف}} \qquad (12.3)$$

المصاريف يمكن أن توزع على النحو التالي:

α مصاريف واحدة متناسبة مع رأس المال المؤمن (مثال: عمولة اكتساب).

β مصاريف دورية متناسبة مع العلاوة التجارية (مثال: مصاريف تحصيل).

γ مصاريف دورية متناسبة مع رأس المال المؤمن (مثال: مصاريف إدارية).

مثال: ليكن لدينا تأمين مختلط على رأس مال على أن تتضمن العلاوات السنوية ما يلي: عمولات الاكتساب $\alpha = 2\%$، ومصاريف التحصيل $\beta = 2\%$ وكذلك مصاريف إدارية $\gamma = 0{,}2\%$. أوجد العلاوة التجارية لهذا التأمين.

الحل

بحسب مبدأ المعادلة الفردية نستطيع كتابة ما يلي:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta CP\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$ قاعدة العمل(12.1)

$$CP\,(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta\ddot{a}_{x:\overline{n}|}) = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$ إظهار

$$CP = \frac{A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\,(1-\beta)}$$ اختزال

بالتعويض عن القيم نحصل على:

$$CP = \frac{A_{x:\overline{n}|} + 0{,}02 + 0{,}02 \times \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{0{,}98 \times \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

(12.3.4) العلاوات المتدرجة والتي يعاد حسابها سنويا

العلاوات التي يعاد حسابها سنويا هي علاوات تدفع مرة واحدة وهي مخصصة لعقود مدتها سنة واحدة، بينما العلاوات المتدرجة تساوي متوسط العلاوات السنوية التي يعاد حسابها سنويا. المثال الآتي يوضح الفرق بين العلاوتين:

مثال: حدد رأس المال لتأمين مؤقت عند الوفاة مدته 3 سنوات بقيمة €10000، إذا علمت أن عمر المؤمن له هو 40 سنة، أوجد العلاوة الوحيدة (UP) والعلاوة السنوية (AP) وكذلك العلاوات السنوية التي يعاد حسابها (RAP) باستخدام التبديلات المرفقة في الملحق.

الحل

لنحسب أولا العلاوة الوحيدة ثم العلاوة السنوية:

$UP = {}_{|3}A_{40}$ قاعدة العمل(12.1)

$= 10'000\frac{M_{40}-M_{43}}{D_{40}} = 58{,}531€$ استخدام التبديلات

$AP = \frac{UP}{\ddot{a}_{40:\overline{3}|}}$ حيث $\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = \frac{40-N_{43}}{D_{40}} = 2{,}90778$

وبالتالي:

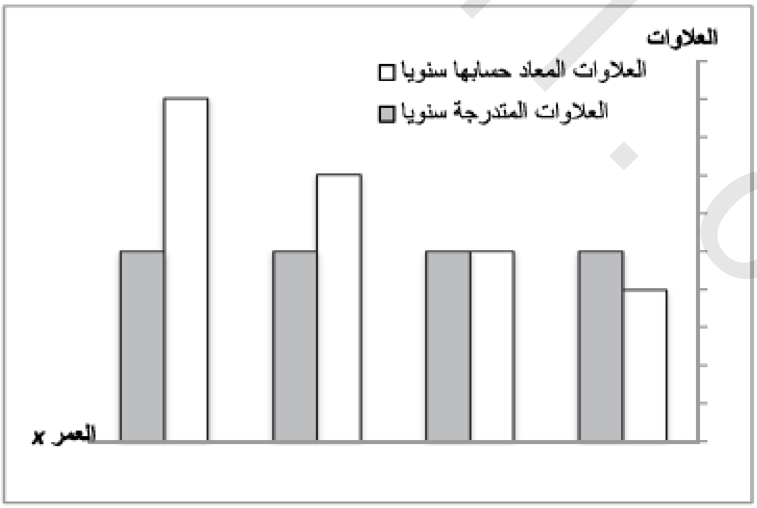
$$AP = \frac{58{,}531}{2{,}90778} = 20{,}13\ €$$

العلاوات التي يعاد حسابها سنويا في السن 40 و41 و42 هي:

$$RAP_{40} = 10'000\frac{M_{40}-M_{41}}{D_{40}} = 10'000q_{40}v = 19.98€$$

$$RAP_{41} = 10'000\frac{M_{41}-M_{42}}{D_{41}} = 10'000q_{41}v = 20.09€$$

$$RAP_{42} = 10'000\frac{M_{42}-M_{43}}{D_{42}} = 10'000q_{42}v = 21.40€$$



(12.3.5) العلاوات المتوسطة

في حالة التأمينات الجماعية (صناديق المعاشات التقاعدية مثلا)، نحسب عادة معدل علاوة موحد لجميع المؤمن لهم، فيمكن مثلا لعلاوة تقدر بـ 8% من راتب كل موظف أن تكون ضرورية لتمويل رواتب التقاعد. لتحديد العلاوة المتوسطة التي تنطبق على جميع المؤمن لهم نستخدم مبدأ المعادلة الجماعية (12.2).

مثال رقم (1): ليكن لدينا مؤمنان لهما من الذكور عمرهما على التوالي 20 و30 سنة، وسن تقاعدهما المرتقب هو 60 سنة. الدخل التقاعدي سوف يساوي 60% من الراتب. ولتمويل ذلك الدخل يقتطع من الراتب علاوات سنوية طالما بقي المؤمن لهما على قيد الحياة وبحد أقصى سن التقاعد.احسب العلاوة المتوسطة السنوية للمجموعة مستعينا بالجدول المرفق وأعداد التبديلات بالملحق:

المؤمن له	الراتب السنوي	العمر	فترة التأمين	الدخل التقاعدي السنوي
x_1	80'000 €	20	40 سنة	48'000 €
x_2	120'000 €	30	30 سنة	72'000 €
Σ	200'000 €			

الحل

المؤمن له	العلاوة	الدخل التقاعدي	n	x	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}$	القيمة الحالية للعلاوات	$_{n\vert}\ddot{a}_x$	القيمة الحالية للدخل التقاعدي
x_1	P	€48000	40	20	23,156	23,156P	,8963	€187008
x_2	P	€72000	30	30	16,635	16,635P	,3225	€383184
					Σ	39,791P		€570192

وبالتالي:

$$P = \frac{570192}{39{,}791} = 14329{,}67€$$

وهذه العلاوة السنوية يتم تسديدها من قبل جميع المؤمن لهم وقد تم إيجادها على أساس راتب قاعدي يقدر بـ 200000€. نستطيع الآن تحديد معدل العلاوة الموحدة للمجموعة:

$$\text{معدل العلاوة} = \frac{14'329{,}67}{200'000} = 0{,}071648 \approx 7{,}16\%$$

العلاوة السنوية لأول مؤمن له تقدر بـ:

$$80'000 \times 7{,}16\% = 5'728€$$

والعلاوة السنوية لثاني مؤمن له هي:

$$120'000 \times 7{,}16\% = 8'592€$$

مثال رقم (2): (تكملة للمثال الأول) التحق مؤمنان لهما جديدان إلى المجموعة. الأول عمره 20 سنة ويحصل على راتب سنوي يقدر بـ 80000 €. أما الثاني وعمره 30 سنة فيحصل على راتب سنوي يقدر بـ120000€. ما هي مساهمات هذه الشخصين بعد دخولهما للمجموعة؟

الحل

سوف يدفع المؤمنان لهما الجديدان نفس معدل العلاوة التي يدفعها بقية المؤمن لهم وهي 7,16% من راتبهما السنوي. في المقابل ولتجنب اختلال التوازن المالي للمجموعة، سوف يدفع المؤمن لهما الجدد علاوة واحدة إضافية لتمويل دخولهما للمجموعة. وهكذا نحصل على:

المؤمن الأول الجديد:

- القيمة الحالية للخدمات 187008,0€

- القيمة الحالية للعلاوات 80000*16,7%*23,156 132637,6€

المساهمات الإضافية 54370,4€

المؤمن الثاني الجديد:

- القيمة الحالية للخدمات 383184,0€ .

- القيمة الحالية للعلاوات120000*16,7%*16,635 142927,9€

- المساهمات الإضافية 240256,1€ .

ملاحظة: يمكن للمساهمة الإضافية التي تأخذ شكل العلاوة الواحدة الإضافية أن تكون مهمة نسبيا فهي مرتبطة أساسا بعمر المؤمن له عن دخوله المجموعة.

(12.4) تمارين

1- احسب العلاوة السنوية لتأمين مؤقت على رأس مال عند الوفاة يقدر بـ28000€ تقدمت بطلبه إلى شركة تأمين مؤمن لها عمرها 24 سنة ولفترة تساوي 36 سنة. استخدم أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

2- احسب العلاوة الشهرية لتأمين مؤقت على رأس مال عند الوفاة يقدر بـ28000€ تقدمت بطلبه إلى شركة تأمين مؤمن لها عمرها 24 سنة ولفترة تساوي 36 سنة. استخدم أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

3- احسب العلاوة السنوية لتأمين مختلط على رأس مال يقدر بـ50000€ لمؤمن لها عمرها 50 سنة ولفترة 15 سنة. استخدم أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

4- احسب العلاوة السنوية لتأمين مختلط على رأس مال يقدر بـ50000€ لمؤمن لها عمرها 50 سنة ولفترة 15 سنة. العلاوات في هذه المرة تدفع لمدة 10 سنوات فقط. استخدم أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

5- احسب العلاوة الشهرية لدخل عمري مؤجل يقدر بـ 2000€ لمؤمن له عمره 30 سنة. تدفع العلاوات إلى حين بلوغ المؤمن له سن الحصول على الدخل، أي 65 سنة. استخدم أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

6- احسب العلاوة السنوية لرأس مال يساوي 100000€ في حالة البقاء على قيد الحياة إلى سن الستين لمؤمن له يبلغ من العمر 25 سنة.تدفع العلاوات إلى حين بلوغ المؤمن له سن الأربعين كحد أقصى. استخدم أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

7- يرغب زوجان يبلغان من العمر $x = 34, y = 28$ في الحصول على رأس مال يقدر بـ300000 € إذا بقيا الاثنان على قيد الحياة حين يصل x إلى 65 سنة. العلاوات السنوية تدفعها المرأة طالما بقيت على قيد الحياة وبحد أقصى يساوي فترة التأمين. احسب هذه العلاوة السنوية باستخدام جدول أعداد التبديلات المرفق بالملحق.

8- ■ يرغب مؤمن له عمره 45 سنة في تأمين مختلط على رأس مال إلى حين بلوغه سن 65. كما يرغب في الحصول -عند البقاء على قيد الحياة -على ضعف قيمة رأس المال التي يحصل عليها ورثته في حالة وفاته. يستطيع هذا المؤمن دفع علاوة بـ400€ شهريا. ماهو رأس المال الذي سيحصل عليه في سن 65 إذا استخدمنا جدول التبديلات المرفق بالملحق.

9- ■ يدفع مؤمن له عمره 40 عاما علاوة سنوية تبلغ 1600 frs لمدة 20 سنة وذلك مقابل تأمين مختلط. ما هي نسبة الفائدة المستخدمة من قبل الشركة المؤمنة على رأس المال إذا استعملت جدول الوفيات المرفق بالملحق؟ استخدم برنامج 'محلل إكسل' Excel Solver لحل هذا التمرين.

10- احسب باستخدام التبديلات المرفقة بالملحق، العلاوة التجارية السنوية لتأمين مختلط يبلغ 50000€ تعاقد من أجله مؤمن له يبلغ من العمر 50 سنة ولمدة 15 سنة، علما بأن العلاوات تدفع خلال مدة أقصاها 15 سنة وأن التكاليف الأخرى تتمثل فيما يلي:

- عمولة الاكتساب: 3% من قيمة رأس المال المؤمن.
- مصاريف التحصيل: 2% من العلاوة التجارية السنوية.
- مصاريف إدارية: 0,25% من رأس المال المؤمن يسدد طيلة المدة التي يشملها التأمين.

11- احسب العلاوة السنوية التجارية لرأس مؤمن يبلغ 100000€ في حالة البقاء على قيد الحياة إلى سن الستين لمؤمن له عمره الآن 25 سنة. تدفع العلاوات إلى حين بلوغ المؤمن له سن الأربعين كحد أقصى.استخدم التبديلات المرفقة بالملحق والتكاليف الإضافية التالية:

- عمولة الاكتساب: 2000€ تدفع لموظف التأمينات.
- مصاريف التحصيل والمصاريف الإدارية: 3% من العلاوة التجارية السنوية طيلة كامل فترة التغطية.

12- احسب باستخدام التبديلات المرفقة بالملحق، العلاوة الواحدة التجارية لدخل عمري سنوي ومؤجل بقيمة frs12000 . إذا علمت أن المؤمن له يبلغ من العمر 50 عاما وأن الدخل يصرف ' ما بعد العد' في سن 65 وأن المصاريف الأخرى هي:

- عمولة الاكتساب: 3% من العلاوة الواحدة التجارية.
- مصاريف إدارية: 2% (ما قبل العد) من قيمة الدخل طيلة فترة التأجيل و2,5% (ما بعد العد) من قيمة الدخل طيلة الفترة المستحقة للصرف.

13- احسب العلاوة السنوية لرأس مال يبلغ €50000 مؤمن على الطريقة المختلطة لمؤمن له عمره 50 سنة ولفترة تأمين بسنتين.ثم احسب العلاوات السنوية التي يعاد حسابها سنويا في 50 و51 سنة. استخدم أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

14- ■ لتحفيز موظفيها قررت مؤسسة أن تصرف لكل موظف علاوة تشجيع لمدة ثلاثة سنوات. هذه العلاوة المقدرة إجمالا بـfrs 100000 سوف تصرف مع الراتب الشهري للموظفين. بالنسبة للمتمرنين تصرف هذه العلاوة لسنة واحدة فقط وهي تساوي 10% من قيمة العلاوة التي تصرف للموظف. وقد قررت الشركة صرف العلاوة بدءا من الشهر القادم ويبلغ عدد الموظفين 30 (متوسط أعمارهم 25 سنة) بينما يوجد في الشركة 4 متمرنين (متوسط أعمارهم 17 سنة).

احسب قيمة العلاوة التي سيحصل عيها الموظفون والمتمرنون مستندا إلى الفرضيات التالية:

(أ) توفر مبلغ العلاوة الإجمالي في صندوق الشركة.

(ب) توفر مبلغ العلاوة الإجمالي في حساب بنكي يوفر 3% سنويا.

(جـ) تستخدم الشركة مبلغ €100000 كعلاوة وحيدة (UP). وتتكفل شركة التأمين بصرف علاوات التشجيع (وهذا يستدعي استخدام التبديلات المرفقة بالملحق).

15- ■ احسب العلاوة السنوية المتوسطة في صورة نسبة مئوية من الراتب لمجموعة الأشخاص التالية وباستخدام أعداد التبديلات المرفقة بالملحق. علما بأن

دخل الشيخوخة المؤمن والذي يصرف 'ما قبل العد' بدءا من عمر 62 عاما يمثل 60% من الراتب.

عمر الدخول	العدد	الراتب السنوي
27	32	€672000
32	39	€1872000
40	29	€1566000
الإجمالي	100	€4110000

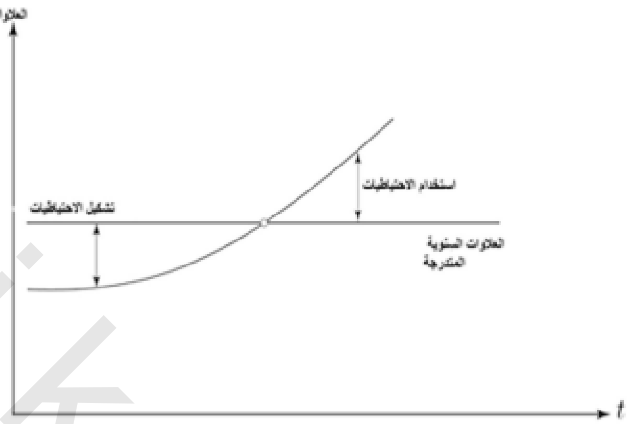
التحقت مؤمن لها عمرها 50 عاما بالمجموعة وبراتب مؤمن عليه يساوي €33000. أوجد العلاوة الوحيدة (تمويل الدخول) التي وجب عليها تسديدها لضمان عدم تغيير التوازن المالي.

الفصل الثالث عشر

احتياطات رياضية

Rèserves Mathèmatiques

عند التعاقد بين مؤسسة تأمينات وأحد عملائها فإن مبدأ المعادلة الفردية ينص على وجوب معادلة القيمة الحالية للمستحقات (الخدمات المقدمة من المؤسسة) مع القيمة الحالية للمدفوعات (العلاوة التي يسددها العميل للشركة). ونفقد هذه العلاقة مباشرة مع دخول التأمين حيز التنفيذ. عندئذ لا يوجد تعادل بين العلاوات السنوية والخطورة السنوية، حيث يدفع صاحب بوليصة التأمين نفس العلاوات المتدرجة طيلة مدة العقد بينما يتعرض هذا الأخير إلى تطور غير محسوب لمخاطر الصرف من قبل المؤمن. في هذه الحالة واعتبارا لهذا الفارق الذي يفصل بين المؤمن والمؤمن له فإن المؤمن مطالب بتكوين احتياطي رياضي يسمى كذلك كفالة التغطية. ويسعى المؤمن من خلاله إلى تنفيذ جميع التزاماته المستقبلية. فهو يقوم –إذن– بدور إحمائي. وتوجد شروط قانونية عند إنشاء شركات التأمين تتعلق باستثمار الاحتياطي الرياضي مما يجعل من هذه الاستثمارات وسيلة لضمان الملاءمة (القدرة على الاستيفاء بالتعهدات).



الرمز:

$_tV_x$:احتياطي رياضي على علاوة صافية في الزمن t .

يمكن حساب الاحتياطي الرياضي باستخدام الطريقة الاستكشافية. وهو يساوي القيمة الحالية للمصروفات المستقبلية بعد طرح القيمة الحالية للعائدات المستقبلية، أي يمكن أن يكتب على النحو التالي:

$$_tV_x = \text{القيمة الحالية للمصروفات المستقبلية} - \text{القيمة الحالية للعلاوات المستقبلية} \qquad (13.1)$$

لنحاول من خلال المثال الآتي فهم مبدأ الاحتياطي الرياضي:

مثال: ليكن لدينا عقد تأميني يستوجب تسديد العلاوات السنوية طيلة 5 سنوات. يستحق المؤمن له الذي يبلغ من العمر 40 سنة من خلال هذا العقد رأس مال يقدر بـ €1000 إذا بقي على قيد الحياة بعد 10 سنوات. احسب باستخدام التبديلات المرفقة بالملحق الاحتياطي الرياضي الذي يسبق مباشرة العلاوة الثالثة وذلك بافتراض ما يلي:

(أ) الفائدة و الوفيات لا تندرجان ضمن العمليات الحسابية.

(ب) الفائدة فقط ونسبتها 3% هي التي تندرج ضمن العمليات الحسابية.

(جـ) الفائدة والوفيات تندرجان ضمن العمليات الحسابية.

الحلول:

الحالات الثلاث يمكن تمثيلها على النحو التالي:

(أ) مبدأ المعادلة : 1'000=5 AP ⇒1 AP = 200€

وهكذا نحصل مباشرة قبل العلاوة الثالثة على:

القيمة الحالية للعلاوات المستقبلية: 600€ = 200+200+200

القيمة الحالية للمصروفات المستقبلية:1'000€ وبالتالي:

$$_{3}V_{40} = 1'000 - 600 = 400€$$

(ب) مبدأ المعادلة: $1'000v^{10} = AP\ddot{a}_{\overline{5|}}$

$$\Rightarrow AP = \frac{1'000v^{10}}{\ddot{a}_{\overline{5|}}} = 157{,}74€$$

وهكذا نحصل مباشرة قبل العلاوة الثالثة على:

القيمة الحالية للعلاوات المستقبلية: $AP\ddot{a}_{\overline{5|}} = 459{,}58€$

القيمة الحالية للمصروفات المستقبلية: $1'000v^{7} = 813{,}09\,€$ وبالتالي:

$$_{3}V_{40} = 813{,}09 - 459{,}58 = 353{,}51€$$

(جـ) مبدأ المعادلة: $1'000\,{}_{10}E_{40} = AP\ddot{a}_{40:\overline{5|}}$

$$\Rightarrow AP = \frac{1'000\,{}_{10}E_{40}}{\ddot{a}_{40:\overline{5|}}} = 154{,}06\,€$$

وهكذا نحصل مباشرة قبل العلاوة الثالثة على:

القيمة الحالية للعلاوات المستقبلية: $AP\ddot{a}_{42:\overline{3|}} = 447{,}86€$

القيمة الحالية للمصروفات المستقبلية: $1'000\,{}_{8}E_{42} = 770{,}98\,€$ وبالتالي:

$$_{3}V_{40} = 770{,}98 - 447{,}86 = 323{,}12€$$

ملاحظات:

- في بداية التعاقد الاحتياطي الرياضي يساوي صفر؛ لأن المخاطر المستقبلية متساوية مع العلاوات المستقبلية.
- العقود ذات العلاوات الوحيدة (UP) لها احتياطي رياضي ممثل من خلال القيمة الحالية للمصروفات المستقبلية فحسب، حيث إنه لا توجد علاوات للتحصيل في المستقبل.
- وأخيراً فإن العقود التي تتضمن علاوات سنوية يعاد حسابها سنويا (RAP) لا تتطلب احتياطيا رياضيا؛ لأن المعادلة بين العلاوة والمخاطرة المؤمنة تتحقق في كل سنة.

(13.1) احتياطات رياضية لتركيبات كلاسيكية

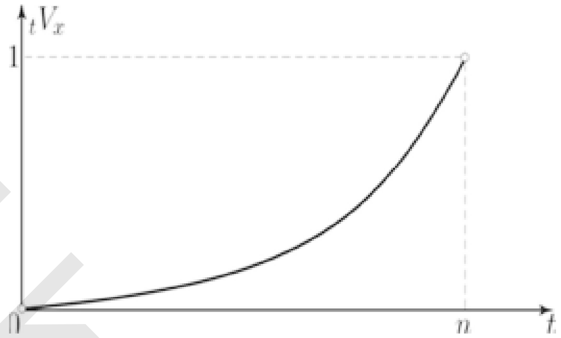
نكتفي في هذه الفقرة بتقديم القواعد المستخرجة من الطريقة الاستكشافية والمطبقة على التركيبات الكلاسيكية للتأمين. لكل تركيبة نقدم رسما بيانيا يوضح التطور في الاحتياطي الرياضي حسب الزمن إلى حين انتهاء فترة التعاقد n.

(13.1.1) رأس مال في حالة البقاء على قيد الحياة لعلاوات سنوية

القاعدة

$$\boxed{{}_tV_x = {}_{n-t}E_{x+t} - AP\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}} \qquad (13.2)$$

الرسم البياني

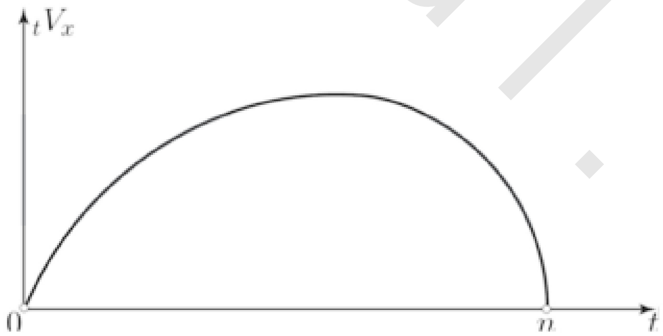


(13.1.2) رأس مال مؤقت عند الوفاة ولعلاوات سنوية

القاعدة

$$\boxed{{}_tV_x = {}_{|n-t}A_{x+t} - AP\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}} \qquad (13.3)$$

الرسم البياني

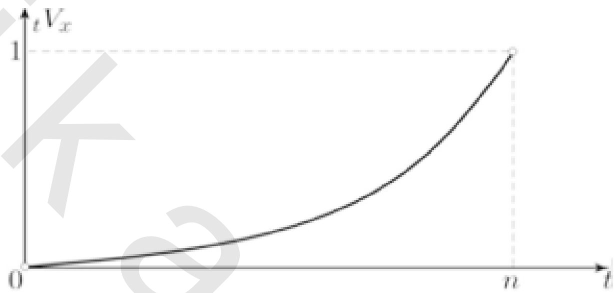


(13.1.3) تأمين مختلط لعلاوات سنوية

القاعدة

$$\boxed{{}_tV_x = A_{x+t:\overline{n-t|}} - AP\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}} \qquad (13.4)$$

الرسم البياني

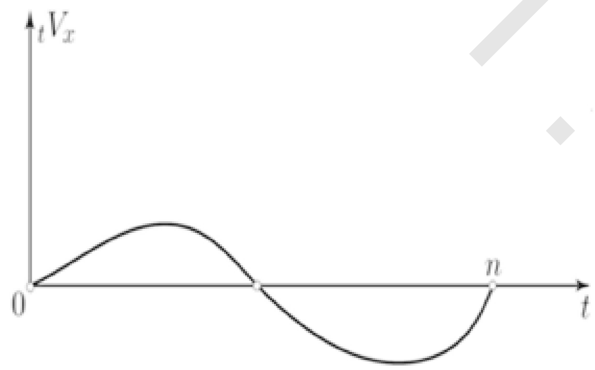


(13.1.4) دخل مؤقت للبقاء على قيد الحياة ولعلاوات سنوية

القاعدة

$$\boxed{{}_tV_x = \ddot{a}_{\overline{n-t|}} - \ddot{a}_{\overline{n|}}\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}} \qquad (13.5)$$

الرسم البياني



(13.1.5) دخل عمري مؤجل لعلاوات سنوية جارية

القواعد

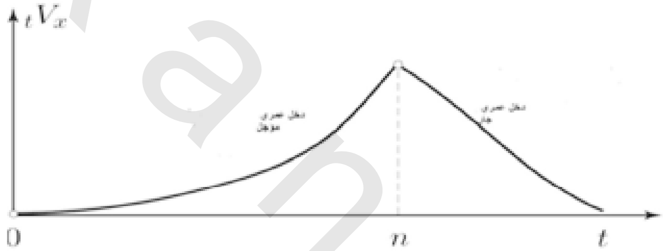
دخل عمري مؤجل

$$\boxed{{}_tV_x = {}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t} - AP\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}} \quad (13.6)$$

دخل عمري جاري

$$\boxed{{}_tV_x = \ddot{a}_{x+t}} \quad (13.7)$$

الرسم البياني



(13.2) احتياطي رياضي على العلاوات التجارية

يجب على المؤمن أن يأخذ في الاعتبار المصاريف المستقبلية عند احتسابه للاحتياطيات الرياضية. وبذلك فإن قاعدة الاحتياطي الرياضي على العلاوة التجارية تحرر على النحو التالي:

(13.8)

$_tV_x{}^{CP} =$ القيمة الحالية للالتزامات المستقبلية

+القيمة الحالية للمصروفات المستقبلية

-القيمة الحالية للعلاوات المستقبلية

نعرف كذلك الاحتياطي الرياضي لـ "زيلمار" Zillmer (أكتواري ألماني عاش في الفترة1831–1893) بطرح الحصة المتناسبة وغير المستهلكة في عمولة الاكتساب من العبارة ${}_tV_x{}^{cP}$. فنحصل بالتالي على:

$$\boxed{{}_tV_x{}^{Zillmer} = {}_tV_x{}^{CP} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}} \qquad (13.9)$$

تمثل الاحتياطيات الرياضية في نهاية الأمر الدين المستحق من المؤمن إلى المؤمن له. وهذا الأخير يمكنه –جدلا– الحصول على هذا الاحتياط الرياضي في حال قرر وضع حد للعقد المبرم بينه وبين المؤمن. وهو ما يسمى باسترجاع البوليصة (إعادة شرائها). في هذه الحالة، يتم احتساب احتياطي زيلمار Zillmer كما نستخدمه كذلك إذا قرر المؤمن له تأمين رأس مال أقل دون إلغاء البوليصة تماما ونتحدث في هذه الحالة عن تخفيض.

مثال: لدينا المعطيات التالية لعقد تأمين:

تأمين مختلط لعلاوات سنوية. رأس المال المؤمن: 20000 frs، $x = 35, n = 15$. كما تعرفنا على:

- عمولة الاكتساب: $\alpha = 3,5\%$.
- مصاريف التحصيل: $\beta = 2\%$.
- مصاريف إدارية: $\gamma = 0,25\%$.

افترض أن المؤمن له رفض تسديد العلاوة الحادية عشر، مما اضطر المؤمن إلى اقتراح لخفض رأس ماله المؤمن. أوجد رأس المال المؤمن الجديد (المخفض) باستخدام التبديلات المرفقة بالملحق.

الحل

نبدأ أولا بحساب العلاوة التجارية (CP) بحسب مبدأ المعادلة (12.1) ولرأس مال وحدة. نحصل على:

$$A_{35:\overline{15|}} + 0{,}035 + 0{,}02CP\ddot{a}_{35:\overline{15|}} + 0{,}0025\ddot{a}_{35:\overline{15|}} = CP\ddot{a}_{35:\overline{15|}}$$

يتم تجميع العبارات التي تحتوي على CP لكي نحصل على :

$$CP = \frac{A_{35:\overline{15|}} + 0{,}035 + 0{,}0025\ddot{a}_{35:\overline{15|}}}{\ddot{a}_{35:\overline{15|}}\,(1-0{,}02)}$$

بعد القيام بحساب القيم الحالية نجد:

$$CP = \frac{0{,}64638 + 0{,}035 + 0{,}0025 \times 12{,}14096}{12{,}14096\,(1-0{,}02)} = 0{,}059819$$

إذا كان رأس المال المؤمن يبلغ frs 20000 فإننا نحصل على:

$$CP = 20'000 \times 0{,}059819 = 1196{,}38\,frs$$

وبالتالي نكتب الاحتياط الرياضي قبل العلاوة الحادية عشر على النحو التالي:

$${}_{10}V_{35}{}^{CP} = A_{45:\overline{5|}} + 0{,}02CP\ddot{a}_{45:\overline{5|}} + 0{,}0025\ddot{a}_{45:\overline{5|}} - CP\ddot{a}_{45:\overline{5|}} = 0{,}600209$$

ولرأس مال مؤمن يقدر بـfrs20000 نحصل على:

$${}_{10}V_{35}{}^{CP} = 20'000 \times 0{,}600209 = 12'004{,}18\,frs$$

نستطيع بذلك حساب احتياط زيلمار Zillmer :

$${}_{10}V_{35}{}^{Zillmer} = {}_{10}V_{35}{}^{CP} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{35:\overline{15|}}}\ddot{a}_{45:\overline{5|}} = 0{,}586689$$

إذا كان المبلغ المؤمن يساوي frs20000 نحصل على:

$${}_{10}V_{35}{}^{Zillmer} = 20'000 \times 0,586689 = 11'733,78\ frs$$

يستخدم احتياطي زيلمار Zillmer لتمويل تأمين مختلط لرأس مال مخفض (C)في شكل علاوة وحيدة، وهو المقدار الذي وجب إيجاده. وهذا التأمين الجديد لا يتضمن مصاريف التحصيل (β) ولا عمولة الاكتساب (α). وبالتالي يكتب مبدأ المعادلة:

$${}_{10}V_{35}{}^{Zillmer} = UP = CA_{x+t:\overline{n-t|}} + C\gamma\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

وهي المعادلة التي تمكننا من إيجاد C:

$$C = \frac{{}_{10}V_{35}{}^{Zillmer}}{A_{45:\overline{5|}} + 0,0025\ddot{a}_{45:\overline{5|}}} = 0,670402$$

وهذا يمكن في الأخير المؤمن له من إمكانية الحصول على المبلغ (رأس المال):

$$C = 20'000 \times 0,670402 = 13'408,04\ frs$$

(13.3) تمارين

1- أوجد العلاوة السنوية لتأمين مؤقت عند الوفاة على رأس مال بلغ 28000 € لفائدة مؤمن لها عمرها 24 سنة ولفترة تأمين بـ 36 سنة، ثم احسب الاحتياط الرياضي عند سن 40 عاما. استخدم أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

2- أوجد العلاوة الشهرية لتأمين مؤقت عند الوفاة على رأس مال بلغ 150000 € لفائدة مؤمن لها عمرها 24 سنة ولفترة تأمين بـ 36 سنة. ثم احسب الاحتياط الرياضي عند سن 40 عاما. استخدم أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

3- احسب العلاوة السنوية لتأمين مختلط على رأس مال يقدر بـ50000 frs لصالح مؤمن لها عمرها 50 سنة ولفترة تأمين مدتها 15 سنة. احسب بعد ذلك الاحتياط الرياضي عند سن 64 عاما مستخدما أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

4- احسب العلاوة السنوية لتأمين مختلط على رأس مال يقدر بـ50000 frs لصالح مؤمن لها عمرها 50 سنة ولفترة تأمين مدتها 15 سنة. علما بأن العلاوات تدفع بحد أقصى لفترة 10 سنوات، احسب بعد ذلك الاحتياط الرياضي عند سن 60 عاما مستخدما أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

5- احسب العلاوة الشهرية لدخل عمري مؤجل يقدر بـ2000 € شهريا "ما قبل العد" لفائدة مؤمن لها عمرها 30 سنة. تبقى العلاوات موجبة على المؤمن لها إلى حين بلوغها سن التقاعد، أي في عمر 65 سنة. احسب بعد ذلك الاحتياط الرياضي في سن 40 سنة مستخدما أعداد التبديلات المرفقة في الملحق.

6- احسب العلاوة السنوية لرأس مال عند البقاء على قيد الحياة إلى حين بلوغ 60 سنة يقدر بـ 100000 frs لفائدة مؤمن له عمره 25 سنة. تبقى العلاوات موجبة على المؤمن له إلى حين بلوغه 40 سنة. احسب بعد ذلك الاحتياط الرياضي في سن 40 سنة مستخدما أعداد التبديلات المرفقة في الملحق.

7- يرغب زوجان $x = 34$ و $y = 28$ في الحصول على رأس مال قدره 300000 € إذا بقيا على قيد الحياة حين يبلغ x 65 سنة. تدفع العلاوات من قبل المرأة طالما بقيت على قيد الحياة ولمدة أقصاها فترة التأمين. احسب هذه العلاوة السنوية مستخدما أعداد التبديلات المرفقة بالملحق. احسب بعد ذلك الاحتياط الرياضي عند بلوغ x 40 سنة.

8- ■ باستخدام التبديلات المرفقة بالملحق أوجد ما يلي:

(أ) العلاوة السنوية (AP) التجارية لتأمين مختلط بقيمة 50000 frs لفائدة مؤمن له عمره 50 سنة ولمدة 15 سنة.

(ب) الاحتياط الرياضي لعلاوة تجارية في سن 55 عاما.

(جـ) الاحتياط الرياضي لزيلمارZillmer في سن 55 عاما.

تدفع العلاوات بحد أقصى لمدة 10 سنوات وتكون المصاريف الأخرى كالآتي:

- عمولة الاكتساب: 3% من قيمة رأس المال المؤمن.
- مصاريف التحصيل: 2% من العلاوة التجارية السنوية طيلة فترة سداد العلاوات.
- مصاريف إدارية: 0,25% من قيمة رأس المال المؤمن تسدد طيلة الفترة التي تشملها التغطية.

9- ■ باستخدام التبديلات المرفقة بالملحق، ولمؤمن له عمره 50 سنة تعاقد على بوليصة تأمين دخل عمري قدره 12000 frs يصرف ما بعد العد في سن 65 سنة، احسب ما يلي:

(أ) العلاوة التجارية المتدرجة والمسددة إلى حين بلوغ 65 عاما.

(ب) الاحتياط الرياضي على علاوة تجارية قي ست 55 عاما.

(جـ) الاحتياط الرياضي في سن 70 سنة دون رسوم.

تدفع العلاوات بحد أقصى لمدة 10 سنوات وتكون المصاريف الأخرى كالآتي:

- مصاريف التحصيل: 2% من العلاوة التجارية السنوية طيلة فترة سداد العلاوات.
- مصاريف إدارية: 2% من قيمة الدخل المؤمن تسدد طيلة فترة التأجيل و2,5% من قيمة الدخل المؤمن تسدد طيلة فترة خدمة الدخل.

10- ■ ليكن لدينا تأمين مختلط يقدر بـ35000 € لفائدة مؤمن لها عمرها 30 سنة ولمدة 15 سنة. إذا علمت أن نسب المصاريف كانت كالآتي:

- عمولة الاكتساب: 3,5% من رأس المال المؤمن.

- مصارف التحصيل: 2% من العلاوة التجارية السنوية.
- مصـاريف إداريـة: 0,15% مـن رأس المـال المـؤمن تـدفع طيلـة سـداد العلاوات.

استخدم التبديلات المرفقة بالملحق لإيجاد:

(أ) العلاوة التجارية المتدرجة التي تسدد طيلة كامل فترة التعاقد.

(ب) عند نهاية السنة العاشرة من التعاقد، الاحتياط الرياضي على علاوة تجارية، وكذلك الاحتياط الرياضي لزيلمار ~Zillmer .

(جـ) رأس المال المخفض، إذا علمنا أنه بداية من السنة الحادية عشر توقف سداد العلاوات.

(د) العلاوة التجارية الجديدة إذا انخفض رأس المال المؤمن بداية من السنة الحادية عشر لفترة التأمين ليصبح 30000 €.