الباب الرابع

مواضيع إضافية في الرياضيات

- **الفصل السادس عشر: المعادلات، الأسات، اللوغاريتمات، المتواليات**
- **الفصل السابع عشر: الجمع، الاستيفاء الداخلي، الاحتمالات، المصفوفات**

الفصل السادس عشر

المعادلات، الأسات، اللوغاريتمات، المتواليات

Equations, Puissances, Logarithmes, Progressions

(16.1) المعادلات

في الرياضيات المالية نتعامل مع المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد ومجهولين وكذلك المعادلات من الدرجة الثانية. بينما البحث عن معدلات الأداء يؤدي إلى المعادلات من درجات أعلى من 2. هذه المعادلات سيتم تناولها بأكثر تفصيل في الفصل القادم.

(16.1.1) المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

في المعادلات من الدرجة الأولى لمجهول واحد نسعى لعزل المجهول في طرف من المعادلة وترك العبارات الأخرى في الطرف الآخر من المعادلة. نفترض أن القارئ يمتلك القدرة على التعامل مع القواعد الأساسية لاستخدام الكسور والاختزالات... إلخ ولنتذكر القاعدتين التاليتين:

(أ) عندما نحول عبارة من طرف إلى طرف آخر لا بد من تغيير الإشارة.

مثال: $x - 2 = 7$ تعني أن $x = 7 + 2$ أو $x = 9$

(ب) إذا قسمنا أحد أطراف المعادلة برقم غير صفري يجب تقسيم الطرف الآخر بنفس الرقم. مثال: $3x = 12$ تعني أن $x = 4$ أو $x = \frac{12}{3}$

بعض الأمثلة المحلولة:

مثال رقم (1): أوجد حل المعادلة التالية:

$$3x - 10'000 = x + 20'000$$

الحل

المعادلة الأصلية $\quad 3x - 10'000 = x + 20'000$

تحويل المجهول إلى الطرف الأيسر $\quad 2x - 10'000 = 20'000$

تحويل 10000 إلى الطرف الأيمن $\quad 2x = 30'000$

تقسيم الطرفين على 2 $\quad \dfrac{2x}{2} = \dfrac{30'000}{2}$

وهو ما يعطينا في الأخير: $x = 15'000$

مثال رقم (2): أوجد حل المعادلة التالية:

$$P \cdot a_{\overline{n}|} = 30'000 \cdot A_{x:\overline{n}|} + P$$

الحل

المعادلة الأصلية $\quad P \cdot a_{\overline{n}|} = 30'000 \cdot A_{x:\overline{n}|} + P$

تحويل إلى الطرف الأيسر $\quad P \cdot a_{\overline{n}|} - P = 30'000 \cdot A_{x:\overline{n}|}$

إظهار $\quad P(a_{\overline{n}|} - 1) = 30'000 \cdot A_{x:\overline{n}|}$

قسمة الطرفين على $a_{\overline{n}|} - 1$ $\quad \dfrac{P(a_{\overline{n}|} - 1)}{a_{\overline{n}|} - 1} = \dfrac{30'000 \cdot A_{x:\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|} - 1}$

وهو ما يعطينا في الأخير: $P = \dfrac{30'000 \cdot A_{x:\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|} - 1}$

مثال رقم (3): أوجد حل المعادلة التالية:

$$P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

الحل

$$\begin{aligned}
P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}}\\
P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta PC\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\\
P\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(1-\beta) &= A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\\
\frac{P\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(1-\beta)}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(1-\beta)} &= \frac{A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(1-\beta)}
\end{aligned}$$

وهو ما يعطينا في الأخير: $P = \frac{A_{x:\overline{n}|}+\alpha+\gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(1-\beta)}$

(16.1.2) المعادلات من الدرجة الأولى بمجهولين

تسمى كذلك نظم المعادلات الخطية، توجد عدة طرق لحل هذه النظم، سوف نستخدم في هذه الفقرة طريقة التبديل التي يمكن تعميمها إلى نظم معادلات خطية لعدد من المعادلات والمجاهيل.

الطريقة تتمثل في عزل أحد المجاهيل في إحدى المعادلات والتعويض عنه في بقية المعادلات التي عددها $n-1$. في حالة نظم المعادلات المتكونة من معادلتين ومجهولين يكفي أن نعزل مجهولا واحدا في إحدى المعادلتين ونعوض عن قيمته في المعادلة الأخرى. وهذه بعض الحلول لنظم المعادلات الخطية.

مثال رقم (1): أوجد حل النظام التالي:

$$\begin{cases} x+y = 15\\ 3x-y = 25\end{cases}$$

الحل

عزل في المعادلة الأولى	$y = 15 - x$
تعويض في المعادلة الثانية	$3x - (15 - x) = 25$
حذف الأقواس	$3x - 15 + x = 25$
تجميع	$4x = 40$
اختزال	$x = 10$

يكفي بعد ذلك أن نعوض عن x في المعادلة الأولى أو الثانية لكي نجد $y = 5$

مثال رقم (2): أوجد قيمتي استثمارين: الأول يوفر 4% والثاني 5% والاثنان معا يوفران عائدا يقدر بـ400 € سنويا. أما إذا عكسنا الاستثمارين ووضعنا الاستثمار الأول بدلا من الثاني والثاني بدلا من الأول فسنحصل على عائد يساوي 410 €. أوجد قيمة كل من الاستثمارين؟

الحل

لنرمز إلى مبلغ الاستثمار الأول الذي يوفر 4% (0.04) وقيمة الاستثمار الثاني الذي يوفر 5% (0.05). نستطيع كتابة نظام المعادلات الخطي لهذه المسألة كالآتي:

$$\begin{cases} 0,04x + 0,05y & = & 400 \\ 0,05x + 0,04y & = & 410 \end{cases}$$

عزل $0,05y$ في المعادلة الأولى	$0,05y = 400 - 0,04x$
تقسيم الطرفين على 0,05	$y = 8'000 - 0,8x$
تعويض عن y في المعادلة الثانية	$0,05x + 0,04(8'000 - 0,8x) = 410$
فك الأقواس	$0,05x + 320 - 0,032x = 410$
تجميع	$0,018x = 90$
اختزال	$x = 5'000$

وبما أن $y = 8'000 - 0,8x$ ينتج عنه $y = 8'000 - 0,8 \times 5'000$

فالمبلغان المستثمران هما: 5000 € و4000 €.

(16.1.3) المعادلة من الدرجة الثانية

تندرج المعادلات من الدرجة الثانية في الرياضيات المالية وأساسا في المسائل التي يطلب فيها البحث عن نسبة الفائدة أو معدل الإيرادات.

تأخذ المعادلة من الدرجة الثانية بشكل عام الصورة التالية:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \qquad (16.1)$$

يوجد جذران لهذه المعادلة في حالة وجود حل $(b^2 - 4ac \geq 0)$:

$$\boxed{x_1; x_2 = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad (16.2)$$

مثال رقم (1): أوجد حل المعادلة التالية:

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

الحل

بما أن فالمعادلة لها جذران هما:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{5+\sqrt{1}}{4} = \frac{6}{4} = 1,5$$

و

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{5-\sqrt{1}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

فالحل هو إذا: $x = 1$ و $x = 1,5$

مثال رقم (2): إذا علمت أن $r = i + 1$ احسب نسبة الفائدة i التي تحقق المعادلة التالية:

$$352 = 100r + 200r^2$$

الحل

نكتب أولا المعادلة في شكلها المعتاد: $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$

أي $200r^2 + 100r - 352 = 0$

بمـــا أن $b^2 - 4ac = 100^2 - 4 \times 200 \times (-352) = 291'600 > 0$

فالمعادلة لها جذران هما:

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-100+\sqrt{291'600}}{400} = \frac{440}{400} = 1{,}1$$

و

$$r_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-100-\sqrt{291'600}}{400} = \frac{-640}{400} = -1{,}6$$

وبما أن نسبة الفائدة يجب أن تكون موجبة فالنسبة التي نبحث عنها هي $i = r - 1$ ، أي $i = 0{,}1$` أو 10%.

(16.2) الأسات والجذور

حساب الأسات يتواجد بقوة في الرياضيات المالية والأكتوارية وخاصة عند حساب معدلات الخصم وعمليات التحويل إلى رأس المال (الرسملة).

القواعد

إذا كانت $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ فإن: $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ مرة}}$

الجدول التالي يلخص أهم القوانين حول الأسات:

$a^0 = 1$	$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$
$a^p a^q = a^{p+q}$	$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$(a^p)^q = a^{pq}$
$a^p b^p = (ab)^q$	$\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$	$\sqrt[p]{a} = a^{1/p}$

ولدينا كذلك: $a^{1/2} = \sqrt{a}$

مثال رقم (1): أوجد ما يلي:

$$1{,}02^4 \times 1{,}02^7$$

الحل

$$1{,}02^4 \times 1{,}02^7 = 1{,}02^{(4+7)} = 1{,}02^{11} = 1{,}24$$

مثال رقم (2): احسب العبارة التالية:

$$\frac{(1+i)^5}{(1+i)^4}$$

الحل

$$\frac{(1+i)^5}{(1+i)^4} = (1+i)^{5-4} = (1+i)^1 = 1+i$$

مثال رقم (3): أوجد العبارة التالية:

$$\frac{v^{x+t-1}}{v^{x+1}}$$

الحل

$$\frac{v^{x+t-1}}{v^{x+1}} = v^{x+t-1-(x+1)} = v^{x+t-1-x-1} = v^{t-2}$$

مثال رقم (4): اكتب العبارة التالية من دون المقام:

$$NPV = \frac{C_1}{1+i} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+i)^n} + \frac{V_n}{(1+i)^n} - V_0$$

الحل

$$NPV = C_1\,(1+i)^{-1} + C_2(1+i)^{-2} + \cdots + C_n(1+i)^{-n} + V_n(1+i)^{-n} - V_0$$

(16.3) اللوغاريتم والأسس

يندرج استخدام اللوغاريتم والأسس عندما يكون المجهول موجودا في الأس مثال.

القواعد

الدالة $f(x) = ln(x)$ هي اللوغاريتم الطبيعي للمتغير x وهي معرفة عندما تكون $0 < x$.

الدالة $f(x) = log(x)$ هي اللوغاريتم العشري للمتغير x وهي كذلك معرفة عندما تكون $x > 0$.

الدالة $f(x) = e^x$ هي الأس الطبيعي للمتغير x وهي معرفة عند جميع القيم التي يأخذها المتغير x .

قيمة الرمز e هي : $2,718281 ...$

دالة الأس الطبيعي هي الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم الطبيعي حيث إن: $e^{lnx} = x$ أو $\ln(e^x) = x$ عندما تكون $x > 0$.

الدالة $f(x) = 10^x$ هي الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم العشري في x، وهو ما يمكننا من كتابة العلاقات التالية:

$$y = \log(x) \Leftrightarrow 10^y = x \text{ و } y = \ln(x) \Leftrightarrow e^y = x$$

خصائص

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$	$\ln(a^p) = p \ln a$
$e^a e^b = e^{a+b}$	$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$	$(e^a)^p = e^{ap}$

مثال رقم (1): أوجد قيمة x في المعادلة التالية:

$$10 = 3^x$$

الحل

$10 = 3^x$ المعادلة الأصلية

$ln(10) = ln(3^x)$ تحويل الطرفين إلى اللوغاريتم

$ln(10) = xln(3)$ خصائص اللوغاريتم

$x = \frac{ln(10)}{ln(3)}$ التقسيم على

الحل هو إذا: $\frac{ln(10)}{ln(3)} = 2,0959$

مثال رقم (2): دالة رأس المال المحولة تربط بين القيمة المستقبلية (C_n) وكل من القيمة الحالية (C_0) وعدد الفترات (n) ومعامل رأس المال (r) وذلك من خلال العلاقة التالية:

$$C_n = C_0 r^n$$

استخرج قيمة n في كل من C_0 وC_n وr :

الحل

$C_n = C_0 r^n$ المعادلة الصلية

$\frac{C_n}{C_0} = r^n$ القسمة على C_0

$ln(\frac{C_n}{C_0}) = ln(r^n)$ التحويل إلى لوغاريتم

$ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right) = nln(r)$ خاصية اللوغاريتم

$\frac{ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)}{ln\,(r)} = n$ القسمة على $ln(r)$

الحل هو إذا: $\frac{ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)}{ln(r)}$

(16.4) المتواليات

تتواجد المتواليات خاصة في إعداد القواعد المالية للإيرادات (الدخل).

(16.4.1) المتواليات العددية

تمثل المتسلسلة:

10 8 6 4 2

متوالية عددية نعرف من خلالها:

- الحد الأول في المتوالية وهو: 2 ($a_1 = 2$).
- الحد الخامس والأخير في المتوالية وهو: 10 ($a_5 = 10$).
- أساس المتوالية هو:2 (R=2).

خواص المتوالية العددية (عدد حدودها يساوي n)

$a_n = a_1 + (n-1)R$	$a_n = a_{n-1} + R$
$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$	

مثال رقم (1): أوجد الحد العاشر والحد رقم nللمتوالية العددية التالية:

14 11 8 2

الحل

$Q_1 = 8$ الحد الأول

$R = 11 - 8 = 3$ أساس المتوالية =$a_2 - a_1$

$a_{10} = a_1 + (10-1)R = 8 + 9 \times 3 = 35$ الحد العاشر

أما الحد رقم n فهو يساوي:

$a_n = a_1 + (n-1)R$ استخراج الحد رقم n في الحد الأول

$a_n = 8 + (n-1)3$

$a_n = 8 + 3n - 3$ فك الأقواس

$a_n = 5 + 3n$ اختزال

مثال رقم (2): وزع مبلغ وقدره 15000 € على 5 موظفين وتم التوزيع بحيث يكون هناك بـ500 € بين كل موظف وموظف آخر.أوجد المبلغ الذي يحصل عليه الموظف الأول؟

الحل

$a_5 = a_1 + (5-1) \times 500$	استخراج الحد الخامس في الحد الأول
$a_5 = a_1 + 2'000$	فك الأقواس
$a_1 + a_2 + \cdots + a_5 = 15'000$	المبلغ الموزع
$\frac{5\,(a_1+a_5)}{2} = 15'000$	القاعدة في صورة أخرى
$\frac{5\,(a_1+(a_1+2'000))}{2} = 15'000$	التعويض عن قيمة a_5
$a_1 + (a_1 + 2'000) = 6'000$	الضرب بـ $^2/_5$
$a_1 = 2'000$	اختزال

الموظف الأول يحصل بذلك على 2000 €

(16.4.2) المتواليات الهندسية

المتسلسلة التالية:

2 4 8 16 32

تمثل متوالية هندسية نعرف من خلالها:

- الحد الأول في المتوالية وهو: 2 ($a_1 = 2$).
- الحد الخامس والأخير في المتوالية وهو: 32 ($a_5 = 32$).
- أساس المتوالية هو:2 (R=2).

خواص المتوالية الهندسية (عدد حدودها يساوي n)

$a_n = a_{n-1}R$	$a_n = a_1 R^{n-1}$
$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{1-R^n}{1-R}$ avec $R \neq 1$	
Si $\mid R \mid < 1$ alors $a_1 + a_2 + \cdots = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1}{1-R}$	

مثال رقم (1): أوجد مجموع الحدود للمتوالية الهندسية التالية:

$$\underbrace{1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1}}_{n\text{عنصر}}$$

الحل

$$a_1 = 1 \quad R = v$$

مجموع الحدود لمتوالية هندسية يساوي:

$$a_1 \frac{1-R^n}{1-R} = \frac{1-v^n}{1-v}$$

بما أن: $d = v - 1$ فإن:

مجموع الحدود للمتوالية الهندسية = $\frac{1-v^n}{d}$

وهذه العبارة تمثل القيمة الحالية لدخل مؤكد ما قبل العد: $\ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{d}$

مثال رقم (2): أوجد القيمة الحالية لدخل عمري ما بعد العد:

$$a_{\overline{\infty|}} = v + v^2 + v^3 + \cdots$$

الحل

$$a_1 = v \, R = v$$

مجموع الحدود (لعدد لانهائي) لمتوالية هندسية يساوي:

$$\frac{a_1}{1-R} = \frac{v}{1-v}$$

بما أن: $d = 1 - v$ فإن:

مجموع الحدود للمتوالية الهندسية $= \frac{1}{i} = \frac{1}{1+i} \times \frac{1+i}{i} = \frac{\frac{1}{1+i}}{\frac{i}{1+i}} = \frac{}{d}$

وهذه العبارة ليست سوى القيمة الحالية لدخل عمري في نهاية الفترة:

$$a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i}$$

الفصل السابع عشر

الجمع، الاستيفاء الداخلي، الاحتمالات، المصفوفات

Sommes, Interpolation, Probabilitès, Matrices

(17.1) الجمع

تقوم رموز الجمع ($\sum$) بدور هام في اختصار قواعد الدخل (الريع) ، والقواعد المتعلقة بتحديد نوع الاستثمار، ونستخدمها كذلك عندما نريد برمجة هذه القواعد على الحاسب الآلي.

فالعبارات الطويلة مثل: $l_{20} + l_{21} + l_{22} + \cdots + l_{51}$ يمكن التعبير عنها بسهولة من خلال الصورة المبسطة: $\sum_{t=20}^{51} \;{}_{t}$ وتقرأ هذه العبارة بأنها مجموع عناصر l_t من 20 إلى 51. الحرف t يسمى مؤشر الجمع. يمكن استخدام أي حرف آخر مكانه طالما لا يستخدم كرمز داخل القاعدة (فالحرف l مثلا لا يمكن استعماله لأنه يمثل في القاعدة ترتيب الأحياء).

(17.1.1) خصائص

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(kx_i) = k\sum_{i=1}^{n} x_i$$

حيث k عدد ثابت

$$\sum_{i=k}^{n} k = k\,\underbrace{(n-k+1)}_{\text{عدد العناصر}}$$

وفي حالة $k = 1$ فإن:

$$\sum_{i=1}^{n} k = k(n-1+1) = kn$$

وهو ما يعطي عدد العناصر: $n - 1 + 1 = n$

مثال رقم (1): أوجد العبارة التالية:

$$\sum_{i=1}^{5} (4x_i)$$

الحل

$$\sum_{i=1}^{5} (4x_i) = 4\sum_{i=1}^{5} x_i$$ إظهار الرقم 4

$$4\sum_{i=1}^{5} x_i = 4\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$ تحليل العبارة

وهو ما يعطي في النهاية:

$$\sum_{i=1}^{5} (4x_i) = 4\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

مثال رقم (2): حول العبارات التالية إلى رمز الجمع:

$v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5$

الحل

$v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 = v^1 + v^2 + v^3 + v^4 + v^5$ وبما أن $v = v^1$

$$v^1 + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 = \sum_{t=1}^{5} v^t$$ قاعدة الجمع

وبالتالي:

$$v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 = \sum_{t=1}^{5} v^t$$

مثال رقم (3): حول العبارات التالية إلى صورة جمع:

$$1 + v + v^2 + v^3 + \cdots$$

الحل

$1 + v + v^2 + v^3 + ::: = v^0 + v^1 + v^2 + v^3 + \ldots$ حيث $1 = v^0$

$$v^0 + v^1 + v^2 + v^3 + \cdots = \sum_{t=0}^{\infty} v^t$$

وفي النهاية نحصل على:

$$1 + v + v^2 + v^3 + \cdots = \sum_{t=0}^{\infty} v^t$$

مثال رقم (4): حول العبارات التالية إلى صورة الجمع ثم أوجد عدد العناصر:

$$v^{k+1}\frac{l_{x+k+1}}{l_x} + v^{k+2}\frac{l_{x+k+2}}{l_x} + \cdots + v^{w-x}\frac{l_w}{l_x}$$

الحل رقم (1)

الجمع يبدأ بالعنصر $k + 1$ وبالتالي فإن العبارتين التاليتين متساويتان:

$\sum_{t=k+1}^{w-x} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$ أو $\frac{1}{l_x}\sum_{t=k+1}^{w-x} v^t \; l_{x+t}$

عدد العناصر يساوي إذا: $w - x - (k+1) + 1 = w - x - k$

الحل رقم (2)

الجمع يبدأ بالعنصر 1. نتنبه إلى المؤشر في الأعلى الذي يجب تغييره بدوره. وبهذه الطريقة نحصل على آخر قيمة مساوية لـ:

$$v^{k+w-x-k}\, l_{x+k+w-x-k} = v^{w-x} l_w$$

عدد العناصر يساوي إذا: $w-x-k-1+1 = w-x-k$

$$\frac{1}{l_x}\sum_{t=k+1}^{w-x} v^t\, l_{x+t} \text{ أو } \sum_{t=k+1}^{w-x} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

(17.2) الاستيفاء الداخلي

يتمثل الاستيفاء الداخلي في رسم خط مستقيم على نقطتين نسميهما القطبين. إذا كنا نرغب في تقدير قيمة توجد داخل هاتين النقطتين نسمي تلك العملية استيفاءً داخلياً، أما إذا كنا نبحث عن تقدير قيمة خارج هاتين النقطتين فنسمي هذه العملية استيفاءً خارجياً.

يرتكز الاستيفاء الداخلي على المبرر الرياضي التالي:

الهدف هو حساب الإحداثية للنقطة C التي تقع على الخط المستقيم من إلى $\mathcal{A}\,\mathcal{D}$. من أجل ذلك نقوم برسم مثلث $\mathcal{ADE}$ يحتوي على مثلث آخر $\mathcal{ABC}$. بحسب قاعدة تالس Thales. المثلثان متوازيان وهو ما يمكن من كتابة العلاقة التالية:

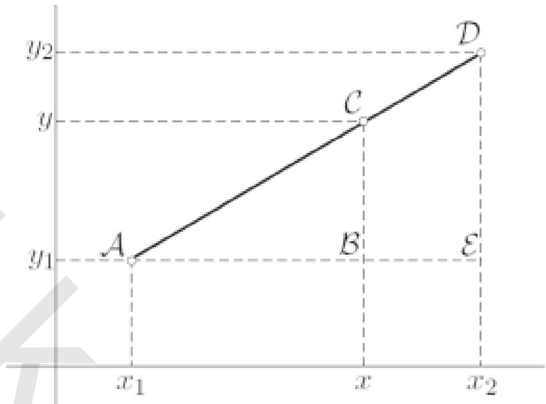
$$\frac{\mathcal{CB}}{\mathcal{AB}} = \frac{\mathcal{DE}}{\mathcal{AE}}$$

وبالتعويض عنها بقيم الإحداثيات نجد:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

بعد عزل y نجد:

$$y = \left(1 - \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right) y_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} y_2$$



الطريقة العملية

الاستيفاء الداخلي يمكن القيام به بطريقة أسهل. يكفي أن تحسب العبارة:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

ثم نحسب المكمل لواحد لهذه العبارة:

$$1-\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

وهذه بعض الأمثلة لطريقة الحساب المبينة أعلاه.

مثال رقم (1): أوجد القيمة المستفاة للقيمة 5 من الجدول الآتي:

3	$\longmapsto$	20
5	$\longmapsto$	?
8	$\longmapsto$	22

الحل

بين الرقمين 3 و5 الفارق هو 2.

بين الرقمين 5 و8 الفارق هو 3.

بين الرقمين 3 و8 الفارق هو 5.

وهذا يمكن من عمل كسرين:$2/5$ و$3/5$ وهذان الرقمان نضربهما على التوالي في 20 و22 وهو ما يمكننا من الحصول على القيمة المستفاة للرقم 5 وهي:

$$؟ = 20 \times {}^{3}/_{5} + 22 \times {}^{2}/_{5} = 20{,}8$$

مثال رقم (2):إذا علمنا أن عدد المؤمن لهم في سنتي 2003 و2006 كان كما يلي:

2003	$\longmapsto$	18'000
2004	$\longmapsto$	?
2006	$\longmapsto$	24'000

قدر عدد المؤمن لهم في سنة 2004.

الحل

بين سنتي 2003 و2004 هناك فارق بسنة 1.

بين سنتي 2004 و2006 هناك فارق بسنتين 2.

بين سنتي 2003 و2006 هناك فارق بثلاث سنوات 3.

وهو ما يمكن من عمل كسرين هما:$1/3$ و $2/3$ وهذان الرقمان نضربهما على التوالي في 2003 و2006 وهو ما يمكننا من الحصول على القيمة المستفاة للرقم 2004 وهي:

$$؟ = 18'000 \times {}^{2}/_{3} + 24'000 \times {}^{1}/_{3} = 20'000$$

نسنطيع بذلك أن نقدر عدد المؤمن لهم في سنة 2004 بـ20000

مثال رقم (3): تعطي جداول الوفاة عدد الأحياء x لأعمار مكتملة. يتطلب حساب الدخل المجزأ توفر عدد الأحياء لأعمار غير مكتملة. احسب عدد الأحياء في العمر$x + \theta$ حيث $0 \leq \theta \leq 1$.

الحل

تطبيقا للجداول السابقة نستطيع إدراج الجدول التالي:

x	$\longmapsto$	l_x
$x+\theta$	$\longmapsto$	$?$
$x+1$	$\longmapsto$	l_{x+1}

بين الرقمين x و$x+\theta$ الفارق هو θ.

بين الرقمين $x+\theta$ و$x+1$ الفارق هو $1-\theta$.

بين الرقمين x و $x+1$ الفارق هو 1.

وهذا يمكن من عمل كسرين: $\frac{\theta}{1}$ و $\frac{1-\theta}{1}$ وهذان الرقمان نضربهما على التوالي في l_x وl_{x+1} وهو ما يمكننا من الحصول على القيمة المستفاة للرقم $l_{x+\theta}$ وهي:

$$\boxed{l_{x+\theta} = (1-\theta) \times l_x + \theta \times l_{x+1}} \qquad (17.1)$$

تعتبر عملية التقدير المبينة أعلاه من أكثر عمليات التقدير المستخدمة في الرياضيات الأكتوارية لتقدير احتمالات الوفاة لسنوات مجزأة.

(17.3) نظرية الاحتمالات

تجمع الرياضيات الأكتوارية بين الرياضيات المالية وحساب الاحتمالات، حيث إن رأس المال في الرياضيات الأكتوارية لم يعد صرفه مؤكدا كما هو الحال في الرياضيات المالية بل مرتبط ببقاء الشخص على قيد الحياة.

هذه الفقرة تهتم بأساسيات نظرية الاحتمالات المستخدمة في الرياضيات الأكتوارية.

(17.3.1) الرموز

- $A \cup B$: تعني حدوث الحدث A أو الحدث B أو الاثنين معا.

- AwB: تعني حدوث الحدثA أو الحدثB دون إمكانية حدوث الحدثين معا.
- $A \cap B$: تعني حدوث الحدثين A و B.
- $\overline{\ }$: تعني عدم حدوث الحدث A.
- Ω: المجموعة الكلية (حدوثها مؤكد).
- $\emptyset$: الحدث المستحيل.
- $P(A)$: احتمال حدوث الحدث A.

(17.3.2) خصائص

1) تعريف الاحتمال

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}}$$

مثال رقم (1): ما هو احتمال سحب رقم زوجي من بين الأرقام التالية:

0 , 1، 2،...،36، أي ما يساوي إجمالا 37 رقما؟

الحل

يوجد من بين هذه الأرقام والتي عددها 37 (عدد الحالات الممكنة) 18 رقما زوجيا (عدد الحالات الملائمة). الحل هو إذا:

احتمال سحب رقم زوجي =0,4864 = $\frac{18}{37}$

مثال رقم (2): أوجد احتمال بقاء رجل عمره 30 سنة على قيد الحياة، علما بأن عدد الأحياء في سن 30 سنة هو 96000 وفي سن 31 سنة لم يتبق منهم سوى 95000؟

الحل

عدد الحالات الملائمة يمثله هنا عدد الأحياء في سن 31 سنة أي $95'000 = {}_{31}$ ، بينما عدد الحالات الممكنة هو ممثل بعدد الأحياء في سن 30 سنة. الحل هو إذا:

الاحتمال السنوي للحياة = $\frac{l_{31}}{l_{30}} = \frac{95\prime000}{96\prime000} = 0,9895833$

2) الحدث المستحيل

$$P(\emptyset) = 0$$

مثال: ما هو احتمال البقاء على قيد الحياة إلى سن 1000 سنة؟

الحل

حاليا هذا الحدث يعتبر مستحيل التحقق. الحل هو إذا:

احتمال العيش إلى سن 1000 سنة = 0

3) الحادث المكمل

$$P(\overline{A})1 - P(A)$$

مثال: الاحتمال السنوي للبقاء على قيد الحياة لرجل عمره 30 سنة هو:= p_{30} 0,9896، ما هو الاحتمال السنوي لوفاة هذا الرجل (q_{30})؟

الحل

الاحتمال السنوي للبقاء على قيد الحياة هو مكمل للاحتمال السنوي للوفاة، الحل هو إذاً:

الاحتمال السنوي للوفاة = $q_{30} = 1 - p_{30} = 1 - 0,9896 = 0,0104$

4) تقاطع حادثين مستقلين

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

مثال: الاحتمال السنوي للبقاء على قيد الحياة لرجل عمره 30 سنة يساوي: $p_{30} = 0,9896$ والاحتمال السنوي للبقاء على قيد الحياة لامرأة عمرها 50 سنة يساوي: $p_{50} = 0,9976$. ما هو احتمال بقاء الزوجين على قيد الحياة.

الحل

احتمال بقاء الزوجين على قيد الحياة يساوي: $P_{30} \times P_{50} = 0{,}9896 \times 0{,}9976 = 0.9872$

5) جمع حادثين مستقلين

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P\,(A \cap B)$$

$$P(A \omega B) = P(A) + P(B) - 2P\,(A \cap B)$$

مثال رقم (1): الاحتمال السنوي للبقاء على قيد الحياة لرجل في سن الثلاثين هو: $P_{30}=0.9896$ والاحتمال السنوي للبقاء على قيد الحياة لامرأة في سن الخمسين هو: $P_{50}=0.9976$. احسب الاحتمال السنوي للبقاء على قيد الحياة للرجل أو للمرأة أو الاثنين (أو تعني الاحتواء).

الحل

الاحتمال السنوي للبقاء على قيد الحياء لأحد الزوجين هو:

$$P_{30} + P_{50} - P_{30} \times P_{50} = 0.9896 + 0.9976 - 0.9896 \times 0.9976 = 0.9999$$

مثال رقم (2): الاحتمال السنوي للبقاء على قيد الحياة لرجل عمره 30 سنة هو: $p_{30}=0.9896$ والاحتمال السنوي للبقاء على قيد الحياة لامرأة في سن الخمسين هو: $p_{50}=0.9976$

احسب الاحتمال السنوي البقاء على قيد الحياة لأحد الزوجين فقط (الرجل أو المرأة و"أو" هنا تعني الإقصاء).

الحل

الاحتمال السنوي للبقاء على قيد الحياة للرجل فقط أو للمرأة فقط هو:

$$P_{30} + P_{50} - 2P_{30} \times P_{50} = 0.9896 + 0.9976 - 2 \times 0.9896 \times 0.9976 = 0.0128$$

(17.3.3) المتغير العشوائي:

يعرف المتغير العشوائي بأنه المتغير الذي تقترن قيمه بنتائج تجربة عشوائية.

نرمز بـ (X) لهذا المتغير العشوائي والدالة الاحتمالية له، أي القيم الاحتمالية P (x_i) المقترنة بمختلف القيم x_i التي يأخذها المتغير.

نعرف التوقع الرياضي E (X) لمتغير عشوائي ما بالعبارة التالية:

$$E(X) = \sum_i x_i P\,(x_i)$$

مثال رقم (1): يرمي اللاعب حجر النرد. ويربح نصف الرقم الذي يظهر. بين هذه الحالة في صورة متغير عشوائي واحسب التوقع الرياضي لهذه اللعبة.

الحل

نرمز بـ (xi) للقيم المختلفة التي يأخذها المتغير X و بـ(x_i) P الاحتمالات المقترنة بالقيم التي يأخذها المتغير X. يمكننا إذا أن نحصل على الجدول الآتي:

x_i	**0.5**	1	.51	2	.52	3
P (x_i)	**6/1**	/61	/61	/61	/61	/61

التوقع الرياضي (لكي تكون المباراة عادلة) يحسب بالطريقة التالية:

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = 0.5 * \frac{1}{6} + 1 * \frac{1}{6} + \cdots + 3 * \frac{1}{6} = 1.75$$

مثال رقم (2): احسب التوقع الرياضي للدالة الاحتمالية الآتية:

x_i	v^1	v^2	...	v^{w-x+1}
P (x_i)	$\frac{d_{x+1}}{l_x}$	$\frac{d_{x+2}}{l_x}$	...	$\frac{d_w}{l_x}$

الحل

التوقع الرياضي يأخذ الشكل التالي:

$$E(X)=\sum_i x_i P(x_i)=v^1\frac{d_{x+1}}{l_x}+v^2\frac{d_{x+2}}{l_x}+\cdots+v^{w-x+1}\frac{d_w}{l_x}$$

ملاحظة: في الرياضيات الأكتوارية، نرمز لهذا التوقع الرياضي بـ A_x. وهي تمثل العلاوة الوحيدة (UP) التي تدفع لتأمين حياة شاملة $(UP=E(x)=A_x)$

(17.4) المعادلات الضمنية

بعض المعادلات في الرياضيات المالية والأكتوارية لا تحل بطريقة تقليدية، لأنه من المستحيل فصل المجهول.مثال: $x=\ln(x)$ لأجل ذلك نستخدم الطرق التقريبية مثل طريقة التصنيف أو طريقة النقطة الثابتة.

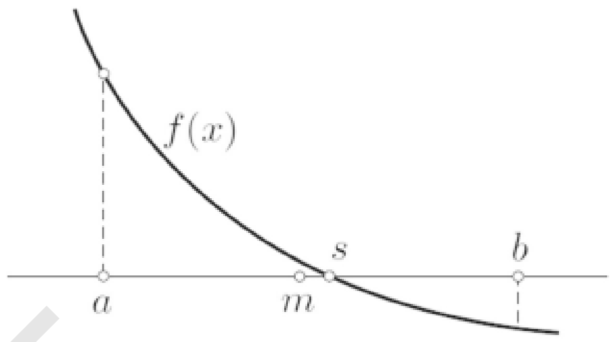
(17.4.1) طريقة التصنيف

لتكن لدينا دالة $f(x)$ متصلة في المجال $[a;b]$ وتقطع المحور x، أي أنها تحقق ما يلي:$f(a)f(b)<0$.الطريقة التالية تمكن من إيجاد جذر للمعادلة $f(x)=x$ في المجال $[a;]$:

1- $m:=\frac{a+b}{2}$.

2- إذا كانت: $f(m)f(b)<0$ فإن $b:=m$ أو $a:=m$.

3- نكرر العملية في النقطة 1. إلى أن تقترب m من الحل s.



مثال: احسب القيمة i بمعرفة $a_{\overline{10|}} = 8,5302$

الحل

$$a_{\overline{10|}} = \frac{1-v^{10}}{i} = \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)}{i} = 8,5302$$

المعادلة التي وجب حلها تكتب على النحو التالي:

$$f(i) = \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{10}}{i} - 8,5302 = 0$$

ثم نبدأ بتحديد قيم أولية لـ a و b، مثلا: $a = 0,01, b = 0,1$ وهكذا

فإن: $f(a)f(b) < 0$ الجدول يعطي الحل:

a	b	m	$f(m)f(b)$
0,01	0,1	0,055	>0
0,01	0,055	0,0325	>0
0,01	0,0325	0,02125	<0
0,02125	0,0325	0,026875	<0
0,026875	0,0325	0,029688	<0
0,029688	0,0325	0,03109	>0
0,029688	0,03109	0,030389	>0
0,029688	0,030389	**0,030039**	>0

الحل هو إذا: $i = 0,03$

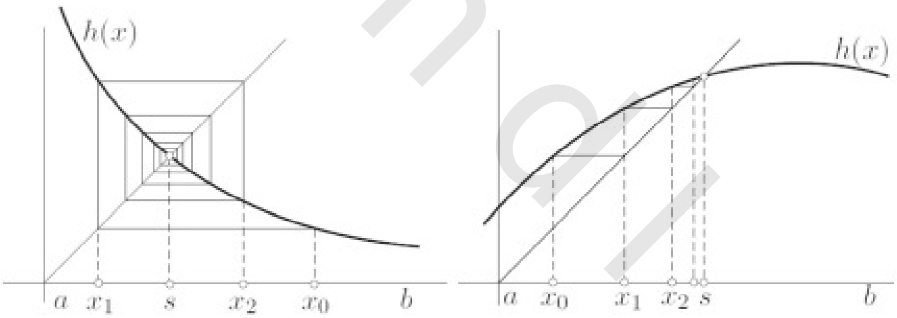
(17.4.2) طريقة النقطة الثابتة

تتمثل هذه الطريقة في إدراج قيمة داخل عبارة رياضية، فنحصل على ناتج نقوم بإدراجه بدوره داخل العبارة. ثم نكرر هذه العملية إلى حين الوصول إلى قيمة مدخلة تساوي القيمة المخرجة.

هذه الطريقة تتطلب تحويل المعادلة من الصورة: $f(x) = 0$ إلى الصورة: $h(x) = x$.وفي المقابل إذا كانت: $|h'(x)| < 1$ داخل المجال $x \in [a;b]$، نستطيع إيجاد سلسلة تقاربية تبدأ من النقطة $x_0 \in [a;b]$:

$$x_{n+1} = h(x_n)$$

يحدث التقارب من خلال إحدى الرسمتين التاليتين:



مثال: احسب القيمة i بمعرفة $a_{\overline{10|}} = 8,5302$.

الحل

$$a_{\overline{10|}} = \frac{1 - v^{10}}{i} = \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^{10}}{i} = 8,5302$$

المعادلة المطلوب حلها تكتب على النحو التالي:

$$f(i) = \frac{1-v^{10}}{i} = 8{,}5302$$

$$f(i) = 1 - v^{10} = 8{,}5302i$$

$$f(i) = \frac{1-v^{10}}{8{,}5302} = i$$

نعرف الدالة $h(i)$ على النحو التالي:

$$h(i) = \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{10}}{8{,}5302}$$

حساب تفاضل الدالة يعطينا:

$$h'(i) = \frac{10}{8\,(1+i)^{11}}$$

باختيارنا للمجال: $[a;b] = [0{,}1;0{,}5]$ نحصل على:

$h(a) = h(0{,}1) = 0{,}43 < 1$ و $h(b) = h(0{,}5) = 0{,}014 < 1$ نقوم بتحديد قيمة عشوائية داخل هذا المجال. $x_0 = 0{,}2$ مثلا. ثم نضع الجدول التالي:

n	x_n	$h\,(x_n)$
0	0.2	0.098297
1	0.098297	0.071327
2	0.071327	0.058371
3	0.058371	0.050755
4	0.050755	0.045777
…	…	…
33	0.030097	0.030082
34	**0.030082**	**0.030070**

الحل هو إذاً: $i = 0{,}03$

(17.4.3) استخدام المعالج

إكسل

نستطيع استخدام المعالج solver داخل إكسل وهو مدرج ضمن خاصية استهداف goal Seek الموجودة في القائمة الفرعية تحليل ماذا لو?what if analysis والموجودة بدورها في القائمة الرئيسية بيانات Data وذلك لإيجاد الحلول للمعادلات بمجهول واحد من الدرجة n.

مثال: أوجد قيمة المجهول i الذي يحقق المعادلة: $a_{\overline{10|}} = 8,5302$ (مثال الصفحة السابقة).

الحل

يجب إدخال القاعدة التالية داخل إحدى خلايا إكسل:

1	1	a10
2	0.03	=(1-(1/(1+A2)^10/A2))

ثم استدعاء خاصية استهداف (بيانات/ تحليل ماذا لو؟/ استهداف) ثم نضع القيم التالية:

وهو ما يعطينا الحل التالي: $i = 0,03$

تي آي–83 (TI-83)

يكفي أن يتم تطبيق المعالج : MATH/SOLVER داخل الآلة الحاسبة تي-آي 83 ومن ثم إدخال القاعدة التالية:

```
EQUATION SOLVER
Eqn:0=(1-(1/(1+X
))^10)/X-8.5302
```

ثم نستدعي المعالج بالنقر ▼باستخدام السهم =X نضع بعد ذلك المؤشر على القيمة فوق الأزرار $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{SOLVE}}$ وهو ما يعطينا الحل التالي:

$i = 0{,}03$

(17.5) حساب المصفوفات

في الرياضيات الأكتوارية يتطلب تعديل جداول الوفاة معرفة مسبقة بحساب المصفوفات وهو ما نذكر به في الفقرات الآتية:

المصفوفة هي مجموعة من الأرقام وضعت داخل جدول، كل رقم يتم تحديده من خلال الصف الذي ينتمي إليه والعمود الموجود بداخله، وهذا ما نجده كذلك داخل برنامج إكسل حيث الخلايا مرتبة في شكل مصفوفة، أو في لعبة الكلمات المتقاطعة.

نرمز إلى $A_{n,p}$ بالمصفوفة التي تحتوي على عدد n من الصفوف و عدد p من الأعمدة، نرمز إلى a_{ij} بعنصر المصفوفة الذي يوجد في الصف رقم i والعمود رقم j .

مثال: المصفوفة التالية:

$$A_{2,3} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة (2 في 3) فهي تحتوي على صفين و3 أعمدة.

(17.5.1) خصائص المصفوفات

1- جمع المصفوفات

إذا كانت A وB مصفوفتين من نفس الدرجة فإن C=A+B حيث $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

مثال: أوجد حاصل جمع المصفوفتين:

$$A_{1,2} = (1 \quad -5) \;\; B_{1,2} = (6 \quad 3)$$

الحل

بما أن المصفوفتان لهما نفس الدرجة فإن عملية الجمع ممكنة وهي كالآتي:

$$A + b = (1+6 \quad -5+3) = (7 \quad -2)$$

2- ضرب المصفوفات

عملية ضرب المصفوفات ليست دائما ممكنة. نضرب المصفوفة A بالمصفوفة B إذا كانت المصفوفة A من الدرجة $(n \times m)$ و المصفوفة B من الدرجة $(m \times p)$.

النتيجة تكون بذلك مصفوفة C=AxB من الدرجة $(n \times p)$ وهي تساوي:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{im}b_{mk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}$$

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \cdots \\ b_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ik} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

كل عنصر من المصفوفة C يساوي مجموع حاصل ضرب عناصر الصف i في المصفوفة A بعناصر العمود k في المصفوفة B.

مثال: أوجد حاصل ضرب المصفوفتين $A_{2,2}$ و $B_{2,1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\; B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

الحل

عملية ضرب المصفوفتين ممكنة حيث ${}_{2,2}B_{2,1} = C_{2,1}$. حاصل عملية الضرب هو:

$$C_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 6 \\ 3 \times 5 + 4 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$$

ملاحظة: الترتيب مهم جدا في عملية ضرب المصفوفات حيث إن: $B_{m,p}A_{n,m}$ ليست ممكنة.

3– ضرب مصفوفة بعدد حقيقي k

كل عنصر في المصفوفة يضرب بالعدد k

$$kA = ka_{ij}$$

مثال: إذا كانت المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ ، أوجد $(-6) \times A$

الحل

$$(-6) \times A = (-6) \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \propto 3 & -6 \times 1 \\ -6 \times 2 & -6 \times 5 \\ -6 \times 8 & -6 \times -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -18 & -6 \\ -12 & -30 \\ -48 & 6 \end{pmatrix}$$

4– المصفوفة المبدلة

نرمز لـA^{T} بالمصفوفة المبدلة للمصفوفة A. وهي ناتجة من تحويل صفوف المصفوفة A إلى أعمدة المصفوفة ـA^{T}. إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $(m \times n)$ فإن المصفوفة ^{T} هي مصفوفة من الدرجة $(n \times m)$

مثال: أوجد المصفوفة المبدلة للمصفوفة A :

$$A_{3,2}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 5\\ 8 & -1\end{pmatrix}$$

الحل

بتحويل الصفوف إلى أعمدة تتحول المصفوفة $A_{3,2}$ إلى المصفوفة المبدلة ${A^{\mathrm{T}}}_{2,3}$.

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 8\\ 1 & 5 & -1\end{pmatrix}$$

5– مقلوب المصفوفة

للبحث عن مقلوب المصفوفة نحتاج إلى عدة مراحل لا نقدمها في هذه الفقرة، نشير فقط إلى أن مقلوب المصفوفة لا يمكن البحث إلا للمصفوفات المربعة $(n\times n)$.A^{-1} هو مقلوب المصفوفة A وهي مصفوفة من نفس درجة المصفوفة A.

إكسل

استخدام برنامج إكسل يسهل كثيرا العمليات الحسابية على المصفوفات، حيث نجد الدوال التالية التي تساعد في حل العديد من المسائل:

الجمع والطرح	+ و–
الضرب	MMULT ()
المبدلة	TRQNSPOSE ()
المقلوبة	MINVERSE ()

لتسهيل العمليات في إكسل نقوم بوضع أسماء على مجموعة الخلايا التي تحتوي على المصفوفات المستخدمة. بعد ذلك نقوم بالعمليات الحسابية على هذه المصفوفات باستخدام المسميات المذكورة.

مثال: إذا كانت $A_{3,2}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ أوجد المصفوفة التالية: $(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$

الحل

حاصل ضرب المصفوفتين هو مصفوفة من الدرجة (2×2) وكذلك مقلوبها. نسمي A مجموعة الخلايا التي تحوي المصفوفة A.

نحدد بعد ذلك مجموعة الخلايا من حجم (2×2) ونكتب داخلها القاعدة التالية:

MINVERSE (MMULT (TRANSPOSE (A) ;A) ثم نضغط في آن واحد على الأزرار الثلاثة: Ctrl+Schift+Enter وهو ما يعطينا المصفوفة التالية:

$$(A^{\mathrm{T}}A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}077 & -0{,}051 \\ -0{,}051 & 0{,}145 \end{pmatrix}$$

A1

	A	B
1	1	2
2	4	1
3	0	-2

5	0.07692	-0.05128
6	-0.05128	0.14530

تي–آي 83 (TI-83)

توجد في الآلة الحاسبة تي–آي 83 خاصية العمليات الحسابية على المصفوفات. لإيجاد المصفوفة المبدلة للمصفوفة A نتبع الخطوات التالية:

(أ) نعرف أولا درجة المصفوفة A من خلال الأزرار التالية: $\boxed{2^{nd}}$ $\boxed{\text{MATRX}}$ $\boxed{\text{EDIT}}$.

(ب) نضغط من جديد فوق الأزرار نفسها لإظهار المصفوفة $\boxed{2^{nd}}$ $\boxed{\text{MATRX}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$.

(جـ) بعد ذلك نضغط على الأزرار $\boxed{2^{nd}}$ $\boxed{\text{MATRX}}$ $\boxed{\text{MATH}}$ $\boxed{\text{T2}}$: لكي نحصل على المصفوفة المبدلة للمصفوفة A.

لحساب مقلوب المصفوفة نستخدم الزر $\boxed{x^{-1}}$.

باستخدام زر واحد نستطيع الحصول على ناتج العملية $(A^{T}A)^{-1}$ كما حصلنا عليه من خلال برنامج إكسل.