الباب الأول

- أساسيات البرمجة الخطية: الطريقة البيانية وطريقة السمبلكس
- مدخل إلى البرمجة العددية
- النماذج البسيطة
- النماذج المتقدمة

مقدمة الباب الأول

يحتوي الباب الأول من هذا الكتاب على أربعة فصول. يحتوي الفصل الأول منها على ما يعرف بالبرمجة الخطية والتي تعرف اختصاراً على أنها طريقة لمعالجة النماذج الخطية في بحوث العمليات حيث تكون كل من دالة الهدف والقيود هي دوال خطية في متغيرات القرار. وللبرمجة الخطية تطبيقات عديدة ظهرت ولا تزال تظهر كل يوم لحل الكثير من المشكلات في عالم الواقع سنذكر العديد منها في الفصل الأول من هذا الكتاب. لكن السبب الرئيس لإدراج هذا الفصل هو أن معظم مسائل البرمجة الخطية التي نواجهها في الواقع العملي تتضمن شرطاً إضافيا واضحاً أو ضمنياً ينص على أن قيم *بعض أو كل* المتغيرات في هذه المسائل هي قيم (أعداد) صحيحة، والتي سنطلق عليها اسم "البرمجة الخطية العددية". وفي معظم الأحيان فإنه ولحل هذا النوع الأخير من المسائل لابد لنا أولاً من إسقاط مثل هذا الشرط الإضافي وحل مسألة البرمجة الخطية الناتجة والذي سيكون منطلقاً يسهل علينا عملية الوصول إلى حل مسألة البرمجة العددية الأصلية. ونظرا لأن مقررا على الأقل في البرمجة الخطية هو متطلب سابق لمقرر البرمجة العددية فإننا لا نجد ضرورة في التوسع في موضوعات البرمجة الخطية والتي سنوردها في الفصل الأول من هذا الكتاب. وسنكتفي بإعطاء ما نجده ضروريا في

البرمجة الخطية لخدمة نظرية البرمجة العددية وطرق الحل المتبعة لحل مسائلها، وكمقدمة لابد منها لمن لا يملك خلفية كافية عن البرامج الخطية وطرق حلها.

وسنستعرض في الفصل الثاني بعض الأمثلة البسيطة على أنماط البرمجة العددية وبعض الطرق البسيطة لحلها ويمثل هذا الفصل مدخلاً لابد منه إلى موضوعات البرمجة العددية التي سترد في الفصول التالية، كما أنه قد يكون كافياً لمن يرغب في أخذ فكرة سريعة عن مسائل البرمجة العددية وكيفية تصنيفها وحلها.

ونظراً لاتساع المجالات التطبيقية لمسائل البرمجة العددية فقد خصصنا لها الفصلين الثالث والرابع.

فاستعرضنا في الفصل الثالث بعض النماذج البسيطة والتي نعتقد أنها ستكفي لمن يرغب في دراسة مقرر قصير الأجل من هذه المادة واتبعنا في الفصل الرابع استعراض المزيد من نماذج البرمجة العددية المتقدمة لمن يرغب بالاطلاع على مزيد من مثل هذه النماذج.

وكما سنرى فإننا سنكون قادرين على تقديم الحلول لمعظم المسائل الواردة في هذا الباب وذلك في الباب الثاني من هذا الكتاب والذي يتكون من الفصول الخامس والسادس والسابع.

الفصل الأول

أساسيات البرمجة الخطية: الطريقة البيانية وطريقة السمبلكس

Basic Linear Programming: The Graphical and the Simblex Methods

(١,١) مقدمة

تعتمد عملية اتخاذ القرارات في كثير من مسائل الواقع العملي على استخدام التحليل الكمي للوصول إلى القرار الصحيح لحل المشكلات التي نواجهها. ومن أهم المشكلات التي تواجهها معظم النظم[١] هي توزيع مواردها بشكل فعّال بغية الوصول إلى أفضل المنافع للنظام (أكبر الأرباح أو أقل الخسائر أو أفضل طاقة إنتاجية... إلخ). ففيما يتعلق بإنتاج السلع في الأنظمة مثلاً فإن الأنظمة ترغب بشكل عام في معرفة أي السلع ستنتج؟. ما الكميات الواجب استخدامها لإنتاج هذه السلع؟ ما الطريقة الواجب اتباعها للإنتاج؟.

---

(١) كافة المنشآت الصناعية والزراعية والمؤسسات والوزارات والجامعات هي أمثلة على النظم. ويعّرف النظام(جمعه نظم) بأنه مجموعة من العناصر التي تتعاون وتترابط فيما بينها لتحقيق هدف أو أهداف معينة. وبذلك فإن مفهوم النظم هو مفهوم شامل وواسع، وما يهمنا من النظم هو معالجة مشاكلها بطرق علمية توصل إلى تحقيق أهدافها.

والهدف العام من هذه المعرفة هو الوصول إلى القرار السليم الذي يحقق أهداف النظام. والوصول إلى قرار سليم ودقيق لمشكلة ما يتطلب بشكل عام أن تقبل هذه المشكلة الصياغة بمفاهيم رياضية وهو ما يعرف باسم "البرمجة الرياضية". وتعتبر "البرمجة الخطية" من أكثر أنواع البرمجة الرياضية المستخدمة في حل الكثير من مشكلات توزيع موارد النظم بطرق فعّالة. وتعرف البرمجة الخطية اختصاراً على أنها طريقة لمعالجة النماذج الخطية في بحوث العمليات حيث تكون كل من دالة الهدف والقيود هي دوال خطية في متغيرات القرار. وتتعامل البرمجة الخطية بشكل خاص مع المسائل التي تتضمن إيجاد أفضل قيمة لدالة الهدف (أكبر قيمة في حالة المنفعة أو الأرباح وأصغر قيمة في حالة التكاليف أو الخسائر) تحت عدد من القيود الناتجة عن محدودية الموارد في معظم الأحيان إضافة إلى القيود المتعلقة بطبيعة المشكلة المدروسة وشروطها. وتعبر دالة الهدف عادة عن هدف اقتصادي كالأرباح أو الإنتاج أو التكاليف أو ساعات أو أيام العمل الأسبوعية أو الحمولة... إلخ.

وللبرمجة الخطية تطبيقات عديدة ظهرت ولا تزال تظهر كل يوم لحل الكثير من المشكلات في عالم الأعمال نذكر منها: مسائل الإنتاج المختلط، مسائل المزج، مسائل تخطيط الإنتاج والتخطيط المالي وتخطيط المشروعات، مسائل المبيعات والإعلانات وتحليل الأوراق والأسهم التجارية، مسائل النقل والتخصيص، نظرية المباريات وغيرها كثير. وتعتبر البرمجة الخطية من أكثر الطرق المستخدمة في صناعة القرارات بشأن المشكلات التي تواجهها بحوث العمليات في الحقول المختلفة كالصناعة والزراعة والإدارة والتخطيط والميدان العسكري ... إلخ.

وسنتعرض في هذا الفصل لبعض الأمثلة البسيطة التي تعتمد على متغيرين مستقلين فقط حيث سنقوم بإيجاد الحلول "بالطريقة البيانية Graphical Method ". ومع أن الطريقة البيانية سهلة الفهم والمعالجة فإنها لا تصلح إلا للمسائل التي تعتمد فيها دالة الهدف والقيود على متغيرين مستقلين أو تلك المكافئة لها. وسنقوم لذلك بدراسة

طريقة أخرى تسمى "طريقة السمبلكس Simplex Method " تصلح لحل جميع مسائل البرمجة الخطية بأي عدد من المتغيرات المستقلة. ولا بد للقارئ أولاً من أخذ فكرة عن المجموعات المحدبة نظرا لأهميتها في النظريات الأساسية التي سنعتمد عليها في حل البرامج الخطية وهو ما خصصنا له الفقرة الأولى من الملحق.

(١,٢) أمثلة نموذجية على البرمجة الخطية بمتغيرين

مثال (١,١)

لدى شركة بترومين مصنعاً لصناعة وقود الطائرات يقوم بإنتاج صنفين I و II من هذا الوقود وتقدر الأرباح العائدة لكل وحدة مصنوعة من الصنف I بـ 200 ريال أما الأرباح العائدة لكل وحدة مصنوعة من الصنف II فتقدر بمقدار 140 ريالاً. تمر عمليات إنتاج الوقود في أربعة أقسام ونتيجة للدراسة التي قام بها المختصون في الأقسام الأربعة تبين أن محدودية الوقت المتوافر هي العنصر الوحيد ذو الصلة بمحدودية الطاقة الإنتاجية. يبين الجدول رقم (١,١) الوقت(بالساعة) الذي تطلبه صناعة كل وحدة من الصنفين I و II في كل من الأقسام الأربعة وطاقة الوقت المتوافرة في كل من هذه الأقسام (بالساعة شهرياً). وفقاً لهذه البيانات فإن الشركة ترغب بمعرفة كم ستنتج من كل من صنفي الوقود كي تحقق أكبر ربح شهري ممكن. المطلوب كتابة النموذج الرياضي لهذه المسألة ومن ثم إيجاد الحل الأمثل لها.

الحل

نلخص عناصر المسألة في الأهداف ، المتغيرات ، والقيود على النحو التالي :

الأهداف

إيجاد برنامج إنتاجي لصنفي الوقود I و II الذي يحقق أكبر ربح شهري ممكن للشركة. لنرمز لهذا الربح الشهري بالرمز Z.

المتغيرات

كما هو واضح من نص المسألة في المثال فإن المتغيرات ذات الصلة بالمشكلة هي :

● عـدد الوحـدات الواجـب إنتاجهـا شـهرياً مـن كـل مـن صـنفي الوقـود. لنرمـز بـالرمز x_1 لعـدد الوحدات المنتجة من الصنف I وبـالرمز x_2 لعـدد الوحـدات المنتجـة مـن الصنف II . x_1 و x_2 هـي مـتغيرات القـرار في هـذه المـسألة (الأنـشطة الـتي يقـوم بهـا هـذا النظام هي إنتاج الصنف I وهو النشاط الأول وإنتاج الصنف II وهو النشاط الثاني).

الجدول رقم (١,١).

القسم	الوقت بالساعة اللازم لصناعة الوحدة		طاقة الوقت بالساعة المتوافر للقسم شهرياً كحد أقصى
	الصنف I	الصنف II	
1	3	0	6000
2	0	2.9	8000
3	2.5	2	7500
4	1.3	1.5	5000

كتابة الدالة Z بدلالة المتغيرات

من الواضح أن :

$$Z = 200\, x_1 + 140\, x_2$$

القيود

بالإضافة إلى قيود اللاسلبية الناتجة عن طبيعـة المتغيرات x_1, x_2 $(x_1\ ,\ x_2 \geq 0)$ فـإن القيود الوحيدة هي تلك الناتجة عن محدودية الوقت المتوافر شهرياً في الأقـسام الأربعـة، وهذه القيود هي :

أ) القيـد المتعلـق بالقـسم (1) هـو تـوافر 6000 سـاعة شـهرياً كحـد أقـصى وهـذا القسم مخصص للصنف I فقط. وبما أن كل وحدة من هـذا الـصنف تـستغرق 3 سـاعات فإنه يمكن التعبير عن هذا القيد بالمتباينة $3\, x_1 \leq 6000$.

ب) وبالمثل يمكننا التعبير عن القيود المتعلقة بالأقسام 2 ,3 و 4 وفقاً للبيانات المعطاة في الجدول رقم (١,١) بالمتباينات التالية على الترتيب.

$$2.9\ x_2 \leq 8000$$

$$2.5\ x_1 + 2\ x_2 \leq 7500$$

$$1.3\ x_1 + 1.5\ x_2 \leq 5000$$

صياغة المسألة أو النموذج الرياضي

كبر الدالة :

$$Z = 200\ x_1 + 140\ x_2 \qquad (١,١)$$

وفقاً للقيود :

$$3\ x_1 + 0.\ x_2 \leq 6000 \qquad (١,٢)$$

$$0.\ x_1 + 2.9\ x_2 \leq 8000 \qquad (١,٣)$$

$$2.5\ x_1 + 2\ x_2 \leq 7500 \qquad (١,٤)$$

$$1.3\ x_1 + 1.5\ x_2 \leq 5000 \qquad (١,٥)$$

$$x_1\ ,\ x_2 \geq 0 \qquad (١,٦)$$

حل النموذج

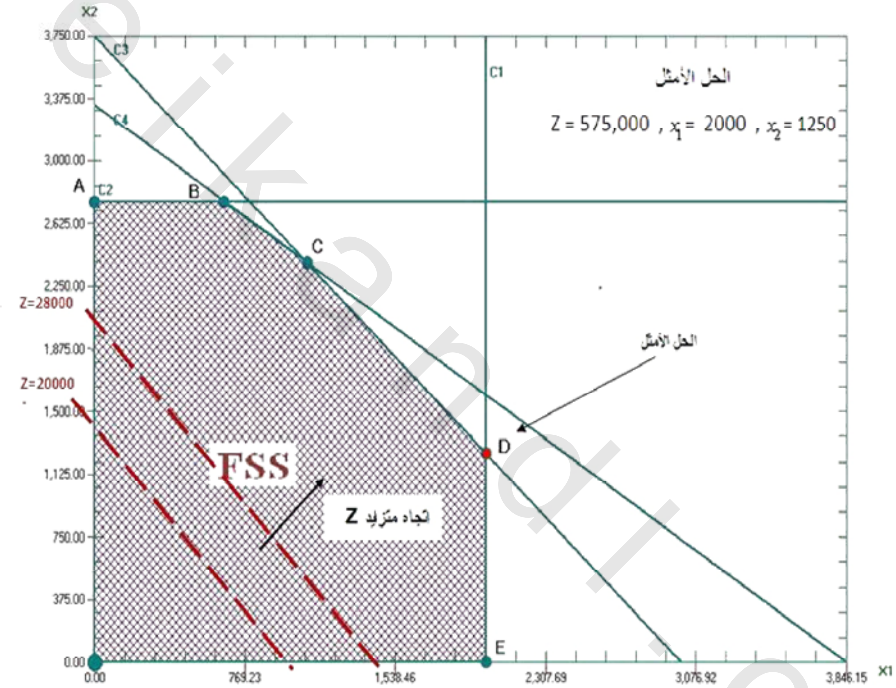
إن حل النموذج يعني إيجاد فضاء الحل الممكن (Feasible Solution Space(FSS " ومن ثم إيجاد الحل الأمثل من هذا الفضاء والذي يشار إليه عادةً "تحليل الأمثلية Optimality Analysis". إن فضاء الحل الممكن هو ذلك الفضاء الذي يحقق جميع القيود. وبالنسبة لهذا المثال فإن فضاء الحل الممكن هو مجموعة النقاط (x_1 , x_2) التي تحقق جميع القيود من (١,٢) – (١,٦). نلاحظ أولاً أن القيد (١,٦) يعني أن منطقة الحل المشترك للقيود مقصورة على الربع الأول. فلو أخذنا مقياسا للرسم قدره 1/1000 لأمكننا أن نجد بسهولة أن الحل المشترك للمتباينات (القيود) (١,٢) – (١,٦) هو مجموعة النقاط الواقعة على محيط المضلع (لأن المساواة تدخل في جميع القيود) OABCDE وداخله (الشكل رقم ١,١). فالحل الأمثل هو النقطة أو النقاط من الفضاء FSS (محيط المضلع OABCDE وداخله) التي تكون عندها الدالة Z المعرفة بالعلاقة (١,١) أكبر ما يمكن . فإذا لاحظنا أن فضاء الحل الممكن هو مجموعة محدبة[٢-أ] وأن العلاقة (١,١) تمثل عائلة من المستقيمات المتوازية(كل قيمة لـ Z تعطي أحد أعضاء هذه العائلة) فإنه يمكن الحصول على النقطة أو النقاط من الفضاء FSS والتي تجعل الدالة Z أكبر ما يمكن وذلك بتحريك أحد هذه المستقيمات باتجاه تزايد الدالة Z حتى يمس هذا المستقيم فضاء الحل في أبعد نقطة منه في اتجاه تزايد Z . ولتحديد اتجاه تزايد أو تناقص Z يكفي أن نعطي Z قيمتين اختياريتين مناسبتين[٢-ب]. مثلاً $Z = 200000$ و$Z=280000$ ثم نرسم المستقيمين

---

(٢) (أ) راجع مفهوم المجموعات المحدبة في الملحق

(ب) نعني بكلمة قيم مناسبة للدالة Z بأنها تلك التي تمكننا من رسم المستقيمات Z الناتجة بشكل سهل وواضح على نفس الشكل الذي يمثل فضاء الحل FSS . فمثلاً من فضاء الحل لمثال (١,١) نجد أن قيم x_1 تتراوح بين الصفر و٢٠٠٠ وأن قيم x_2 تتراوح بين الصفر و8000/2.9 فلو أخذنا$x_1 = 1000$, x_2=١٠٠٠ لكانت$Z=340000$ ومن هنا نقول إن قيم Z المناسبة هي بمئات الآلاف.

الناتجين $200x_1 + 140x_2 = 200000$ و$200x_1 + 140x_2 = 280000$ على الشكل نفسه الذي عيّنا عليه فضاء الحل ونحدِّد من خلالها اتجاه تزايد Z (الشكل رقم ١,١). فإذا حركنا أحد هذين المستقيمين باتجاه تزايد Z نجد أنه يمس الفضاء FSS في النقطة D كأبعد نقطة من هذا الفضاء في هذا الاتجاه. نقول إن النقطة D" تمثِّل الحل الأمثل "



الشكل رقم (١,١). فضاء الحل الممكن والحل الأمثل لمثال (١,١).

لإيجاد الحل الأمثل نوجد إحداثيات النقطة D وقيمة Z عند D . ونحصل على إحداثيات D بحل معادلتي المستقيمين $x_1 = 2000$ و $2.5x_1 + 2x_2 - 7500 = 0$ المتقاطعين في D فنجد أن إحداثيات D هي :

$x_1 = 2000$ و $x_2 = 1250$

وأن : $Z\,(D) = 200\,(2000) + 140\,(1250) = 575000$ ريال

فالبرنامج الشهري الأمثل لإنتاج صنفي الوقود هو أن تنتج الشركة $x_1^* = 2000$ وحدة من الصنف I و $x_2^* = 1250$ وحدة الصنف II وتحقق بذلك أكبر ربح شهري ممكن وقدره $Z^* = 575000$ ريال .

مثال (١,٢)

يقوم أحد مصانع الأدوية بإنتاج نوع من أقراص فيتامين B المركب وذلك بمزج مكونين I و II من المكونات التي تحوي على نسب عالية من هذا الفيتامين. تحوي كل أوقية (وحدة) من المكون I على 10 ملغ من فيتامين B_1 و 0.15 ملغ من فيتامين B_2 و 1.2 ملغ من فيتامين B_6 و 0.55 ملغ من فيتامين B_{12}. وتحوي كل أوقية من المكون II على 12.5 ملغ ، 0.6 ملغ ، 0.3 ملغ و 0.25 ملغ من فيتامين B_1, B_2, B_6 و B_{12} على الترتيب. سعر تكلفة الوحدة من المكونين I و II يقدر بمقدار 10.4 و 7.2 هللة. وتتطلب المقتضيات أن يحوي كل قرص من فيتامين B المركب على 50 ملغ ، 1 ملغ ، 3 ملغ و 2 ملغ على الأقل من فيتامين B_1, B_2, B_6, B_{12} على الترتيب. يهدف المصنع إلى جعل مجموع تكلفة المواد الداخلة في تركيب قرص B المركب أقل ما يمكن. ما الكميات من كلا المكونين I و II الواجب إدخالها في صناعة هذا القرص لتحقيق ذلك الهدف؟

الحل

الأهداف

جعل تكلفة المواد الداخلة في إنتاج القرص من فيتامين B المركب(ولتكن Z) أقل ما يمكن.

المتغيرات

يتَّضح من نص المسألة ومن الأهداف أن المتغيرات ذات الصلة بالمسألة والتي يمكن لصاحب القرار (المصنع) أن يتحكم بها ضمن شروط المسألة هي الكميات (بالوحدة) الواجب إدخالها من المكونين I و II في صناعة كل قرص من فيتامين B المركب ولنرمز لها بـ x_1 ، x_2 على الترتيب (x_2, x_1 هما متغيرا القرار).

كتابة الدالة Z بدلالة المتغيرات

من الواضح أن الدالة Z والتي تعبِّر عن تكاليف إنتاج قرص B المركب هي

$$Z = 10.4x_1 + 7.2x_2$$

القيود

من نص المسألة نجد أن هناك نوعين من القيود :

الأولى: وتتعلق بمتطلبات وجود حد أدنى (بالملغ) من الفيتامينات B_1 ، B_2 ، B_6 ، وB_{12} بكل قرص. وفقاً لمعطيات المسألة فإنه يمكن التعبير عن هذه القيود بدلالة المتغيرات x_2, x_1 بالمتباينات التالية :

$10x_1 + 12.5x_2 \geq 50$	تحقق الحد الأدنى بالملغ من فيتامين B_1
$0.15x_1 + 0.6x_2 \geq 1$	تحقق الحد الأدنى بالملغ من فيتامين B_2
$1.2x_1 + 0.3x_2 \geq 3$	تحقق الحد الأدنى بالملغ من فيتامين B_6
$0.55x_1 + 0.25x_2 \geq 2$	تحقق الحد الأدنى بالملغ من فيتامين B_{12}

الثانية: قيود اللاسلبية الناتجة عن طبيعة المتغيرات x_1, x_2 وهي :

$$x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0$$

صياغة المسألة أو النموذج الرياضي

صغِّر الدالة :

$$Z = 10.4x_1 + 7.2x_2 \qquad (١,٧)$$

وفقاً للقيود:

$$10x_1 + 12.5x_2 \geq 50 \quad (١,٨)$$

$$0.15x_1 + 0.6x_2 \geq 1 \quad (١,٩)$$

$$1.2x_1 + 0.3x_2 \geq 3 \quad (١,١٠)$$

$$0.55x_1 + 0.25x_2 \geq 2 \quad (١,١١)$$

$$x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0 \quad (١,١٢)$$

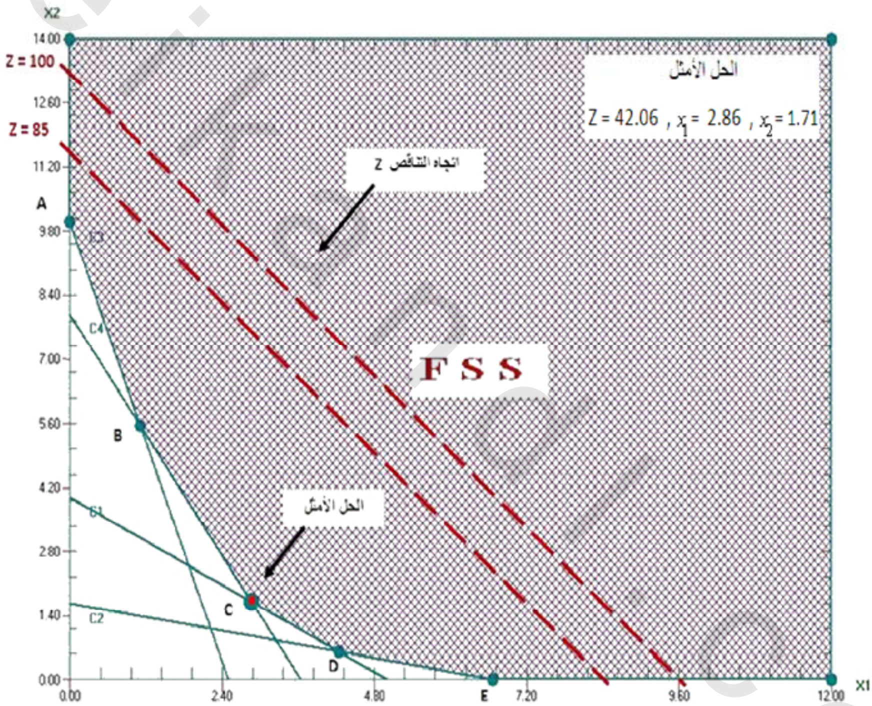
حل النموذج

بطريقة مماثلة لما رأيناه في المثال السابق نجد أن المتباينات (القيود) من (١,٨) – (١,١٢) تتحقق في المنطقة المظللة من الشكل رقم(١,٢) وعلى حدود هذه المنطقة أيضاً (لأن المساواة تدخل في جميع القيود). أي أن فضاء الحل الممكن هو محيط المضلع $x_2ABCDEx_1$ وداخله المفتوح من جهتي اليمين والأعلى وغير المحدود من هاتين الجهتين. لإيجاد الحل الأمثل نقوم كما رأينا في المثال السابق بتحديد جهة تزايد أو تناقص عائلة المستقيمات Z المعرفة بالعلاقة (١,٧) بإعطاء قيمتين مختلفتين ومناسبتين لـ Z مثلاً $Z = 85$ و $Z = 100$ ورسم المستقيمين الناتجين على الشكل نفسه الذي يحدد فضاء الحل (الشكل رقم ١,٢). وبتحريك أحد هذين المستقيمين باتجاه تناقص Z (لأن الهدف هو تقليل التكاليف) حتى يمس فضاء الحل الممكن في أبعد نقطة منه نجد أن هذا التماس يحصل عند النقطة C وبذلك فإن C تمثل الحل الأمثل للمسألة المطروحة. وبحل معادلتي المستقيمين:

$0.55x_1 + 0.25x_2 = 2$ و $10x_1 + 12.5x_2 = 50$

المتقاطعين في النقطة C نجد أن $C\ (x_1 = 2.857,\ x_2 = 1.714)$. ومن المعادلة (١,٧) نجد أن :

$$Z\ (\ C\ ) = 10.4\ (2.857) + 7.2\ (1.714) = 42.0536$$



الشكل رقم (١,٢). فضاء الحل الممكن والحل الأمثل لمثال (١,٢).

فالحل الأمثل هو أن ندخل في تركيب كل قرص B مقدار $x_1^* = 2.857$ أوقية

من المكون I ومقدار $x_2^* = 1.714$ أوقية من المكون II لنحصل بذلك على أقل تكلفة ممكنة للمواد الداخلة في صناعة القرص المركب B ومقدارها $Z^* = 42.0536$ هللة.

نلاحظ من الأمثلة السابقة أنه عندما يكون الحل الأمثل موجوداً ومحدوداً (نعني بالحل الأمثل المحدود بأنه الحل الذي تكون قيمة Z عنده أقل من اللانهاية وإلا قلنا عنه إنه حل غير محدود) فإنه يتمثل في أحد النقاط الركنية لفضاء الحل الممكن وفي هذا الصدد فإن النظرية التالية والمعروفة باسم "نظرية نقطة الركن Corner Point Theorem" تصح من أجل أي برنامج خطي.

نظرية (١,١)

إذا كان فضاء الحل الممكن FSS لبرنامج خطي غير خالٍ وكان الحل الأمثل موجوداً ومحدوداً فعندئذ يوجد على الأقل نقطة تقع على حدود هذا الفضاء تمثل الحل الأمثل. وإذا كان الحل الأمثل هذا وحيداً فيتمثل عندئذ بإحدى النقاط الركنية لهذا الفضاء.

وتعرف هذه النظرية أيضاً باسم آخر هو "نظرية النقطة الحدِّية Extreme Point Theorem" ذلك أنه في حال تحقق شروط النظرية فإن الحل الأمثل لأي برنامج خطي يتمثل في إحدى النقاط الحدِّية لفضاء الحل الممكن لذلك البرنامج.

وتلعب النظرية الأخيرة دوراً مهماً في تسهيل عملية إيجاد الحل الأمثل لبرنامج خطي بعد التأكد من أن فضاء الحل الممكن هو مجموعة غير خالية وأن الحل الأمثل موجود ومحدود. ويكفي عندئذ أن نحسب قيمة دالة الهدف عند جميع النقاط الركنية للفضاء FSS ونقارن بينها ثم نختار أفضلها طبقاً للهدف. وسنوضح ذلك بالمثال التالي :

مثال (١,٣)

صغِّر الدالة :

$$Z = 20x_1 + 15x_2 \qquad (١,١٣)$$

وفقاً للقيود:

$$2x_1 + x_2 \geq 5 \qquad (١,١٤)$$

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 3 \qquad (١,١٥)$$

$$x_1 + x_2 \geq 3 \qquad (١,١٦)$$

$$x_1 , x_2 \geq 0 \qquad (١,١٧)$$

الحل

يمكننا التحقق بسهولة من أن القيود من (١,١٤) – (١,١٧) تتحقق في داخل وعلى محيط المضلع $PQRSx_1$ المفتوح من الأعلى واليمين (الشكل رقم ١,٣).

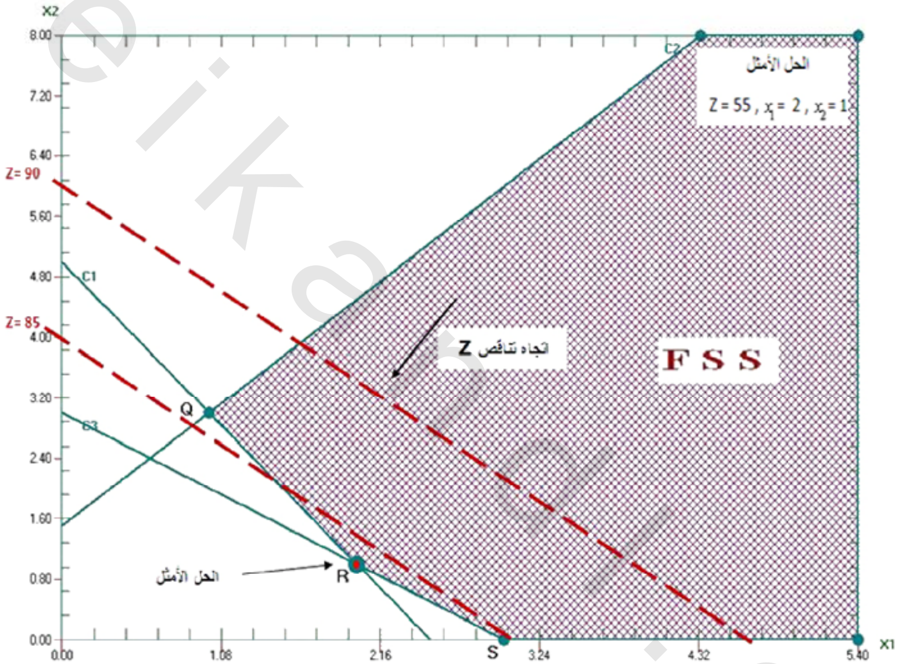
فللفضاء FSS ثلاث نقاط ركنية هي R, S و Q وبإعطاء Z قيمتين مختلفتين ومناسبتين مثلاً $Z = 60$ و $Z = 90$ ورسم المستقيمين الناتجين نجد أن دالة الهدف تتناقص باتجاه حدود الفضاء FSS وليس بالاتجاه المفتوح لهذا الفضاء فالحل الأمثل موجود ومحدود. كما أن هذا الحل وحيد؛ لأن المستقيمات Z لا توازي أيًّا من حدود الفضاء FSS وبحسب نظرية نقطة الركن فإن الحل الأمثل يتمثل في أحد النقاط الركنية: $Q(1, 3)$, $R(2, 1)$ و $S(3, 0)$. ولَّما كان:

$$Z = (Q) = 20\,(1) + 15\,(3) = 65$$

$$Z\,(R) = 20\,(2) + 15\,(1) = 55$$

$$Z(S) = 20(3) + 15(0) = 60$$

فـإن الحـل الأمثـل يتمثـل في النقطـة R . أي أن الحـل الأمثـل هـو: $x_1^* = 2$ ، $x_2^* = 1$ و $Z^* = 55$.



الشكل رقم (١,٣).فضاء الحل والحل الأمثل لمثال (١,٣).

(١,٣) الثنويّـــة

Duality

بالعودة إلى مثال (١,١) الخاص بإنتاج صنفي الوقود I و II لنفرض أنك تريد أن تتعهد الأقسام الأربعة في المصنع الذي يقوم بإنتاج صنفي الوقود من الشركة صاحبة

المصنع. فبما أن عنصر الوقت هو العنصر المهم الوحيد في عملية تصنيع الوقود فإن تعهدك هذا يعني أن تتعهد الوقت المتوافر (بالساعة) في الأقسام الأربعة. ولو فرضنا أن y_1, y_2, y_3 و y_4 ، تمثل تكلفة تعهدك للساعة (الوحدة) من الأقسام (1) ، (2) ، (3) ، (4) والذي يتوافر فيها 6000 ، 8000 ، 7500 ، 5000 ساعة على الترتيب، لكانت التكلفة الكلية لتعهدك ولنرمز لها بالرمز W معطاة بالعلاقة :

$$W = 6000y_1 + 8000y_2 + 7500y_3 + 5000y_4$$

ومن الطبيعي أن هدفك عندئذ هو جعل التكلفة الكلية لتعهدك أقل ما يمكن. ويمكن التعبير عن هذا الهدف كما يلي :

صغّر الدالة :

$$W = 6000y_1 + 8000y_2 + 7500y_3 + 5000y_4$$

ولكن ثمة قيود ضمنية تواجهك حيال تحقيق هدفك وهي أن تدفع للشركة صاحبة المصنع عن كل وحدة تنتجها من صنفي الوقود I و II تعويضاً لا يقل عن الأرباح التي تجنيها الشركة من هذه الوحدة. ولما كانت الوحدة من الصنف I تستهلك 3 ساعات من وقت (موارد) القسم (1)، 0 ساعة من وقت القسم (2)، 2.5 ساعة من وقت القسم (3) و 1.3 ساعة من وقت القسم (4) فإن تكلفة تعهدك للوحدة من الصنف I والتي تساوي $3y_1 + 0.y_2 + 2.5y_3 + 1.3y_4$ يجب ألا تقل عن 200 ريال وهو الربح العائد للشركة من إنتاج وحدة من الصنف I، وإلا فإن الشركة لن توافق على عرضك ؛ لأنه سيكون من الأفضل لها عندئذ أن تقوم هي نفسها بإنتاج الصنف I من الوقود. وبالمثل لابد أن يكون تكلفة تعهدك للوحدة من الصنف II والتي تساوي $0.y_1 + 2.9y_2 + 2y_3 + 1.5y_4$ لا يقل عن 140 ريالاً وهو الربح العائد للشركة من الصنف II. ثمة قيد ضمني

آخر هو أن تكون قيمة تعهدك لوحدة من أي قسم من الأقسام الأربعة مقداراً غير سالب. وبذلك فإن مشكلة تعهدك تتلخص بحل المسألة التالية :

صغّر الدالة :

$$w = 6000y_1 + 8000y_2 + 7500y_3 + 5000y_4 \qquad (١,١٨)$$

وفقاً للقيود :

$$3y_1 + 0.y_2 + 2.5y_3 + 1.3y_4 \geq 200$$

$$0.y_1 + 2.9y_2 + 2y_3 + 1.5y_4 \geq 140$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

ويسمى النموذج (١,١٨) باسم " النموذج الثنوي Dual Model " للنموذج المعطى بالعلاقات (١,١٣) – (١,١٧) والذي نطلق عليه اسم " النموذج الأولي Primal Model ". وما رأيناه بالنسبة لمثال (١,١) صحيحاً بالنسبة لأي برنامج خطي آخر . وتعتبر هذه الميزة من أهم مميزات البرمجة الخطية.

فلكل مسألة تصغير (تكبير) يقابلها مسألة تكبير (تصغير) وتتضمن المسألتان البيانات نفسها ويطلق على أحدها اسم " المسألة الأولية Primal Problem " أو النموذج الأولي وعلى الأخرى اسم " المسألة الثنوية Dual Problem " أو النموذج الثنوي. ويمكن اشتقاق أي من المسألتين من الأخرى مباشرة وفقاً للقواعد التالية :

[لاحظ تحقق هذه القواعد بالنسبة للمسألة الثنوية لمسألة المثال (١,١)]

- كل قيد في أحد النموذجين يقابله متغير مستقل في النموذج الآخر ويستثنى من ذلك قيود اللاسلبية.

• الأطراف اليمنى للقيود في أحد النموذجين تصبح معاملات لمتغيرات القرار في دالة الهدف للنموذج الآخر.

• إذا كان الهدف في أحد النموذجين هو التصغير (التكبير) فإن الهدف في النموذج الآخر هو التكبير (التصغير).

• جميع القيود في نموذج التكبير هي من نوع ≤ وجميع القيود في نموذج التصغير هي من نوع ≥.

• المتغيرات في كلا النموذجين غير سالبة.

• المعاملات السطرية في الأطراف اليسرى للقيود في أحد النموذجين تصبح معاملات عمودية في الأطراف اليسرى لقيود النموذج الآخر.

وسنعطي مزيداً من التفصيل حول هذه القواعد بعد دراسة المثال التالي:

مثال (١,٤)

أوجد المسألة الثنوية للمسألة التالية:

كبر الدالة :

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \qquad (١,١٩)$$

وفقاً للقيود:

$$3x_1 + 5x_2 \le 15$$

$$-x_1 + 2x_2 \ge 1$$

$$2x_1 - 5x_2 = 1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \leq 0$$

الحل

بما أن المسألة تكبير فإننا نقوم بتحويل جميع القيود إلى الشكل ≤ كذلك فإننا نستبدل المتغير x_2 بمتغير $x_3 = - x_2$ فنحصل على النموذج المكافئ التالي:

كبر الدالة:

$$Z = 2x_1 - 3x_3 \qquad (١,٢٠)$$

وفقاً للقيود:

$$3x_1 - 5x_3 \leq 15$$

$$x_1 - 2x_3 \leq -1$$

$$2x_1 + 5x_3 \leq 1$$

$$-2x_1 - 3x_3 \leq -1$$

$$x_1 \geq 0 , \quad x_3 \geq 0$$

والنموذج الثنوي للنموذج (١,٢٠)) هو:

صغر الدالة :

$$W = 15y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \tag{1,21}$$

وفقاً للقيود :

$$3y_1 + y_2 + 2y_3 - 2y_4 \geq 2$$

$$5y_1 - 2y_2 - 5y_3 + 5y_4 \geq 3$$

$$y_1 , y_2 , y_3 , y_4 \geq 0$$

ولو تفحصنا النموذج(١,٢١) لأمكننا ملاحظة أنه يمكن استبدال المتغير y_2 بمتغير جديد y_5 بحيث إن $y_5 = -y_2$ وكذلك استبدال الفرق $y_3 - y_4$ بمتغير جديد $y_6 = y_3 - y_4$. لاحظ أن المتغير y_5 غير موجب أي $y_5 \leq 0$ كما أن المتغير y_6 غير مقيد بإشارة ؛ لأنه ممثل بالفرق بين متغيرين موجبين. وبذلك يصبح النموذج(١,٢١) على النحو التالي :

صغر الدالة :

$$W = 15y_1 + y_5 + y_6 \tag{1,22}$$

وفقاً للقيود :

$$3y_1 - y_5 + 2y_6 \geq 2$$

$$5y_1 + 2y_5 - 5y_6 \geq 3$$

$y_1 \geq 0$,

$y_5 \leq 0$

y_6 غير مقيد بإشارة

الآن لو تفحصنا النموذج الأصلي (١,١٩) والنموذج النهائي(١,٢٢) لأمكننا الوصول إلى القاعدة التالية :

قاعدة (١ ,١)

لكل مسألة برمجة خطية الهدف فيها تكبير(تصغير) مسألة ثنوية متعلقة بها الهدف فيها تصغير(تكبير) وتسمى أحدهما "المسألة الأولية" ونموذجها "النموذج الأولي" بينما تسمى الأخرى "المسألة الثنوية" ونموذجها "النموذج الثنوي" وتحتوي المسألتين نفس البيانات على النحو التالي:

١ – عدد المتغيرات في إحدى المسألتين يساوي عدد القيود في المسألة الأخرى بحيث إن كل متغير في أحدهما يقابله قيد في الأخرى والعكس بالعكس.

٢ – الأطراف اليمنى في قيود إحدى المسألتين تصبح معاملاتً لمتغيرات القرار في المسألة الأخرى وبنفس ترتيب التقابل بين القيود والمتغيرات.

٣– كل قيد طبيعي (نذكر هنا بأن القيد الطبيعي بالنسبة لمسائل التكبير هو من النوع ≤ وبالنسبة لمسائل التصغير هو من النوع ≥) في إحدى المسألتين يقابله متغير غير سالب في المسألة الأخرى والعكس بالعكس.

٤– كل قيد غير طبيعي (نذكر هنا بأن القيد غير الطبيعي بالنسبة لمسائل التكبير هو من النوع ≥ وبالنسبة لمسائل التصغير هو من النوع ≤) يقابله متغير غير موجب والعكس بالعكس.

٥- كل قيد مساواة في إحدى المسألتين يقابله متغير غير مقيد بإشارة في المسألة الأخرى والعكس بالعكس.

٦- المعاملات السطرية في الأطراف اليسرى لقيود إحدى المسألتين تصبح معاملات عمودية في الأطراف اليسرى لقيود المسألة الأخرى والعكس بالعكس مع مراعاة ترتيب التقابل بين القيود والمتغيرات.

لاحظ أن جميع القواعد السابقة محققة في النموذجين (١,١٩) و(١,٢٢) حيث يمكن اعتبار أحدهما بمثابة "نموذج أولي" والآخر "نموذجه الثنوي".

فمثلاً عدد القيود في النموذج (١,١٩) هو 3 = عدد المتغيرات في النموذج (١,٢٢) بحيث إن كل قيد يقابله متغير. فالمتغير $y_1 \geq 0$ يقابل القيد الأول(قيد طبيعي) والمتغير$0 \leq y_5$ يقابل القيد الثاني(قيد غير طبيعي) والمتغيرy_6 غير مقيد بإشارة يقابل القيد الثالث (قيد مساواة)، ومعاملات هذه المتغيرات في الدالة W هي نفس الأطراف اليمنى للقيود المقابلة لهذه المتغيرات. وهكذا نستطيع التحقق من باقي القواعد. أما العلاقة بين حلول المسألتين فتلخصه النظرية التالية والتي تعرف باسم"نظرية الثنوية Dual Theorem ".

نظرية (١,٢)

(أ)إذا كان لكل من المسألتين الأولية والثنوية حلول ممكنة فيوجد لكل منهما عندئذ حلاً أمثلياً وتكون قيمة دالة الهدف عند الحل الأمثل للمسألة الأولية مساوية لقيمة دالة الهدف عند الحل الأمثل للمسألة الثنوية.

(ب) إذا وجد لأي من المسألتين حل أمثل محدود فإن للأخرى حل أمثل محدود وتكون قيمة دالة الهدف عند الحل الأمثل لأحدهما مساوية لقيمة دالة الهدف عند الحل الأمثل للأخرى أي $Z^* = W^*$.

(ج) يمكن إيجاد قيم متغيرات القرار لإحدى المسألتين من خلال جدول الحل الأمثل للأخرى (وهو ما يعرف باسم "سعر الظل Shadow Price " كما سنرى لاحقاً)

شريطة أن تكون قيود نموذج المسألة المحلولة مكتوبة بالشكل ≤ وأن تكون الأطراف اليمنى لهذه القيود موجبة والذي سنطلق عليه اسم "الشكل النموذجي Typical Model" .

(١,٤) تحليل الحساسية
Sensitivity Analysis

نظراً لأننا اقتصرنا حتى الآن على حل البرامج الخطية القابلة للحل بطريقة بيانية فإننا سنعطي فكرة عن تحليل الحساسية بطريقة بيانية أيضاً من خلال إجراء تحليل حساسية لنتائج المثال (١,١) السابقة المتعلق بإنتاج مصنع لصنفين من الوقود I و II [راجع مثال (١,١)]. فبعد أن توصل المختصون إلى البرنامج الأمثل الشهري لكل من صنفي الوقود قد يطرأ تعديل على بعض البيانات نتيجة لتغير بعض العوامل من داخل أو من خارج المصنع كتوافر طاقة أكبر من الوقت لبعض الأقسام التي تمر عبرها عملية صناعة الوقود وذلك نتيجة لشراء آلات تصنيع جديدة أو نتيجة لزيادة عدد العاملين لتلك الأقسام أو كنقص الوقت الذي تستهلكه الوحدة في بعض الأقسام نتيجة استخدام أساليب أو آلات حديثة فيها أو كنقص أو زيادة الأرباح العائدة لكل صنف من الوقود أو كنقص أو زيادة عدد الوحدات من أحد أو كلا الصنفين المطلوبة في السوق أو كظهور بعض المشكلات الجديدة التي تؤدي إلى ضرورة إدراج و/أو حذف بعض القيود غير قيود الوقت الواردة في المثال ... إلخ وترغب الشركة المالكة للمصنع في مثل هذه الحالات معرفة مدى تأثير مثل هذه التغيرات على برنامج الإنتاج الأمثل الحالي أو ترغب بمعرفة التغيرات التي يمكن للشركة أن تجربها بحيث تحسن من برنامج الإنتاج الأمثل الحالي أو بحيث تبقى على برنامج الإنتاج الأمثل الحالي أو على برنامج قريب منه جداً والذي تحصل من أجله الشركة على مرونة أكبر في توزيع مواردها أو على مرونة أكبر في التكيف مع القيود المفروضة على الشركة من البيئة المحيطة. ولتوضيح هذه الأمور نعود إلى مسألة إنتاج الوقود في مثال(١,١) ونحاول إجراء تغييرات في بيانات المسألة وملاحظة أثر هذه التغيرات على المنتج.

تغيير في الموارد المتوافرة

يمكن للموارد المتوافرة لنظام أن تتغير زيادة أو نقصاناً. ففي مثال (١,١) يمكن للوقت المتوافر للشركة أن يتغير في حالات متعددة كزيادة أو نقص عدد ساعات العمل اليومية أو اللجوء إلى الوقت الإضافي أو استخدام آلات تصنيع أكثر كفاءة إنتاجية ... إلخ. وترغب الشركة في مثل هذه الحالات أن تعرف مدى تأثير مثل هذه التغيرات على برنامج الإنتاج الأمثل الحالي. وبعبارة أخرى فإن الشركة تهتم عادة بمعرفة أي الموارد التي يمكن زيادتها والتي ترفع من قيمة الحل الأمثل Z^* وأي الموارد التي يمكن إنقاصها دون أن يتغير الحل الأمثل وقيمته؟ وللإجابة نلاحظ أن الحل الأمثل متمثل في النقطة D ومن المتوقع لذلك أن تكون أكثر القيود تأثيراً أو ارتباطا في الحل الأمثل هي تلك المحددة بالمستقيمات المتقاطعة في النقطة D الممثلة للحل الأمثل. ويطلق على مثل هذه القيود اسم "قيود وثيقة أو مترابطة Binding Constraints" ويطلق على غيرها من القيود اسم "قيود غير وثيقة أو غير مترابطة Nonbinding Constraints ". ففي مثالنا نجد أن كلاً من القيدين (١,٢) و(١,٤) المتعلقين بالقسم (1) والقسم (3) على الترتيب هو قيد وثيق. بينما نجد أن القيدين (١,٣) و(١,٥) المتعلقين بالقسمين (2) و(٤) على الترتيب هما قيدين غير وثيقين . لنلاحظ الآن ما يلي :

إذا رفعنا (زدنا الطرف اليمن) قيمة أي من القيدين الوثيقين فإن قيمة Z^* الحالية تتحسن (أي ترتفع). ولتوضيح ذلك نفرض أن الشركة وجدت أنه يمكن رفع ساعات القسم (3) فقط (نعني برفع أو خفض أي قيد أننا نحرك هذا القيد موازيا لنفسه). ولذلك فهي ترغب في معرفة إلى أي مدى يمكن رفع ساعات هذا القسم (مع الإبقاء على الشروط نفسها لبقية الأقسام) والذي تحصل الشركة من أجله على أفضل تحسين ممكن للحل الأمثل الحالي؟.

وإجابة نلاحظ من الشكل رقم (١,١) أنه لدى ثبات شروط بقية الأقسام عدا القسم (3) فإن أقصى نقطة يمكن أن نرفع إليها القيد (١,٤) المتعلق بهذا القسم هي

النقطة $D'(2000,16000)$ ، حيث تصبح D' عندئذ ممثلة للحل الأمثل. ولما كانت قيمة الطرف الأيسر للقيد (١,٤) عند D' هي 8200 فإنه يمكن رفع ساعات العمل بالقسم (3) بمقدار 700 ساعة شهرياً لنحصل بموجبها على أرباح شهرية مقدارها $Z^* = 624000$ ريال أي بزيادة 49000 ريال في الشهر عما سبق. لاحظ من جهة ثانية أن أي خفض في القيد (١,٢) أو (١,٤) (تقليل في قيمة طرفه الأيمن) سيخفض من القيمة المثلى Z^*. فإذا خفضنا قيمة الطرف الأيمن لأي من القيدين غير الوثيقين إلى حد معين فإن قيمة الحل الأمثل الحالي Z^* لا تتغير. وفي مثل هذه الحالات فإن الشركة ترغب في معرفة إلى أي مدى يمكن خفض ساعات العمل في الأقسام ذات القيود غير الوثيقة دون أن يتأثر الحل الأمثل الحالي؟ فإذا عدنا على سبيل المثال إلى القيد (١,٥) المتعلق بالقسم (4) وإلى الشكل رقم (١,١) نلاحظ أنه يمكن خفض هذا القيد إلى النقطة D دون أن يتغير الحل الأمثل. ولما كانت قيمة الطرف الأيسر لهذا القيد عند D هي 4475 فيمكن للشركة أن تخفض $525 = 4475 - 5000$ ساعة عمل شهرية في القسم (4) دون أن يتأثر الحل الأمثل الحالي. لاحظ هنا أن أي رفع للقيد (١,٥) لن يؤثر في الحل الأمثل. نخلص مما سبق إلى ملاحظة أمرين:

أولهما: أن أي رفع أو خفض في الموارد المتعلقة بالقيود الوثيقة يغير من قيمة الحل الأمثل وقيمته. ولذلك يشار إلى الموارد المتعلقة بالقيود الوثيقة اسم "موارد نادرة Scare Resources"

وثانيهما: أن رفع أو خفض الموارد المتعلقة بالقيود غير الوثيقة إلى حد معين لا يغير من قيمة الحل الأمثل أو قيمته. ويشار إلى الموارد المتعلقة بالقيود غير الوثيقة اسم "موارد غير نادرة أو موارد وفيرة Abundant Resources ".

ففي مثال (١,١) فإنه يمكن النظر إلى الموارد (الوقت) في القسمين (1) و(3) على أنها موارد نادرة وإلى الموارد في القسمين (2) و(4) على أنها موارد وفيرة. والسؤال

الآن : ما هو المورد (أو الموارد) النادر (النادرة) الذي (التي) يعطي (تعطي) أفضل تحسين للحل الأمثل؟.

بالطبع فإنه لدى معرفة مثل هذه المورد (الموارد) فإن أولوية معينة ستعطى لمثل هذا (هذه) المورد (الموارد) لدى رصد ميزانية لتلك الموارد (نذكر بأن الميزانية غالباً ما تكون محدودة). ويقودنا ذلك إلى ضرورة تقدير قيمة كل وحدة إضافية للموارد النادرة. وتعرف قيمة الوحدة الإضافية لأي مورد عادة بالعلاقة التالية :

$$\text{قيمة الوحدة الإضافية لمورد} = \frac{\text{أكبر فرق ممكن في قيمة } Z^*}{\text{أكبر زيادة ممكنة في المورد}} \qquad (١,٢٣)$$

ففي مثالنا وُجد أن موارد القسمين (1) و(3) نادرة وقد وجدنا أنه يمكن زيادة مورد القسم (3) بمقدار 700 ساعة لتعطي زيادة قدرها 49000 ريال في قيمة Z^* وبذلك فإن قيمة الوحدة الإضافية (الساعة الإضافية) في القسم (3) تساوي $49000/700 = 70$ ريال . وإذا عدنا إلى الشكل رقم (١,١) نجد أنه يمكن رفع القيد المتعلق بالقسم (1) إلى النقطة E' (3000,0) حيث تصبح عندها النقطة E' ممثلة للحل الأمثل وقيمته Z عندها هي $Z^* = 600000$ أي بزيادة قدرها 25000 ريال. ولما كانت قيمة الطرف الأيسر للقيد (١,٢) المتعلق بالقسم (1) عند النقطة E' مساوية 9000 ساعة أي بزيادة قدرها 3000 ساعة فإن قيمة الوحدة (الساعة) الإضافية في القسم (1) تساوي $25000/3000 = 25/3 = 8.35$ ريالاً. وكما لاحظنا سابقاً فإن زيادة موارد أي من القسمين (2) و(4) لا تؤدي إلى زيادة في قيمة Z^* الأمر الذي يدل على أن قيمة الوحدة (الساعة) الإضافية في أي من القسمين (2) و(4) تساوي الصفر. وهذا أمر طبيعي ؛ نظراً لأن موارد هذين القسمين (مقاسة بالساعات) هي أصلاً موارد وفيرة.

وتقود هذه النتائج إلى أنه لدى التفكير في تحسين الحل الأمثل الحالي فإن الأولوية في رصد الميزانية يجب أن تعطى للقسم (3) أولاً ثم للقسم (1). ويمكن الاستفادة من الزيادة في الموارد الوفيرة [وهي موارد القسمين (2) و(4)] بصرف الزيادة في هذه الموارد لتحسين الحل من خلال رصد قيمة هذه الزيادة إلى الموارد النادرة حسب أولويتها.

نشير في هذا الصدد إلى أن قيمة الوحدة الإضافية لمورد والمعرّفة بالعلاقة (١,٢٣) السابقة يطلق عليها اسم "سعر الظل Shadow Price". وبالتدقيق في نتائجنا السابقة في هذه الفقرة نلاحظ أن سعر الظل للمورد نفسه قد يتغير فيما لو غيرنا واحد أو أكثر من القيود المتعلقة بالموارد حيث نحصل على مسألة جديدة تستخدم الموارد نفسها التي استخدمت في المسألة الأصلية. ولما كان "السعر الحقيقي" لوحدة من مورد لا يتغير بالضرورة بتغيير ظروف المسألة فإنه ثمة فرق بين "السعر الحقيقي" و "سعر الظل" لوحدة من مورد حيث إن هذا الأخير يقيس لنا كما يتضح من العلاقة (١,٢٣) "معدل التحسن" في قيمة Z^* (القيمة المثلى لـ Z) لدى زيادة وحدة من المورد المقابل الأمر الذي يبرر تسميته سعر الظل.

تغيير في دالة الهدف

أوضحنا سابقاً أن دالة الهدف Z المعرّفة بالعلاقة (١,١) تمثل عائلة من المستقيمات المتوازية. فإذا تغير ميل عائلة هذه المستقيمات فيمكن عندئذ أن يتغير الحل الأمثل الحالي من النقطة D إلى نقطة ركنية أخرى، الأمر الذي قد ينتج عنه عند تغير بعض القيود من قيود وثيقة إلى قيود غير وثيقة أو العكس. وما يهم الأنظمة في مثل هذه الحالات هو معرفة ما يلي:

(أ) إلى أي مدى يمكن أن نغير المعاملات في دالة الهدف بحيث لا يتغير الحل الأمثل؟

(ب) ما هو التغيير الذي يمكن إجراؤه على بعض أو كل المعاملات في دالة الهدف والذي يتغير فيه الحل الأمثل وتنقلب معه بالتالي بعض الموارد النادرة إلى موارد وفيرة أو العكس؟.

للإجابة نعود إلى مثال (١,١) فنلاحظ أن : ميل المستقيمات Z يساوي $\frac{-c_1}{c_2} = \frac{-200}{140} = \frac{-10}{7}$ حيث c_1 , c_2 هي على الترتيب معاملات x_1 , x_2 في دالة الهدف.

وبشكل عام فإن ميل أي مستقيم كتبت معادلته بدلالة متغيرين x_1 , x_2

$$(\text{ميل أي مستقيم} = \frac{-\text{معامل } x_1}{\text{معامل } x_2})$$

الآن ، لما كان الحل الأمثل متمثلاً في النقطة D فإنه يمكننا المحافظة على هذا الحل [الإجابة على (أ)] إذا أبقينا على ميل المستقيمات Z محصوراً بين ميلي المستقيمين ED وCD المتقاطعين في D (القيدين الوثيقين بالحل الأمثل) أي :

$$-\infty = \text{ميل } ED \le \frac{-c_1}{c_2} \le \text{ميل } CD = \frac{-5}{4} \qquad (١,٢٤)$$

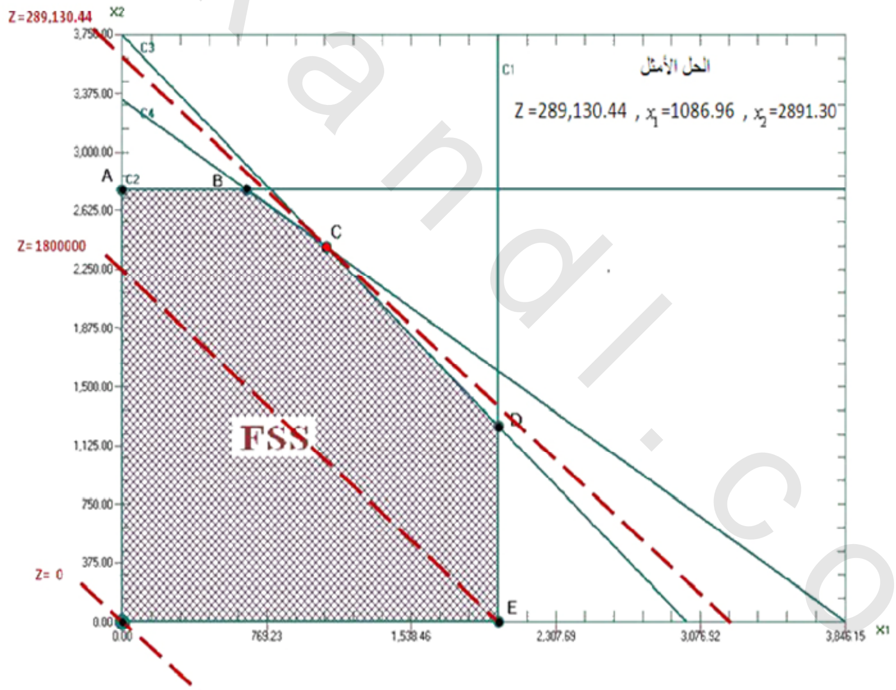
والتي تكافئ $\frac{c_1}{c_2} \ge \frac{5}{4}$. فمثلا ، إذا ثّبتنا $c_2 = 140$ لاستنتجنا من (١,٢٤) أن $c_1 \ge 175$ ، وإذا ثّبتنا $c_1 = 200$ لاستنتجنا من (١,٢٤) أن $c_2 \le 160$. أي أن بإمكان الشركة أن تنقص من ربح الطن من الصنف I لحدود 175 ريالاً و/أو تزيد من ربح الطن من الصنف II لحدود 160 ريالاً دون أن يتغير برنامج الحل الأمثل الحالي (يجب الانتباه هنا إلى أن قيمة الدالة Z تتغير بشكل عام). ويمكن لمثل هذه الحالة أن تقع للشركة نتيجة لتغير بعض الظروف المحيطة كأن تقل مبيعات أحد الصنفين أمام الآخر مما قد يضطر إدارة الشركة إلى خفض أرباح سعر الصنف الذي تراجعت مبيعاته ورفع سعر ذلك الصنف الذي ارتفعت مبيعاته. وفيما يخص الصنفين معاً فيمكن للشركة أن تحافظ على برنامج الإنتاج الأمثل الحالي فيما لو حافظت على النسبة $\frac{c_1}{c_2}$ بين أرباح مبيعات الصنفين بحيث لا تقل عن $\frac{5}{4}$. ولتوضيح ذلك ، هب الآن أنه لم يكن بإمكان الشركة المحافظة على $\frac{c_1}{c_2} \ge \frac{5}{4}$ حيث تراجعت أرباح الصنف I

إلى 90 ريال في حين تراجعت أرباح الصنف II إلى 80 ريال نتيجة لعدة عوامل لعبت في السوق عندئذ تصبح دالة الهدف الجديدة بعد هذا التراجع هي :

$$Z_1 = 90x_1 + 80x_2 \qquad (١,٢٥)$$

عندئذ $\frac{c_1}{c_2} = \frac{9}{8} > \frac{5}{4}$ وعندئذ يصبح الحل الأمثل متمثلاً في النقطة $C\left(x_1^* = 1086.9565, x_2^* = 3736.413\right)$ (انظر الشكل رقم ١,٤) وقيمته $Z_1^* = 396739.13$.

وفي هذا الحال نلاحظ أن موارد القسم (4) قد انقلبت من موارد غير نادرة إلى موارد نادرة في حين أن العكس قد حدث بالنسبة لموارد القسم (1).



الشكل رقم (١,٤). فضاء الحل الممكن والحل الأمثل مثال (١,١) بعد أن تغيرّت دالة الهدف إلى تلك المعطاة بالعلاقة (١,٢٥).

ملاحظة (١,١)

في الحقيقة إن قيمة الوحدة الزائدة لأي مورد هي نفسها قيمة متغير المسألة الثنوية والمقابل لقيد ذلك المورد. ويساعدنا هذا الأمر في معرفة الحل الأمثل للمسألة الثنوية على النحو التالي :

لما كان النموذج (١,١٨) هو النموذج الثنوي للنموذج الأولي في المثال (١,١) حيث إن كل قيد في النموذج الأولي يقابله متغير في النموذج الثنوي (y_1 يقابل القيد(١,٢) وy_2 يقابل القيد (١,٣) و y_3 يقابل القيد (١,٤) و y_4 يقابل القيد (١,٥)). وحسبما رأيناه سابقاً فإن قيمة الوحدة الإضافية (وهي نفسها سعر الظل) المتعلقة بهذه القيود هي 25/3 ، 0 ، 70 ، 0 على الترتيب، فإن هذه القيم تساوي القيم المثلى للمتغيرات الثنوية y_1 ، y_2 ، y_3 ، y_4 على الترتيب. وفي هذه الحالة تكون القيم المثلى لدالتي الهدف في المسألتين الأولية والثنوية متساويتان أي أن $Z^* = 575000 = W^*$ وذلك بموجب النظرية التي أطلقنا عليها اسم نظرية الثنوية.

(١,٥) طريقة السمبلكس
The Simplex Method

(١,٥,١) الصورة الطبيعية لبرامج التكبير الخطية

نقول عن برنامج تكبير خطي أنه مكتوب بالصورة الطبيعية إذا حقق الشروط التالية :

١ – الهدف تكبير.

٢– جميع القيود على الشكل ≤ (أصغر من أو يساوي).

٣– جميع الأطراف اليمنى للقيود موجبة.

٤– جميع المتغيرات غير سالبة.

وللتوضيح لاحظ أن نموذج المثال(١,١) مكتوب بالصورة الطبيعية.

(١,٥,٢) الصورة القياسية للبرامج الخطية

قبل حل أي برنامج خطي بطريقة السمبلكس لابد لنا من كتابته أولاً بصورة تسمى الصورة القياسية ويتم ذلك كما يلي :

(أ) نجعل جميع الأطراف اليمنى للقيود موجبة وذلك بضرب طرفيها بالعدد ١- للسالب منها.

(ب) نحول جميع القيود التي من الشكل ≤ (أصغر من أو يساوي) إلى مساواة بإضافة متغير موجب إلى طرفها الأيسر. مثلاً القيد $2x_1 + 5x_2 \le 12$ يتحول إلى $2x_1 + 5x_2 + S_1 = 12$ حيث $S_1 \ge 0$ ويسمى S_1 متغير راكدٍ Slack Variable.

ويمكن تبرير هذه التسمية كما يلي: لو نظرنا إلى الطرف الأيمن من القيد على أنه المتوافر من مورد معين فإن S_1 هي كمية غير مستهلكة(راكدة) من هذا المورد.

(ج) جميع القيود التي من الشكل ≥(أكبر من أو يساوي) نحولها إلى مساواة بطرح متغير موجب ، مثلاً القيد$3x_1 + 4x_2 - x_3 \ge 7$ يتحول إلى $3x_1 + 4x_2 - x_3 - S_2 = 7$ حيث $S_2 \ge 0$ ويسمى S_2 "متغير فائض Surplus Variable " ويمكن تبرير هذه التسمية بأنه لو اعتبرنا الطرف الأيمن كمية يجب توافرها من مورد معين لكان S_2 كمية زائدة من هذا المورد.

(د) نحول جميع المتغيرات غير الموجبة أو غير المقيدة بإشارة إلى متغيرات غير سالبة على النحو التالي: (١) إذا كان $x \le 0$ فإننا نستبدله بـ $x' = -x$ عندئذ $x' \ge 0$ (٢) إذا كان x غير مفيد بإشارة فإننا نستبدله بـ$x= x^+ - x^-$ حيث$x^+ \ge 0$ و$x^- \ge 0$

(هـ) نبقي الهدف كما هو تكبيراً كان أم تصغيراً.

(١,٥,٣) خوارزمية طريقة السمبلكس لبرامج التكبير الخطية الطبيعية

The Simplex Method Algorithm for Normal Linear Programs

بعد تحويل البرنامج الخطي المكتوب بالصورة الطبيعية لبرامج التكبير إلى الصورة القياسية وذلك بإضافة ما سبق وأسميناه بالمتغيرات الراكدة (slack variables) فإن "خوارزمية طريقة السمبلكس" لهذا النوع من البرامج تتلخص بالخطوات التالية :

خطوة ابتدائية. نوجد حل ابتدائي ممكن من خلال إعطاء n (عدد متغيرات القرار في المسألة الأصلية) من المتغيرات، القيمة صفر (ونسميها "متغيرات غير أساسية Non Basic Variables")، وحل جملة المعادلات الناتجة ونسمي متغيرات الحل الناتجة (وهي المتغيرات الراكدة) باسم "متغيرات أساسية Basic Variables".

خطوة (١). نختار من الحل الذي وصلنا إليه متغير غير أساسي (صفري) كمتغير داخل على أن يتم اختيار المتغير غير الأساسي الذي يعطي *أفضل تحسين في دالة الهدف* فإذا لم نجد مثل هذا المتغير كان الحل الذي وصلنا إليه حلاً أمثلياً و إلا فإننا ننتقل للخطوة التالية.

خطوة (٢). نختار المتغير الخارج من بين المتغيرات الأساسية في الحل الذي وصلنا إليه ونجعله متغير غير أساسي في الحل التالي ونجعل ذلك متزامناً مع الوقت الذي جعلنا فيه المتغير الداخل متغيراً أساسياً.

خطوة (٣). نحدد الحل الأساسي الممكن التالي (الجديد) بعد جعل المتغير الداخل كمتغير أساسي وجعل المتغير الخارج كمتغير غير أساسي في آن واحد.

خطوة (٤). نكرر العمل اعتباراً من الخطوة (١) حتى نصل إلى الحل الأمثل بالطريقة الموضحة في هذه الخطوة.

وتعتمد هذه الخوارزمية على الحلول الجبرية للمعادلات التي نصل إليها بعد كتابة البرنامج الخطي قيد الدراسة بالشكل القياسي. ولكي تتم عملية فحص دالة الهدف بآن واحد مع القيود فإنه يتم عادة كتابة هذا البرنامج الخطي بطريقة مكافئة على نحو تظهر فيه دالة الهدف كما لو أنها أحد القيود. فمثلاً لحل المثال (١,١) السابق بطريقة السمبلكس نكتب هذا البرنامج بالشكل القياسي وهي على النحو التالي:

كبر الدالة Z وفقاً للقيود:

$$Z - 200x_1 - 140x_2 + 0.S_1 + 0.S_2 + 0.S_3 + 0.S_4 = 0 \qquad (١,٢٦)$$

$$3x_1 + 0.x_2 + S_1 + 0.S_2 + 0.S_3 + 0.S_4 = 6000$$

$$0.x_1 + 2.9x_2 + 0.S_1 + S_2 + 0.S_3 + 0.S_4 = 8000$$

$$2.5x_1 + 2x_2 + 0.S_1 + 0.S_2 + S_3 + 0.S_4 = 7500$$

$$1.3x_1 + 1.5x_2 + 0.S_1 + 0.S_2 + 0.S_3 + S_4 = 5000$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0$$

لاحظ أننا كتبنا دالة الهدف Z كما لو أنه أحد القيود. وسنطبق ذلك دوماً عند الحل بطريقة السمبلكس. سنوضح الآن تفاصيل العمل في خطوات خوارزمية طريقة السمبلكس من خلال حل تفصيلي للبرنامج (١,٢٦) الذي يتصف بأن كل قيد من قيوده (عدا قيود اللاسلبية وقيد دالة الهدف) يملك متغيراً راكداً (لاحظ عدم إدراج متغيرات زائفة أو فائضة ؛ لأن جميع القيود هي من النوع ≥)، وسنعود إلى توضيح التعديلات اللازمة على هذه الطريقة عندما يحتوي البرنامج الخطي على متغيرات أخرى غير المتغيرات الراكدة كالمتغيرات الفائضة أو كالمتغيرات الزائفة أو الاصطناعية . نبدأ أولاً بإيجاد حل ابتدائي ممكن من خلال إعطاء متغيرين القيمة صفر وحل جملة المعادلات الناتجة . وفي برنامج خطي كالبرنامج (١,٢٦) (أي البرامج التي نضيف لكل قيد من قيودها – عدا قيود اللاسلبية – متغيراً راكداً) فإننا نختار نقطة الأصل O كحل

ابتدائي. ونحصل على نقطة الأصل بإعطاء جميع متغيرات القرار الأصلية(وهي متغيرات النموذج الأصلي قبل كتابته بالشكل القياسي) في النموذج، القيمة صفر. وفي مثالنا إذا جعلنا $x_1 = x_2 = 0$ لحصلنا على الحل الابتدائي التالي : $S_2 = 8000, S_3 = 7500,$ $S_4 = 5000$ ، $S_1 = 6000$.

وكما هو ملاحظ فإن هذا الحل هو حل أساسي ممكن ويتمثل بالنقطة الركنية O كما سبق وأشرنا. وقد جرت العادة على تلخيص النماذج المتتابعة اعتباراً من النموذج القياسي الذي نبدأ به [النموذج (١،٢٦) في المثال] على شكل جداول نكتب فيها معاملات المتغيرات بدلاً من كتابة المعادلات بالكامل. ونُظهر فيها المتغيرات الأساسية والحل الأساسي الممكن الناتج بالإضافة إلى المتغير الداخل والمتغير الخارج في كل جدول. وسنطلق على أول جدول نبدأ به اسم الجدول الابتدائي. فالجدول الابتدائي في مثالنا هو الجدول رقم (١،٢) التالي :

الجدول رقم (١،٢). جدول الحل الابتدائي في مثال (١،١) [التكرار (0)].

متغيرات أساسية	متغير داخل ↓	أمثال المتغيرات					الأطراف اليمنى (الحل)	
	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4		
Z	− 200	− 140	0	0	0	0	0	عمود النسبة
متغير خارج ← S_1	3	0	1	0	0	0	6000	= 2000 6000/3
S_2	0	2.9	0	1	0	0	8000	
S_3	2.5	2	0	0	1	0	7500	= 3000 7500/2.5
S_4	1.3	1.5	0	0	0	1	5000	= 3846 5000/1.3

ونميز المتغيرات الأساسية في الحل الحالي (الجدول رقم ٢,١) بأنها تلك المتغيرات المكتوبة في العمود المعنون " متغيرات أساسية " والتي تقع تحت السطر الذي يبدأ بـ Z (نذكر بأن Z ليست من المتغيرات الأصلية) أي أنها S_1 , S_2 , S_3 , S_4 . وتظهر قيم هذه المتغيرات في العمود المعنون " الأطراف اليمنى " كما تظهر قيمة دالة الهدف في ذلك العمود مقابل السطر الذي يبدأ بـ Z (وهي صفر في الحل الحالي).

وكل متغير لا يظهر في العمود المعنون "متغيرات أساسية" يعتبر "متغيراً غير أساسي" في الحل الحالي. ففي مثالنا يعتبر كل من x_1 , x_2 متغير غير أساسي في الحل الحالي.

والسؤال الآن. كيف نحكم فيما إذا كان الحل الحالي (وهو حل أساسي ممكن) هو حل أمثل أم لا ؟

للإجابة ، نُذّكر بأن الحل الأمثل هو حل أساسي ممكن يعطي أفضل قيمة لدالة الهدف. لذا يمكننا القول إن الحل الأمثل هو الحل الأساسي الممكن الحالي الذي لا يمكن أن نحسن بعده دالة الهدف. ولما كانت دالة الهدف الأصلية (قبل تحويلها إلى أحد القيود) هي [$Z = 200x_1 + 140x_2$] والتي كتبت جدولياً بالشكل [$Z-200x_1 - 140x_2 = 0$] فإن ظهور المعاملات السالبة 200 – و 140 – لـ x_1 و x_2 (على الترتيب) في جدول الحل الحالي يعني أن معاملات x_1 و x_2 في دالة الهدف الأصلية هي موجبة وبالتالي فإن أي زيادة (بالنسبة لبرامج التكبير) في x_1 أو x_2 سيزيد من دالة الهدف. وعندما ننتقل من جدول يمثل حلاً أساسياً ممكناً إلى جدول آخر يمثل حلاً أساسياً ممكناً تالياً للحل(مجاور من الناحية البيانية) للسابق فإن معاملات x_1 ,x_2 في السطر الذي يمثل دالة الهدف Z ستتغير بشكل عام. وعندما نصل إلى الجدول الذي تظهر فيه معاملات x_1 و x_2 كأعداد موجبة فإن ذلك يعني ظهور هذه الأمثال كأمثال سالبة في دالة الهدف الأصلية ، وبالتالي فإن أي زيادة (بالنسبة لبرامج التكبير) في x_1 أو في x_2 لا يعطي أي زيادة في دالة الهدف ونكون عندها قد وصلنا إلى الحل الأمثل. ونخلص مما سبق إلى النتيجة التالية :

نتيجة (١ ,١)

إذا كان البرنامج الخطي هو برنامج تكبير (تصغير) فإن جدول الحل الحالي يعطي الحل الأمثل لذلك البرنامج إذا كانت جميع معاملات المتغيرات غير الأساسية في سطر دالة الهدف لهذا الجدول غير سالبة (غير موجبة).

ويطلق على النتيجة الأخيرة عادة اسم " شرط الأمثلية لطريقة السمبلكس Optimality Condition of the Simplex method". وبموجب شرط الأمثلية هذا فإن الحل الحالي والمعطى بالجدول رقم (١,٢) ليس أمثلياً ، لذا نقوم بتطبيق الخطوات التالية من خوارزمية طريقة السمبلكس وهي اختيار "متغير داخل Entering Variable " و"متغير خارج Outgoing Variable" من الحل الحالي ومن ثم نحدد الحل الأساسي الممكن الجديد [الخطوات (١)، (٢) و(٣)] .وللوصول إلى الحل الأمثل بسرعة فإنه من المنطقي أن ندخل المتغير الذي سيعطي أفضل تحسين في دالة الهدف.

وبذلك تكون لدينا القاعدة التالية :

قاعدة (٢ ,١)

المتغير الداخل في برنامج تكبير (تصغير) خطي هو المتغير غير الأساسي الذي يملك أكبر معاملات *سالبة بالقيمة المطلقة (اقل معاملات موجبة) في سطر دالة الهدف للحل الحالي.*

كذلك فإنه من المنطقي أن يكون المتغير الخارج من الحل الأساسي الممكن الحالي هو ذلك المتغير الأساسي الذي يصل أولاً إلى القيمة صفر قبل أي متغير آخر وذلك عندما يصل المتغير الداخل (غير أساسي) إلى أكبر قيمة له عند الحل الأساسي الممكن التالي للحل الحالي . فلدينا في هذا الصدد القاعدة التالية :

قاعدة (٣ ,١)

المتغير الخارج من الحل الأساسي الممكن الحالي هو ذلك المتغير الأساسي الذي تقابله " أقل نسبة غير سالبة " والتي نحصل عليها من قسمة قيم المتغيرات الأساسية على المعاملات " الموجبة " المقابلة من عمود المتغير الداخل.

وكلمة "موجبة" في هذه القاعدة تعني أننا لا نعتبر المتغيرات الأساسية التي تقابلها معاملات سالبة للمتغير الداخل. وكذلك فإننا لا نعتبر المتغيرات الأساسية التي يقابلها معاملات صفرية للمتغير الداخل. ولإظهار المتغير الخارج فقد درجة العادة على كتابة النسبة المشار إليها سابقاً في عمود خاص معنون بكلمة "النسبة" يتم بعدها معرفة قيم المتغيرات الأساسية ومعرفة المتغير الداخل. ولذلك فإننا نعلّم عمود المتغير الداخل بعد معرفته ثم نملأ عمود النسبة لنحدّد بعدها المتغير الخارج وفقاً للقاعدة (١,٢) ثم نعلّم بعدها سطر المتغير الخارج. ويطلق عادة على عمود المتغير الداخل اسم "العمود المحوري Pivot Column " كما يطلق على سطر المتغير الخارج اسم "السطر المحوري Pivot Row "وعلى الرقم الواقع في تقاطعهما (العنصر3 في جدول الحل الحالي) اسم" العنصر المحوري Pivot Element ". ولعل صفة " محوري " هنا ناتجة من أن السطر والعمود والعنصر التي أعطينا لكل منها هذه الصفة هي بالفعل محور الحسابات التي توصل إلى الحل الأساسي الممكن التالي للحل الحالي. وتتم عملية الوصول إلى هذا الحل ببناء جملة معادلات جديدة (جدول جديد) مكافئة لجملة المعادلات الحالية (الجدول الحالي) من خلال إجراء بعض العمليات الحسابية على الجدول الحالي. وبعد إحلال المتغير الداخل مكان المتغير الخارج فإن هذه العمليات تهدف إلى أمرين :

أولهما : جعل أمثال المتغير الأساسي الجديد (x_1 في المثال) مساوية 1 ويمكن الوصول إلى هذا الأمر بقسمة عناصر السطر المحوري الحالي(سطر S_1 في المثال) على العنصر المحوري الحالي ويطلق على السطر الناتج اسم " السطر المحوري الجديد New Pivot Row " وبذلك فإن :

$$\text{العنصر من السطر المحوري الجديد} = \frac{\text{العنصر المقابل من السطر المحوري الحالي}}{\text{العنصر المحوري}} \qquad (١,٢٧)$$

ويوضح الجدول رقم(١,٣) السطر المحوري الجديد x_1 بعد أن أحللنا المتغير الداخل x_1 مكان المتغير الخارج S_1 وبعد أن أجرينا العملية على السطر المحوري الحالي S_1 . ولا يهمنا في هذه المرحلة ما هو موجود في عمود النسبة لأننا لم نصل بعد إلى كامل الجدول الذي يمثل جملة معادلات مكافئة للجملة الحالية .

ثانيهما : جعل معاملات المتغير الأساسي الجديد (x_1 في المثال) في بقية الأسطر (أي جميع السطور عدا السطر المحوري الجديد) مساوية للصفر ويمكن الوصول لذلك باستخدام الصيغة التالية : العنصر من السطر الجديد =

[العنصر المقابل من السطر القديم] – [العنصر المقابل من العمود المحوري الحالي]× [العنصر المقابل من السطر المحوري الجديد] (١,٢٨)

الجدول رقم (١,٣). السطر المحوري الجديد

الأطراف اليمنى (الحل)		أمثال المتغيرات							متغيرات أساسية
		S_4	S_3	S_2	S_1	X_2	X_1	Z	
									Z
السطر المحوري الجديد ←	2000	0	0	0	1/ 3	0	1	0	x_1
									S_2
									S_3
									S_4

وكذلك تتم حسابات بقية الأسطر الجديدة بطرق مماثلة. فبأخذ السطر الثالث (سطر S_2) من الحل الحالي (الجدول رقم ١,٣) نجد أن حساب السطر الثالث الجديد يتم كما يلي :

سطر S_2 القديم الحالي $[0 \quad 2.9 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 8000]$

– (العنصر المقابل من العمود المحوري الحالي) × (السطر المحوري الجديد) $0 \times [1 \quad 0 \quad 1/3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2000] -$

سطر S_2 الجديد $= [0 \quad 2.9 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 8000]$

كذلك يكون لدينا (الحسابات المتعلقة ببقية الأسطر)

سطر Z القديم (الحالي) $[-200 \quad -140 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

– (العنصر المقابل من العمود المحوري الحالي) × (السطر المحوري الجديد) $-(2000) \quad [1 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2000]$

سطر Z الجديد $= [0 \quad -140 \quad \frac{200}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 40000]$

سطر S_3 القديم (الحالي) $[2.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 7500]$

(العنصر المقابل من العمود المحوري الحالي) × (السطر المحوري الجديد) $-(2.5) \quad [1 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2000]$

سطر S_3 الجديد $= [0 \quad 2 \quad \frac{-2.5}{3} \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 2500]$

سطر S_4 القديم (الحالي) $[1.3 \quad 1.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 5000]$

(العنصر المقابل من العمود المحوري الحالي) × (السطر المحوري الجديد) $-(1.3) \quad [1 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2000]$

سطر S_4 الجديد $= [0 \quad 1.5 \quad \frac{-1.3}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2400]$

ونحصل بذلك على النتائج التالية (الجدول رقم ١,٤).

ومما تجد ملاحظته في هذا الجدول أن معاملات المتغير الداخل x_1 في عمود x_2 أصبحت جميعها أصفاراً ما عدا تلك المقابلة للسطر الذي يبدأ بـ x_1 حيث أصبحت 1 وهو ما كنا نرغب بتحقيقه. والجدول رقم (١,٤) يمثل حلاً أساسياً ممكناً مجاوراً للحل الابتدائي السابق المتمثل بالنقطة O(0.0) والمتغيرات الأساسية في هذا الحل هي S_4 ، S_3 ، x_1 ، S_2 وقيمتها 2400 ، 2500 ، 8000 و 2000 على الترتيب. أما المتغيرات غير الأساسية وهي x_2 وS_1 فقيمها أصفاراً.

نلاحظ أيضاً أن قيمة Z قد ارتفعت من الصفر إلى 400000.

ونلاحظ من الجدول رقم (١,٤) أن المعاملات المقابلة لـ x_2 سالبة وهذا يعني أنه مازال بإمكاننا تحسين الحل الحالي المتمثل بهذا الجدول، ويعني كذلك أن المتغير الداخل هو x_2. نقوم لذلك بتعليم عمود x_2 واعتباره العمود المحوري. نحدد الآن المتغير الخارج وفقاً للقاعدة (١,٢) فنجد أنه S_3 ؛ لأنه يقابل أقل نسبة موجبة.

الجدول رقم (١,٤). حل أساسي ممكن مجاور للحل الابتدائي مثال (١,١) [التكرار(١)]

متغيرات أساسية	أمثال المتغيرات (متغير داخل) ↓							الأطراف اليمنى (الحل)	
	Z	**X_1**	**X_2**	**S_2**	**S_1**	**S_3**	**S_4**		
Z	1	0	-140	3/200	0	0	0	400000	عمود النسبة
X_1	0	1	0	1/3	0	0	0	2000	
S_1	0	0	2.9	0	1	0	0	8000	$\frac{5000}{2.9} = 2753.6$
S_3 → (متغير خارج)	0	0	2	-2.5/3	0	1	0	2500	$\frac{2500}{2} = 1250$
S_4	0	0	1.5	-1.3/3	0	0	1	2400	$\frac{2400}{1.5} = 1600$

نعلّم بعدها سطر S_3 فيكون العنصر المحوري هو 2 . وقبل الانتقال إلى الحل التالي يجب أن نلاحظ أن قيمة Z قد ارتفعت من 400000 إلى 575000 .ونحصل بذلك على الجدول (٥,١) التالي . وبما أنه لا يوجد أمثال سالبة مقابل المتغيرات غير الأساسية في سطر دالة الهدف Z فوفقاً للنتيجة (١,١) فإن الجدول رقم (١,٥) يمثل حلاً أمثلاً قيم متغيراته الأساسية هي :

$$S_4 = 525 \text{ و } S_2 = 4375 \text{ ، } x_2 = 1250 \text{ ، } x_1 = 2000$$

ومتغيراته غير الأساسية هي : $S_3 = 0$ و $S_1 = 0$.

كما هو ملاحظ من الجداول (١,٣) ، (١,٤) و (١,٥) والتي تمثل الحلول الممكنة المتتالية التي قادت إلى الحل الأمثل فإن *معاملات أي من المتغيرات الأساسية في سطر دالة الهدف Z لهذه الجداول تساوي الصفر* . وهذا الأمر صحيح دوماً ؛ لأن المتغيرات الأساسية في الحل الابتدائي هي المتغيرات الراكدة وعند خروج أحد هذه المتغيرات ليصبح غير أساسي ودخول متغير غير أساسي مكانه ليصبح أساسيا فإن معامل المتغير الداخل ستصبح صفراً بعد أن أصبح هذا الأخير أساسياً وهكذا يتكرر الأمر في الجداول اللاحقة . *وأخيرا تجدر الإشارة إلى أن خوارزمية طريقة السمبلكس المشروحة في الفقرة(١,٥,٣) السابقة تصلح أيضا للبرامج الخطية التي يكون فيها الهدف تصغير شريطة تحقق الشروط من(٢) إلى(٤) الواردة في(١,٥,١) السابقة.*

الجدول رقم (١,٥). جدول الحل الأمثل مثال (١,١) [التكرار (٢)]

متغيرات أساسية	أمثال المتغيرات							الأطراف اليمنى (الحل)	
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4		
Z	1	0	0	3/25	0	70	0	57000	عمود النسبة
X_1	0	1	0	1/3	0	0	0	2000	
S_2	0	0	0	6/7.25	1	2/-2.9	0	4375	
X_2	0	0	1	6/-2.5	0	1/2	0	1250	
S_4	0	0	0	6/1.15	0	2/-1.5	1	525	

(١,٥,٤) ملاءمة طريقة السمبلكس لجميع البرامج الخطية (طريقة المرحلتين)

تعرفنا في الفقرة الجزئية السابقة على كيفية تطبيق خوارزمية طريقة السمبلكس لحل برنامج تكبير (تصغير) خطي جميع قيوده (عدا قيود اللاسلبية) من النوع ≤ وجميع الأطراف اليمنى لهذه القيود موجبة . وللحل بهذه الطريقة نبدأ أولاً بكتابة البرنامج الخطي بصورته القياسية ونحصل على الحل الابتدائي (وهو حل أساسي ممكن لهذا النوع من البرامج) بعدئذ بإعطاء قيم متغيرات القرار الأصلية في البرنامج القيمة صفر حيث تمثل قيم المتغيرات الراكدة الناتجة عندئذ قيمة هذا الحل الابتدائي. ولكننا لا نحصل على مثل هذا الحل الابتدائي عندما لا يتصف برنامج التكبير أو التصغير الخطي بالصفة المشار إليها آنفاً . أي عندما تكون جميع الأطراف اليمنى للقيود موجبة مع وجود قيود على شكل مساواة و/أو مع وجود قيود من النوع ≥ . ولتوضيح ذلك نسوق المثال التالي :

مثال (١,٤)

تعاقدت شركة للصناعات الكيميائية على إنتاج 1000 كيلوغرام (بالضبط) في الأسبوع من مادة كيميائية C. يتم إنتاج المادة C بمزج ثلاث مكونات كيميائية C_3 ، C_2 ، C_1 تكلفة الكيلوغرام لها هي 7 ، 6 ، 5 ريالاً على الترتيب وتخضع صناعة المادة C للشروط التالية :

١ – لا يمكن استخدام أكثر من 300 كيلوغرام من المادة C_1 في المزيج.

٢– لا يمكن استخدام أقل من 150 كيلوغرام من المادة C_2 في المزيج.

٣– لا يمكن استخدام أقل من 200 كيلوغرام من المادة C_3 في المزيج.

ترغب الشركة في جعل تكلفة المزيج (تكلفة الإنتاج الأسبوعية) أقل ما يمكن. ما هي الطريقة المثلى لمزج المكونات C_3 ، C_2 ، C_1 والتي تحقق أهداف الشركة وما هي أقل تكلفة إنتاج أسبوعية ممكنة عندئذ؟.

الحل

إذا رمزنا بـ x_3 ، x_2 ، x_1 لعدد الوحدات (بالكيلوغرام) في الأسبوع والمستخدمة في المزيج من المكونات C_3 ، C_2 ، C_1 على الترتيب ورمزنا بـ Z لتكلفة الإنتاج الأسبوعية فمن الواضح عندئذ أن النموذج الرياضي للمسألة هو على النحو التالي :

صغر الدالة :

$$Z = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 \qquad (١,٢٩)$$

وفقاً للقيود :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1000$$

$$x_1 \le 300$$

$$x_2 \ge 150$$

$$x_3 \ge 200$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

وبإضافة المتغيرات الراكدة والفائضة لقيود هذا البرنامج نحصل على البرنامج التالي :

صغر الدالة :

$$Z = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 \quad (١,٣٠)$$

وفقاً للقيود :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1000$$

$$x_1 \qquad + S_1 = 300$$

$$x_2 \qquad - S_2 = 150$$

$$x_3 \qquad - S_3 = 200$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

وكما هو ملاحظ فإن القيود في النموذج(١,٣٠) عبارة عن أربع معادلات بستة متغيرات(غير معلومة). وإذا أردنا أن نبدأ بنقطة الأصل كحل ابتدائي كما هو الحال في المثال السابق فعلينا أن نعطي كل من متغيرات القرار الأصلية في المثال وهي x_3 ، x_2 ، x_1 القيمة صفر في هذه القيود وعندها سيؤدي القيد الأول إلى النتيجة $1000 = 0$ وهي تناقض. وكما سبق وأوضحنا فإن أي حل لجملة المعادلات الأربع السابقة يجب أن يُعطى بدلالة أربعة من المتغيرات الستة S_3 ، S_2 ، S_1 ؛ x_3 ، x_2 ، x_1 لا بثلاثة ويعني ذلك أننا لن نحصل على نقطة الأصل كحل ابتدائي. هب الآن أننا سنقبل بغير نقطة الأصل كحل ابتدائي ولنعطي إذاً أي اثنين من المتغيرات الستة القيمة صفر. مثلاً $x_1 = x_2 = 0$ فنحصل على الحل التالي :

$S_1 = 300$ و $S_2 = -150$ ، $x_3 = 1000$ ، $S_3 = 800$

وهو حل أساسي غير ممكن. ويمكننا أن نتحقق أن إعطاء أي زوج من المتغيرات الستة السابقة القيمة صفر قد يقود إلى حل أساسي غير ممكن أو إلى تناقض. فمثلاً $x_1 = S_1 = 0$ لا يعطي حلاً أساسياً ممكناً (هنا علينا أن نحل عندئذ $\binom{6}{2} = 15$ جملة من المعادلات كل منها بأربعة متغيرات). هب من جهة ثانية ، أن إعطاء بعض الأزواج الخمس عشرة المشار إليها آنفاً القيمة صفر يؤدي إلى حل ابتدائي ممكن فعلينا إذاً أن نجرب جميع هذه الأزواج حتى نحصل على مثل هذا الحل. ونظراً لأن الحل بخوارزمية طريقة السمبلكس يتم بوساطة الكمبيوتر فإن طريقة تجريب جميع الأزواج هذه لا تتناسب مع الكمبيوتر ؛ لأنها تضاعف كثيراً من حجم الحسابات اللازمة للوصول إلى الحل الأمثل وخاصة عندما يكون عدد القيود كبيراً نسبياً. وما يهمنا في الحقيقة هو إضافة بعض المتغيرات غير السالبة إلى الأطراف اليسرى لبعض أو كل القيود والتي من شأنها أن توصل إلى حل ابتدائي(أساسي) ممكن. وبعبارة أخرى فإننا نأمل من مثل هذه الإضافة أن تلعب المتغيرات المضافة دور المتغيرات الراكدة التي نضيفها عادة للقيود من النوع $\le$. ولذلك فإننا نضيف متغيرات غير سالبة للقيود التي كانت أصلاً على شكل مساواة أو على شكل متباينة من النوع $\ge$ فقط . فإذا أجرينا مثل هذه الإضافة على قيود النموذج (١,٣٠) عدا الثاني منها لأصبح برنامجنا بشكله القياسي الجديد كما يلي :

صغر الدالة :

$$Z = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 \qquad (١,٣١)$$

وفقاً للقيود:

$$\begin{array}{lllllllll}
x_1+x_2+x_3 & & & & + a_1 & & & = & 1000 \\
x_1 & + S_1 & & & & & & = & 300 \\
x_2 & & - S_2 & & & + a_2 & & = & 150 \\
x_3 & & & - S_3 & & & + a_3 & = & 200
\end{array}$$

$$x_1 , x_2 , x_3 , S_1 , S_2 , S_3 , a_1 , a_2 , a_3 \geq 0$$

ونطلق على مثل النموذج (١,٣١) "اسم المسألة المعدلة Modified Problem " ، وعلى الشكل الذي كتب به هذا النموذج اسم"الشكل القياسي Standard Form ".

وخلافاً لما رأيناه بالنسبة للمتغيرات الراكدة أو الفائضة من أنها تمثل موارد غير مستهلكة أو موارد فائضة فإنه لا يوجد للمتغيرات a_1 ، a_2 و a_3 أي معنى فيزيائي مماثل وتسمى لذلك "متغيرات زائفة أو اصطناعية Artificial Variables ". وبالطبع فإن إضافة مثل هذه المتغيرات سيوسع من فضاء الحل الممكن للمسألة الأصلية وبالتالي فإن أي حل ممكن للمسألة تحت قيود النموذج (١,٣١) هو أيضاً حل ممكن لها تحت قيود النموذج (١,٣٠) فيما لو جعلنا جميع قيم المتغيرات الزائفة في هذا الحل أصفارا. وعندئذ يكون الحل الأمثل للمسألة تحت قيود النموذج(١,٣١) أيضاً حل أمثل للمسألة تحت قيود النموذج (١,٣٠)، ومع ذلك فإن الحل الأمثل للمسألة تحت قيود النموذج (١,٣١) قد لا يكون حلاً ممكناً للمسألة تحت قيود النموذج (١,٣٠) إذا لم نضمن وصول جميع المتغيرات الزائفة إلى الصفر في هذا الحل والذي عادة ما يتم من خلال إعطاء هذه المتغيرات معاملات كبيرة جدا تمنع وصولها إلى الحل الأمثل. وقد اقترحت لذلك طريقة أطلق عليها " طريقة المرحلتين Two Phase Method " وتقوم فلسفة هذه الأخيرة على ما يلي:

بما أن معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف تصبح مهملة بالمقارنة مع معاملات المتغيرات الزائفة الكبيرة. ولما كنا نهدف إلى جعل معاملات كل من المتغيرات الزائفة مساوية للصفر في الحل الأمثل النهائي لئلاّ يكون لهذه المتغيرات أي أثر في ذلك

الحل فإنه يمكننا أن نبدأ أولاً بالبحث ضمن فضاء الحل "للمسألة المعدلة" عن قيم المتغيرات في هذه المسألة والتي تجعل مجموع المتغيرات الزائفة أصغر ما يمكن (أي المجموع يساوي الصفر) وذلك باتباع طريقة السمبلكس ونطلق على هذا العمل اسم "المرحلة الأولى (Phase(1) ". ويبدأ العمل في "المرحلة الثانية (Phase(2) " باعتبار الحل الذي توصلنا إليه في المرحلة الأولى (الحل الذي يجعل مجموع المتغيرات الزائفة أصغر ما يمكن) كحل ابتدائي ننطلق منه في المرحلة الثانية لإيجاد الحل الأمثل "للمسألة الأصلية" وباتباع طريقة السمبلكس أيضاً. ونؤكد ثانية أن قيم جميع المتغيرات الزائفة في الحل الأمثل للمرحلة الأولى(الحل الابتدائي للمرحلة الثانية) يجب أن تكون مساوية للصفر بالضرورة لكي يكون هذا الحل حلاً ممكناً للمسألة الأصلية ويمكننا بالتالي أن ننطلق منه في المرحلة الثانية. وسنوضح فيما يلي خطوات الحل بهذه الطريقة من خلال حل مثال (١,٤) السابق الذكر بطريقة المرحلتين المشار إليها سابقاً.

حل مثال (١,٤) بطريقة المرحلتين

المرحلة الأولى

صغر الدالة :

$$A = a_1 + a_2 + a_3 \qquad (١,٣٢)$$

وفقاً للقيود :

$$\begin{array}{lllllllll}
x_1+x_2+x_3 & & & & + a_1 & & & = & 1000 \\
x_1 & + S_1 & & & & & & = & 300 \\
x_2 & & - S_2 & & & + a_2 & & = & 150 \\
x_3 & & & - S_3 & & & + a_3 & = & 200
\end{array}$$

$$x_1 , x_2 , x_3 , S_1 , S_2 , S_3 , a_1 , a_2 , a_3 \geq 0$$

للأسباب التي أوضحنا سابقاً بعدم السماح للمتغيرات الزائفة (كمتغيرات أساسية) أن تظهر بمعاملات موجبة في دالة الهدف A فإننا نقوم بجعل معاملات هذه المتغيرات أصفاراً على النحو التالي . نجعل دالة الهدف كأحد القيود ثم نجمعها للقيود التي تحوي متغيرات زائفة كما يلي :

$$\begin{array}{l}
A + 0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + 0.S_1 + 0.S_2 + 0.S_3 - a_1 - a_2 - a_3 = 0 \\
1\,(\,x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + a_1 \qquad = 1000\,) \\
1\,(\qquad x_2 \qquad\qquad - S_2 \qquad\qquad\qquad + a_2 \qquad = 150\,) \\
1\,(\qquad\quad x_3 \qquad\qquad\qquad - S_3 \qquad\qquad + a_3 = 200\,) \\
\hline
A + x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 0.S_1 - S_2 - S_3 + 0.a_1 + 0.a_2 + 0.a_3 = 1350
\end{array}$$

لاحظ أن المتغيرات الزائفة في السطر الأخير قد ظهرت بمعاملات صفرية وبذلك يصبح البرنامج (١,٣٢) مكافئاً للبرنامج التالي :

صغّر الدالة A :

$$A + x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 0.S_1 - S_2 - S_3 + 0.a_1 + 0.a_2 + 0.a_3 = 1350 \qquad (١,٣٣)$$

وفقاً للقيود :

$$\begin{array}{llllllllll}
x_1+x_2+x_3 & & & & + a_1 & & & = & 1000 \\
x_1 & + S_1 & & & & & & = & 300 \\
x_2 & & - S_2 & & & + a_2 & & = & 150 \\
x_3 & & & - S_3 & & & + a_3 & = & 200 \\
\multicolumn{9}{c}{x_1 , x_2 , x_3 , S_1 , S_2 , S_3 , a_1 , a_2 , a_3 \geq 0}
\end{array}$$

ويمكننا أن نتحقق من أن جداول الحلول المتتابعة والحل الأمثل للنموذج (١,٣٣) (أي للمرحلة الأولى) معطاة كما في الجدول رقم (١,٦) اللاحق.

الجدول رقم (١,٦). الحلول المتتابعة والحل الأمثل للمرحلة الأولى لمثال (١,٤).

التكرار	متغيرات أساسية	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	a_1	a_2	a_3	الحل	النسبة
0	A	1	2	2	0	−1	−1	0	0	0	1350	
	a_1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1000	1000
	S_1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	300	
	a_2	0	$\boxed{1}$	0	0	-1	0	0	1	0	150	150
	a_3	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	200	
1	A	0	0	2	0	0	-1	0	-2	0	1050	
	a_1	1	0	1	0	1	0	1	-1	0	850	850
	S_1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	300	
	x_2	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	150	
	a_3	0	0	$\boxed{1}$	0	0	-1	0	0	1	200	200
2	A	1	0	0	0	1	1	0	-2	-2	650	
	a_1	1	0	0	0	1	1	1	-1	-1	650	650
	S_1	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0	0	0	0	300	300
	x_2	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	150	
	x_3	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	200	
3	A	0	0	0	-1	1	1	0	-2	-2	350	
	a_1	0	0	0	-1	$\boxed{1}$	1	1	-1	-1	350	350
	x_1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	300	
	x_2	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	150	
	x_3	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	200	
4	A	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	
حل أمثل (ابتدائي) للمرحلة الأولى (الثانية)	S_2	0	0	0	-1	1	1	1	-1	-1	350	
	x_1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	300	
	x_2	0	1	0	-1	0	1	1	0	-1	500	
	x_3	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	200	

المرحلة الثانية

تبدأ المرحلة الثانية بأحد الحلول المثلى (في حال وجود أكثر من حل) التي وصلنا إليها في نهاية المرحلة الأولى واعتبار هذا الحل كحل ابتدائي للمرحلة الثانية، إلا أننا نسقط من اعتبارنا جميع المتغيرات الزائفة بعد أن أدت دورها في إيجاد حل ابتدائي للمرحلة الثانية وكانت جميع قيمها أصفاراً في هذا الحل.

فلو أخذنا الحل الأمثل للمرحلة الأولى (الجدول رقم ١,٦) كحل ابتدائي للمرحلة الثانية وأسقطنا منه المتغيرات الزائفة لكان علينا أن نحل المسألة التالية للمرحلة الثانية.

صغر الدالة :

$$Z = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 0.S_1 + 0.S_2 + 0.S_3 \qquad (١,٣٤)$$

وفقاً للقيود :

$$\begin{array}{ccccccl} & & & -S_1 & +S_2 & +S_3 & = 350 \\ x_1 & & & +S_1 & & & = 300 \\ & x_2 & & -S_1 & & +S_3 & = 500 \\ & & x_3 & & & -S_3 & = 200 \\ \multicolumn{7}{c}{x_1 , x_2 , x_3 , S_1 , S_2 , S_3 \geq 0} \end{array} \qquad (١,٣٥)$$

والدالة (١,٣٤) هي دالة الهدف نفسها للمسألة الأصلية(١,٣٠). أما القيود (١,٣٥) فهي مكافئة تماماً لقيود المسألة الأصلية (١,٣٠). ولو أعدنا كتابة المسألة الأخيرة بحيث تظهر دالة الهدف كما لو أنها أحد القيود لظهرت المتغيرات x_3 ، x_2 ، x_1 وهي أساسية في الجدول رقم (١,٦) بمعاملات سالبة مما يتعذر معه متابعة الحل بطريقة السمبلكس (نذكر بأن جميع معاملات المتغيرات الأساسية في سطر دالة الهدف لأي حل أساسي ممكن يجب أن تكون مساوية للصفر حسبما أوضحنا سابقاً. وبإتباع طريقة مماثلة لتلك التي أجريناها في (١,٣٣) على البرنامج الأخير نجد ما يلي :

$$
\begin{array}{lrrrrrrr}
Z & -5x_1 & -6x_2 & -7x_3 & +0.S_1 & +0.S_2 & +0.S_3 & = 0 \\
5\,(& x_1 & & & +S_1 & & & = 300) \\
6\,(& & x_2 & & -S_1 & & +S_3 & = 500) \\
7\,(& & & x_3 & & & -S_3 & = 200) \\
\hline
Z & +0.x_1 & +0.x_2 & +0.x_3 & -S_1 & +S_2 & -S_3 & = 5900
\end{array}
\qquad (١,٣٦)
$$

وبالتالي فإن البرنامج الأخير يصبح مكافئاً للبرنامج التالي.

صغر الدالة Z وفقاً للقيود

$$
\begin{array}{lrrrrrrr}
Z & +0.x_1 & +0.x_2 & +0.x_3 & -S_1 & +S_2 & -S_3 & = 5900 \\
 & & & & -S_1 & +S_2 & +S_3 & = 350 \\
 & x_1 & & & +S_1 & & & = 300 \\
 & & x_2 & & -S_1 & & +S_3 & = 500 \\
 & & & x_3 & & & -S_3 & = 200 \\
\end{array}
$$

$$x_1 , x_2 , x_3 , S_1 , S_2 , S_3 \geq 0$$

وجدول الحل الابتدائي لهذا البرنامج الأخير معطى كما في الجدول رقم (١,٧) التالي. ولما كانت معاملات المتغيرات غير الأساسية S_3 ، S_1 في هذا الحل غير موجبة فإن الجدول رقم (١,٧) يمثل أيضاً الحل الأمثل للمرحلة الثانية.

الجدول رقم (١,٧).حل ابتدائي وأمثل للمرحلة الثانية لمثال (١,٤)

التكرار	متغيرات أساسية	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	الحل	
0	Z	0	0	0	-1	0	-1	5900	النسبة
حل ابتدائي (أمثل) للمرحلة الثانية (الأولى)	S_2	0	0	0	-1	1	1	350	
	x_1	1	0	0	1	0	0	300	
	x_2	0	1	0	0	-1	1	500	
	x_3	0	0	1	0	0	0	200	

الآن سنسجل الملاحظات التالية :

ملاحظة (١,٢)

(أ) نلاحظ في التكرار الأخير من الجدول رقم(١,٦)(وهو الحل الأمثل للمرحلة الأولى) أن المتغيرات غير الأساسية S_3 ، S_1 تظهر في سطر دالة الهدف بمعاملات صفرية. ويعني ذلك أن دخول أي من المتغيرين S_3 ، S_1 في حل تالي لن يكون له أي أثر على قيمة A المثلى ونحصل بالتالي على حل أمثل مضاعف أو متعدد. وما رأيناه في هذا المثال صحيح بشكل عام ونلخصه بالقاعدة التالية.

قاعدة (١,٣)

أ) إذا كانت معاملات واحد أو أكثر من المتغيرات غير الأساسية في سطر دالة الهدف للحل الأمثل مساوية للصفر فيوجد عندئذ" حل أمثل متعدد Multiple Optimal- Solution"

ب) كذلك بالعودة إلى الجدول رقم (١,٦) التكرار (2) نلاحظ أن المتغيرات غير الأساسية S_3 ، S_1 و x_1 قد ظهرت في سطر دالة الهدف A بمعاملات (موجبة) متساوية ولذلك فإن أياًّ من هذه المتغيرات مرشح للدخول كمتغير أساسي في الحل التالي. ويشار لمثل هذه الحالة عادة إسم "حالة تعادل في المتغيرات الداخلة Tie for the entering variables".

ج) إذا تساوت قيمتين فأكثر من القيم الناتجة في عمود النسبة فهذا يعني أن جميع المتغيرات المقابلة لهذه القيم تكون مرشحة لأن تكون متغيرات خارجة، ويمكننا عندئذ اختيار أياً منها كمتغير خارج. ونطلق على مثل هذه الحالة إسم " حالة تعادل في المتغيرات الخارجة Tie for the outgoing variables".

ملاحظة (١,٣)

(أ) العلاقة بين الحل الأمثل للمسألة الثنوية والحل الأمثل للمسألة الأولية

وجدنا أن النموذج (١,١٨) هو النموذج الثنوي للنموذج الأولي في المثال (١,١)، وقد ذكرنا في ملاحظة (١,١) أن القيم المثلى لمتغيرات المسألة الثنوية تساوي ما

أسميناه سعر الظل للوحدة المضافة في القيود المقابلة لهذه المتغيرات. وكذلك فقد نصت نظرية الثنوية على أنه يمكن إيجاد الحل الأمثل لأي من المسألتين الأولية والثنوية من جدول الحل الأمثل للأخرى. وتصح في هذا الصدد القاعدة التالية:

قاعدة (١,٤)

إذا كانت قيود *المسألة الأولية(الثنوية) من الشكل* ≥ فإن *القيم المثلى لمتغيرات المسألة الثنوية(الأولية) هي القيم المقابلة للمتغيرات غير الأساسية في سطر دالة الهدف في جدول الحل الأمثل للمسألة الأولية(الثنوية).*

فلو عدنا مثلاً للجدول رقم (١,٥) والذي يمثل الحل الأمثل لمسألة المثال(١,١) وجميع قيودها من الشكل ≥ فقد وجدنا أن المسألة الثنوية لها هي تلك المعطاة بالنموذج (١,١٨) والقيم المثلى للمتغيرات y_1, y_2, y_3 وy_4 هي تلك الموجودة تحت المتغيرات غير الأساسية S_1, S_2, S_3 وS_4 في سطر دالة الهدف من جدول الحل الأمثل(١,٥) أي أنها تساوي 3/25 ، 0 ، 70 ، 0 على الترتيب وهو ما سبق ووجدناه (ملاحظة(١,١)). ولكن لو عدنا إلى النموذج (١,٣٠) لمثال(١,٣) وهو:

صغر الدالة:

$$Z = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3$$

وفقاً للقيود:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1000$$

$$x_1 \qquad \leq 300$$

$$x_2 \qquad \geq 150$$

$$x_3 \geq 200$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

فإن النموذج الثنوي له هو :

كبر الدالة :

$$W = 1000y_1 + 300y_2 + 150y_3 + 200y_4 \quad (١,٣٧)$$

وفقاً للقيود :

$$y_1 + y_2 + 0.y_3 + 0.y_4 \leq 5$$

$$y_1 + 0.\, y_2 + y_3 + 0.y_4 \leq 6$$

$$y_1 + 0.\, y_2 + 0.y_3 + y_4 \leq 7$$

y_1 غير مقيد بإشارة

$$y_2 \leq 0$$

$$y_3, y_4 \geq 0$$

فإننا لا نستطيع أن نوجد القيم المثلى لمتغيرات النموذج الثنوي (١,٣٧) مباشرة من الجدول رقم (١,٧) والذي يمثل الحل الأمثل للنموذج الأولي (١,٢٩) لأن هذا النموذج

غير مكتوب بالشكل النموذجي الذي أشرنا إليه في نهاية الملاحظة (١,١). وفي الحقيقة فإن القيم المثلى للمتغيرات y_4, y_3, y_2, y_1 وهي 6,-1,0,1 على الترتيب. لاحظ أن قيمة W عند هذه القيم تساوي 59000 وهي نفس قيمة Z المثلى في الجدول رقم (١,٧) السابق.

(ب) العلاقة بين قيم حلول المسألة الثنوية وقيم حلول المسألة الأولية

لنفرض أن المسألة الأولية هي مسألة تكبير دالة هدفها Z وأن X^* هو حلها الأمثل عندئذ تكون المسألة الثنوية لها هي مسألة تصغير ، لنفرض أن دالة هدفها هي W وأن حلها الأمثل هو Y^*. فإذا كان X ، Y حلين اختيارين للمسألة الأولية والثنوية على الترتيب كان لدينا ما يلي

$$Z(X) \leq Z(X^*) = W(Y^*) \qquad (١,٣٨)$$

$$W(Y) \geq W(Y^*) = Z(X^*) \qquad (١,٣٩)$$

(نذكر أنه بموجب نظرية الثنوية فإن $Z(X^*) = W(Y^*) = b$) وتعني العلاقتان (١,٣٨) و(١,٣٩) أن القيمة المثلى للحل في المسألة الثنوية (الأولية) تشكل حداً أعلى(حداً أدنى) لكافة حلول المسألة الأولية (الثنوية). ويعني ذلك أن أي حل Y يكون فيه $W(Y) < Z(X^*) = b$ هو حل غير ممكن للمسألة الثنوية. وأن أي حل X يكون فيه $Z(X) > W(Y^*) = b$ هو حل غير ممكن للمسألة الأولية. ويقودنا ذلك إلى النتيجة الهامة التالية :

نتيجة (١,٢)

لو رمزنا بالرمز b للقيمة المثلى للحل للمسألتين الأولية والثنوية فعندئذ

(أ) جميع الحلول الممكنة للمسألة الأولية التي تملك حلولاً أقل من b يقابلها حلولاً غير ممكنة للمسألة الثنوية.

(ب) جميع الحلول الممكنة للمسألة الثنوية التي تملك حلولاً أكبر من b يقابلها حلولاً غير ممكنة للمسألة الأولية.

(ج) لدى حل المسألة الأولية (الثنوية) فإن الحلول الممكنة والمتابعة لها تقابلها حلولاً غير ممكنة للمسألة الثنوية(الأولية) حتى نصل إلى الحل الأمثل فيقابله عندئذ أول حل ممكن للمسألة الثنوية (الأولية) .

(١,٦) طريقة السمبلكس الثنوية

The Dual Simplex Method

كما لاحظنا سابقاً ، فإن الحل بطريقة السمبلكس يستوجب كتابة النموذج بالشكل القياسي وذلك باستخدام متغيرات إضافية(راكدة، فائضة وزائفة) وبجعل الأطراف اليمنى لجميع القيود موجبة ومن ثم إيجاد حل ابتدائي أساسي ممكن للمسألة الأولية أو الثنوية التي نحلها. وكما وجدنا سابقاً فإن الوصول إلى مثل هذا الحل الابتدائي الأساسي الممكن قد يكون مباشرة (مرحلة واحدة) إذا كان النموذج قيد الحل من النوع النموذجي كما هي الحال في مثال (١,١)، وقد يكون باستخدام طريقة المرحلتين حيث نقوم في المرحلة الأولى بإيجاد سلسلة من الحلول الممكنة لمسألة هذه المرحلة (وهي بالتالي غير ممكنة بالنسبة لثنويتها حسب النتيجة (١,٢)) لحين الوصول إلى الحل الأمثل لمسألة هذه المرحلة (وهو بالتالي حل ممكن لثنويتها حسب النتيجة (١,١)) والذي يكون حلاً ابتدائياً أساسياً ممكناً للمسألة الأصلية ننطلق منه لإيجاد الحل الأمثل لهذه الأخيرة.

لكن ما يعرف ب"*طريقة السمبلكس الثنوية*" لا تشترط الانطلاق من حل ابتدائي أساسي ممكن. فبالاستناد إلى النتيجة (١,٢) قد يكون أسهل علينا الانطلاق من حل أساسي يحقق شرط الأمثلية في سطر دالة الهدف (وبالتالي فإن هذا الحل يعطي حلاً ممكناً للمسألة الثنوية) ولكنه حل غير ممكن للمسألة الأولية ؛ وذلك لأن بعض قيم المتغيرات الأساسية هي قيم سالبة في هذا الحل.

وتعتمد طريقة السمبلكس الثنوية على الانطلاق من مثل هذا الحل (غير الممكن ولكنه يحقق شرط الأمثلية في سطر دالة الهدف) والتحرك منه عبر سلسلة من الحلول باتجاه حل ممكن شريطة أن نحافظ أثناء حركتنا هذه على شرط الأمثلية في سطر دالة الهدف للمسألة المدروسة ، فيكون هذا الحل عندئذ حلاً أمثليا ؛ لأنه ممكن ويحقق شرط الأمثلية.

وتعمل طريقة السمبلكس الثنوية بأسلوب مشابه لذلك التي تعمل به طريقة السمبلكس، ولكن قواعد اختيار المتغير الداخل والمتغير الخارج وشرط الأمثلية لهذه الطريقة تصبح على النحو التالي

(١,٦,١) شرط الأمثلية لطريقة السمبلكس الثنوية

جميع الأطراف اليمنى للقيود غير سالبة وشرط الأمثلية في سطر دالة الهدف للمسألة المدروسة محققاً.

(١,٦,٢) تحديد المتغير الخارج لطريقة السمبلكس الثنوية

إذا كان الطرف الأيمن لواحد على الأقل من القيود سالباً(تهمل القيود التي تكون أطرافها اليمنى موجبة) فإن المتغير الخارج هو ذلك المتغير الذي يملك أقل قيمة سالبة وعندها نعتبر أن سطر ذلك المتغير هو السطر المحوري. وفي حالة التعادل بين أكثر من متغير فإننا نختار أحدها.

(١,٦,٣) تحديد المتغير الداخل لطريقة السمبلكس الثنوية

بعد تحديد السطر المحوري ،نقوم بقسمة الأمثال في الطرف الأيسر من سطر دالة الهدف على مقابلاتها في السطر المحوري – مع إهمال النسب التي يقابلها قيم موجبة أو صفرية في السطر المحوري – فيكون المتغير الداخل هو الذي يملك أقل قيمة مطلقة للنسب الناتجة في حالة مسائل التكبير وأقل قيمة للنسب الناتجة في حالة مسائل التصغير. ويسمى عمود المتغير الداخل عندئذ بالعمود المحوري . وفي حالة التعادل فإننا نختار أحد

المتغيرات. وتجدر الإشارة هنا بأنه لو كانت جميع عناصر الطرف الأيسر للسطر المحوري موجبة لتعذر إيجاد المتغير الداخل وعندئذ تكون المسألة كلها غير ممكنة من وجهة نظر طريقة السمبلكس الثنوية.

(١,٦,٤) تحديد العنصر المحوري والسطر المحوري الجديد لطريقة السمبلكس الثنوية.

العنصر المحوري هو تقاطع السطر المحوري مع العمود المحوري والسطر المحوري الجديد هو ناتج قسمة السطر المحوري الحالي على العنصر المحوري.

(١,٦,٥) خوارزمية طريقة السمبلكس الثنوية.

بعد تحديد كل من المتغير الخارج والمتغير الداخل والعنصر المحوري فإن العمليات بطريقة السمبلكس الثنوية تكون مشابهة لنظيراتها بطريقة السمبلكس. وتتلخص هذه العمليات بالخطوتين الرئيستين التاليتين :

خطوة (١). نحول أي قيد من النوع ≥ إلى النوع ≤ (ويستثنى من ذلك قيود اللاسلبية) ونضيف متغيرات راكدة ثم نوجد حل أساسي ونختبر أمثليته وفقاً للشرط(١,٧,١). فإذا كان هذا الحل أمثلياً توقفنا وإلا انتقلنا للخطوة التالية.

خطوة (٢). نحدد المتغير الخارج وفقاً للشرط(١,٦,٢) والمتغير الداخل وفقاً للشرط (١,٦,٣) ثم نوجد حلاً جديداً ، فإذا كان هذا الحل الجديد أمثلياً توقفنا وإلا فإننا نكرر العمل بالخطوة (٢) لحين الوصول إلى الحل الأمثل المنشود.

والمثال التالي يوضح العمل بطريقة السمبلكس الثنوية.

مثال (١,٥)

صغر الدالة :

$$Z = 4x_1 + 12x_2 + 18x_3 \qquad (١,٤٠)$$

وفقاً للقيود:

$$x_1 + 3x_3 \geq 3$$

$$2x_2 + 2x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل

بعد تحويل القيود التي من النوع ≥ إلى النوع ≤ وإضافة المتغيرات الراكدة إليها وكتابة دالة الهدف كأحد القيود فإننا نحصل على النموذج التالي:

صغر الدالة Z :

وفقاً للقيود:

$$Z - 4x_1 - 12x_2 - 18x_3 + 0.S_1 + 0.S_2 = 0 \qquad (١,٤١)$$

$$-x_1 + 0.x_2 - 3x_3 + S_1 + 0.S_2 = -3$$

$$0.x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 0.S_1 + S_2 = -5$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

وكما نلاحظ فإن النموذج (١,٤١) ليس بالشكل القياسي؛ لأن الأطراف اليمنى لواحد على الأقل من القيود (عدا قيود اللاسلبية) غير موجب، وهو ما لا تشترطه طريقة السمبلكس الثنوية ، والحل الابتدائي لهذا النموذج معطى كما في الجدول رقم

(١,٨). وبفحص الجدول رقم (١,٨) نجد أن جميع المعاملات في سطر دالة الهدف غير موجبة(سالبة أو أصفار). ولما كانت المسألة قيد الدراسة هي مسألة تصغير فإن ذلك يعني أن "شرط الأمثلية" محقق في الحل الممثل بهذا الجدول، ولكن الحل الناتج فيه وهو$S_1 = -3$ و $S_2 = -5$ هو حل غير ممكن، لذا فشرط الأمثلية (١,٦,١) غير محقق ولا بد لنا إذاً من الانتقال للخطوة(٢) لتوليد حل جديد. فبموجب نتائج الجدول(١,٨) فإن S_2 هو المتغير الخارج (فسطر S_2 هو السطر المحوري)، والمتغير الداخل هو X_2 ، وبالتالي فالعنصر المحوري هو 2- .

الجدول رقم (١,٨). الحل الابتدائي للنموذج (١,٤١).

الحل	S_2	S_1	X_3	متغير داخل X_2	X_1	متغيرات أساسية
0	0	0	-18	-12	-4	Z
-3	0	1	-3	0	-1	S_1
-5	1	0	-2	**-2**	0	S_2 متغير خارج
			9	6		النسبة

فالسطر المحوري الجديد هو:

5/2   -1/2   0   1   1   0   (السطر المحوري الجديد)

وبإجراء حسابات مماثلة لتلك التي نجريها بطريقة السمبلكس العادية وهي إيجاد جميع الأسطر الجديدة بموجب العلاقة (١,٢٨) – فإننا نحصل على الحل الجديد التالي والممثل بالجدول رقم (١,٩) وقد تحدد فيه كل من المتغير الخارج والداخل والعنصر المحوري.

ولو أجرينا الحسابات بطريق السمبلكس(العادية) على نتائج الجدول رقم (١,٩) لحصلنا على الحل المتمثل بالجدول رقم (١,١٠). وبفحص الجدول رقم (١,١٠) نجد أنه يمثل الحل الأمثل للنموذج (١,٤١) وهذا الحل هو:

$(x^*_1, x^*_2, x^*_3, Z^*) = (0, 3/2, 1, 36)$. لاحظ أن قيم الحلول غير الممكنة تزايدت بالتدريج إلى أن وصلت لأكبر قيمة لها ٣٦ عند أول حل ممكن – فهو بالتالي حل أمثل – وهو ما يتوافق مع مضمون النتيجة(١,٢) السابقة.

الجدول رقم (١,٩). الحل التالي للحل الابتدائي للنموذج (١,٤١).

متغيرات أساسية	X_1	X_2	متغير داخل X_3	S_1	S_2	الحل
Z	-4	0	-6	0	-6	30
S_1 متغير خارج	-1	0	-3	1	0	-3
X_2	0	1	1	0	-1/2	5/2
النسبة	4		2			

الجدول رقم (١,١٠). الحل الأمثل للنموذج (١,٤١).

متغيرات أساسية	X_1	X_2	متغير داخل X_3	S_1	S_2	الحل
Z	-2	0	0	-2	-6	36
X_3	1/3	0	1	-1/3	0	1
X_2	-1/3	1	0	1/3	-1/2	3/2
النسبة						

(١,٦,٦) استخدام طريقة السمبلكس الثنوية بعد إضافة قيود

نشير أخيراً إلى أنه وبعد الوصول إلى الحل الأمثل للمسألة الأصلية بطريقة السمبلكس فقد نشأ لدينا بعض القيود الجديدة فعندئذ لا حاجة لإعادة إيجاد الحل الأمثل للمسألة الناتجة بعد إضافة هذه القيود، ولكننا نضيف هذه القيود كسطور أخيرة إلى جدول الحل الأمثل للمسألة الأصلية (والتي يتحقق فيها شرط الأمثلية في سطر دالة الهدف) ونتابع الحل بطريقة السمبلكس الثنوية إذا كانت هذه الأخيرة قابلة للتطبيق.

ولتوضيح هذه الفكرة، دعنا نعود إلى المثال(١,١) الخاص بإنتاج صنفي الوقود، ولنفترض أن إنتاج الصنف(II) من الوقود لا يكون مجدياً من الناحية الاقتصادية إلا إذا أنتج من 1500 وحدة على الأقل، عندئذ علينا إضافة القيد التالي :

$$x_2 \geq 1500 \qquad (١,٤٢)$$

ولا حاجة، في مثل هذه الحالة، أن نعيد حل المسألة بعد إضافة القيد الأخير (١,٤٢). ويكفينا عندها أن نعطي القيد (القيود) الجديد (الجديدة) المتغيرات الإضافية المناسبة (راكدة أو فائضة أو زائفة) وندرج القيد(القيود) الناتج (الناتجة) بعد هذه الإضافة كسطور أخيرة في جدول الحل الأمثل للمسألة الأصلية قبل هذه الإضافة. ففي حلتنا هنا لو أضفنا المتغير الفائض S_5 إلى القيد (١,٤٢) لحصلنا على :

$$y_2\text{-}S_5$$

$$S_5 - x_2 = 1500 \qquad (١,٤٣)$$

الآن نضيف القيد(١,٤٣) كسطر أخير إلى الجدول رقم(١,٥) - والذي يمثل الحل الأمثل لمثال(١,١) كمسألة تكبير – ونجري الحسابات الخاصة به فنحصل على الجدول التالي (الجدول رقم١,١١).

وكما نلاحظ فإن شرط الأمثلية(كمسألة تكبير) محقق في سطر دالة الهدف من الجدول رقم (١,١١) إلا أن الحل المتمثل في هذا الجدول أصبح غير ممكن الأمر الذي يمكننا متابعة الحل بطريقة السمبلكس الثنوية ابتداءً من هذا الجدول حيث نحصل على الحل الأمثل التالي (تحقق من ذلك).

$$(1800, 3650, 1500, 410, 600, 570000) = (x^*_1, S^*_2, x^*_2, S^*_4, S^*_1, Z^*)$$

الجدول رقم (١,١١). الجدول الناتج من الجدول رقم (١,٥) بعد إضافة القيد (١,٤٣).

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	الحل
Z	0	0	25/3	0	70	0	0	575000
X_1	1	0	1/3	0	0	0	0	2000
S_2	0	0	7.25/6	1	-2.9/2	0	0	4375
X_2	0	1	-2.5/6	0	1/2	0	0	1250
S_4	0	0	1.15/6	0	-1.5/2	1	0	525
S_5 متغير خارج	0	0	-2.5/6	0	-1/2	0	1	-250
النسبة								

(١,٧) تمارين (١)

أولاً: البرمجة الخطية البيانية

١- تمتلك شركة كبرى لإنتاج الأبواب والنوافذ ثلاثة معامل الأول يقوم بتصنيع إطارات ألومنيوم للأبواب، والثاني يقوم بتصنيع إطارات خشبية للنوافذ، والثالث يقوم بتصنيع الزجاج وتجميع منتجات المعملين الأوليين لإخراجهما على شكل أبواب ونوافذ. وبسبب تناقص الأرباح فقد قررت الإدارة العليا للشركة إعادة النظر في برنامجها الإنتاجي الحالي واستبداله ببرنامج آخر يدِرّ عليها ربحاً أكبر. ويتوقف مثل هذا البرنامج الإنتاجي بالطبع على كل من الطاقة الإنتاجية المتوافرة والطاقة المستهلكة لكل وحدة منتجة والأرباح العائدة لكل وحدة أيضاً. وقد تبين نتيجة الدراسة التي قام بها قسم بحوث العمليات بالشركة أن المشكلة التي تواجهها الشركة تتمثل في الطاقة الإنتاجية المحدودة المتوافرة لكل معمل مقاسة بالساعة في اليوم حيث بينت هذه الدراسة إمكانية أن يعمل المعمل الأول 4 ساعات والثاني 12 ساعة والثالث 18 ساعة يومياً، وأن كل باب مصنوع من الألومنيوم يستلزم ساعة بالمعمل الأول و3 ساعات بالمعمل الثالث وتقدر أرباحه بـ 12 ريال وكل نافذة مصنوعة من الخشب تستلزم ساعتين في المعمل الثاني وساعتين في المعمل الثالث وتقدر أرباحها بـ 20 ريال. ما هو مستوى الإنتاج الأمثل لكل من الأبواب والنوافذ والذي يحقق للشركة أكبر ربح ممكن؟.

٢- يقوم مصنع منتجات مطاطية بإنتاج نوع جديد من المطاط وذلك بمزج نوعين من المطاط (نوع I ونوع II) فإذا علمت أن كل نوع يحتوي على أربعة مكونات أو عناصر أساسية هي E_1 , E_2 , E_3 , E_4 وفقاً للنسب المئوية الموضحة في الجدول أدناه : وأن الشروط الأساسية لجعل النوع الجديد أكثر ملائمة للبيئة هي احتواء كل وحدة منتجة من هذا النوع على 1 كجم من E_1 ، 3 كجم من E_2 و 1 كجم من E_3 ونصف كجم من E_4 (على الأقل لكل منها). وأن تكلفة الكيلوجرام من النوع I هي 3.5 دولار في حين أن تكلفة كجم من النوع الثاني هي 4.5 دولار فما هي الكميات الواجب إدخالها من النوعين I و II لإنتاج وحدة من النوع الجديد بحيث تكون تكلفة الوحدة منه أقل ما يمكن.

	E_1	E_2	E_3	E_4
I	0 %	50 %	35 %	15 %
II	45 %	30 %	0 %	25 %

٣- يُعني أحد مستشفى القوات المسلحة بتوزيع الممرضات بشكل مناسب لمساعدة الأطباء العاملين في غرفة الإسعاف ، وقد دلت الدراسة الإحصائية أنه يمكن تقسيم يوم ما لستة فترات مختلفة لعدد الحالات الإسعافية التي تصل للإسعاف. البيانات كما في الجدول التالي :

3-7	23-3	19-23	15-19	11-15	7-11	الفترة
20	40	60	120	60	80	متوسط عدد الحالات

(الفترة 3-23 تعني من الساعة 11 ليلاً إلى الساعة الثالثة صباحاً لليوم التالي). دلت السجلات أيضاً أن كل ممرضة تستطيع مساعدة الطبيب في 2.5 حالة بالمتوسط في الساعة وأن الممرضات يعملن بالتناوب وفقاً لثلاث فترات، الأولى من 7 صباحاً

إلى 15 بعد الظهر والثانية من 15 بعد الظهر إلى 23 ليلاً والثالثة من 23 إلى السابعة صباحاً غير أن هناك ثلاث ممرضات يرغبن في أن يبدأن عملهن اعتباراً من 11 صباحاً واثنتان ترغبان في العمل من الساعة السابعة مساءً. ضع هذه المسألة على شكل مسألة برمجة خطية إذا كان الهدف هو استخدام أقل عدد ممكن من الممرضات. لاحظ إمكانية استخدام مثل هذا المثال لتوزيع المناوبات في أي عمل مثل المناوبات العسكرية.

٤– شركة صناعية تنتج نوعين من السلع B , A . إن عملية الإنتاج تتطلب تمرير السلع على آلتين مختلفتين. الآلة (1) متوافرة يومياً لمدة 15 ساعة والآلة (2) لمدة 10 ساعات. أما الوقت الذي يحتاجه إنتاج كل نوع من السلع على الآلات والعائد الحاصل من إنتاج كل وحدة فهو معطى في الجدول التالي :

العائد	الآلة (2)	الآلة (1)	السلعة
4	2	2	A
1	1	5	B

لأسباب معينة ، يجب ألا تقل الكميات المنتجة من السلعة A عن 2 ومجموع الكميات المنتجة من B , A عن 3 .

ترغب الشركة في رفع العائد الإجمالي من إنتاج السلع.

(أ) أكتب برنامجاً خطياً يمثل المشكلة.

(ب) ارسم فضاء الحل وحدد الحل الأمثل.

(ج) ماذا يكون الحل الأمثل لو كان العائد من السلعة B هو٢عوضاًعن١ ؟

(د) بكم نستطيع أن نخفض قيمة كل قيد من القيود بطريقة لا نغير فيها الحل الأمثل؟.

(هـ) حدد المجال الذي يمكن أن يتغير فيه عائد السلعة A دون أن يتغير الحل الأمثل وكذلك بالنسبة لـ B.

(و) بكم نستطيع أن نرفع عدد الساعات المتوافرة يومياً على الآلة (1) كي نحسن الحل الأمثل كذلك بالنسبة للآلة (2)؟.

نتصور الآن أن تكلفة إنتاج وحدة من A هي 1 ريال ومن B نصف ريال وأن الشركة ترغب في معرفة الكميات المنتجة من السلعة A , B التي تقلل لها التكلفة الإجمالية لإنتاج هاتين السلعتين :

(أ) أكتب النموذج الرياضي للمشكلة في هذه الحالة.

(ب) حدد الحل الأمثل للمشكلة.

(ج) لكم نستطيع أن نقلل الكمية القصوى لمجموع الكميات المنتجة من B , A بطريقة تقلل من التكاليف الإجمالية؟.

ثانياً: طريقة السمبلكس

١- ترغب إحدى الشركات الصناعية في صناعة أقراص فيتامين تحوي الفيتامينات A ، C و D ولابد لكل قرص أن يحوي حداً أدنى من كل من هذه الفيتامينات. نستخلص الفيتامينات A ، C وD من ثلاث مواد غذائية (١)، (٢)، (٣).

يبين الجدول التالي ما تحويه هذه المواد من الفيتامينات المذكورة وتكلفة الوحدة من المواد الثلاث الحاوية عليها بالإضافة إلى الحد الأدنى الذي يجب أن يحويه كل قرص من الفيتامينات A ، C و D . هدف الشركة هو جعل تكلفة إنتاج القرص أقل ما يمكن. ما هو عدد الوحدات من المواد (١)، (٢)، (٣) الواجب إدخالها في صناعة القرص والتي يتحقق من أجلها هدف الشركة.

الفيتامينات	المقادير (بالملغ) التي تحويها المواد مع الفيتامينات			الحد الأدنى الواجب توافره في القرص
	مادة (١)	مادة (٢)	مادة (٣)	
A	0.5	0.5	5	0.5
C	50	5	5	25
D	10	50	5	5
تكلفة الوحدة بالريال	1.0	1.1	0.5	

٢- ترغب إحدى مؤسسات الإنتاج الحربي في جدولة طواقم العمل لديها من الفنيين وفق ثلاث طواقم يعمل كل منها ثمان ساعات. ولضمان الاستمرار في العمل فإن عملية استبدال الطواقم لا تكون كلية ولكنها تكون على النحو التالي :
كل أربع ساعات يتم ضم فنيين إلى من سبق وأتم أربع ساعات عمل وبحيث يقضي كل فني ثمان ساعات عمل متواصلة. الجدول التالي يبين طاقة الفنيين اللازمة لست فترات كل منها أربع ساعات.

الحد الأدنى المطلوب من الفنيين	الفترات (أو الوقت) من اليوم
10	من 2 صباحاً إلى 6 صباحاً
25	من 6 صباحاً إلى 10 صباحاً
40	من 10 صباحاً إلى 2 بعد الظهر
50	من 2 بعد الظهر إلى 6 مساءً
20	من 6 مساءً إلى 10 مساءً
15	من 10 مساءً إلى 2 صباحاً

أوجد أفضل جدولة لطواقم العمل التي تستخدم أقل قدر ممكن من الفنيين.

٣ – تنتج مصانع الإنتاج الحربي ثلاثة منتجات A ، B و C في خمسة مصانع تمتلك طاقة إنتاجية مختلفة مما ينتج عنه اختلاف تكاليف إنتاج المنتجات المذكورة من مصنع لآخر. إذا علمت أن المصنعين الرابع والخامس لا تنتج C وأن تكاليف إنتاج الوحدة للمنتجات A ، B و C في المصانع الخمسة وطاقة هذه المصانع بالإضافة إلى الحد الأدنى المطلوب من هذه المنتجات معطاة كما في الجدول التالي أوجد أفضل برنامج إنتاجي للمصانع الخمسة والذي يجعل تكاليف الإنتاج الكلية للمنتجات A ، B و C أقل ما يمكن.

الحد الأدنى للوحدات	المصانع					المنتجات
	5	4	3	2	1	
300	27	30	24	28	26	A
200	31	32	28	33	29	B
400	-	-	29	43	40	C
	300	500	200	400	200	الطاقة الإنتاجية بالوحدة

٤- تخطط وزارة الزراعة والمياه لزراعة ثلاث مناطق لإنتاج كميات اقتصادية كبيرة من القمح والذرة والشوندر السكري. ويتوقف إنتاج كل منطقة على المساحة الصالحة للزراعة وكمية الماء الذي تستهلكه هذه المساحة. يبين الجدول التالي كميات الأرض الصالحة للزراعة في كل منطقة (مقاسة بالهكتار) وما تستهلكه كل منطقة من هذه الأراضي من الماء (مقاسة بالقدم المكعب). ومع ذلك فإن وزارة الزراعة والمياه قد حددت حداً أقصى للكميات التي تنوي زراعتها من كل صنف من الأصناف الثلاثة وحداً أقصى من الماء (قدم مكعب) الذي ستخصصه لكل هكتار من الأرض في كل من المناطق الثلاثة. الجدول التالي يبين تخصيصات وزارة الزراعة والمياه المشار إليها آنفاً بالإضافة إلى العوائد من كل هكتار من الأراضي في كل من المناطق الثلاث .إذا علمت أن الوزارة تهدف إلى تحقيق أكبر ربح ممكن فالمطلوب : (أ) أكتب نموذج المسألة. (ب) أوجد الحل الأمثل.

المنطقة	المساحة الصالحة للزراعة	كمية الماء المتوافرة مقاسة بالقدم المكعب
1	4000	6000
2	6000	8000
3	3000	3750

نوع المحصول	الحد الأقصى المخصص للزراعة (هكتار)	الحد الأقصى المخصص لري الهيكتار (قدم^3)	الربح المتوقع بالريال
قمح	5000	1	1000
ذرة	3250	2	9000
شوندر	6000	3	16000

٥- يحتاج أحد المكاتب الرئيسة للبريد بمدينة الرياض إلى عدد من الموظفين يختلف باختلاف أيام الأسبوع كما يلي :

السبت	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
17	13	15	19	14	16	11

ولضمان استمرارية العمل فقد تقرر أن يعمل كل موظف خمسة أيام متواصلة ثم يرتاح بعدها لمدة يومين. يهدف مكتب البريد إلى جعل عدد الموظفين الكلي على مدار الأسبوع أقل ما يمكن. المطلوب :

(أ) كتابة النموذج الرياضي لهذه المسألة.

(ب) إيجاد الحل الأمثل لها.

٦- ترغب إحدى الشركات الوطنية في استثمار عوائدها من تصنيع البترول ومشتقاته. في حوزة الشركة حالياً مبلغ 160 مليون ريال معدة للاستثمار وتدل التقديرات الأولية على أنه بعد مرور سنة فإن بمقدور الشركة أن توفر مبلغ 80 مليون ريال أخرى للاستثمار. يتوافر للشركة حالياً أو بعد مرور سنة خمس فرص للاستثمار على شكل أسهم تختلف مجموع قيمها هذا العام عنها في العام المقبل على النحو التالي (القيم بملايين الريالات). تستطيع الشركة أن تشتري أي جزء من القيمة الإجمالية لأسهم أي فرصة. أما الأرباح المتوقعة من الفرص الخمسة لهذا العام وللعام المقبل فهي على الترتيب : 13 ، 16 ، 16 ، 14 ، 39 مليون ريال على الترتيب. تهدف الشركة لجعل الأرباح الكلية من استثمار المبالغ المتوافرة هذا العام ومبالغ العام المقبل أكبر ما يمكن. أكتب النموذج الرياضي للمسألة وأوجد الحل الأمثل الشركة.

فرصة (٥)	فرصة (٤)	فرصة (٣)	فرصة (٢)	فرصة (١)	العام
116	20	20	212	44	هذا العام
132	4	20	24	12	العام المقبل

٧- تمتلك شركة لتسويق أجهزة الكمبيوتر الشخصية عدة مراكز. تحتاج هذه المراكز إلى مؤهلين لإصلاح وضبط الأجهزة وتدريب المشترين على كيفية استخدام الأجهزة المشتراة. ترغب الشركة في جدولة حاجتها من هؤلاء الفنيين للأشهر الخمسة المقبلة ونتيجة للخبرة السابقة فقد قدَّرت الشركة أن ساعات العمل اللازمة لها في هذه الأشهر كما يلي :

شهر (٥)	شهر (٤)	شهر (٣)	شهر(٢)	شهر (١)
11000	9500	8000	7000	6000

يتوافر في بداية الشهر (١) 50 مؤهل يستطيع أن يعمل كل منهم 160 ساعة شهرياً. ولتغطية حاجة الشركة من المؤهلين مستقبلاً فإن على هؤلاء المؤهلين أن يقوموا بتدريب أشخاص جدد ليشاركوهم العمل مستقبلاً. تخضع عملية تدريب الأشخاص الجدد للشروط التالية : لابد لكل متدرب جديد من أن يخضع لإشراف أحد المؤهلين ولمدة 50 ساعة وعلى مدار شهر كامل. وتقوم الشركة في هذه الحالة بدفع 8000 ريال للمدرب و 4000 ريال للمتدرب. في نهاية كل شهر فإن 50% من المتدربين الذين أصبحوا مؤهلين لا يلتحقون بالعمل نظراً لحاجتهم لمزيد من التدريب. ترغب الشركة في جعل المصاريف الكلية التي تدفعها للمؤهلين والمتدربين واللازمة لتغطية حاجتها من ساعات العمل خلال الأشهر الخمسة المقبلة أقل ما يمكن. والمطلوب صياغة المشكلة التي تواجهها الشركة كمسألة برمجة خطية ومن ثم إيجاد الحل الأمثل للشركة.

٨- تقوم إحدى المصافي الوطنية لتكرير البترول بإنتاج أربعة أنواع من الزيوت البترولية هي : الديزل، البنزين العادي، بنزين الطائرات والكيروسين وذلك من ثلاثة أنواع I ، II ، III من البترول الخام. ويباع البرميل من هذه الأنواع للمصفاة المذكورة بسعر تكلفة الإنتاج وهي 16 ، 11 و 13 ريالاً على الترتيب كما يتوافر للمصفاة يومياً 12000 ، 18000 و 15000 برميل من البترول الخام يومياً من الأنواع الثلاثة على

الترتيب. بالإضافة إلى ذلك فإن نسبة شوائب الكبريت في الأنواع الثلاثة هي 0.05 ، 0.03 و 0.45 أونصة في البرميل على الترتيب بالإضافة لذلك فإن نوعاً آخر من القطران يتبقى بعد استخراج الزيوت الأربعة المذكورة. يبين الجدول التالي النسب المئوية التي تنتجها الأنواع الثلاثة من البترول الخام بالإضافة إلى الحد الأعلى المسموح به من الكبريت في البرميل. تبلغ تكاليف تكرير البرميل 4 ريالات كما أن الطاقة العليا للمصفاة هي تكرير 40000 برميل يومياً. تهدف المصفاة إلى جعل عوائدها من بيع الأنواع الأربعة من الزيوت والقطران أكبر ما يمكن. صغ هذه المشكلة على شكل مسألة برمجة خطية وأوجد الحل الأمثل لها.

البترول الخام	الزيوت				
	بنزين	ديزل	بنزين طائرات	كيروسين	قطران
I	35	15	25	15	10
II	50	20	10	20	15
III	20	25	35	15	10
سعر البيع للبرميل (ريال)	51	48	45	43	38
الحد الأقصى المسموح به من الكبريت	0.0003	0.0006	0.0007	0.0009	0.0007