الفصل الثاني

مدخل إلى البرمجة العددية

(٢,١) مقدمة

إن معظم مسائل البرمجة الخطية التي نواجهها في الواقع العملي تتضمن قيدا إضافيا واضحاً أو ضمنياً يقتضي أن قيم *بعض أو كل* المتغيرات في هذه المسائل هي قيم (أعداد) صحيحة. فعلى سبيل المثال، إن مصنعا للمكاتب وخزائن الكتب لا يستطيع أن يصنع جزءا من مكتب أو خزانة ولا بد من صناعة عدد كامل (صحيح) من أي منهما. ومن هنا برزت أهمية التعامل مع هذا النوع من المسائل التي تكون فيها قيم المتغيرات أعدادا صحيحة. وفي هذا الكتاب، سنعالج المسائل التي تأخذ فيها المتغيرات قيما صحيحة فقط، كأن تأخذ أحد القيمتين 0 أو 1 (والتي نسميها أعدادا ثنائية) أو تلك التي لا يمكن لمتغيراتها أن تأخذ قيما غير صحيحة كعدد الأشخاص القائمين بمهمة معينة. وتسمى مسائل الأمثلية التي من هذا النوع باسم مسائل "*برمجة عددية*" (Integer Programming اختصارا IP). وتعتبر البرمجة العددية حالة خاصة من البرمجة الخطية ولذا يطلق عليها اسم "البرمجة الخطية العددية"(Integer Linear Programming اختصارا ILP). أما عندما يمكن لبعض قيم متغيرات المسألة قيد الدراسة أن تكون قيما غير صحيحة فإننا أمام مسألة برمجة غير خطية (Nonlinear Programming). وتجدر الإشارة هنا إلى أن استخدام الأعداد

الثنائية عادة ما يكون لحوادث (أو لعمليات) يمكن أن تقع (أو أن يتم فعلها) ويقابل ذلك الرقم 1 أو لا تقع (أو لا يتم فعلها) ويقابل ذلك الرقم 0. ومن أمثلة ذلك خصص أولا تخصص شخص معين لوظيفة معينة، افعل أو لا تفعل عمل معين، موافق أو غير موافق على مرشح ما للانتخابات ... إلخ.

(٢,٢) أنماط البرمجة الخطية العددية

كما أشرنا سابقاً فإننا نصادف بعض المسائل التي تكون فيها قيم كل المتغيرات قيماً عددية صحيحة، وبعض المسائل التي تكون فيها بعض قيم المتغيرات قيماً عددية صحيحة وبعضها الأخر قيما ثنائية (0 أو 1)، وبعض المسائل التي تكون فيها قيم كافة المتغيرات قيما ثنائية. وعلى ضوء ذلك فإن مسائل البرمجة الخطية العددية قد تم تصنيفها إلى عدة أنماط كما هو موضح في التعاريف والأمثلة المعطاة فيما يلي:

تعريف (٢,١)

يقال عن مسألة برمجة خطية إنها مسألة "*برمجة خطية عددية*" (Integer Linear Programming اختصارا ILP) إذا كانت قيم بعض أو كل متغيرات هذه المسألة هي قيم صحيحة.

تعريف (٢,٢)

يقال عن مسألة برمجة خطية إنها مسألة "*برمجة خطية عددية صرفة أو بحته*" Pure Integer Linear Programming اختصارا (PILP) إذا كانت قيم كل متغيرات هذه المسألة هي قيم صحيحة.

تعريف (٢,٣)

يقال عن مسألة برمجة خطية إنها مسألة "*برمجة خطية عددية مختلطة*" Mixed Integer Linear Programming اختصارا (MILP) إذا كانت قيم بعض متغيرات هذه المسألة هي قيم صحيحة بينما تأخذ باقي المتغيرات قيما اختيارية.

تعريف (٢,٤)

يقال عن مسألة برمجة خطية إنها مسألة "*برمجة خطية عددية بمتغيرات ثنائية القيم*" (0-1 Integer Linear Programming اختصارا 0-1 ILP) إذا كانت قيم كل متغيرات هذه المسألة هي 0 أو 1.

وفيما يلي نسوق بعض الأمثلة التوضيحية لهذه الأنماط من البرمجة الخطية العددية.

مثال (٢,١)

يهدف مختبر للأبحاث العلمية لعمل مشاريع بحثية للسنة القادمة حول نوع من الأدوية ونوع من المنتجات النباتية. يعطي الجدول رقم (٢,١) ما يتوافر سنويا من القوى البشرية المتنوعة (علماء، فنيين، إداريين) وما تتطلبه كل وحدة من هذه المشاريع من هذه القوى إضافة إلى الربح المتوقع لكل مشروع (بآلاف الريالات).

الجدول رقم (٢,١). البيانات الخاصة لمثال (٢,١).

القوى البشرية المتنوعة	ما يتطلبه المشروع من القوى البشرية		المتوافر سنويا من القوى البشرية
	الأدوية	المنتج النباتي	
علماء	4	5	30
فنيين	6	4	40
إداريين	1	2	10
الربح المتوقع للمشروع	20	30	

يهدف مختبر الأبحاث لمعرفة ما يجب إنجازه من كل من مشروعي الأبحاث بحيث يحقق أكبر ربح سنوي ممكن والمطلوب صياغة النموذج الرياضي لمسألة مختبر الأبحاث.

الحل

إن متغيرات القرار هي عدد مشاريع الأدوية التي يجب إنجازها سنويا ولتكن x_1، وعدد مشاريع المنتجات النباتية التي يجب إنجازها سنويا ولتكن x_2. ومن الواضح

أن كلا المتغيرين هو عدد صحيح غير سالب. ووفقا للبيانات السابقة فإن النموذج الرياضي للمسألة يكون كما يلي:

كبر الدالة:

$$Z = 20x_1 + 30x_2$$

وفقا للقيود:

$$4x_1 + 5x_2 \le 30$$

$$6x_1 + 4x_2 \le 40$$

$$x_1 + 2x_2 \le 10$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

x_1, x_2 أعداد صحيحة

ونظرا لأن كافة المتغيرات في هذه المسألة لا تأخذ إلا قيما صحيحة فإن المسألة في هذا المثال هي مسألة "*برمجة خطية عددية بحتة*". وهي بنفس الوقت مسألة "*برمجة خطية عددية*" حسب التعريف (٢,١).

مثال (٢,٢)

تهدف وحدة الاستشارات العلمية في إحدى الجامعات إلى التعاقد مع بعض وزارات الدولة لتقديم استشارات مستعجلة للمشاريع التي تزمع هذه الوزارات القيام بها في العام المقبل، بحيث إن أيا من هذه الوزارات ترغب بأن تستكمل الاستشارة

الخاصة بأي مشروع في نفس السنة (أي أنه لا يمكن تجزئة الاستشارة لأكثر من سنة). ولتحقيق مزيد من الأرباح فإن وحدة الاستشارات هذه قد قررت تقديم استشارات ذات مدد مفتوحة لوزارات تزمع القيام بمشاريع طويلة الأجل (أي أن أي استشارة من هذا النوع الثاني يمكن أن تنتهي في أي وقت من السنة نفسها أو من السنة التالية). يبين الجدول رقم (٢,٢) التالي كافة البيانات المتعلقة بهذين النوعين من الاستشارات. تهدف وحدة الاستشارات لمعرفة عدد كل من نوعي الاستشارات والتي تحقق لها أكبر ربح سنوي ممكن، والمطلوب صياغة النموذج الرياضي لمسألة وحدة الاستشارات العلمية هذه.

الجدول رقم (٢,٢) . البيانات الخاصة لمثال (٢,٢)

القوى البشرية المتنوعة	ما تتطلبه الاستشارة من القوى البشرية		المتوافر سنويا من القوى البشرية
	مستعجلة	غير مستعجلة	
علماء	4	3	8
فنيين	1	1	3
الربح المتوقع للاستشارة بمئات ألاف الريالات	2	1	

الحل

إن متغيرات القرار لهذه المسألة هي عدد الاستشارات المستعجلة التي يجب تقديمها سنويا ولتكن x_1 ، ومن الواضح أن x_1 هو عدد صحيح غير سالب لعدم إمكانية تجزئة الاستشارة المستعجلة لأكثر من سنة وعدد الاستشارات غير المستعجلة (ذات المدة المفتوحة) التي يجب تقديمها سنويا ولتكن x_2 ، ومن الواضح أن x_2 هو عدد غير سالب لإمكانية تجزئة الاستشارة غير المستعجلة لأكثر من سنة. ووفقا للبيانات السابقة فإن النموذج الرياضي للمسألة يكون كما يلي :

كبر الدالة :

$$Z = 2x_1 + x_2$$

وفقا للقيود :

$$5x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 عدد صحيح

مثال (٢,٣)

تمتلك شركة كبرى ميزانية تقدر ب 6.5 مليون ريال تود إنفاقها على البحث العلمي لتطوير مشاريع الشركة الخمسة المتوافرة حاليا. ومن المتوقع أن يؤدي مثل هذا التطوير إلى نفقات وإلى مزيد من الأرباح للشركة في كل مشروع وفقا للبيانات الموضحة بالجدول رقم (٢,٣).

ترغب الشركة بمعرفة المشاريع التي يجب الإنفاق عليها لتطويرها بحيث يحقق لها ذلك أكبر ربح ممكن. المطلوب صياغة هذه المسألة.

الجدول رقم (٢,٣). البيانات الخاصة لمثال (٢,٣).

المشروع	1	2	3	4	5
النفقات (مليون ريال)	1.2	3.2	1.8	4.0	2.5
الربح المتوقع (مليون ريال)	5.0	4.5	4.8	8.0	4.2

الحل

من الواضح أن على الشركة أن تقرر أن تتبنى الإنفاق على مشروع ما أو ألا تتبناه. لذا فإن متغيرات القرار هي متغيرات ثنائية تأخذ القيمة 1 في حال تبني الإنفاق على المشروع وتأخذ القيمة 0 في حال عدم تبني الإنفاق على هذا المشروع. وبذلك فإن متغيرات القرار ستكون على النحو التالي :

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{إذا قررت الشركة أن تتبنى المشروع } j \\ 0, & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

حيث $j = 1,...,5$. ووفقا للبيانات السابقة فإن النموذج الرياضي للمسألة يكون كما يلي :

كبر الدالة :

$$Z = 5x_1 + 4.5x_2 + 4.8x_3 + 8x_4 + 4.2x_5$$

وفقا للقيود :

$$1.2x_1 + 3.2x_2 + 1.8x_3 + 4x_4 + 2.5x_5 \leq 6.5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0,1$$

ووفقا للتعريف (٢,٤) فإن هذه المسألة هي مسألة " *برمجة خطية عددية بمتغيرات ثنائية القيم* ".

وبالتدقيق في التعاريف الأربعة السابقة لأنماط البرمجة الخطية العددية فإننا نلاحظ بسهولة أن أيا منها هو حالة خاصة مما أسميناه مسألة "*برمجة خطية عددية مختلطة*" (MILP) والتي نورد التعريف الرياضي لها فيما يلي

تعريف (٢,٥) التعريف الرياضي العام لمسألة "البرمجة *الخطية العددية المختلطة*" (MILP).

استنادا إلى التعاريف والأمثلة التوضيحية السابقة فإنه يمكن إعطاء تعريف رياضي عام لما أسميناه مسألة البرمجة *الخطية العددية المختلطة* (MILP) يندرج تحته جميع أنماط البرمجة الخطية العددية التي تحدثنا عنها أعلاه وهو كما يلي:

كبر الدالة:

$$Z = \mathbf{c}\,\mathbf{x} + \mathbf{d}\,\mathbf{y}$$

وفقا للقيود:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\mathbf{y} \le \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}\,,\mathbf{y} \ge 0$$

$\mathbf{x}$ متجه من الأعداد الصحيحة

حيث

- $\mathbf{c} = (c_j), j = 1,2,\cdots,n$ هي متجة سطري مكون من n عنصر تعبر عن عوائد ربحية أو تكاليف.
- $\mathbf{d} = (d_j), j = 1,2,\cdots,k$ هي متجة سطري مكون من k عنصر تعبر عن عوائد ربحية أو تكاليف.
- $\mathbf{A} = (a_{ij}), i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n$ هي مصفوفة $(m \times n)$ وتعبر عن أمثال في قيود المسألة.
- $\mathbf{D} = (d_{ij}), i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,k$ هي مصفوفة $(m \times k)$ وتعبر عن أمثال في قيود المسألة.

- $\mathbf{b} = (b_i), i = 1,2,\cdots,m$ هي متجة عمودي مكون من m عنصر تعبر عن أمثال في الأطراف اليمنى للقيود .
- $\mathbf{x} = (x_j), j = 1,2,\cdots,n$ هي متجة عمودي مكون من n من المتغيرات التي تأخذ قيما صحيحة.
- $\mathbf{y} = (y_j), j = 1,2,\cdots,k$ هي متجة عمودي مكون من k من المتغيرات التي تأخذ قيما حقيقية.

فعندما يكون $k = 0$ فإن كافة متغيرات المسألة تأخذ قيما صحيحة ونحن عندئذ أمام ما أسميناه مسألة "*برمجة خطية عددية بحتة*". وعندما يكون $n = 0$ فإن كافة متغيرات المسألة تأخذ قيما حقيقية ونحن عندئذ أمام مسألة "*برمجة خطية بحتة*". وعندما يكون $n \neq 0$ و $k \neq 0$ فإن بعض متغيرات المسألة تأخذ قيما صحيحة وبعضها الأخر يأخذ قيما حقيقية ونحن عندئذ أمام ما أسميناه مسألة "*برمجة خطية عددية مختلطة*". أما عندما نقصر قيم كافة متغيرات المسألة على القيمتين 0 أو 1 فنحن عندئذ أمام ما أسميناه مسألة " *برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم*".

(٢,٣) بعض صعوبات حل مسائل البرمجة الخطية العددية

إن حل مسائل "البرمجة الخطية العددية" يعتمد في بعض الأحيان على حل مسألة" البرمجة الخطية "المقابلة والتي نحصل عليها بإسقاط القيود المتعلقة بالقيم العددية الصحيحة للمتغيرات واستبدالها بقيود تسمح لهذه المتغيرات بأن تأخذ قيما حقيقية والتي عادة ما نشير إليها باسم مسألة "البرمجة الخطية المخففة" (اختصارا "المسألة المخففة") المقابلة لمسألة "البرمجة الخطية العددية". ولذا ولكي يكون الكتاب متكاملا فقد قدمنا عرضا مختصرا لبعض الطرق ذات الصلة والمتّبعة في حل مسائل "البرمجة الخطية" في الفصل الأول من هذا الكتاب. ومع ذلك فإن حل مسألة "البرمجة الخطية المخففة"

المقابلة قد لا يوصل إلى حل دقيق لمسألة "البرمجة الخطية العددية" الأصلية (اختصارا "المسألة الأصلية") كما هو موضح في المثال التالي :

مثال (٢,٤)

بالعودة إلى مثال (٢,١) الخاص بعدد المشاريع البحثية الواجب انجازها لكل من "الأدوية" و"المنتج النباتي" فإن الحل الأمثل لمسألة "البرمجة الخطية المخففة" المقابلة لمسألة "البرمجة الخطية العددية" في مثال (٢,١) هو ($x_1 = 3\frac{1}{3}$ ، $x_2 = 3\frac{1}{3}$) وقيمته $Z = 166\frac{2}{3}$. أما مسألة البرمجة الخطية العددية في مثال(٢,١) وكما سنرى لاحقاً فإن لها حلان أمثليان هما ($x_1 = 2$ ، $x_2 = 4$) و($x_1 = 5$ ، $x_2 = 2$) وفيهما $Z = 160$. ولو قمنا بتدوير حل المسألة المخففة إلى الأعلى لحصلنا على الحل ($x_1 = 4$ ، $x_2 = 4$) ولو دورنا هذا الحل إلى الأسفل لحصلنا على الحل ($x_1 = 3$ ، $x_2 = 3$). ومع أن كلا من هذين الحلين هو حل ممكن "للمسألة الأصلية" إلا أن أيا من هذين الحلين الأخيرين غير قريب من أي من الحلين الأمثلين لمسألة البرمجة الخطية العددية الأصلية. ولكن، وكما سنرى، فإن حل "المسألة المخففة" يساعد في تسهيل عملية حل "المسألة الأصلية". ذلك لأن قيمة Z عند الحل الأمثل "للمسألة المخففة" هي بمثابة حد أعلى (حد أدنى) في مسائل التكبير (في مسائل التصغير) لقيمة Z في "المسألة الأصلية" وهذه القاعدة صحيحة دوما وليس في هذا المثال فقط.

ثمة فائدة أخرى يمكن أن نجنيها من حل "المسألة المخففة" هي أن إيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية العددية الأصلية يكلفنا أحيانا الكثير من الجهد والوقت يقودان إلى التضحية بقبول الحل الأمثل "للمسألة المخففة" المقابلة "للمسألة الأصلية"، بعد تقريبه إلى الأدنى، كحل تقريبي "للمسألة الأصلية". ومع ذلك فإن القبول بمثل هذه الحلول التقريبية قد يقود إلى حلول غير ممكنة "للمسألة الأصلية". وللتوضيح نسوق المثال التالي.

مثال (٢,٥)

لدينا مسألة البرمجة الخطية العددية التالية :

كبر الدالة :

$$Z = -2x_1 + x_2$$

وفقا للقيود :

$$9x_1 - 3x_2 \geq 11$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 \leq 7$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 أعداد صحيحة

إن الحل الأمثل للمسألة المخففة هو ($x_1 = 2.4762$ ، $x_2 = 3.7619$). أما الحل الأمثل للمسألة الأصلية فهو ($x_1 = 2$ ، $x_2 = 2$). فلو قمنا بتدوير حل المسألة المخففة (إلى الأدنى) لحصلنا على الحل ($x_1 = 2$ ، $x_2 = 3$) وهو حل غير ممكن للمسألة الأصلية إذ أنه لا يحقق القيد الأول لهذ المسألة.

سنستعرض فيما تبقى من هذا الفصل بعض الطرق الأساسية المستخدمة في حل مسائل "البرمجة الخطية العددية" وهي في الحقيقة كافية للمبتدئين والراغبين بأخذ فكرة موجزة عن كيفيية التعامل مع مسائل "البرمجة الخطية العددية" وحلها باستخدام مثل

هذه الطرق البسيطة. على أننا سنقدم تفاصيل أوسع وكذلك طرقا جديدة لحل مسائل "البرمجة الخطية العددية" في الجزء الثاني من هذا الكتاب.

(٢,٤) بعض طرق حل مسائل البرمجة الخطية العددية

سنستعرض في هذه الفقرة طريقتين أساسيتين وبسيطتين لحل مسائل "البرمجة الخطية العددية" هما "طرق التعداد" و "طريقة مستوي القطع".

(٢,٤,١) طرق التعداد

وتنقسم هذه الطرق إلى قسمين هما "طريقة التعداد الشامل" و "طريقة التعداد الضمني".

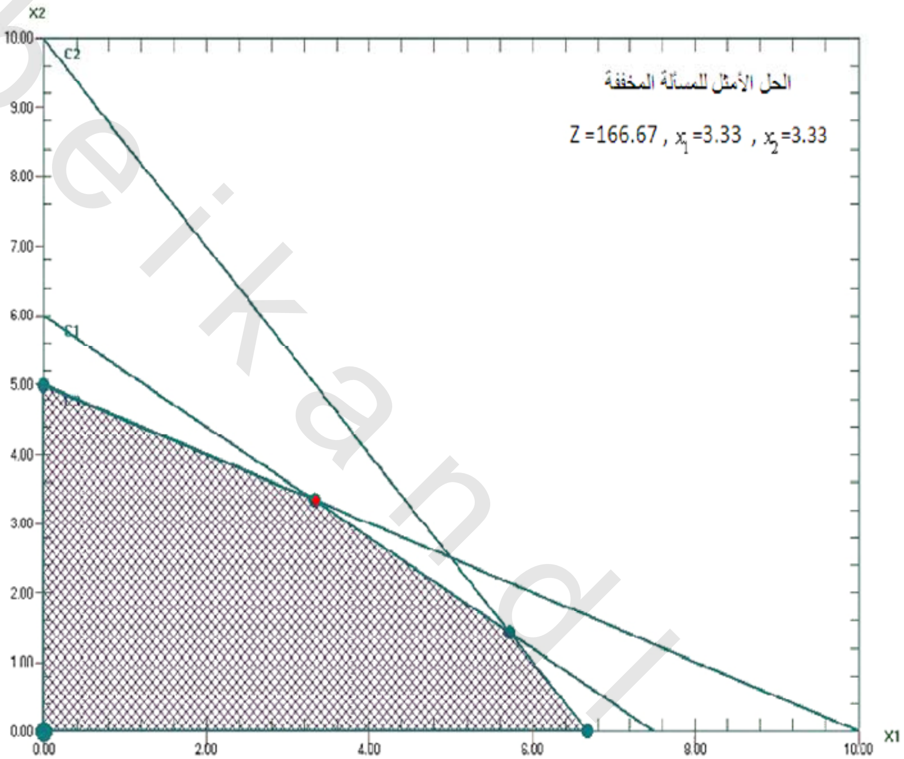
(٢,٤,١,١) طريقة التعداد الشامل

كما هو واضح من اسمها فإننا في هذه الطريقة نقوم بعملية تعداد تفصيلي وشامل لكافة الحلول الممكنة وحساب قيمة دالة الهدف عند كل حل ومن ثم مقارنة القيم الناتجة لنتمكن بعدها من اختيار الحل الأمثل. وسنوضح ذلك بالمثال التالي:

مثال (٢,٦)

بالعودة إلى مثال (٢,١) الخاص بعدد المشاريع البحثية الواجب إنجازها لكل من "الأدوية" و"المنتج النباتي" فإن فضاء الحل "للمسألة المخففة" معطى كما في الشكل رقم (٢,١). ومن هذا الشكل نجد أن القيم العددية الصحيحة الممكنة ل x_1 و x_2 هي $x_1 = 0,\dots,6$ و $x_2 = 0,\dots,5$. إذاً يوجد لدينا 7×6=42 حلا ممكنا (من الناحية النظرية) "للمسألة الأصلية". إلا أن بعض هذه الحلول لا يحقق واحد أو أكثر من قيود هذه المسألة. لذا فقد قمنا بتمثيل الحلول الفعلية الممكنة بنقاط كما في الشكل رقم (٢,٢) (انظر كذلك الجدول رقم ٢,٤) حيث أشرنا لذلك بنقاط في الحقول المقابلة). أما قيم دالة الهدف Z المقابلة لهذه الحلول فهي معطاة في الجدول رقم (٢,٤) وأكبرها 160

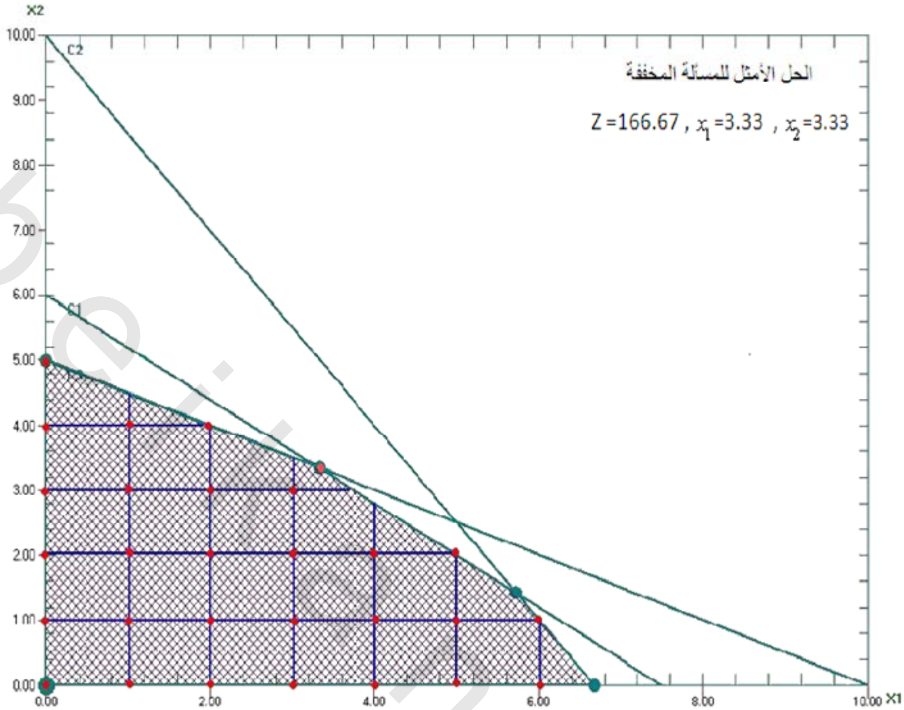
يقابل كلا من الحلين ($x_1 = 5$ ، $x_2 = 2$) و ($x_1 = 2$ ، $x_2 = 4$). فكل من هذين الحلين هو حل أمثلي "للمسألة الأصلية".



الشكل رقم (٢,١).

الجدول رقم (٢,٤). القيم الممكنة لمتغيرات المثال (٢,٦) وقيم دالة الهدف عند كل منها.

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	20	40	60	80	100	120
1	30	50	70	90	110	130	150
2	60	80	100	120	140	**160**	-
3	90	110	130	150	-	-	-
4	120	140	**160**	-	-	-	-
5	150	-	-	-	-	-	-



الشكل رقم (٢,٢).

وكما نعلم فإن إيجاد مثل هذا الرسم البياني غير ممكن عندما يكون عدد متغيرات المسألة أكثر من اثنين. وفي الحقيقة فإنه يمكن إيجاد كل القيم الممكنة لمتغيرات المسألة الأصلية بمتغيرين أو أكثر بعملية مسح شامل لكافة القيم التي تحقق قيود "المسألة الأصلية".

ففي مثالنا مثلا يمكننا الوصول إلى ما نريد كما يلي:

١- نضع $x_1 = 0$ فنلاحظ أن القيد الأول يقتضي أن $x_2 \leq 6$ وأن القيد الثاني يقتضي أن $x_2 \leq 10$ وأن القيد الثالث يقتضي أن $x_2 \leq 5$. وعندها نأخذ المتراجحة التي تحقق كافة هذه الاقتضاءات وهي $x_2 \leq 5$.

٢- نضع $x_1 = 1$ فنلاحظ أن القيد الأول يقتضي أن $x_2 \le 5.2$ وأن القيد الثاني يقتضي أن $x_2 \le 8.5$ وأن القيد الثالث يقتضي أن $x_2 \le 4.5$. وعندها نأخذ المتراجحة التي تحقق كافة هذه الاقتضاءات وهي $x_2 \le 4$.

٣- نضع $x_1 = 2$ فنلاحظ أن القيد الأول يقتضي أن $x_2 \le 4.4$ وأن القيد الثاني يقتضي أن $x_2 \le 7$ وأن القيد الثالث يقتضي أن $x_2 \le 4$. وعندها نأخذ المتراجحة التي تحقق كافة هذه الاقتضاءات وهي $x_2 \le 4$.

٤- نضع $x_1 = 3$ فنلاحظ أن القيد الأول يقتضي أن $x_2 \le 3.6$ وأن القيد الثاني يقتضي أن $x_2 \le 7$ وأن القيد الثالث يقتضي أن $x_2 \le 3.5$. وعندها نأخذ المتراجحة التي تحقق كافة هذه الاقتضاءات وهي $x_2 \le 3$.

٥- نضع $x_1 = 4$ فنلاحظ أن القيد الأول يقتضي أن $x_2 \le 2.8$ وأن القيد الثاني يقتضي أن $x_2 \le 4$ وأن القيد الثالث يقتضي أن $x_2 \le 3$. وعندها نأخذ المتراجحة التي تحقق كافة هذه الاقتضاءات وهي $x_2 \le 2$.

٦- نضع $x_1 = 5$ فنلاحظ أن القيد الأول يقتضي أن $x_2 \le 2$ وأن القيد الثاني يقتضي أن $x_2 \le 2.5$ وأن القيد الثالث يقتضي أن $x_2 \le 2.5$. وعندها نأخذ المتراجحة التي تحقق كافة هذه الاقتضاءات وهي $x_2 \le 2$.

٧- نضع $x_1 = 6$ فنلاحظ أن القيد الأول يقتضي أن $x_2 \le 1.2$ وأن القيد الثاني يقتضي أن $x_2 \le 1$ وأن القيد الثالث يقتضي أن $x_2 \le 2$. وعندها نأخذ المتراجحة التي تحقق كافة هذه الاقتضاءات وهي $x_2 \le 1$.

٨- نضع $x_1 = 7$ فنلاحظ أن القيد الأول يقتضي أن $x_2 \le 0.4$ وأن القيد الثاني يقتضي أن $x_2 \le -0.5$ وأن القيد الثالث يقتضي أن $x_2 \le 1.5$. وعندها نأخذ المتراجحة التي تحقق كافة هذه الاقتضاءات وهي $x_2 \le -0.5$. وهذه المتراجحة غير ممكنة الأمر الذي يدل على أن أية قيمة صحيحة ل x_1 أكبر من 6 ستؤدي إلى متراجحة غير ممكنة أيضا.

ومن ذلك نستنتج أن القيم العددية الصحيحة لكل من x_1 و x_2 هي $x_1 = 0,...,6$ و $x_2 = 0,...,5$. وبطريقة مماثلة، يمكننا الوصول إلى القيم العددية الصحيحة الممكنة أعلاه بتغيير قيم x_2 واستنتاج قيم x_1 المقابلة.

يتضح من المثال (٢,٦) أن الوقت والجهد اللازمين لإيجاد القيم العددية الصحيحة والممكنة لمتغيرات مسألة "برمجة خطية عددية" سيزداد بشكل عام بازدياد عدد متغيرات هذه المسألة وينقص بنقصانها.

ويظهر ذلك جليا في ما أسميناه مسائل "البرمجة الخطية العددية بمتغيرات ثنائية القيم" بشكل خاص حيث تأخذ المتغيرات إحدى القيمتين 0 أو 1 كما هو موضح في المثال التالي:

مثال (٢,٧)

ترغب شركة لتوريد الأطعمة السريعة ببناء مخزنيين لها في إحدى المدن الرئيسة وقد تقدم لها اثنين من المقاولين بعروض أسعار (بآلاف الريالات) لبناء هذين المخزنيين كما هي معطاة في الجدول رقم (٢,٥).

الجدول رقم (٢,٥). بيانات المثال(٢,٧).

المخازن	المقاول (١)	المقاول (٢)
1	319.875	330.375
2	295.875	290.250

ولكسب الزمن فقد قررت الشركة أن تكلف كل مقاول ببناء واحد فقط من المخزنيين. المطلوب صياغة هذه المسألة وتحديد كافة حلولها الممكنة والمثلى.

الحل

من الواضح أن قرار الشركة بالنسبة لأي من المقاولين وبخصوص أي من المخزنين هو أن تكلف هذا المقاول ببناء هذا المخزن أو ألا تكلفه بهذا البناء. ولذلك فإن متغيرات هذه المسألة هي متغيرات ثنائية القيم.

لنعرف هذه المتغيرات x_{ij} كما يلي:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{إذا تم تكليف المقاول } i \text{ ببناء المخزن } j \\ 0, & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

عندئذ يكون النموذج الرياضي لهذه المشكلة كما يلي:

صغر الدالة:

$$Z = 319.875x_{11} + 330.375x_{12} + 295.875x_{21} + 290.250x_{22}$$

وفقا للقيود:

$$x_{11} + x_{12} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} = 1$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} = 0,1$$

لنستعرض الآن كافة الحلول الممكنة بطريقة مماثلة لما عملناه في المثال السابق فنجد ما يلي :

١- نضع $x_{11} = 0$ عندئذ فإن القيد الأول يقتضي أن $x_{12} = 0$ ويقتضي القيد الثالث أن $x_{21} = 0$ وعندئذ فإن أيا من القيدين الثاني أو الرابع يقتضي أن $x_{22} = 0$. فالحل الأول الممكن للمسألة هو (0.1.1.0) وقيمته $Z = 626.25$.

٢- نضع $x_{11} = 1$ عندئذ فإن القيد الأول يقتضي أن $x_{12} = 0$ ويقتضي القيد الثالث أن $x_{21} = 0$ وعندئذ فإن أيا من القيدين الثاني أو الرابع يقتضي أن $x_{22} = 1$. فالحل الثاني الممكن للمسألة هو (1.0.0.1) وقيمته $Z = 610.125$.

وبما أن المسألة هي مسألة تصغير فإن الحل (1.0.0.1) هو الحل الأمثل للمسألة الأصلية.

(٢,٤,١,٢) طريقة التعداد الضمني

إن استخدام طريقة التعداد الشامل يبقى معقولا إذا كان العدد الكلي للحلول الممكنة "للمسألة الأصلية" هو عدد صغير نسبيا. إلا أن تطبيق هذه الطريقة يصبح غير ممكن من الناحية العملية إذا كان هذا العدد كبيرا. فمثلا ، لو كان لدينا مسألة "برمجة خطية عددية بمتغيرات ثنائية القيم" فيها 40 متغير لكان العدد الكلي للحلول الممكنة من الناحية النظرية مساويا 2^{40} وهو عدد كبير جدا. ومع أنه يمكن إنقاص هذا العدد لدرجة كبيرة باستخدام قيود المسألة (كما رأينا في المثال الأخير) إلا ان هذا العدد سيبقى كبيراً نسبيا. ومن الطرق التي تُجنبنا التعامل مع كافة الحلول هي "طريقة التعداد الضمني Implicit Enumeration Method". وتستخدم هذه الطريقة عدة أساليب لاستبعاد بعض الحلول. وسنوضح ذلك بالمثال التالي.

مثال (٢,٨)

بالعودة إلى مثال (٢,٥) والذي نورده ثانية لتسهيل متابعة ما سنقوم به من تحليلات.
كبر الدالة :

$$Z = -2x_1 + x_2$$

وفقا للقيود :

$$9x_1 - 3x_2 \geq 11$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 \leq 7$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

أعداد صحيحة x_1, x_2

سنوضح فيما يلي وسنستعرض بعض الطرق التي تستبعد بعض الحلول من أن تكون مرشحة كحل ممكن أو كحل أمثلي.

أ) الاستبعاد عن طريق إيجاد حدود لتحولات المتغيرات

باستخدام القيد الثاني والخامس نجد أن $0 \leq x_1 \leq 10$ و $0 \leq x_2 \leq 5$ فعدد الحلول الممكنة هو 66 حلا. ولكن عندما $x_2 = 0$ فإن القيد الأول يقتضي $x_1 \geq 2$.
وعندما $x_2 = 5$ فإن القيد الثالث يقتضي $x_1 \leq 6$.
فنكون بذلك قد أنقصنا عدد الحلول إلى 30 حل.

ب) الاستبعاد عن طريق عمل توفيقات خطية من القيود

بجمع القيد الثاني والثالث نحصل على القيد $3x_1 + x_2 \le 17$. وعندما $x_2 = 0$ نجد أن $3x_1 \le 17$ ومنها $x_1 \le 5$. ولو ضربنا القيد الأول ب (-1) والقيد الثاني ب 4 وجمعنا الناتج لحصلنا على القيد $9x_2 \le 35$ والذي ينتج عنه $x_2 \le 3$. فنكون بذلك قد أنقصنا عدد الحلول إلى 16 حل.

ج) الاستبعاد عن طريق إيجاد حدود لقيم دالة الهدف

إن أخر ما وصلنا إليه هو $0 \le x_2 \le 3$ و $2 \le x_2 \le 5$. فلو أخذنا أحد هذه الحلول، مثلا لو أخذنا الحل $x_1 = 2, x_2 = 3$ لكان $Z = -4$. لذا يجب أن يكون $-2x_1 + x_2 \ge -4$ وبما أن $x_2 \le 3$ فإن $2x_1 \le 7$ وبالتالي $x_1 \le 3$. فعدد الحلول قد نقص إلى 8 حلول فقط وهي مجموعة الحلول التالية $F_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 = 2,3 \;\; ; x_2 = 0,1,2,3\}$. كذلك فإن كلا من الحلين (3.1) و(3.0) مستبعدان ؛ لأن قيمة دالة الهدف عند كل منهما أقل من -4. وبذلك ينقص عدد الحلول إلى 6.

د) الاستبعاد عن طريق استخدام القيمة المثلى لدالة الهدف " للمسألة المخففة "

كما وجدنا سابقاً فإن القيمة المثلى لدالة الهدف "للمسألة المخففة" هي $Z = -1\frac{4}{21}$ لذا يجب أن يكون $-2x_1 + x_2 \le -2$ " للمسألة الأصلية " أي $Z \le -2$. ولذا يمكننا استبعاد الحل (2.3). يبقى لدينا إذاً مجموعة من 5 حلول فقط هي $F_2 = \{(2,0),(2,1),(2,2),(3,2),(3,3)\}$ وعندها نجد أن قيم دالة الهدف Z هي $-4,-3,-2,-4,-3$ على التوالي. وبذلك يكون الحل الأمثل هو $(2,2)$ وقيمته $Z = -2$.

(٢,٤,٢) طريقة مستوي القطع

وتعتبر هذه الطريقة أحد أهم الطرق المستخدمة في حل مسائل "البرمجة الخطية العددية". فوفقاً لهذه الطريقة، نقوم أولا بحل ما أسميناه "المسألة المخففة" فإذا كان الحل الأمثل الناتج لها هو أعداد صحيحة نتوقف وعندئذ يكون هذا الحل هو الحل الأمثل

"للمسألة الأصلية". أما إذا كان الحل الأمثل الناتج "للمسألة المخففة" غير ذلك (أي أن قيمة واحد أو أكثر من المتغيرات هو عدد غير صحيح) فإننا نضيف قيدا جديدا نسميه "مستوي قطع Cutting Plane " بحيث إن هذه الإضافة تسقط أو تعزل الحل الأمثل " للمسألة المخففة" لكنها تحافظ على جميع الحلول الممكنة "للمسألة الأصلية" ونسمي المسألة الناتجة باسم "المسألة المعدلة Modified Problem ". بعد ذلك نقوم بإعادة حل المسألة المخففة "للمسألة المعدلة" بعد إضافة "مستوى قطع" ونكرر العمل حتى نصل إلى حل تكون فيه كافة قيم المتغيرات أعداداً صحيحة فيكون هذا الحل هو حل أمثل "للمسألة الأصلية". ولتوضيح هذه الطريقة نسوق المثال البسيط التالي:

مثال (٢,٩)

كبر الدالة:

$$Z = 20x_1 + 30x_2$$

وفقا للقيود:

$$3x_1 + 4x_2 \le 23$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

x_1, x_2 أعداد صحيحة

المطلوب إيجاد الحل الأمثل بطريقة مستوي القطع.

الحل

إن فضاء الحل للمسألة المخففة معطى كما في الشكل رقم (٢,٣). ومنه نجد أن الحل الأمثل لهذه المسألة هو النقطة $\left(x_1 = 0, x_2 = 5\frac{3}{4}\right)$ وقيمته Z=172.5. ومن فضاء

الحل للمسألة المخففة نجد أن فضاء الحل للمسألة الأصلية معطى كما في الشكل رقم (٢،٤) ومنه نستنتج أن $x_2 \leq 5$. فلو أضفنا مستوي القطع $x_2 = 5$ لأصبحت المسألة المعدلة كما يلي:

كبر الدالة:

$$Z = 20x_1 + 30x_2$$

وفقا للقيود:

$$3x_1 + 4x_2 \leq 23$$

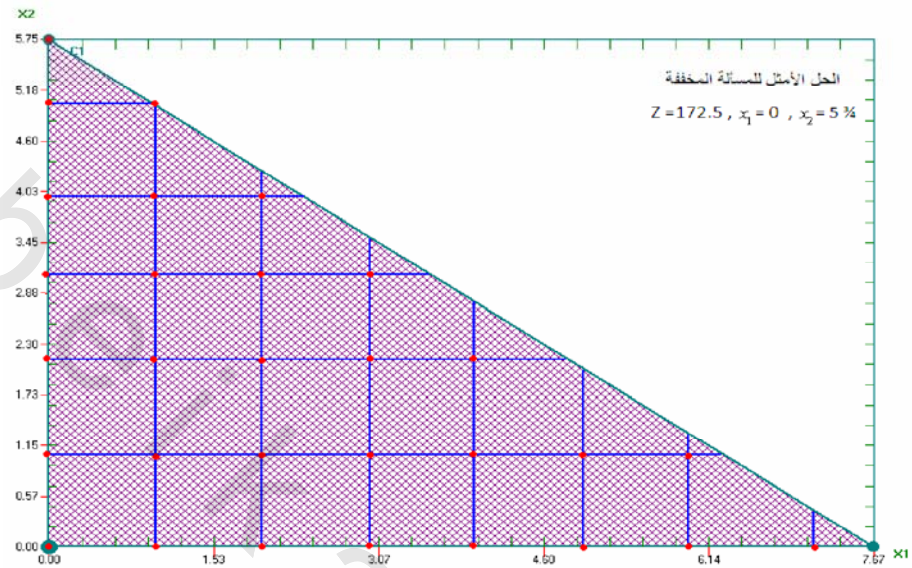
$$x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

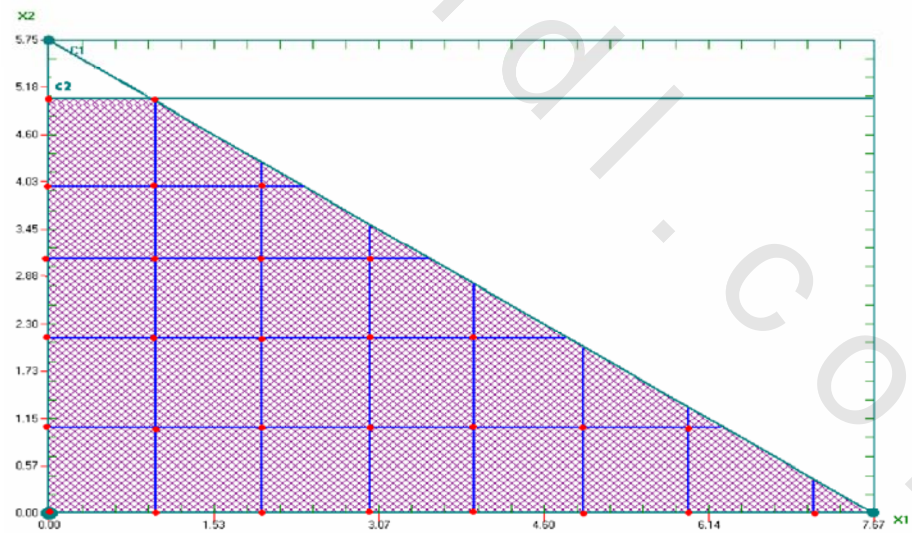
x_1, x_2 أعداد صحيحة

ويمكننا التحقق من أن الحل الأمثل للمسألة المخففة للمسألة المعدلة هو $(x_1 = 1, x_2 = 5)$. ونظرا لأن هذا الحل يحقق المطلوب فهو الحل الأمثل للمسألة الأصلية وقيمته $Z = 170$.

كما نلاحظ فإن هذه الطريقة قد تستغرق وقتا وجهدا كبيرين في المسائل الأكثر تعقيدا كتلك التي تملك قيودا و/أو متغيرات كثيرة. ولذا فإن طرق التعداد الضمني هي الأكثر فاعلية في مثل هذه الحالات.



الشكل رقم (٢,٣).



الشكل رقم (٢,٤).

(٢,٥) تمارين (٢)

١– صنف المسائل التالية من حيث كونها مسألة "*برمجة خطية عددية صرفة*" أو مسألة "*برمجة خطية عددية مختلطة*" أو مسألة "*برمجة خطية عددية بمتغيرات ثنائية القيم*" أو مسألة "*برمجة خطية*".

(أ) كبر الدالة:

$$Z = x_1 + x_2$$

وفقا للقيود:

$$3x_1 + 2x_2 \le 20$$

$$4x_1 + x_2 \le 50$$

$$x_1, x_2 = 0,1$$

(ب) صغر الدالة:

$$Z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

وفقا للقيود:

$$x_1 + x_2 + x_3 \ge 3$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 18$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

x_1 عدد صحيح

(ج) صغر الدالة :

$$Z = 4x_1 + 5x_2$$

وفقا للقيود :

$$2x_1 + 3x_2 \geq 40$$

$$6x_1 + 2x_2 \geq 30$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

(د) كبر الدالة :

$$Z = 3x_1 + 7x_2$$

وفقا للقيود :

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$8x_1 + 9x_2 \leq 100$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

x_1 , x_2 أعداد صحيحة

٢- تقوم شركة بتجميع نوعين من السيارات بطريقة تمرير القطع المتنوعة لهذه السيارات على أربع مكائن لتجميع القطع المختلفة لكل نوع. تحتاج كل سيارة من نوعي السيارات إلى عدد من الساعات على كل من المكائن الأربع التي يتوافر لكل منها عددا معينا من ساعات العمل البشري في الشهر. البيانات معطاة في الجدول رقم (٢,٦). قدرت الشركة أنها ستربح 6 آلاف ريال لكل سيارة من أي من النوعين وترغب الشركة بمعرفة عدد السيارات التي ستنتجها من كل نوع في الشهر بحيث يحقق لها ذلك أكبر ربح ممكن. المطلوب صياغة هذه المسألة ومن ثم إيجاد الحل الأمثل للشركة.

الجدول رقم (٢,٦).

المكائن	احتياج السيارة من ساعات العمل البشري النوع (1)	النوع (2)	المتوافر من ساعات العمل من القوى البشرية شهريا
A	200	500	3400
B	100	200	1450
C	200	300	2000
D	400	100	2400

٣- تقوم شركة بإنتاج نوعين من المنتجات عبر أربعة أقسام. تحتاج كل وحدة من نوعي المنتجات إلى عدد من الساعات في كل من الأقسام الأربعة التي يتوافر لكل منها عددا معينا من ساعات العمل البشري في الشهر. البيانات معطاة في الجدول رقم (٢,٧). قدرت الشركة أنها ستربح 8 آلاف ريال لكل وحدة من المنتج (1) و12 آلف ريال لكل وحدة من المنتج (2). ولأسباب تتعلق بطبيعة المنتج (1) فإنه لابد من إنتاج عدد صحيح من الوحدات منه، بينما يمكن إنتاج أي عدد من المنتج (2). ترغب الشركة بمعرفة عدد الوحدات التي ستنتجها من كل نوع في الشهر بحيث يحقق لها ذلك أكبر ربح ممكن. المطلوب صياغة هذه المسألة ومن ثم إيجاد الحل الأمثل للشركة.

الجدول رقم (٢,٧).

الأقسام	احتياج المنتج من ساعات العمل البشري		المتوافر من ساعات العمل من القوى البشرية شهريا
	المنتج (1)	المنتج (2)	
1	400	200	3700
2	300	200	3000
3	100	200	1700
4	200	500	4100

٤- ترغب شركة مقاولات بتعهد بعض المشاريع من بين أربعة مشاريع معروضة، لكل منها تكلفته الخاصة وربح متوقع به كما هو معطى في الجدول رقم (٢,٨).

الجدول رقم (٢,٨).

المشروع	1	2	3	4
التكلفة بملايين الريالات	1.8	2.6	2.1	3.0
الربح المتوقع بملايين الريالات	3.4	5.3	3.7	6.0

ترغب الشركة بمعرفة المشاريع الواجب تعهدها بحيث يحقق لها ذلك أكبر ربح ممكن. المطلوب صياغة هذه المسألة وإيجاد الحل الأمثل للشركة إذا علمت أنه يتوافر للشركة 4.8 ملايين ريال فقط لإنفاقها على المشاريع التي ستتعهدها.

٥- ترغب إحدى وزارات الدولة بتطوير ثلاثة مشاريع قائمة خلال مدة 3 سنوات، ولكل منها تكلفته السنوية الخاصة ولكل سنة ميزانيتها الخاصة المرصودة لهذا الغرض كما هو معطى في الجدول رقم (٢,٩). (الأرقام بملايين الريالات)

الجدول رقم (٢,٩).

المشروع	السنة (1)	السنة (2)	السنة (3)
1	1.8	2.0	2.2
2	2.4	2.1	2.0
3	2.1	2.3	4.7
المبلغ المرصود للتطوير	4.6	4.6	4.7

ترغب الشركة بمعرفة المشاريع الواجب تطويرها بحيث يحقق لها ذلك أكبر ربح ممكن. إذا علمت أن الأرباح المتوقعة من تطوير المشاريع (1)، (2)، (3) هي 800000، 700000، 850000 على الترتيب فالمطلوب.

أ) صياغة هذه المسألة على شكل مسألة برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم ثم إيجاد حلها الأمثل.

ب) اكتب المسألة المخففة لهذه المسألة.

٦- يتوافر لمدير الإعلانات في إحدى الشركات أربع فرص للإعلان وهي: في الفضائيات، في المذياع، في الصحف، وفي المجلات. لكل من هذه الفرص تكاليفها (بمئات الآلاف من الريالات) الخاصة بها كما أن لكل منها عددا متوقعا (بالملايين) من الناس الذين يصل إليهم الإعلان حسبما هو مبين في الجدول رقم (٢,١٠). يتوافر لمدير الإعلانات ميزانية قدرها مليون ريال ويرغب في اختيار وسائل الإعلان المناسبة والتي من شأنها أن تجعل العدد الكلي من الناس الذين تصل إليهم وسيلة الإعلان أكبر ما يمكن. المطلوب إيجاد السياسة المثلى للإعلان الواجب على المدير إتباعها.

الجدول رقم (٢,١٠).

	الفضائيات	المذياع	الصحف	المجلات
التكلفة	4.7	3.4	2.5	2.8
العدد المتوقع من الناس الذين تصل إليهم وسيلة الإعلان	2.5	1.8	1.3	1.4

٧- لديك مسائل البرمجة الخطية العددية التالية:

(أ) كبر الدالة:

$$Z = 2x_1 + 3x_2$$

وفقا للقيود:

$$12x_1 + 16x_2 \le 71$$

$$4x_1 \ge 13$$

$$2x_2 \ge 7$$

$$x_1 , x_2 \ge 0$$

x_1 , x_2 أعداد صحيحة

(ب) كبر الدالة:

$$Z = 4x_1 + x_2$$

وفقا للقيود:

$$2x_1 + x_2 \le 5$$

$$2x_1 + 3x_2 = 5$$

$$x_1 , x_2 \ge 0$$

x_1 , x_2 أعداد صحيحة

(ج) كبر الدالة :

$$Z = x_1 + x_2$$

وفقا للقيود :

$$-2x_1 + 2x_2 \le 1$$

$$16x_1 - 14x_2 \le 7$$

$$x_1 , x_2 \ge 0$$

x_1 , x_2 أعداد صحيحة

(د) كبر الدالة :

$$Z = -4x_1 + 6x_2$$

وفقا للقيود :

$$-x_1 + x_2 \le 1$$

$$x_1 + 3x_2 \le 9$$

$$3x_1 + x_2 \le 15$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

x_1 , x_2 أعداد صحيحة

المطلوب لكل مسألة ما يلي :

أ) رسم فضاء الحل للمسألة المخففة ومن ثم تحديد الحل الأمثل بيانيا (من الرسم).

ب) رسم فضاء الحل للمسألة الأصلية.

ج) تحديد جميع الحلول الممكنة للمسألة الأصلية دون استخدام الرسم الذي حصلت عليه في (٢).

د) تحديد الحل الأمثل وقيمته للمسألة الأصلية ومقارنته بالحل الأمثل وقيمته للمسألة المخففة.

ماذا تلاحظ ؟

٨- لديك مسألة البرمجة الخطية العددية التالية

(أ) كبر الدالة :

$$Z = x_1 + x_2$$

وفقا للقيود :

$$12x_1 + 16x_2 \leq 71$$

$$x_1 \leq 1.5$$

$$x_2 \le 1$$

$$x_1 , x_2 \ge 0$$

x_1 , x_2 أعداد صحيحة

(أ) هل $x_1 \le 1.25$ هو مستوى قطع ملائم؟

(ب) هل $x_1 \le 0.5$ هو مستوى قطع ملائم؟

برر إجابتك في الحالتين.