الفصل الرابع

النماذج المتقدمة

(٤,١) مقدمة

قدمنا في الفصل الثالث بعضاً من نماذج البرمجة الخطية العددية البسيطة وبعضا من تطبيقاتها في كثير من المسائل التي نواجهها في الحياة العملية. وقد اتصفت هذه النماذج ببساطتها النسبية من حيث الصياغة وطريقة الحل. سنقدم في هذا الفصل المزيد من النماذج التي يمكن صياغتها أيضا كنماذج برمجة خطية عددية ولكنها أكثر تعقيدا من سابقتها. وستكون مجمل النماذج المقدمة في الفصلين الثالث والرابع شاملة نسبيا لمعظم النماذج والتطبيقات العملية التي يمكن صياغتها وحلها كمسائل وتطبيقات للبرمجة الخطية العددية.

(٤,٢) مسألة التخصيص التربيعية
Quadratic Assignment Problem

تعتبر هذه المسألة امتدادا للمسألة (٣,٣,٦) من الفصل الثالث وفق الفرضيات التالية: لدينا n من المواقع المحتملة والتي نرغب أن نبني بها m من المنشآت (معامل أو مصانع... الخ) حيث m أصغر من أو تساوي n. لنفترض أن c_{ij} هي تكلفة نقل الوحدة من الموقع i إلى الموقع j ، وأن d_{kl} هي الكمية المنقولة من المنشأة i إلى المنشأة j عندئذ تكون متغيرات القرار هي:

$$x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم تخصيص المنشأة } k \text{ إلى الموقع } i \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

حيث $\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = 1$ من أجل $k = 1,2,\cdots,m$ وكذلك $\sum_{k=1}^{m} x_{ik} \le 1$ من أجل $i = 1,2,\cdots,n$. وعندئذ، إذا تم تخصيص المنشأة k إلى الموقع i والمنشأة l إلى الموقع j فإن تكلفة النقل المقابلة لذلك هي $c_{ij}d_{lk} + c_{ji}d_{lk}$.

وبذلك يكون النموذج الرياضي لهذه المسألة كما يلي:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{m} c_{ij} d_{kl} x_{ik} x_{jl}$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = 1, \quad k = 1,2,\cdots,m$$

$$\sum_{k=1}^{m} x_{ik} \le 1, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

$$x_{ik} = 1 \text{ أو } 0, \quad i = 1,\cdots,n;\ j = 1,\cdots,m$$

ويدل القيد الأول على أن كل منشأة ستبنى في واحد فقط من المواقع، في حين يدل القيد الثاني على أن كل موقع سيشغل في واحدة على الأكثر من المنشآت.

وسنوضح هذه المسألة من خلال المثال التطبيقي التالي:

مثال (٤,١) مسألة التخصيص التربيعية لسوق تجارية

عند تصميم سوق تجاري جديد فإننا نحتاج عادة إلى اختيار مواقع لمجموعة من الوحدات المختلفة (مثل المكاتب والمتاجر والأقسام والمخازن ... إلخ) في هذا السوق من بين

جملة من المواقع الممكنة التي تناسب كل منها ، وتكون مسألتنا عندها هو أن نقرر الوحدة التي سنخصصها لكل موقع. وما يهمنا في مثل هذه الحالات عادة هو جعل مجموع المسافات التي سيقطعها الزبائن للتنقل بين الوحدات المختلفة أقل ما يمكن. وللتبسيط نفرض أن لدينا أربعة مواقع ممكنة نريد أن نشغلها بأربع وحدات مختلفة ولنفرض أن المسافات (بالأقدام) بين هذه المواقع الأربعة معطاة كما في الجدول رقم (٤,١).

الجدول رقم (٤,١).

المواقع	1	2	3	4
1	–	80	150	170
2	80	–	130	100
3	150	130	–	120
4	150	100	120	–

ولنفرض أن الوحدات التي نرغب بتخصيصها لهذه المواقع الأربعة هي سوق شامل (سوبر ماركت)، سوق حاسبات، سوق ألعاب، مكتبة شاملة، وأن العدد المتوقع للزبائن الذين سيتنقلون أسبوعيا بين هذه المواقع (الزبائن المشتركة بين المواقع) معطى كما في الجدول رقم (٤,٢).

الجدول رقم (٤,٢).

الوحدة	**الزبائن المشتركة (بالآلف) بين الوحدات**			
	1	**2**	**3**	**4**
1. سوق شامل	–	5	2	7
2. سوق حاسبات	5	–	3	8
3. سوق ألعاب	2	3	–	3
4. مكتبة شاملة	7	8	3	–

فمثلا، الرقم 5 مقابل وحدة السوق الشامل (الموقع 1) ووحدة سوق الحاسبات (الموقع2) في الجدول رقم (٤،٢) يعني أن خمسة آلاف زبون بالمتوسط سيزورون كلا من هاتين السوقين في الأسبوع. وبالعودة للجدول رقم (٤،١) نجد أن ذلك يقابل مسافة قدرها 5×80 =400 ألف قدم. ومن الواضح أن متغيرات القرار في مثل هذه المسألة هي المتغيرات الثنائية القيم التالية:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا خصصت الوحدة } i \text{ إلى الموقع } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ووفقا للبيانات في الجدولين رقمي (٤،١) و(٤،٢) يكون النموذج الرياضي لهذه المسألة كما يلي:

صغر الدالة:

$$\begin{aligned}
Z = {} & 5(80x_{11}x_{22} + 150x_{11}x_{23} + 170x_{11}x_{24} + 80x_{12}x_{21} + 130x_{12}x_{23} + 100x_{12}x_{24} \\
& + 150x_{13}x_{21} + 130x_{13}x_{22} + 120x_{13}x_{24} + 170x_{14}x_{21} + 100x_{14}x_{22} + 120x_{14}x_{23}) \\
& + 2(80x_{11}x_{32} + 150x_{11}x_{33} + 170x_{11}x_{34} + 80x_{12}x_{31} + 130x_{12}x_{33} + 100x_{12}x_{34} \\
& + 150x_{13}x_{31} + 130x_{13}x_{32} + 120x_{13}x_{34} + 170x_{14}x_{31} + 100x_{14}x_{32} + 120x_{14}x_{33}) \\
& + 7(80x_{11}x_{42} + 150x_{11}x_{43} + 170x_{11}x_{44} + 80x_{12}x_{41} + 130x_{12}x_{43} + 100x_{12}x_{44} \\
& + 150x_{13}x_{41} + 130x_{13}x_{42} + 120x_{13}x_{44} + 170x_{14}x_{41} + 100x_{14}x_{42} + 120x_{14}x_{43}) \\
& + 3(80x_{21}x_{32} + 150x_{21}x_{33} + 170x_{21}x_{34} + 80x_{22}x_{31} + 130x_{22}x_{33} + 100x_{22}x_{34} \\
& + 150x_{23}x_{31} + 130x_{23}x_{32} + 120x_{23}x_{34} + 170x_{24}x_{31} + 100x_{24}x_{32} + 120x_{24}x_{33}) \\
& + 8(80x_{21}x_{42} + 150x_{21}x_{43} + 170x_{21}x_{44} + 80x_{22}x_{41} + 130x_{22}x_{43} + 100x_{22}x_{44} \\
& + 150x_{23}x_{41} + 130x_{23}x_{42} + 120x_{23}x_{44} + 170x_{24}x_{41} + 100x_{24}x_{42} + 120x_{24}x_{43}) \\
& + 3(80x_{31}x_{42} + 150x_{31}x_{43} + 170x_{31}x_{44} + 80x_{32}x_{41} + 130x_{32}x_{43} + 100x_{32}x_{44} \\
& + 150x_{33}x_{41} + 130x_{33}x_{42} + 120x_{33}x_{44} + 170x_{34}x_{41} + 100x_{34}x_{42} + 120x_{34}x_{43})
\end{aligned}$$

وفقا للقيود:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \qquad \text{(الوحدة 1)}$$

(الوحدة 2) $x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1$

(الوحدة 3) $x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1$

(الوحدة 4) $x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1$

(الموقع 1) $x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1$

(الموقع 2) $x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1$

(الموقع 3) $x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1$

(الموقع 4) $x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1$

$x_{ik}=1$ أو $0, \quad i,j=1,\cdots,4$

وكما نلاحظ فإن دالة الهدف Z تمثل مجموع المسافات المقطوعة من كافة الأزواج الممكنة لوحدات السوق إلى كافة المواقع المخصصة والممكنة.

فمثلا يعبر الحد الأول

$$\begin{aligned}5(&80x_{11}x_{22}+150x_{11}x_{23}+170x_{11}x_{24}+80x_{12}x_{21}+130x_{12}x_{23}+100x_{12}x_{24}\\&+150x_{13}x_{21}+130x_{13}x_{22}+120x_{13}x_{24}+170x_{14}x_{21}+100x_{14}x_{22}+120x_{14}x_{23})\end{aligned}$$

من الدالة Z أعلاه عن مجموع المسافات المقطوعة من كافة الزبائن بين الوحدة الأولى وباقي الوحدات ابتداء من الوحدة الثانية وحتى الوحدة الرابعة ذلك أن الزبائن الذين يصلون إلى وحدة ما قد ينتقلون إلى أية وحدة أخرى من تلك التي وصلوا إليها، وهكذا نفهم بقية حدود هذه الدالة. أما القيود الثمانية الأولى فتفيد بأنه تم تخصيص كل وحدة لواحد فقط من المواقع وكل موقع لواحدة فقط من الوحدات.

(٤,٣) مسائل التوافق
Matching Problems

إن مسائل التخصيص البسيطة والعامة التي تم استعراضها في الفصل الثالث ومسألة التخصيص التربيعية التي تحدثنا عنها في الفقرة السابقة تقسم الأشياء لصنفين مختلفتين وفقا للمعيار"خصص أو لا تخصص".

وتعتبر مسائل التوافق التي نحن بصددها في هذه الفقرة أعم من مسائل التخصيص هذه، حيث نهدف إلى تحقيق التوافق بين الأشياء التي تأتي من صنف واحد. ومثال ذلك عمليات التوافق بين سماعات الحاسبات الشخصية. إن متغيرات القرار في مسائل التوافق تكون على النحو التالي:

$$x_{ii'} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم التوافق بين } i \text{ و } i' \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ولتجنب التكرار فإننا سنفرض $i' > i$. فإذا فرضنا أن $c_{ii'}$ هو العائد (تكلفة أو ربح) الناتج من توافق i مع i'، فإن النموذج الرياضي لمسائل التوافق يصبح على الشكل التالي:

صغر (أو كبر) الدالة:

$$Z = \sum_{i} \sum_{i'>i}^{m} c_{ii'} x_{ii'}$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{i'<i} x_{i'i} + \sum_{i'>i}^{m} x_{ii'} = 1 \text{ ،} \qquad \text{لجميع قيم } i$$

$$x_{ii'} = 1 \text{ أو } 0 \qquad , \quad \text{من أجل جميع } i \text{ و } i' > i$$

لاحظ أن دالة الهدف تمثل مجموع تكلفة أو ربح لعمليات التوافق. إن السبب في استخدام كلا من $i'>i$ و $i'<i$ في القيود يعود إلى أنه في عملية التوافق بين i و i' فإنه قد يكون $i'>i$ لبعض أزواج التوافق و $i'<i$ لبعضها الأخر.

(٤,٤) مسألة البائع المتجول

Traveling Salesman Problem (TSP)

تتلخص مسألة البائع المتجول في أن شخصا ما (بائع مثلا) يرغب بزيارة n مدينة مختلفة ابتداءً من مدينته (مسقط رأسه) بحيث يزور كل من هذه المدن مرة واحدة فقط ليعود أخيرا إلى بيته (مدينته التي بدأ منها) بأقصر طريق ممكنة. سنرمز للمسافة بين المدينتين (i,j) ، وهي مسافة معلومة، بالرمز c_{ij}. فإذا كانت المسافة المقطوعة بين المدينتين (i,j) تساوي المسافة المقطوعة بين المدينتين (j,i) أي إذا كان $c_{ij}=c_{ji}$ قلنا عن المسألة إنها *متناظرة* (*Symmetric*) وإلا قلنا عنها إنها *غير متناظرة* (*Asymmetric*). وعندما يتعذر الذهاب من المدينة i إلى المدينة j جاز لنا أن نضع c_{ij} مساوية لقيمة كبيرة جدا أو أن نحذف المتغيرات المقابلة من النموذج الرياضي للمسألة. وفي جميع الحالات تصبح المسألة هي: إيجاد الطريق (المثلى) التي تجعل مجموع المسافات التي يقطعها البائع المتجول بين المدن (ابتداء من مدينته والعودة إليها) أقل ما يمكن.

(٤,٤,١) صياغة مسألة البائع المتجول غير المتناظرة كمسألة برمجة عددية.

ILP Formulation of the Asymmetric (TSP)

كما أشرنا أعلاه فإن عدم التناظر في مسألة البائع المتجول تعني أن $c_{ij}\neq c_{ji}$ بالضرورة. وباستخدام المتغيرات الثنائية القيم التالية:

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{إذا تم استخدام الطريق من المدينة } i \text{ إلى المدينة } j \text{ في الجولة}\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

يصبح *"النموذج الرياضي المبدئي للمسألة* "غير المتناظرة" شبيها بنموذج مسائل التخصيص وهو كما يلي :

صغر الدالة :

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad \text{(مجموع المسافات المقطوعة)}$$

وفقا للقيود :

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$x_{ij} = 1 \;\text{ أو }\; 0, \quad i = 1, \cdots, n; \; j = 1, \cdots, n$$

وكما نلاحظ فإن المجموعة الأولى من القيود تضمن بأن البائع سيمر في كل مدينة مرة واحدة فقط ، بينما تضمن المجموعة الثانية من القيود بأن البائع سيغادر كل مدينة مرة واحدة فقط. إن تسميتنا للنموذج بأنه *"مبدئي"* يعود إلى أنه *لا يضمن* لنا *"الارتباط"* بين عقده ، إذ أنه قد يؤدي إلى حلول على شكل جولة جزئية (Sub-tour) والتي نعني بها بأنها مجموعة من العقد (المدن) التي تبدأ وتنتهي بنفس العقدة ولكنها لا تمر إلا بمجموعة جزئية من ال n عقدة. فمثلا ، لو أخذنا الشكل رقم (٤،١) الذي يحوي جولتين جزئيتين وتذكرنا تعريف المتغيرات الثنائية القيم فإنه يمكننا التخلص من مثل هذه الجولات الجزئية بأن نضيف القيود التالية :

$$\begin{aligned} x_{78} + x_{89} + x_{97} &\leq 2 \\ x_{12} + x_{23} + x_{34} + x_{45} + x_{56} + x_{61} &\leq 5 \end{aligned}$$

ويمكننا التخلص من مثل هذه الإشكاليات بأن نقرن متغيرا u_i بكل مدينة i ثم نضيف القيود التالية :

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n-1, \quad i, j = 2, \cdots, n; \quad i \neq j$$

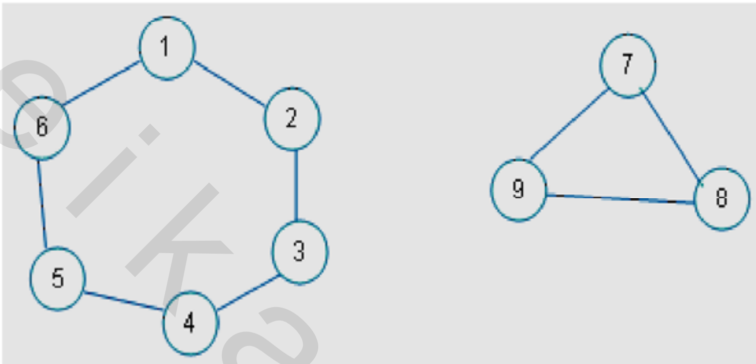
وعندئذ فإن أي حل يحتوي على جولة جزئية لن يحقق القيود الأخيرة. ولإثبات ذلك لنأخذ أي جولة جزئية لا تحوي مدينة (البائع المتجول) البداية فنلاحظ عندها أنه لو جمعنا جميع المتراجحات المقابلة للقيود الأخيرة والتي يكون فيها $x_{ij} = 1$ في مثل هذه الجولة الجزئية ، فإن الحدود التي من الشكل $a_i - a_j$ تفني بعضها البعض لنصل في النهاية إلى المتراجحة التالية $nN \leq (n-1)N$ حيث N هي عدد الأضلاع في الجولة الجزئية المأخوذة ، وهي متراجحة غير صحيحة مما يدل على صحة الاستنتاج الذي نريد. ولتوضيح ذلك عمليا نعود إلى الشكل رقم (٤,١) فنجد أن القيود الأخيرة المقابلة للجولة الجزئية $9 \to 8 \to 7$ هي $u_7 - u_8 + 9 \leq 8$ ، $u_8 - u_9 + 9 \leq 8$ ، و $u_9 - u_7 + 9 \leq 8$ ، والتي تقود إلى المتراجحة غير الصحيحة $27 \leq 24$. من جهة ثانية ، يمكن لهذه القيود أن تتحقق عندما لا يكون هناك جولات جزئية. لبيان ذلك لنفرض أن $a_i = k$ إذا كانت المدينة i هي المدينة رقم k في ترتيب الزيارة في جولة البائع عندئذ : عندما يكون $x_{ij} = 1$ نجد أن $a_i - a_j + n = k - (k+1) + n = n-1$.
وبما أن $1 \leq a_i \leq n \ (i = 2, \cdots, n)$ فإن الفرق $a_i - a_j$ يكون دائما أقل من أو يساوي $n-1$ لكل الأزواج (i, j) وبالتالي فإن القيود تكون محققة عندما يكون $x_{ij} = 0$.

ثمة طريقة أخرى لإلغاء الجولات الجزئية وذلك بإضافة قيود من الشكل التالي :

من أجل كل المجموعات S التي تحقق $1 \leq |S| \leq n-1$ فإن $\sum_{(i,j) \in (S \times \bar{S})} x_{ij} \geq 1,$

حيث تمثل S مجموعة جزئية حقيقية من المدن التي سيمر بها البائع. وللقيد الأخير الدلالة بأن كل جولة يجب أن تصل بين نقاط من S ونقاط خارج S مرة واحدة على

الأقل. فعلى سبيل المثال، لو أخذنا الشكل(٤،٢)، والذي يبين عملية الربط بين 6 نقاط، فيمكننا تجنب الجولات الجزئية بين نقاط المجموعة $S=\{1,3,5\}$ وذلك بأن نضيف قيدا يضمن لنا شطب الجولات الجزئية وهذا القيد هو $x_{12}+x_{34}+x_{56}\ge 1$.



الشكل رقم (٤،١).

ثمة طريقة ثالثة للتخلص من الجولات الجزئية هي بإضافة قيود من الشكل التالي أجل كافة المجموعات S التي تحقق $2\le |S|\le \frac{n}{2}$ *فإن* $\sum_{(i,j)\in S\times S} x_{ij}\le |S|-1$. فمثل هذا القيد الأخير سيمنع تشكل جولات جزئية أو دورات بحجم أقل من n . ويعود السبب في ذلك إلى أن أي جولة جزئية مستخلصة من عقد من المجموعة الجزئية S يجب أن تحوي $|S|$ بالضبط من أضلاع الربط بين العقد. وبعبارة أخرى فإن مدلول القيد الأخير يعني أنه لأي مجموعة جزئية S عدد عقدها أقل من n فإن عدد الأضلاع التي تربط عقد هذه المجموع الجزئية يجب أن يقل بواحد عن عدد العقد في S بغض النظر فيما إذا كانت هذه الأضلاع من أو ليست من جولة جزئية ما.

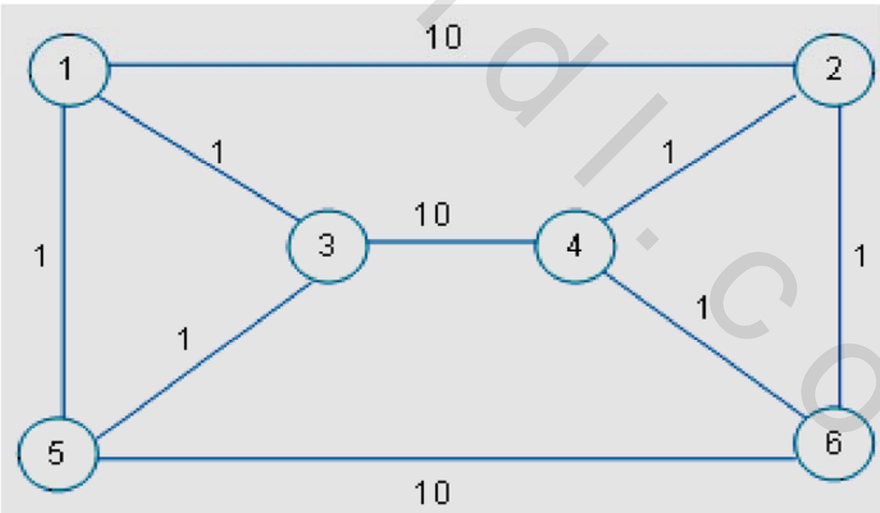
فلو كان $|S|=2$ عندئذ يكون لدينا $\binom{n}{2}$ من القيود من الشكل التالي :

$$x_{12} + x_{21} \le 1$$
$$x_{13} + x_{31} \le 1$$
$$x_{14} + x_{41} \le 1$$

وفي هذا الصدد تجدر الملاحظة بأننا لا نحتاج أن ندرج مجموعات جزئية تحوي أكثر من $\frac{n}{2}$ من العقد (النقاط) والسبب في ذلك هو أن التخلص من جولات جزئية بحجم k مثلا سيقود تلقائيا إلى التخلص من الجولات الجزئية المتممة بحجم $n-k$.

إضافة إلى كل ما تقدم فإن أهم الصعوبات التي نواجهها في حل هذا النوع من مسائل البائع المتجول، والمتعلق بالقيود التي تخلصنا من الجولات الجزئية، يكمن في أمرين.

أولهما: عندما نواجه مسائل يكون فيها عدد هذه القيود مساويا ل $2^{n-1} - n - 1$ وهو أسي بحجم المسألة (= عدد المدن = n)، أي أنه يزداد بشكل كبير مع تزايد n ، فعندئذ سيكون صعبا علينا أن نورد كافة القيود التي تخلصنا من كافة الجولات الجزئية.



الشكل رقم (٤,٢).

ثانيهما: هو عدم ضمان المحافظة على القيم العددية الصحيحة للمتغيرات الثنائية القيم x_{ij}. فلو استبدلنا المسألة الأصلية بالمسألة المخففة (حيث $0 \le x_{ij} \le 1$ لكافة قيم i, j) فإن ذلك لن يضمن لنا الوصول إلى قيم عددية صحيحة وممكنة لمتغيرات المسألة الأصلية x_{ij}.

ولتوضيح بعض نقاط مسألة البائع المتجول غير المتناظرة نورد المثال التالي:

مثال (٤،٢)

المصفوفة التالية تتعلق ببيانات مسألة بائع متجول غير متناظرة بين 6 مدن:
إذا افترضنا أن البائع المتجول سيبدأ من مدينة ما من المدن الستة وأنه سيزور كلاً منها لمرة واحدة فقط فإن هدفه عندئذ هو جعل المسافة الكلية التي سيقطعها أقل ما يمكن.

	1	2	3	4	5	6
1	– –	27	43	16	30	26
2	7	– –	16	1	30	25
3	20	13	– –	35	5	0
4	21	16	25	– –	18	18
5	12	46	27	48	– –	5
6	23	5	5	9	5	– –

الحل

لنلاحظ أولا أن مصفوفة المسافات المعطاة في المثال تدل أن طرق الربط بين المدن الستة هي طرق موجهة (وهي مسألة غير متناظرة) ويبلغ عددها 36 طريقا. ومن الواضح أن هذا العدد سيقود إلى عدد كبير جدا من الجولات الممكنة للبائع المتجول. ويبين الشكل رقم (٤،٣) أحد هذه الجولات والتي تتميز بسلسلة متعاقبة من الطرق الموجهة وهي:

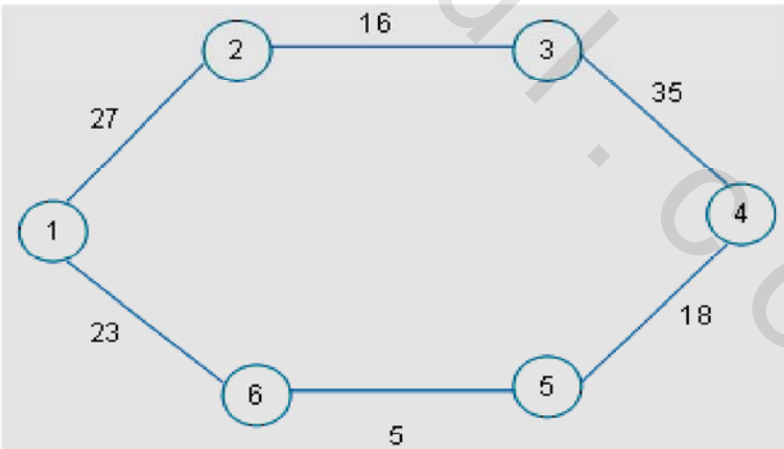
$$(1,2) \rightarrow (2,3) \rightarrow (3,4) \rightarrow (4,5) \rightarrow (5,6)$$

وطول هذه الجولة (قيمة دالة الهدف) هو $Z = 124$.

الآن إذا أسقطنا من حسابنا جميع القيود المتعلقة بالجولات الجزئية، التي أشرنا إليها سابقاً، (والتي سنشير إليها بالصياغة المخففة) فإن ذلك سيقود مباشرة إلى الحل التالي $\{(1,4),(4,2),(2,1),(3,5),(5,6),(6,3)\}$ وقيمة دالة الهدف عند هذا الحل هي $Z = 54$. وتحدد هذه القيمة حدا أدنى لقيمة دالة الهدف الأصلية (طول المسافة المقطوعة) عند الحل الأمثل (الجولة المثلى لمسألة البائع المتجول). لكن هذا الحل غير ممكن لأنه يحوي الجولات الجزئية التالية:

$$(1,4) \rightarrow (4,2) \rightarrow (2,1)$$

$$(3,5) \rightarrow (5,6) \rightarrow (6,3)$$



الشكل رقم (٤,٣).

وللتخلص من الجولة الجزئية الأولى والمتعلق بالمجموعة $S = \{1,2,4\}$ فإننا نضيف القيد التالي :

$$x_{12} + x_{21} + x_{14} + x_{41} + x_{24} + x_{42} \leq 2$$

إلى الصياغة المخففة. وكما يمكن ملاحظته فإن إضافة القيد الأخير يخلصنا من الجولة الجزئية الثانية ويخلصنا أيضا من الجولة الجزئية الأولى بالاتجاه المعاكس وهي :

$$(1,2) \rightarrow (2,4) \rightarrow (4,1)$$

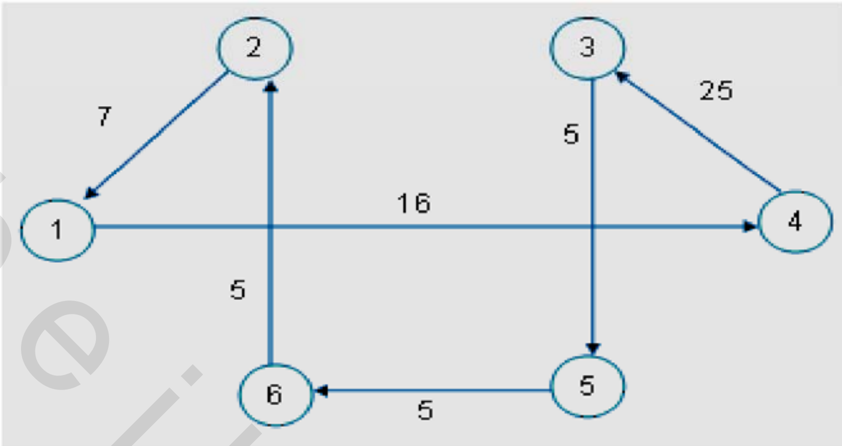
وبعد إدخال القيد الأخير وحل المسألة الناتجة نجد الحل التالي :

$$\{(1,4),(4,3),(3,5),(5,6),(6,2),(2,1)\}$$

وقيمته $Z = 63$ ، وقد مثلنا هذا الحل بالشكل (٤,٤). وكما نلاحظ فإن هذا الحل لا يحوي جولات جزئية فهو بالتالي حلاً أمثلياً (جولة مثلى).

ملاحظة (٤,١)

إن فكرة حل النموذج المخفف للمثال الأخير ثم إضافة القيود التي تخلصنا من الجولات الجزئية بالتدريج هي إحدى الطرق المتبعة في حل هذا النوع من النماذج. وتعتمد فلسفة هذه الطريقة ضمنيا على محاولة حل كامل النموذج باستخدام طريقة التعداد الكلي مع الإدماج التدريجي للقيود اللازمة للتخلص من الجولات الجزئية. ويشار لمثل هذه الطريقة عادة باسم "*الحد والقطع*" (*Branch and Cut*).



الشكل رقم (٤,٤).

(٤,٤,٢) صياغة مسألة البائع المتجول المتناظرة كمسألة برمجة خطية عددية.

ILP Formulation of the Symmetric (TSP)

إن معظم الصياغات المتعلقة بالحالة المتناظرة تفترض أن $i < j$ وتعرف متغيرات القرار x_{ij} على الشكل التالي:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا احتوت الجولة على ضلع يربط } i \text{ بـ } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

نؤكد ثانية أن المتغيرات x_{ij} مقصورة فقط من أجل $i < j$. وكما نلاحظ فإن هذا الاقتصار هو اقتصار ملائم لأنه يجنبنا التكرار الذي يمكن أن يقع للسبب التالي: إن وجود ضلع يصل بين المدينة i والمدينة j يعني ضمنا وجوده بين j و i وللضلعين نفس التكلفة. وبذلك يكون النموذج الرياضي لمسألة البائع المتجول المتناظرة كمسألة برمجة خطية عددية على النحو التالي:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{i} \sum_{j>i} c_{ij} x_{ij}$$ (مجموع المسافات التي يقطعها البائع المتجول)

وفقا للقيود:

$$\sum_{j<i} x_{ji} + \sum_{j>i} x_{ij} = 2,$$ لجميع قيم i

لجميع المجموعات الجزئية الحقيقية S حيث $|S| \geq 3$

$$\sum_{i\in S} \sum_{j\notin S,\, j>i} x_{ij} + \sum_{i\notin S} \sum_{j\in S,\, j>i} x_{ij} \geq 2,$$

$x_{ij} = 1$ أو 0 ، لجميع قيم $i, j;\ j > i$

لاحظ أن المجموعة الأولى من القيود تبين أن قيم اثنين بالضبط من المتغيرات x_{ij} المتعلقة في مدينة ما i يمكن أن تكون مساوية للواحد في أي حل ممكن للمسألة، أحدهما ينتج من ربط المدينة i بالمدينة التي تسبقها في جولة ممكنة (حل ممكن) والأخرى تنتج من ربط المدينة i بالمدينة التي تليها في هذه الجولة. فلو أخذنا $i = 4$ في الشكل رقم (٤،٢) أعلاه، على سبيل المثال، لكان لدينا

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{45} + x_{46} = 2$$

وتضمن لنا المجموعة الثانية من القيود عملية التخلص من الجولات الجزئية حيث تؤدي هذه القيود إلى وجوب احتواء أي جولة على نقاط من S ونقاط من خارج S مرتين على الأقل.

ولتوضيح مسألة البائع المتجول المتناظرة نسوق المثال التالي:

مثال (٤,٣)

بالعودة إلى الشكل رقم (٤,٣) والذي يبين عملية ربط ممكنة بين 6 مدن حيث تدل الأرقام الموضحة على الأضلاع على الزمن اللازم لاجتياز المسافة. الهدف هنا هو أن نجد الجولة ذات الزمن الأصغر والتي تسمح لنا بالمرور في كل مدينة مرة واحدة بالضبط مستخدمين أضلاع الربط الموضحة في هذا الشكل وأن نجيب بنفس الوقت على كل مما يلي:

أ) أن نوضح لماذا يمكن اعتبار هذه المسألة كمسألة (بائع متجول) متناظرة.

ب) إيجاد دالة الهدف لهذه الحالة (الموضحة بالشكل رقم (٤,٣)).

ج) تحديد القيود الخاصة بكل مدينة والمتعلقة بهذه الحالة.

الحل

أ) نظراً لأن المسألة تتطلب استخدام جولة مغلقة بحيث تسمح بزيارة كل مدينة فهي مسألة بائع متجول. وهذه المسألة متناظرة لأن الوقت اللازم للمرور من i إلى j هو نفس الوقت اللازم للمرور من j إلى i.

ب) بحسب بيانات الشكل رقم (٤,٣) فإن دالة الهدف المطلوبة هي

$$Z = 10x_{12} + x_{13} + x_{15} + x_{24} + x_{26} + 10x_{34} + x_{35} + x_{46} + 10x_{56}$$

(المطلوب تصغير هذه الدالة).

ج) بحسب بيانات الشكل رقم (٤,٣) فإن مجموعة القيود الخاصة بالمدن الستة هي

(العقدة 1) $$x_{12} + x_{13} + x_{15} = 2$$

(العقدة 2) $$x_{12} + x_{24} + x_{26} = 2$$

(العقدة 3) $x_{13} + x_{34} + x_{35} = 2$

(العقدة 4) $x_{24} + x_{34} + x_{46} = 2$

(العقدة 5) $x_{15} + x_{35} + x_{56} = 2$

(العقدة 6) $x_{26} + x_{46} + x_{56} = 2$

(٤,٥) المسألة الموجهة لأقل شجرة متفرعة

Directed Minimal Spanning Tree (MST)

تبحث هذه المسألة في إيجاد رسم موجه جزئي $G' = (N, A')$ غير حاوي على دورات من رسم موجه $G = (N, A)$ بحيث يكون مجموع أطوال أضلاع هذا الرسم الجزئي أقل ما يمكن، حيث ترمز N لمجموعة عقد الرسم G وترمز A لمجموعة أضلاعه الموجهة وحيث A' هي مجموعة جزئية من A. ويمكننا في عملية إيجاد مثل هذا الرسم الجزئي G' أن نبدأ من أي نقطة من عقد الرسم G نسميها بعد اختيارها باسم *"العقدة الأساسية"*(*Root Node*). وتقتضي الشروط المتعلقة بهذه المسألة أنه يمكن أن ينطلق من هذه العقدة الأساسية واحد أو أكثر من الأضلاع الموجهة بينما ينطلق من باقي العقد ضلع موجهة واحدة على الأكثر. وكما نلاحظ فإن هناك أوجه شبه كبير بين هذه المسألة ومسألة البائع المتجول. فلو اعتبرنا أن العقدة (1) هي العقدة الأساسية في رسم موجه عدد أضلاعه n وعرفنا المتغيرات x_{ij} كما يلي:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان الضلع الموجه } (i, j) \text{ في الرسم } G' \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

فإن x_{ij} هي متغيرات القرار. ولو رمزنا بالرمز c_{ij} لطول الضلع الموجه (i, j) لكان النموذج الرياضي لهذه المسألة كما يلي:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} \le 1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 2, \cdots, n$$

لجميع المجموعات الجزئية S حيث

$$\sum_{(i,j) \in S \times S} x_{ij} \le |S| - 1 \qquad , \text{ و } \qquad 2 \le |S| \le \frac{n}{2}$$

$$x_{ij} = 1 \text{ أو } 0, \quad i \ne j = 1, \cdots, n$$

لنوضح المسألة بالمثال التالي:

مثال (٤,٤)

لنتصور الرسم (الشبكة) الناتج من مثال (٤,٢). فيمكننا أن نتحقق أن الشكل رقم (٤,٥) هو شجرة متفرعة من هذا الرسم مجموع أطوال أضلاعها = 100.

وكحالة خاصة من مسألة البائع المتجول فإننا سنحل المسألة المخففة والتي نحصل عليها بإهمال القيود التي يمكن أن تقود لجولات جزئية، فنجد الحل التالي (التكرار 0)

$$\{(1,4),(3,6),(3,5),(6,2),(6,3)\}$$

وقيمته $Z = 31$. لكن هذا الحل يحوي على الدورة $(3,6) \rightarrow (6,3)$ ولذا علينا إضافة القيد التالي :

$$x_{63} + x_{36} \leq 1$$

وإعادة حل المسألة من جديد (التكرار الأول). وبطريقة مماثلة نجد أن علينا أن نضيف القيد التالي للتكرار الثاني :

$$x_{56} + x_{65} \leq 1$$

والقيد التالي للتكرار الثالث :

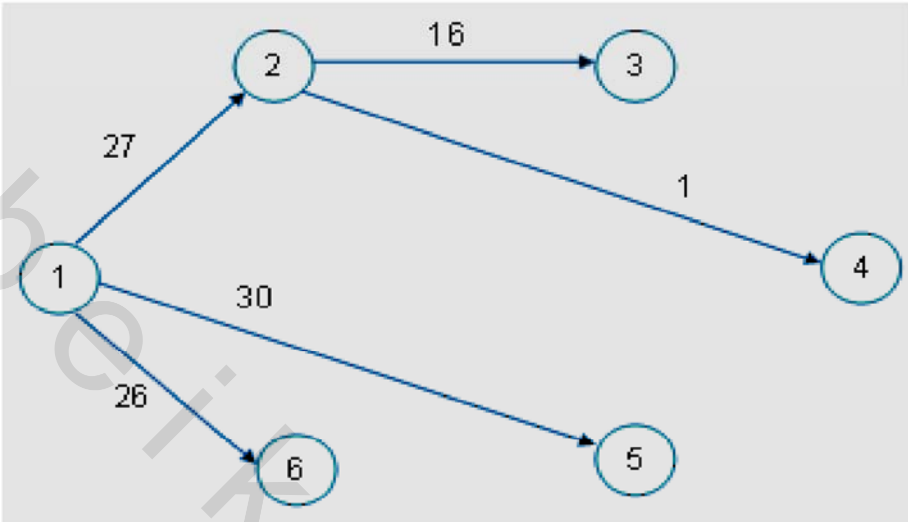
$$x_{35} + x_{53} + x_{56} + x_{65} + x_{63} + x_{36} \leq 2$$

ونحصل بعد ذلك على الحل التالي :

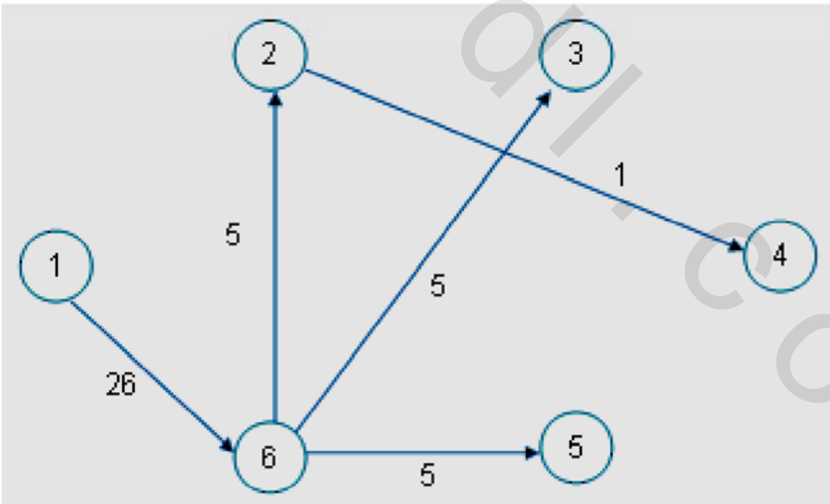
$$\{(1,6),(6,2),(6,3),(6,5),(2,4)\}$$

وقيمته $Z = 42$. وهذا الحل ممثل بالشكل رقم (٤.٦)

وهو حل أمثل وقد تم الوصول إليه بطريق مماثلة لتلك التي استخدمت في حل مسألة البائع المتجول الأخيرة. ونشير هنا إلى وجود خوارزميات أكثر فعالية لحل المسألتين الموجهة وغير الموجهة لأقل شجرة متفرعة.



الشكل رقم (٤,٥).



الشكل رقم (٤,٦).

(٤,٦) مسائل الحزم والتغطية والتجزئة

Set Packing, Set Covering, and Set Partitioning Problems

تتعلق القيود في هذه المسائل الثلاث مع مجموعة من العناصر، A مثلا، وبعضا من المجموعات الجزئية B_i من A.

(٤,٦,١) مسائل الحزم. Set Packing Problems

في مسائل الحزم يتم اختيار بعض عناصر A أو كلها لتغطيتها بالمجموعات الجزئية B_i. أي أن كل عنصر من A يظهر في عملية التغطية هذه مرة واحدة على الأكثر، ولذلك فإن القيود هنا تكون من الشكل "أصغر من أو تساوي". والهدف في مسائل الحزم هو جعل العائد الناتج من تخصيص المجموعات B_i لعناصر من A أكبر ما يمكن.

من الواضح أن متغيرات القرار في هذه المسألة هي:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم اختيار العنصر } x_i \text{ من A لتغطيته} \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ولو عرفنا c_i بأنها العائد الناتج من تغطية العنصر x_i بأحد المجموعات الجزئية B_i وعرفنا المقادير a_{ij} كما يلي:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تمت تغطية } x_i \text{ بـ } B_j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

يصبح النموذج الرياضي لهذه المسألة كما يلي:

كبر الدالة:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le 1, \quad i = 1, \cdots, m$$

$$x_j = 1 \ \text{أو} \ 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

وكأمثلة تطبيقية على هذا النوع من المسائل نسوق ما يلي

مثال (٤,٥)

في عملية جدولة عدد من الاجتماعات لعدد من الأشخاص، لنفرض أن لدينا n اجتماعا تجب جدولتها للأسبوع المقبل. وللتبسيط لنفرض أن كل اجتماع يستغرق ساعة واحدة وأنه يتوافر في الأسبوع المقبل n من الساعات المختلفة والمناسبة لمثل هذه الاجتماعات وأن مجموع عدد الأشخاص المعنيين بهذه الاجتماعات هو k. لنعرف المقادير a_{ij} كما يلي:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا التحق الشخص } i \text{ بالاجتماع } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ولنفرض أن الهدف هو جدولة أكبر قدر ممكن من الاجتماعات للأسبوع المقبل دون أن تحصل أية تعارضات، عندئذ تكون متغيرات القرار هي:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{إذا حضر الشخص } i \text{ أحد الاجتماعات} \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ويكون النموذج الرياضي هو:

كبر الدالة:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le 1, \quad i = 1, \cdots, m$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

مثال (٤,٦) مسألة التدفق الأكبر

لنأخذ الشبكة الموجهة في الشكل رقم (٤,٧) ولنفرض أن هذه الشبكة تمثل شبكة من أنابيب تبدأ من النقطة s (المنبع) وتنهي في النقطة t (المصب) ولنفرض كذلك أن كل ضلع موجهة (قوس) من هذه الشبكة يمثل قطعة من أنبوب يجري فيه الغازولين بمعدل d_j بالاتجاه المشار إليه في الشكل فتكون مسألة التدفق الأكبر عندئذ إيجاد مسار من الشبكة بالاتجاه من s إلى t يكون فيه التدفق من s إلى t أكبر ما يمكن.

الحل

لنعرف المسار من s إلى t بمجموعة العقد التالية:

$$s, i_1, i_2, \cdots, i_r, t$$

بحيث نصل بين أي عقدتين متتاليتين بقوس موجهة. عندئذ يمكن التعبير عن كافة المسارات الموجهة من s إلى t بالمصفوفة A التالية المعرفة عناصرها a_{ij} بما يلي:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان الضلع الموجه } j \text{ ضمن المسار } i \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

وبذلك تكون المصفوفة A كما يلي:

		مسار 1	مسار 2	مسار 3	مسار 4	مسار 5
	$(s,1)$	1	1	0	0	0
	$(s,2)$	0	0	1	0	0
	$(s,3)$	0	0	0	1	1
$A =$	$(1,2)$	0	1	0	0	0
	$(3,2)$	0	0	0	0	1
	$(1,t)$	1	0	0	0	0
	$(2,t)$	0	1	1	0	1
	$(3,t)$	0	0	0	1	0

لاحظ أن عدد أسطر المصفوفة A هو ٨ أسطر كل منها يتعلق بأحد أقواس الشبكة الموضحة بالشكل رقم (٤،٧). ولو أخذنا ترتيب الأسطر كما وردت سابقاً فإن هذه الأسطر تتعلق بالأقواس

$(s,1)$ ، $(s,2)$ ، $(s,3)$ ، $(1,2)$ ، $(3,2)$ ، $(1,t)$ ، $(2,t)$ ، $(3,t)$

على الترتيب . فلو أخذنا المسار 1 مثلا لوجدنا حسب تعريف a_{ij} وحسب المصفوفة A أن هذا المسار هو $(s,1) \rightarrow (1,t)$ ، وهكذا. لنعرف الآن المتغيرات x_i كما يلي :

مقدار التدفق في المسار i هو x_i (متغيرات القرار) .عندئذ يكون النموذج الرياضي لمسألة التدفق الأكبر (بصفة المصفوفات) في الشبكة (٤،٧) هو

كبر الدالة :

$$Z = \sum_{i=1}^{5} x_i$$

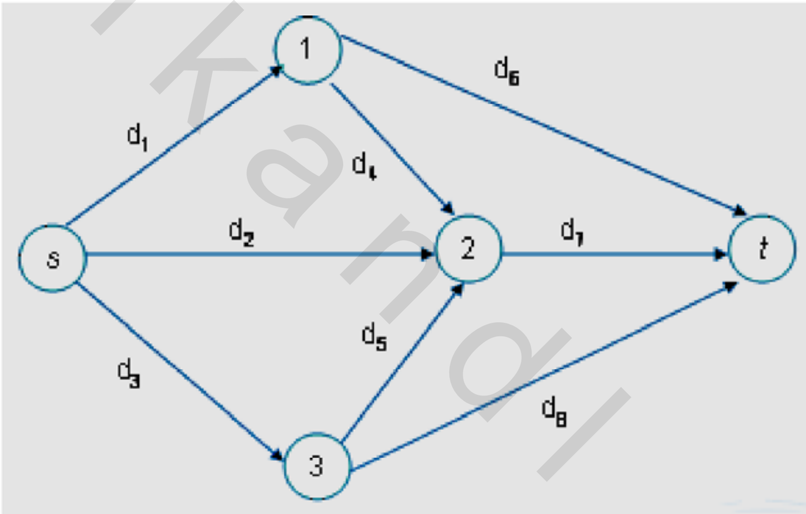
وفقا للقيود :

$$Ax \leq d$$

$x_j \geq 0$ أعداد صحيحة

حيث $d = (d_1, d_2, \cdots, d_8)$

وتعتبر هذه المسألة تعميما لمسألة الحزم من اتجاهين . الأول أن متغيرات القرار x_i يمكن أن تأخذ أي قيمة صحيحة غير سالبة بدلا من القيمتين 0 و1 . والثانية أن الأطراف اليمنى للقيود يمكن أن تكون أي عدد صحيح غير سالب بدلا من الواحد.



الشكل رقم (٤,٧).

(٤,٦,٢) مسائل التغطية Set Covering Problems

في مسائل التغطية تنص القيود على أن كل عنصر من A تجب تغطيته بواحدة على الأقل من المجموعات الجزئية B_i . وفي هذه الحالة تكون القيود من الشكل " أكبر من أو تساوي " . والهدف في كل من مسائل التغطية هو جعل التكلفة الكلية الناتجة من

تخصيص المجموعات B_i لعناصر من A أقل ما يمكن. ولو عرفنا المتغيرات x_i والمقادير a_{ij} كما في مسائل الحزم لكان النموذج الرياضي للمسألة كما يلي:

صغِّر الدالة:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1, \quad i = 1, \cdots, m$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

وبلغة المصفوفات فإن هذا النموذج هو:

صغِّر الدالة:

$$Z = cx$$

وفقا للقيود:

$$Ax \geq e$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

حيث $e = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ و $e_i = 1$ في الموقع الـ i و $e_i = 0$ عدا ذلك.

والمثالين التاليين يوضحان بعض تطبيقات مسائل التغطية

مثال (٤,٧) مسألة غطاء العقد Node Covering Problem

نعرف الغطاء في شبكة بأنه مجموعة جزئية من الأقواس (الأضلاع الموجهة) بحيث أن كل عقدة من الشبكة هي نهاية لواحدة على الأقل من الأقواس من هذه المجموعة الجزئية. والهدف في هذا النوع من المسائل هو إيجاد غطاء بأقل قدر ممكن من الأقواس. فلو عرفنا المتغير x_j بأنه يمثل القوس j في الشبكة عندئذ تكون متغيرات القرار هي:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم استخدام القوس } j \text{ في التغطية} \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

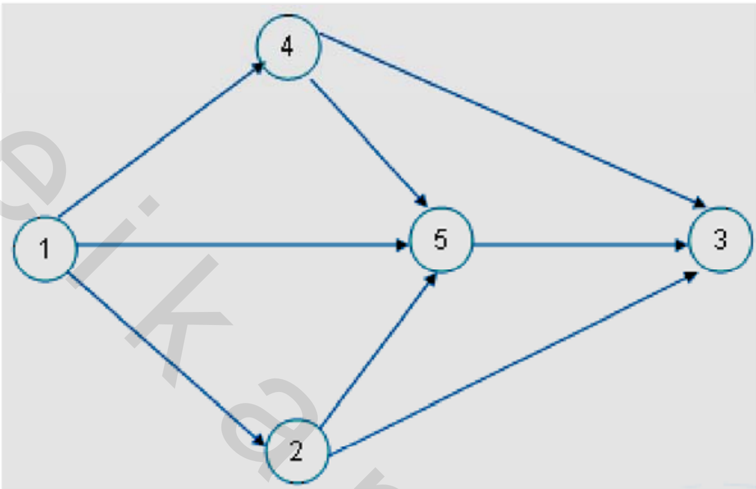
ولكي نتأكد من أن العقدة i من الشبكة هي نهاية لقوس واحدة على الأقل في الغطاء يجب أن يكون $x_j = 1$ حيث تكون العقدة i هي أحد النهايات في القوس j . لنعرف المصفوفة $A = (a_{ij})$ كما يلي:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت العقدة } i \text{ في الشبكة هي عقدة نهاية للقوس } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

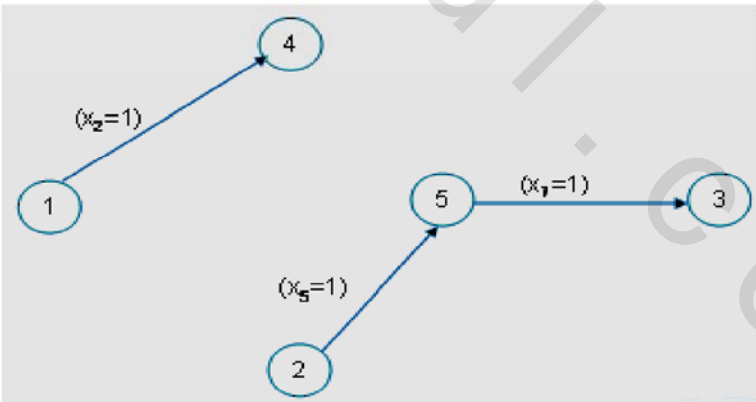
عندئذ تكون جميع التكاليف في مسألة إيجاد غطاء بأقل قدر ممكن من الأقواس مساوية للواحد. وللتوضيح لنأخذ الشبكة الممثلة بالشكل رقم (٤,٨) والتي تحوي 5 عقد و8 أقواس، فبذلك يكون متجه التكلفة هو $c^T = (1,1,1,1,1,1,1,1)$ وتكون المصفوفة A المقابلة لهذه الشبكة هي:

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} (1,2) & (1,4) & (1,5) & (2,3) & (2,5) & (3,4) & (3,5) & (4,5) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

وحل هذه المسألة (حل يغطي كافة العقد بأقل قدر ممكن من الأقواس) هو $x_2^* = x_5^* = x_1^* = 1$ وهذا الحل ممثل كما في الشكل رقم (٤,٩).



الشكل رقم (٤,٨).



الشكل رقم (٤,٩).

مثال (٤,٨)

تعتزم شركة كهربائيات صناعة 6 أنواع جديدة من قطع الترانزستورات، وبعد دراسة مستفيضة من مهندسي الشركة تم اختيار 14 جهازا مختلفا يمكن أن تقوم بصناعة قطع الترانزستورات المطلوبة وبتكاليف تعتمد على الجهاز المصنع والقطعة المصنَّعة في هذا الجهاز. لنفرض أن المقادير a_{ij} كما هي معرفة أعلاه أي:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم استخدام الجهاز } i \text{ في تصنيع الترانزستور } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

وأن هذه المصفوفة A معطاة كما يلي:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1
2	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
3	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
5	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1
6	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0

فمثلا $A_{14} = (1,0,0,1,1,0)$ يعني أن الجهاز $j = 14$ يمكن أن يصنع الترانزستورات ذات الأرقام 1، 4، 5 لكنه لا يصنع الترانزستورات ذات الأرقام 2، 3، 6. وأن التكلفة المقابلة لاستخدام الجهاز j معطاة كما يلي:

$$c = (12,17,13,10,13,17,24,24,60,38,27,45,25,35)^T$$

عندئذ تكون متغيرات القرار هي:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم اختيار الجهاز } j \text{ للتصنيع} \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

وعندئذ يكون النموذج الرياضي بلغة المصفوفات لمسألة اختيار الأجهزة لتغطية صناعة الـ 6 ترانزستورات كما يلي:

صغّر الدالة:

$$Z = cx$$

وفقا للقيود:

$$Ax \geq e$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0 \quad , \quad j = 1,\cdots,n$$

حيث e هو المتجه الذي عرّفناه من قبل.

وتضمن لنا قيود المسألة أن واحد على الأقل من الأجهزة سيؤدي مهمة التصنيع. ووفقا للبيانات العددية للمثال فإن الحل الأمثل هو $x_5^* = x_7^* = x_3^* = 1$ وقيمته $Z = 62$.

(٤,٦,٣) مسائل التجزئة Set Partitioning Problems

في مسائل التجزئة فإنه يتم تجزئة أو توزيع عناصر A على عناصر المجموعات الجزئية B_i بحيث يظهر كل عنصر من A مرة واحدة بالضبط في أحد المجموعات الجزئية B_i. وفي هذه الحالة فإن جميع القيود تكون على "شكل مساواة". أما الهدف في هذه المسائل فهو جعل التكلفة الكلية الناتجة من تخصيص المجموعات B_i لعناصر من A أقل ما يمكن. فإذا حافظنا على الرموز التي استخدمت في مسائل التغطية أعلاه فإن النموذج الرياضي العام لهذه المسائل يكون كما يلي:

صغّر الدالة:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1, \quad i = 1, \cdots, m$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

وبلغة المصفوفات فإن هذا النموذج هو:

صغِّر الدالة:

$$Z = cx$$

وفقا للقيود:

$$Ax = e$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

وكتطبيق مباشر على هذا النوع من المسائل هو أن نضيف قيدا في المثال (٤,٨) الأخير أن كل منتج يجب أن يقوم به جهاز واحد فقط من الأجهزة التي يتم اختيارها عندئذ تصبح القيود في المثال على شكل مساواة ويصبح المثال الناتج هو مثال على مسائل التجزئة . فلو استخدمنا بيانات المثال (٤,٨) نفسها لكان الحل الأمثل عندئذ هو $x_1^* = x_3^* = x_5^* = x_{13}^* = 1$ وقيمته $Z = 63$.

ولمزيد من الإيضاح نسوق المثال التالي:

مثال (٤,٩)

لنفرض أن لدينا J من برامج الكمبيوتر نرغب بنسخها على K من الدسكات وأن سعة كل دسك هي b وأن قيمة البرنامج j $(j = 1, 2, \cdots, J)$ هي c_j وأن

حجمه هو a_j وأن الهدف هو نسخ البرامج على أقل قدر ممكن من الدسكات.

لصياغة هذه المسألة نعرف المتغيرات التالية:

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم استخدام الدسك } k \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

$$x_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم نسخ البرنامج } j \text{ على الدسك } k \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

عندئذ يكون النموذج الرياضي للمسألة كما يلي:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{k=1}^{K} y_k$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{k=1}^{K} x_{jk} = 1, \quad j = 1, \cdots, J$$

$$\sum_{j=1}^{J} a_j x_{jk} \leq b_{yk}, \quad k = 1, \cdots, K$$

$$x_{jk}, y_k = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, J;\ k = 1, \cdots, K$$

(٤,٧) مسألة أقصر مسار في شبكة موجهة

The Shortest Path Problem in a Directed Graph

نعالج في هذه الفقرة المسألة التالية:

لدينا شبكة موجهة ونرغب بإيجاد أقصر مسار (يقصد بأقصر مسار بأنه ذلك المسار الذي تكون مجموع أطوال أقواسه أقل ما يمكن) من عقدة ما من هذا المسار، مثلا

العقدة 1، إلى جميع عقد هذه الشبكة. من الواضح أننا قد نستخدم أي قوس (ضلع موجهة) من أقواس الشبكة بأكثر من مسار (أكثر من مرة)، ولذا فإننا نعرف المتغيرات x_{ij} بما يلي:

$$x_{ij} = (i, j) \text{ عدد مرات التي تستخدم القوس }$$

كما نعرف المقادير: $c_{ij} = (i, j)$ طول القوس

وعندها يكون النموذج الرياضي لهذه المسألة كما يلي

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{j=2}^{n} x_{1j} = n-1$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = -1, \quad i = 2, \cdots, n$$

$$x_{ijk} \geq 0, \quad i \neq j = 1, \cdots, n$$

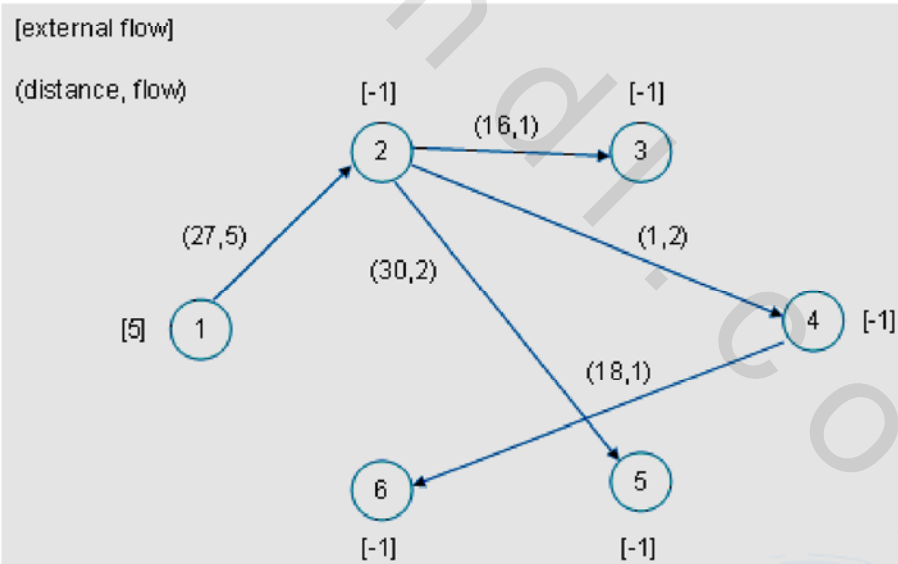
وتضمن لنا المجموعة الأولى من القيود أن $n-1$ من المسارات لابد أن تبدأ من عقدة البداية (وهي هنا العقدة1). أما المجموعة الثانية من القيود فتضمن لنا الحالة الطبيعية للتدفق وهي في أي عقدة عدا عقدة البداية فإن مجموع التدفق الداخل (عدد الأقواس الداخلة) لهذه العقدة يزيد بواحد عن مجموع التدفق الخارج منها (عدد الأقواس الخارجة).

وسنوضح هذه المسألة بالمثال التالي :

مثال (٤,١٠)

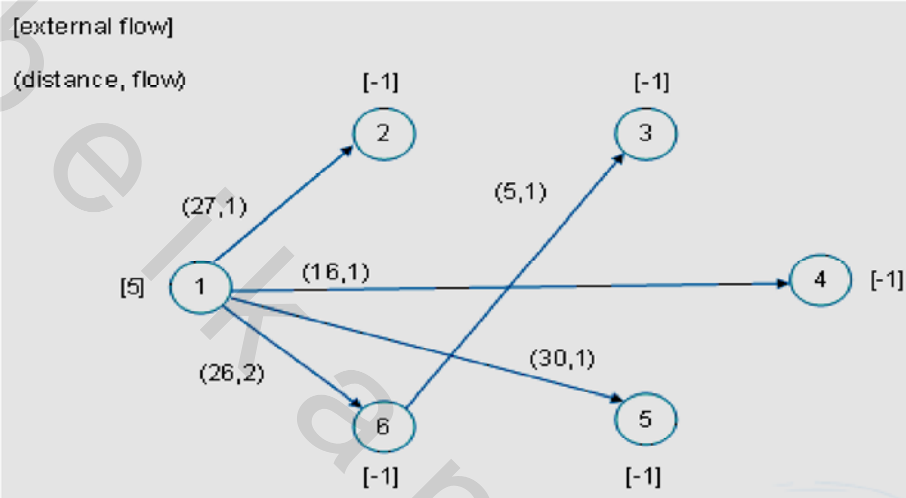
بالعودة إلى مثال (٤,٢) المتعلق بشبكة مكونة من ست مدن. يعطي الشكل رقم (٤,١٠) أدناه حلا ممكنا لمسألة أقصر مسار في هذه الشبكة، حيث يدل الرقم في القوس المتوسطة عند العقد على أن 5 وحدات من التدفق تدخل العقدة 1 بينما تخرج وحدة تدفق واحدة من باقي العقد.

وعلى ضوء معلومات الشكل رقم (٤,١٠) فإن أطوال المسارات من العقدة 1 إلى العقد 2، 3، 4، 5، 6 هو $P_2 = 27$ ، $P_3 = 43$ ، $P_4 = 28$ ، $P_5 = 57$ ، $P_6 = 46$ ، على الترتيب ومجموع أطوالها هو $Z = 231$. أيضا فإن الأرقام التي تظهر على الأقواس تدل على عدد مرات استخدام كل من هذه الأقواس في الحل(التدفق عبر هذه القوس).



الشكل رقم (٤,١٠).

وبتطبيق النموذج الرياضي أعلاه على هذه البيانات نجد أن الحل الأمثل لمسألة أقصر مسار موجه (كما عرفناها سابقاً) معطى كما في الشكل رقم (٤,١١).



الشكل رقم (٤,١١).

وهـــذا الحـــل هـــو $P_6 = 26$ ، $P_5 = 30$ ، $P_4 = 16$ ، $P_3 = 31$ ، $P_2 = 27$ وقيمتـــه $Z = 130$. والحل الأمثل هذا يعطي أقصر مسار من العقدة البداية 1 إلى جميع عقد الشبكة.

(٤,٨) مسألة تلوين الرؤوس في رسم غير موجه
Vertex Coloring Problem

يتلخص هذا النوع من المسائل بما يلي :

لدينا رسم غير موجه $G = (V, E)$ حيث ترمز V لمجموعة رؤوس هـذا الرسـم وترمـز E لمجوعـة أضـلاعه، والهـدف هنـا إيجـاد أقـل قـدر ممكـن مـن الألـوان الـتي سنحتاجها لتلوين رؤوس هذا الرسم بحيث أن أي عقدتين متجاورتين تحملان لـونين

مختلفين. نسمي العدد الأصغر من الألوان اللازمة باسم رقم التلوين (Chromatic Number). فلو كانت x هي قيمة هذا العدد بالنسبة للرسم G فإننا نرمز له بالرمز $G(x)$. ومن الواضح أنه يمكن لنا دوما أن نقوم بتلوين رؤوس أي رسم بعدد من الألوان لا يتجاوز $|V|$. ولإيجاد النموذج الرياضي لهذه المسألة نعرف المتغيرات التالية (متغيرات القرار):

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم استخدام اللون } i \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم استخدام اللون } i \text{ لتلوين الرأس } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ولنعرف المقادير a_{kl} بما يلي:

$$a_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان القوس } (k,l) \text{ ينتمي إلى } E \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

عندئذ يكون النموذج الرياضي لهذه المسألة على النحو التالي:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} z_i$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \cdots, n$$

$$x_{ij} \le z_i, \quad \forall i, j$$

$$x_{is} + x_{it} \leq 2 - a_{st}$$

$$x_{ij}\,, z_i = 1 \text{ أو } 0$$

ومجموعة القيود الثانية هي قيود بديهية حسب تعريف كل من x_{ij} و z_i. وتدل مجموعة القيود الثالثة على أنه إذا كان الضلع (s,t) هو أحد أضلاع الرسم G (والذي يعني أن الرأسين t وs متجاورين وأن $a_{st} = 1$) فإن عدد الألوان المستخدمة في تلوين الرأسين t وs لا يتجاوز 1. أما إذا كان الضلع (s,t) ليس أحد أضلاع الرسم G (والذي يعني أن الرأسين t وs غير متجاورين وأن $a_{st} = 0$) فإن عدد الألوان المستخدمة في تلوين الرأسين t وs لا يتجاوز 2، الأمر الذي يضمن لنا اختلاف ألوان الرؤوس المتجاورة.

(٤,٩) مسألة تصميم نظام توزيع سلع متعددة
Multi-commodity Distribution System Design Problem

تقوم هذه المسألة على المعلومات التالية. لدينا n من المعامل (أو مراكز الإنتاج) هي $j = 1,2,\cdots,n$، تقوم بإنتاج q من السلع المختلفة هي $i = 1,2,\cdots,q$، بحيث أن المعمل j يقوم بإنتاج s_{ij} وحدة من السلعة i. ولدينا كذلك عدد m من الزبائن $l = 1,2,\cdots,m$ الذين يطلبون هذه السلع بحيث أن الطلب على السلعة i من قبل الزبون l هو D_{il}.

يتم توزيع هذه السلع على الزبائن خلال p من مراكز التوزيع $k = 1,2,\cdots,p$. يعطي الشكل رقم (٤,١٢) تمثيلا ممكنا لهذا النوع من المسائل. ومعلوم لدينا أيضا ما يلي :

أقل وأكبر قدر ممكن من البضاعة التي يسمح بتوزيعها سنويا من خلال المركز k : L_k, U_k

التكلفة السنوية (الثابتة) لتشغيل المركز k : f_k

تكلفة توزيع وحدة من السلعة من خلال المركز k : v_k

تكلفة إنتاج وحدة من السلعة i في المعمل j وتوزيعها للزبون l من خلال المركز k : c_{ijkl}

يكمن الهدف في هذه المسألة في اختيار مراكز التوزيع التي يتم من خلالها توزيع السلع على الزبائن بحيث يتم سد احتياجاتهم دون تجاوز الطاقة الإنتاجية للمعامل وبحيث تكون التكلفة الكلية الناتجة لمجمل العملية أقل ما يمكن.

وفقا للفرضيات أعلاه فإن متغيرات القرار لهذه المسألة ستكون كما يلي:

مقدار السلعة i من المعمل j و التي تصل للزبون l من خلال المركز k : x_{ijkl}

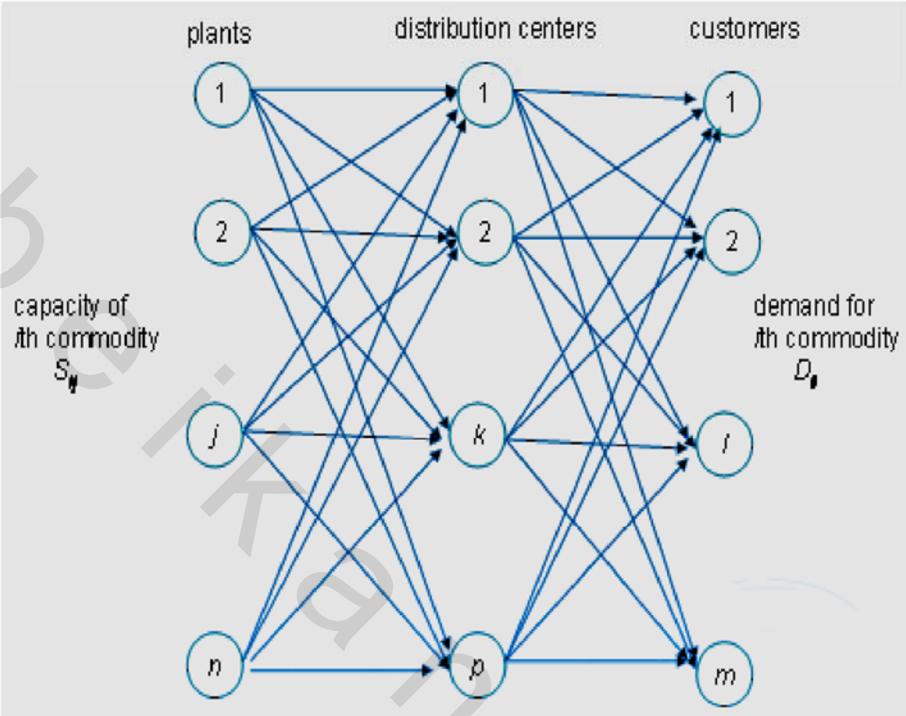
$$y_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{إذا قام المركز } k \text{ بتقديم خدمة للزبون } l \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

$$z_k = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم افتتاح مركز توزيع في الموقع } k \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

والنموذج الرياضي لها هو:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{m} c_{ijkl}x_{ijkl} + \sum_{k=1}^{p} f_k z_k + \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}\sum_{l=1}^{m} v_k D_{il} y_{kl}$$



الشكل رقم (٤,١٢).

وفقا للقيود:

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{m} x_{ijkl} \le S_{ij} \qquad \text{لجميع قيم } i,j$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijkl} = D_{il}\, y_{kl} \qquad \text{لجميع قيم } i,k,l$$

$$\sum_{k=1}^{p} y_{kl} = 1 \qquad l = 1,2,\cdots,m$$

$$L_k z_k \leq \sum_{i=1}^{q}\sum_{l=1}^{m} D_{il} y_{kl} \leq U_k z_k \quad k=1,2,\cdots,p$$

$$x_{ijkl} \geq 0 \qquad \text{لجميع قيم } i,j,k,l$$

$$y_{kl} = 1 \text{ أو } 0 \qquad \text{لجميع قيم } k,l$$

$$z_k = 1 \text{ أو } 0 \qquad k=1,2,\cdots,p$$

لاحظ أن النموذج الأخير هو نموذج لمسألة برمجة خطية عددية مختلطة. فدالة الهدف الخطية تتكون من مجموع تكاليف توزيع السلع وتكاليف تشغيل المراكز. وتضمن لنا المجموعة الأولى من القيود أنه لن يتم تجاوز الطاقة الإنتاجية لأي معمل ومن كل سلعة. وتضمن لنا المجموعة الثانية من القيود تلبية حاجات الزبائن من السلع المختلفة وتضمن لنا كذلك أن $x_{ijkl} = 0$ عندما $y_{kl} = 0$ والتي تعني أنه لن تتم عملية خدمة الزبون l من المركز k . أما المجموعة الثالثة من القيود فتضمن لنا أن كل زبون ستتم خدمته من واحد فقط من المراكز. وأخيرا فإن المجموعة الرابعة من القيود تضمن أن ما سيتم توزيعه من السلع من خلال المركز k سيتراوح بين الحدين الأدنى L_k والأعلى U_k الذين عرفناهما سابقاً. وتضمن لنا هذه القيود أيضا العلاقة المنطقية بين المتغيرات y و z حيث أن $z_k = 1$ إذا وفقط إذا كان $y_{kl} = 1$ لبعض قيم l.

(٤,١٠) مسألة جدولة تنفيذ أعمال على مكائن للتصنيع
Scheduling Jobs on Machines Problem

يتناول هذا النوع من المسائل جدولة n من الأعمال $i=1,2,\cdots,n$ على m ماكينة $j=1,2,\cdots,m$. كأن نقوم بتصنيع عدد من قطع الغيار على عدد من المكائن.

وللتبسيط نفترض أن كلاً من هذه الأعمال يحتاج إلى عملية واحدة فقط على إحدى المكائن وأنه لابد للعمليات الخاصة بكل عمل من تسلسل خاص في ترتيب تنفيذها. وبهذا الخصوص فإننا نعرف المتغيرات التالية:

$$r_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{إذا أجريت العملية } j \text{ للعمل } i \text{ على الماكينة } k \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

كذلك فإننا نعرف p_{ik} بأنه وقت تنفيذ العمل i على الماكينة k . عندها تكون متغيرات القرار هي وقت بداية تنفيذ العمل i على الماكينة k : x_{ik}

لنعرف المتغيرات:

$$\delta_{rsk} = \begin{cases} 1 & \text{إذا سبق العمل } r \text{ العمل } s \text{ في التنفيذ على الماكينة } k \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

أما الهدف في هذا النوع من المسائل فهو عادة ما يكون جعل مجموع بدايات تنفيذ أخر عملية لكل من الأعمال أقل ما يمكن. وعندها يكون النموذج الرياضي للمسألة كما يلي:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{i=1}^{l} \sum_{k=1}^{m} r_{imk} x_{ik}$$

وفقا للقيود:

$$x_{rk} - x_{sk} \geq p_{sk} - \delta_{rsr_1} M \quad \text{لجميع الأزواج } (r,s) \text{ على الماكينة } k$$

$$x_{sk} - x_{rk} \geq p_{rk} - (1 - \delta_{rsk}) M \quad \text{لجميع الأزواج } (r,s) \text{ على الماكينة } k$$

$$j = 1, 2, \cdots, m-1$$

$$\sum_{k=1}^{n}\delta_{ijk}(x_{ik}+p_{ik}) \le \sum_{k=1}^{m} r_{i,j+1,k}x_{ik}$$

$$\sum_{k=1}^{p} y_{kl} = 1 \qquad l=1,2,\cdots,m$$

$$x_{ik} \ge 0 \qquad \text{لجميع قيم } i,k$$

$$\delta_{rsk} = 1 \text{ أو } 0 \qquad \text{لجميع قيم } r,s,k$$

حيث M مقدار كبير بشكل كاف.

(٤,١١) تمارين (٤)

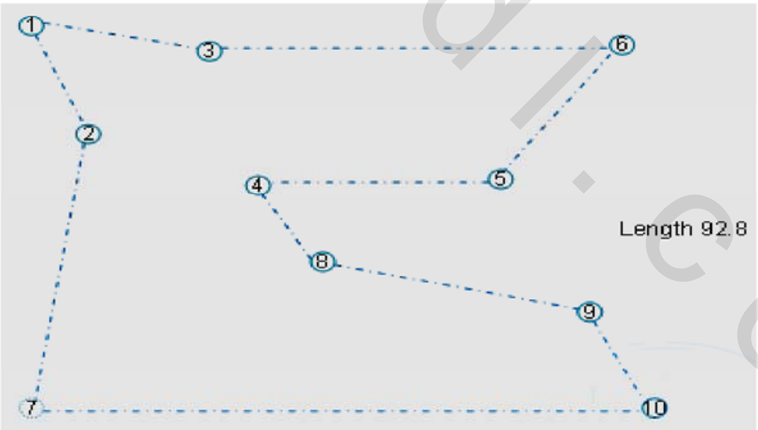
١- قام أحد المهندسين الصناعيين بتقسيم الدور الخاص بمعرض لمجموعة من المكائن الصناعية إلى شبكة متصالبة مكونة من 12 مربع رمز لها بالرمز g ، بحيث أن كل منها سيخصص كموقع لأحد المكائن m. وقد قام بتقدير المسافات بين أزواج المربعات الناتجة ورمز لها بـ $d_{gg'}$ بين g و g'. وكذلك قام بتقدير عدد الأزواج من المسافات $d_{gg'}$ بين المكائن ورمز بـ $d_{mm'}$ للمسافة بين الماكينتين m و m' في الاتجاهين خلال أسبوع من العمليات. المطلوب صياغة هذه المسألة كمسألة تخصيص تربيعية هدفها جعل تكاليف تدفق الإنتاج بين المكائن والمسافة المقطوعة بين مواقعها اقل ما يمكن مفترضا أن $d_{gg'} = d_{g'g}$.

٢- ينوي أحد المعيدين القائمين بالإشراف على أحد المشروعات في بحوث العمليات بتقسيم فصله الدراسي إلى فرق عمل يتألف كل منها من طالبين s و s' وذلك بغرض رفع أداء الطلبة في ذلك المشروع. وقد قام كل طالب s بتسجيل أفضلياته مع طالب أخر s' ورمز المعيد لهذه الأفضلية بالرمز $p_{ss'}$. المطلوب صياغة هذه المسألة كمسألة توافق بحيث يكون الإختيار الكلي للأفضليات أكبر ما يمكن.

٣– أعد صياغة مسألة البائع المتجول باستخدام متغيرات القرار البديلة التالية:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان القوس } (i,j) \text{ يأتي في المرتبة } k \text{ من الجولة} \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

٤– من التطبيقات المباشرة لمسألة البائع المتجول هو تثقيب اللوحات الإلكترونية التي تدخل في صناعات بعض الأجهزة بأقل زمن ممكن. ويوضح الشكل رقم (٤,١٣) مثالا على لوحة مكونة من 10 أماكن يلزم تثقيبها بثقوب ذات أحجام مختلفة أو متساوية. من الواضح أن المسافات بين الثقوب تلعب دورا أساسيا في الزمن اللازم لتثقيب مثل هذه اللوحة. إن عملية المرور على كافة الثقوب تشبه إلى حد كبير مسألة مرور البائع المتجول على عدد من المدن. فمثلا الجولة الموضحة في الشكل رقم (٤,١٣) هي جولة طولها $Z = 92.5$ إنش. الجدول التالي يعطي المسافات بالإنش بين ثقوب لوحة الشكل (٤,١٣) والهدف هو تثقيب اللوحة بأقل زمن (مسافة) ممكن (ممكنة). المطلوب صياغة هذه المسألة بنموذج رياضي كمسألة بائع متجول.



الشكل رقم (٤,١٣).

الجدول رقم (٤,٣). المسافات بين الثقوب في الشكل رقم (٤,١٣).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	–	3.6	5.1	10.0	15.3	20.0	16.0	14.2	23.0	26.4
2	3.6	–	3.6	6.4	12.1	18.1	13.2	10.6	19.7	23.0
3	5.1	3.6	–	7.1	10.6	15.0	15.8	10.8	18.4	21.9
4	10.0	6.4	7.1	–	7.0	15.7	10.0	4.2	13.9	17.0
5	15.3	12.1	10.6	7.0	–	9.9	15.3	5.0	7.8	11.3
6	20.0	18.1	15.0	15.7	9.9	–	25.0	14.9	12.0	15.0
7		13.2	15.8	10.0	15.3	25.0	–	10.3	19.2	21.0
8	14.2	10.6	10.8	4.2	5.0	14.9	10.2	–	10.2	13.0
9	23.0	19.8	18.4	13.9	7.8	12.0	19.2	10.2	–	3.6
10	26.4	23.0	21.9	17.0	11.3	15.0	21.0	13.0	3.6	–

٥- يمتلك رجل أعمال يعيش في جدة شركة تأمين لها خمس فروع تقع في جدة، الرياض، الدمام، أبها، مكة المكرمة. يقوم هذا الرجل بزيارة كافة الفروع في شهر ديسمبر من نهاية كل عام. إذا علمت أن المسافات بالكيلومتر بين هذه المدن معطاة كما في الجدول رقم (٤,٤).

الجدول رقم (٤,٤)

المدن	جدة	مكة	الرياض	الدمام	أبها
جدة	0	79	949	1343	625
مكة	79	0	870	1265	627
الرياض	949	870	0	395	1046
الدمام	1343	1265	395	0	1495
ابها	625	627	1064	1495	0

المطلوب إيجاد الصيغة الرياضية التي تجعل المسافة الكلية التي يقطعها رجل الأعمال لدى زيارته كافة فروع الشركة ابتداءً من جدة والعودة إليها أقل ما يمكن

٦– تعتزم شركة أمريكية للطيران الداخلي على تصميم مراكز للرحلات الداخلية ضمن الولايات المتحدة الأمريكية ضمن مسافة ال 1000 ميل. ولذلك فقد وقع اختيارها على مجموعة من المدن الرئيسة والتي تحقق هذا الشرط والبيانات معطاة في الجدول رقم (٤,٥). ترغب إدارة الشركة بتحديد العدد الأدنى من مراكز الرحلات الداخلية والتي يمكنها تغطية كافة المدن الرئيسة المذكورة في الجدول السابق (تكون المدينة مغطاة إذا شملت بواحد على الأقل من المراكز). المطلوب صياغة هذه المسألة بنموذج رياضي.

الجدول رقم (٤,٥).

المدن الرئيسة	المدن التي تقع ضمن مسافة ال 1000 ميل
أتلانتا (AT)	AT,CH,HO,NO,NY,PT
بوستون(BO)	BO,NY,PI
شيكاغو(CH)	AT,CH,NY,NO,PI
دينفر(DE)	DE,SL
هوستون(HO)	AT,HO,NO
لوس أنجلوس(LA)	LA,SL,SF
نيو اورليانز(NO)	AT,CH,HO,NO
نيويورك(NY)	AT.BO,CH,NY,PI
بتسبرغ(PI)	AT,BO,CH,NY,PI
سالت ليك سيتي(SL)	DE,LA,SL,SF,SE
سان فرانسيسكو(SF)	LA,SL,SF,SE
سياتل(SE)	SL,SF,SE

٧- تتعامل شركة لإطفاء الحرائق حاليا مع 7 شركات لسلالم الإطفاء ومع سبع شركات لأجهزة الإنذار. يعطي الجدول رقم (٤,٦) أقرب موقع لشركتين من شركات الإنذار لموقع جهاز الإنذار نفسه. يرغب مجلس أمناء المدينة بجعل عدد شركات سلالم الإطفاء المناسبة التي يمكن استبدالها بأبراج إطفاء أكبر ما يمكن. ولكن ثمة عوائق سياسية تدخل في الموضوع هو أنه لا يمكن اعتبار شركة سلالم إطفاء مناسبة لعملية استبدال ما لم تكن واحدة على الأقل من الشركتين القريبتين من كل جهاز إنذار هي أيضا شركة مناسبة لمثل هذا الاستبدال. المطلوب صياغة المسألة التي من شأنها أن تجعل عدد الشركات المناسبة للاستبدال أكبر ما يمكن.

الجدول رقم (٤,٦).

رقم جهاز الإنذار	رقم أقرب شركتين من شركات أجهزة الإنذار
1	2.3
2	3.4
3	1.5
4	2.6
5	3.6
6	4.7
7	5.7

٨- يحوي مستشفى الملك خالد الجامعي على 6 جراحين يستطيع كل منهم أن يقوم ببعض من ستة من العمليات الجراحية كما هو مشار في الجدول رقم (٤,٧) حيث تشير * إلى إمكانية قيام الجراح المقابل بالعملية بنجاح .بافتراض أن الجراحين 1 و2 لا يرغبان بالعمل معا، فالمطلوب صياغة المسألة التي تحدد أقل قدر ممكن من الجراحين الذين يمكنهم إجراء كافة العمليات الستة في هذا المستشفى.

الجدول رقم (٤,٧).

الجراح	رقم العملية الجراحية					
	1	2	3	4	5	6
1	*	*		*		
2			*		*	*
3			*		*	
4	*					
5		*				
6				*	*	

٩- ترغب إحدى الجامعات باقتناء حزم جاهزة لحل بعض مسائل البرمجة الرياضية والتي تشمل على البرمجة الخطية، البرمجة العددية، والبرمجة غير الخطية وذلك لخدمة طلاب وهيئة التدريس ببعض الأقسام ذات الصلة بهذه البرامج وذلك من 4 حزم متوافرة حاليا. البيانات معطاة في الجدول رقم (٤,٨) حيث يعني الرمز * أن الحزمة قادرة عل حل نمط المسألة المقابل .

الجدول رقم (٤,٨).

نمط المسائل التي يمكن لحزمة البرنامج حلها	رقم حزمة البرنامج وإمكانياته للحل			
	1	2	3	4
البرمجة الخطية (LP)	*	*	*	*
البرمجة العددية (IP)		*		*
البرمجة غير الخطية(NLP)			*	*

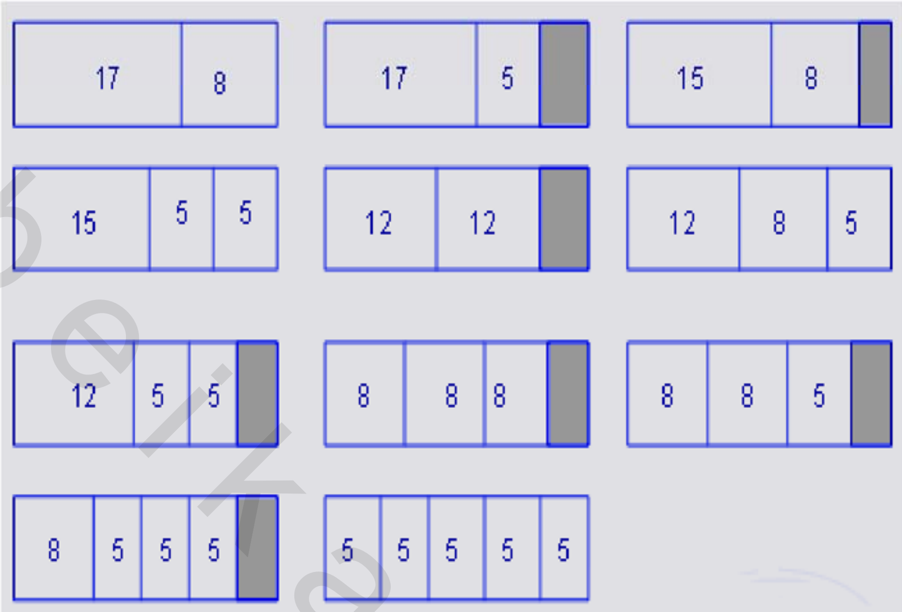
المطلوب صياغة المسألة بنموذج رياضي في كل من الحالات التالية :

(أ). معتبرا أن المعاملات في دالة الهدف تعبر عن التكاليف فالمطلوب صياغة المسألة كأحد مسائل التغطية التي تحل كل نمط من أنماط المسائل المذكور في الجدول رقم (٤,٨) بأقل قدر ممكن من التكاليف.

(ب). معتبرا أن المعاملات في دالة الهدف تعبر عن التكاليف فالمطلوب صياغة المسألة كأحد مسائل التجزئة التي يحل أحدها نمط مسائل البرمجة الخطية ويحل الأخر نمط مسائل البرمجة العددية ويحل الثالث نمط مسائل البرمجة غير الخطية وذلك بأقل قدر ممكن من التكاليف الكلية.

(ج). معتبرا أن المعاملات في دالة الهدف هي عبارة عن مؤشرات نوعية لنمط المسألة المختارة فالمطلوب صياغة المسألة كأحد مسائل الحزم التي تحل أكبر قدر ممكن من أنماط المسائل الثلاث بحيث أن كلا من مسائل البرمجة الخطية ومسائل البرمجة العددية ومسائل البرمجة غير الخطية مشمولة بواحد على الأكثر من هذه الحزم الجاهزة .

١٠- تقوم شركة لصناعة المناشف الورقية بصناعة 5 أصناف من المكورات (rolls) الورقية بنفس الطول وبعرض قدره 17 ,15 ,12 ,8 ,5 قدم قُدر الطلب عليها بالمقادير 20 ,25 ,30 ,35 ,40 وحدة على الترتيب. لكن عملية التصنيع الفعلية في الشركة تمكن فقط من صناعة مكورات بعرض 25 قدم، ولكن الواقع الفعلي لعملية التقطيع تدل على إمكانية التقطيع وفقا ل 11 نمطا مختلفا من المكورات كما هي موضحة في الشكل رقم (٤،١٤). وهو الأمر الذي سيؤدي إلى أن بعضا من هذه المكورات سيكون أعرض من اللازم. ولذا فقد قررت الشركة استبعاد الأنماط التي تحوي زيادة في العرض تزيد على 5 أقدام (أصغر عرض مطلوب). إذا علمت أن كل مكور ورقي يمكن تقطيعه وفقا لأحد الأنماط المطلوبة. فإن المسألة تكمن في تقطيع هذا النوع الأساسي المصنع من المكورات الورقية والتي تجعل العدد الكلي من المكورات الناتجة أقل ما يمكن. المطلوب صياغة هذه المسألة.



الشكل رقم (٤,١٤).