الفصل السادس

طريقة التعداد الضمني
Implicit Enumeration Method

(٦,١) مقدمة

مع أن طريقة التفرع والحد هي الطريقة الأساسية لحل كافة أنواع مسائل البرمجة العددية، إلا أن حل "*مسائل البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم*" غالباً ما يكون باستخدام طريقة تسمى "طريقة التعداد الضمني (Implicit Enumeration Method). ونظراً لأن المتغيرات في "*مسائل البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم*" لا تأخذ إلا القيمتين 0 و1 فإن ذلك سيؤدي إلى عمليات تبسيط كبيرة في كل من عمليتي التفرع (Branching) والحد (Bounding) وسيقود ذلك إلى اكتشاف العقد (Nodes) التي تؤدي إلى حلول غير ممكنة وتلك التي لا تؤدي إلى الحل (الحلول) الأمثل (المثلى) مما يساعدنا على شطب هذه الحلول بسرعة كبيرة والإبقاء، في النهاية، على الحل الأمثل المنشود. ومع أن "طريقة التعداد الضمني" مصممة أساساً لحل "*مسائل البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم*" إلا أنه يمكننا القول بأن هذه الطريقة تصلح (ومن الناحية النظرية على الأقل) لحل أي مسألة برمجة عددية كما سنرى في الفقرة التالية.

(٦,٢) تحويل مسائل البرمجة العامة إلى مسائل برمجة عددية ذات متغيرات ثنائية القيم

(٦,٢,١) تحويل مسائل البرمجة العددية إلى مسائل برمجة عددية ذات متغيرات ثنائية القيم

كما رأينا في الفصل الثالث، الفقرة الرئيسة (٣,٢,٢) والفقرات الجزئية المتفرعة عنها، يمكننا تحويل أي "مسألة برمجة عددية" إلى "مسألة برمجة عددية ذات متغيرات ثنائية القيم".

كذلك يمكن التعبير عن المتغيرات أو الدوال المنفصلة بدلالة متغيرات ثنائية القيم. وبموجب ما رأيناه في الفصل الثالث أيضاً فإنه يمكن تحويل أي "مسألة برمجة غير خطية" إلى "مسألة برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم".

(٦,٢,٢) تحويل مسائل البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم لكثيرات الحدود إلى مسائل برمجة عددية ذات متغيرات ثنائية القيم.

لو فرضنا أن لدينا مسألة البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم العامة التالية:

كبر الدالة:

$$Z = f(x_1, x_2, \qquad , x_n) \tag{٦,١}$$

وفقا للقيود:

$$g_i(x_1, x_2, \qquad , x_n) \le b_i \ \ , i = 1,2,\ldots\ldots, m$$

$$x_j = 1 \ \text{أو}\ \ 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

حيث x_j متغيرات ثنائية القيم وحيث كل من f و g_i هي كثيرات حدود حدها العام k من الشكل $a_k \prod_{j=1}^{n_k} x_j^{p_{kj}}$ بحيث إن p_{kj} تمثل أساً غير سالب و a_k أمثال معلومة و n_k

عدد المتغيرات في هذا الحد العام. وكما نلاحظ فإن $x_j^{p_{kj}} = x_j$ لأن x_j متغير ثنائي القيمة. ولتحويل المسألة إلى برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم فإننا نستخدم التحويلات التالية:

التحويل (1): $a_k y_k = a_k \prod_{j=1}^{n_k} x_j$ ، وعندها فإن y_k هو متغير ثنائي القيمة.

ولضمان أن $y_k = 1$ عندما $x_j = 1$ لجميع قيم j و $y_k = 0$ عدا ذلك، نضيف التحويلين التاليين:

التحويل (2): $\sum_{j=1}^{n_k} x_j - (n_k - 1) \le y_k$

التحويل (3): $\frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} x_j \ge y_k$

فإذا كان $x_j = 1$ لجميع قيم j عندئذ $\sum_{j=1}^{n_k} x_j = n_k$ وعندئذ من التحويل (2) يكون $y_k \ge 1$ ومن التحويل (3) يكون $y_k \le 1$ وبالتالي $y_k = 1$. أما إذا كان $x_j = 0$ لواحدة على الأقل من قيم j فإن التحويل (2) يقود إلى $-(n_k - 1) \le y_k$ والتحويل (3) يقود إلى $y_k < 1$ وبالتالي $y_k = 0$.

فيمكننا بشكل عام أن نحول مثل هذه المسألة إلى مسألة برمجة عددية ذات متغيرات ثنائية القيم وسنوضح ذلك بالمثال التالي:

مثال (٦,١)

كبر الدالة:

$$Z = 2x_1 x_2 x_3^2 + x_1^2 x_2 \qquad (٦,٢)$$

وفقا للقيود:

$$5x_1 + 9x_2^2 x_3 + 3x_1^2 x_3 \le 15$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1,2,3$$

المطلوب تحويل هذه المسألة إلى مسألة برمجة عددية ذات متغيرات ثنائية القيم.

الحل

نجـــري التحـــويلات التاليـــة $y_1 = x_1 x_2 x_3$ ، $y_2 = x_1 x_2$ ، $y_3 = x_2 x_3$ ، $y_4 = x_1 x_3$ فتصبح المسألة على الشكل التالي:

كبر الدالة:

$$Z = 2y_1 + y_2 \quad (٦,٣)$$

وفقا للقيود:

$$5x_1 + 9y_3 \le 15$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_j - (3-1) \le y_1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 - 2 \le y_1$$

$$\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} x_j \ge y_1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3$$

$$x_1 + x_2 - 1 \le y_2$$

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \ge y_2$$

$$x_2 + x_3 - 1 \le y_3$$

$$\frac{1}{2}(x_2 + x_3) \ge y_3$$

$$x_1 + x_3 - 1 \le y_4$$

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_3) \ge y_4$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1,2,3 \quad , \; y_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1,2,3,4$$

وهي مسألة برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم.

(٦,٣) صيغة معتمدة لحل مسائل البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم بطرق التعداد الضمني

نحتاج في بعض الخوارزميات المتعلقة بمسائل البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم لظهور المتغيرات الثنائية القيم بإشارة موجبة في دالة الهدف. ويمكننا تحقيق ذلك باستبدال المتغير الثنائي القيمة x_j الذي يظهر بإشارة سالبة في هذه الدالة بالمتغير $x_j' = 1 - x_j$. لاحظ هنا أن المتغيرات الجديدة x_j' تأخذ القيمتين 0 أو 1، فهي أيضا متغيرات ثنائية القيم. ولنوضح هذه الحالة بالمثال التالي.

مثال (٦,٢)

لدينا مسألة البرمجة الخطية العددية التالية:

صغر الدالة:

$$Z = -2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4$$

وفقا للقيود:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 \ge 5 \qquad (٦,٤)$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1,\cdots,4$$

المطلوب تحويلها بحيث تظهر جميع المتغيرات في دالة الهدف بمعاملات موجبة.

الحل

نلاحظ أن المتغيرين x_1, x_4 فقط تظهر بمعاملات سالبة، لذا نستبدلهما بالمتغيرين $x_1' = 1 - x_1, x_4' = 1 - x_4$ على الترتيب ثم نعوض عنهما حيثما وردا فنحصل على المسألة التالية:

صغر الدالة:

$$Z = 2x_1' + 3x_2 + x_3 + x_4' - 3 \qquad (٦,٥)$$

وفقا للقيود:

$$-x_1' + 2x_2 - 3x_3 - x_4' \geq 5$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 2,3$$

$$x_j' = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1,4$$

حيث نلاحظ تحقق المطلوب.

كذلك قد نحتاج إلى جعل القيود من الشكل $\leq$ على الشكل $\geq$ ، ويمكننا ذلك بأن نضرب طرفي أي قيد من الشكل $\leq$ بالعدد -1. فمثلاً القيد $x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 \geq 5$ يكافئ القيد $-x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq -5$. كذلك فإن أي قيد على الشكل = يتم استبداله بقيدين أحدهما من الشكل $\leq$ والأخر من الشكل $\geq$ ثم نحول هذا الأخير إلى الشكل $\leq$.

وبذلك يمكننا أن نفترض أنه يمكن أن نكتب أي مسألة برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم بالصيغة العامة التالية:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (٦,٦)$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad ; \; i = 1,2,..........,m$$

لجميع قيم j ; 0 أو $1 = x_j$. يمكننا هنا أن نفترض أيضاً أن

$$0 \le c_1 \le c_2 \le c_3 .... \le c_n$$

حيث يمكننا تحقيق ذلك بأن نعيد ترتيب الحدود في دالة الهدف حتى نضمن تحقق المتراجعات $0 \le c_1 \le c_2 \le c_3 .... \le c_n$. فعلى سبيل المثال فإن نموذج المثال (٦,١) يكافئ النموذج التالي:

صغر الدالة:

$$Z = x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 3 \qquad (٦,٧)$$

وفقا للقيود:

$$3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \le -5$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1,2,3,4$$

فيما تبقى من هذه الفقرة سنلقي الضوء على مضمون طريقة التعداد الضمني ونعطي أيضاً بعض التعاريف التي سيتم استخدامها في هذه الطريقة.

١- عدد الحلول الممكنة

لنفرض أن عدد متغيرات القرار هو n فبالنظر إلى خصوصية متغيرات القرار من أنها لا تأخذ إلا القيمتين 0 أو 1 فإن عدد الحلول الممكنة يساوي 2^n.

فمثلاً عدد الحلول الممكنة للنموذج أعلاه يساوي $2^4 = 16$ حلاً ممكناً.

وتقوم طريقة التعداد الضمني بعملية مسح كاملة لكافة الحلول الممكنة لكنها لا تقوم بالتعامل إلا مع عدد قليل جداً من هذه الحلول وذلك من خلال إسقاط ضمني للحلول الجزئية أو الكاملة التي تقود لحلول غير ممكنة أو إسقاط الحلول الممكنة التي تعطي قيمة أسوأ لدالة الهدف.

٢- الحلول الجزئية والحلول الكاملة والمتغيرات الحرة

الحل الجزئي (Partial Solution) هو حل من الشكل $(x_1, x_2, ..., x_k)$ حيث x_k هي متغيرات ثنائية القيم أعطيت مسبقاً إحدى القيمتين 0 و1 وحيث $k=1,2,......,n$.

ويصبح أي حل جزئي حلا كاملا (Complete Solution) عندما تصبح $k=n$.

وعندما تكون $k<n$ فإننا نسمي المتغيرات $x_{K+1}, ..., x_n$ متغيرات حرة (Free Variables)، ونقول عن باقي المتغيرات (والتي أعطيت مسبقا إحدى القيمتين 0 أو 1) بأنها متغيرات مُثبتة(Fixed Variables).

فلو أخذنا مثلاً النموذج الأخير (٦,٥) حيث n=4 فإن الحل التالي

(أ) (0,0,1) هو حل جزئي وهنا يكون x_4 متغيراً حراً.

وكذلك فإن

(ب) (1,0)

(ج) (0,1)

هي حلول جزئية فيها x_3, x_4 هي متغيرات حرة.

والحلول (0,0,1,0)، (0,0,1,1) هي حلول كاملة للحل الجزئي (أ). والحلول (1,0,0,0)، (1,0,0,1)، (1,0,1,0)، (1,0,1,1) هي حلول كاملة للحل الجزئي (ب). والحلول (0,1,0,0)، (0,1,0,1)، (0,1,1,0)، (0,1,1,1) هي حلول كاملة للحل الجزئي (ج).

وفي الحقيقة فإننا لن نستفيد كثيرا إذا استكملنا كافة الحلول الجزئية أو معظمها ؛ لأن ذلك يعني أننا قمنا باستعراض وفحص لكافة هذه الحلول. ولكن وكما نوهنا أعلاه، فإن طرق الحل لمسائل البرمجة العددية تُجري الحسابات على عدد قليل جداً من مجموعة الحلول الممكنة وذلك ضمن آلية معينة يسقط بموجبها العدد الأكبر من هذه الحلول بطريقة ضمنية (وسنشير لمثل هذه الحلول بأنها غير واعدة Non promising). وسنوضح ذلك فيما يلي.

٣- آلية إسقاط الحلول غير الواعدة

لنأخذ المثال البسيط التالي :

مثال (٦,٣):

صغر الدالة :

$$Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad (٦,٨)$$

وفقا للقيود :

$$3x_1 - 8x_2 + 5x_3 \leq -6$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1,2,3$$

إن عدد الحلول الممكنة لهذه المسألة هو $2^3 = 8$. فلو أخذنا القيد الوحيد لها $3x_1 - 8x_2 + 5x_3 \leq -6$ وفحصنا هذا القيد فحصاً جيدا نجد أنه لا يمكن لأي من المتغيرين x_1, x_3 أن يأخذ القيمة 1، إذ أن ذلك سيؤدي إلى عدم تحقق هذا القيد. ولنفس السبب لا يمكن ل x_2 أن يأخذ القيمة 0. إذاً فالحل الوحيد الممكن هو (0,1,0). وبذلك نكون قد أسقطنا سبعة حلول(غير واعدة) بشكل ضمني هي (1,1,1)، (1,1,0)، (0,1,1)، (0,0,0)، (1,0,0)، (0,1,0)، (0,0,1) وذلك دون أن نفحص أياً من هذه

الحلول. وفيما يخص الحلول الجزئية، فبما أننا استنتجنا من قيد المسألة أنه لا يمكن لأي من المتغيرين x_1, x_3 أن يأخذ القيمة 1 لذا فإننا نشطب أي حل جزئي يكون فيه x_1 أو x_3 أو كلاهما مساويا 1 . وكذلك فإننا نشطب أي حل جزئي يكون فيه x_2 =0 .

في الفقرة التالية سنوضح طريقة التعداد الضمني لحل مسائل البرمجة الخطية العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم باستخدام خوارزمية خاصة لهذا النوع من المسائل تسمى "الخوارزمية الجمعية".

(٦,٤) الخوارزمية الجمعية

The Additive Algorithm

سميت هذه الخوارزمية بالجمعية (Additive) ؛ لأنها لا تستخدم إلا عمليتي الجمع والطرح. ومع أنه طرأت بعض التعديلات على هذه الخوارزمية إلا أنها تعزى أساساً إلى بالاس (Balas). تستند الفكرة في هذه الخوارزمية على حل الصيغة المخففة للمسألة العامة أعلاه. فبإضافة المتغيرات الراكدة (Slack Variables) تصبح المسألة على الشكل التالي :

صغر الدالة :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (٦,٩)$$

وفقا للقيود :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + S_i = b_i \quad ; \; i = 1,2,..........,l$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0 \quad ; \; j = 1,2,..........,n$$

$$S_i \geq o \; : \; i = 1,2,..........,l$$

وتقوم فكرة الحل على ما يلي.

بما أنه أمكن جعل أمثال هذه المتغيرات في دالة الهدف غير سالبة ، فإنه يبدو لنا منطقيا أن نسعى لإعطاء أكبر عدد من هذه المتغيرات القيمة 0 ؛ لأن ذلك سيؤدي إلى تصغير دالة الهدف Z . لذا نعطي أولاً جميع المتغيرات القيمة 0 ونفحص الحل الناتج، فإذا كان هذا الحل ممكناً (أي $S_i \geq o$ لجميع قيم i) فإنه حل أمثل. أما إذا كان غير ممكن (أي أنه أدى إلى عدم تحقق بعض قيود هذه المسألة ويكافئ ذلك أن بعض قيم المتغيرات الراكدة S_i سالبة $S_i < o$) فإننا نرفع (Elevate) قيمة متغير أو أكثر إلى القيمة 1 شريطة أن يؤدي هذا الرفع إلى حل أو حلول ممكنة. وهكذا فإننا ننتقل وبالتدريج إلى المتغيرات التالية إلى أن نصل إلى الحل الأمثل. والسؤال الآن هو:

(أ) أي من المتغيرات علينا اختيارها ورفعها إلى القيمة 1.

(ب) متى نصل إلى الحل الأمثل.

وقد تم تصميم عدد من الاختبارات للإجابة على هذين السؤالين الرئيسين. وسنقوم فيما يلي بتقديم هذه الاختبارات من خلال حل المثال التالي:

مثال (٦,٤)

صغر الدالة:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 8 \qquad (٦,١٠)$$

وفقا للقيود:

$$-x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \leq 1$$

$$-7x_1 + 0.x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 \leq -2$$

$$11x_1 - 6x_2 + 0.x_3 - 3x_4 - 3x_5 \leq -1$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0 \quad ; \; j = 1,2,3,4,5$$

الحل

بكتابة دالة الهدف كأحد القيود أي $Z - 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -8$ وإضافة المتغيرات الراكدة $S_i ; i=1,2,3$ إلى كل من القيود ودالة الهدف نجد أن جدول الحل الابتدائي للمسألة الناتجة كبرنامج خطي يعطى كما في الجدول رقم (٦،١). وكما نلاحظ فإن جميع الأمثال للمتغيرات غير الأساسية في سطر دالة الهدف سالبة الأمر الذي يدل على أن الحل المعطى في الجدول رقم (٦،١) هو حل أمثل. لكن هذا الحل غير ممكن لأن قيم المتغيرات الأساسية فيه سالبة. نسمي مثل هذا الحل عادة باسم "*حل ثنوي ممكن*" (Dual Feasible Solution). وعند أخذ المسألة المخففة لمسألة البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم فيجب أن تبدأ الخوارزمية الجمعية ب "حل ثنوي ممكن" (راجع طريقة السمبلكس الثنوية في الفصل الأول). سنكتب الحل الابتدائي (غير الممكن) أعلاه على شكل متجه كما يلي:

$(S_1 \; , \; S_2 \; \; , S_3)_0 = (1, -2, -1)$ وقيمته $Z_0 \; = -8$ وسنسميه الحل(0)

حيث يشير الدليل 0 إلى الحل الابتدائي. وكما نلاحظ فإن شرط الأمثلية محقق في سطر دالة الهدف لهذه المسألة – كمسألة تصغير– (راجع هذا الشرط في الفصل الأول) ولكن الحل الحالي غير ممكن. إذاً يمكننا استخدام " طريقة السمبلكس الثنوية " لغاية الوصول إلى حل ممكن. ولكن وبالنظر إلى خصوصية المسألة من أن متغيراتها لا تأخذ إلا القيمتين 0 و1 فيمكننا أن نتجنب العمليات الطويلة لطريقة السمبلكس الثنوية وتحسين الحل الحالي من خلال عملية رفع قيمة أحد المتغيرات $x_j \; ; j = 1,2,3,4,5$ إلى القيمة 1 شريطة أن تقود هذه العملية للاقتراب من حل ممكن.

الجدول رقم (٦,١).

المتغيرات	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S_1	S_2	S_3	الطرف الأيمن
Z	-3	-2	-5	-2	-3	0	0	0	-8
S_1	-1	-1	1	2	-1	1	0	0	1
S_2	-7	0	3	-4	-3	0	1	0	-2
S_3	11	-6	0	-3	-3	0	0	1	-1

فالسؤال إذاً: أي المتغيرات يحقق لنا ما نريد؟ أو بشكل مكافئ: أي المتغيرات يجب أن نتجنب رفعه لتجنب ما لا نريد؟

وللإجابة: لوعدنا للقيدين الثاني والثالث التي يأخذ فيها اثنين من المتغيرات الأساسية قيماً سالبة نجد أن x_3 هو الوحيد الذي يملك أمثالاً غير سالبة في القيدين معاً ولذا فإن رفع x_3 إلى القيمة 1(مع إبقاء بقية المتغيرات على القيمة 0) سيزيد الوضع سوءاً إذ سيزيد ذلك في سلبية قيم المتغيرين الأساسين S_3, S_2 مع أننا نسعى لإنقاصهما. ولذا علينا إبقاء قيمة x_3 مساوية 0 . وبطريقة مماثلة نجد أن رفع أي من المتغيرات x_4 ، x_2 ، x_1 إلى القيمة 1 لن يحقق لنا ما نريد. ولكن رفع x_5 إلى القيمة 1 (مع إبقاء بقية المتغيرات عند القيم 0) سيقود إلى حل ممكن هو:

$$(S_1\ ,\ S_2\ ,S_3)_1=(2,1,2) \quad \text{وقيمته} \quad Z_1\ =-5 \qquad \text{الحل } (1)$$

وهنا فإننا نعتبر هذا الحل الممكن بأنه أول حل ممكن قد تم الحصول عليه، ولذا نقوم بتخزينه، ونعتبر القيمة $Z_1\ =-5$ حداً أعلى(لأن المسألة مسألة تصغير) لأي حل مستقبلي ممكن. وسيمكننا ذلك من أمرين:

الأول: رفض أي حل مستقبلي ممكن تكون فيه قيمة دالة الهدف أكبر من أو تساوي 5-.

والثاني: أن عملية التفرع من القيمة x_5 =1 ستكون غير مجدية لأنها لن تؤدي لقيمة أفضل لدالة الهدف وذلك لأن الهدف تصغير ولأن جميع معاملات المتغيرات في هذه الدالة موجبة. ولذا فإن عملية التفرع ستكون من القيمة x_5 = 0 إن كانت مثل هذه العملية مجدية.

فلو اعتبرنا $x_5 = 0$ وتذكرنا أن بقية المتغيرات $x_j \;;\; j=1,2,3,4$ هي أصفار لحصلنا على الحل التالي:

$$(S_1\ ,S_2\ ,S_3)_2 = (1,-2,-1) \quad \text{وقيمته} \quad Z_2 = -8 \qquad \text{الحل } (2)$$

لاحظ أن الحل (2) يتطابق ظاهرياً مع الحل(0)، ولكن وفي الحقيقة ثمة فرق جوهري مهم بينهما هو أن جميع المتغيرات $x_j \;;\; j=1,2,3,4,5$ في الحل (0) هي *"متغيرات حرة"* ويمكنها أخذ أحد القيمتين 0 أو 1 ، في حين أنه في الحل (2) فإننا *ثبتنا* المتغير x_5 إلى القيمة 0 (أي $x_5 = 0$)، الأمر الذي يعني أن عملية التفرع ستكون على أحد المتغيرات (الحرة) الباقية $x_j \;;\; j=1,2,3,4$.

ولكن ثمة معلومة إضافية متوافرة لغاية الآن هي أن هناك حداً أعلى قيمته Z=-5 على القيمة المثلى لدالة الهدف لجميع الحلول التي ترتفع فيها قيمة أحد المتغيرات الحرة الأربعة المتبقية $x_j \;;\; j=1,2,3,4$ إلى الواحد.

الآن: لما كانت أمثال x_5 وأمثال x_1 متساوية (=3) فإن رفع قيمة x_1 إلى القيمة 0 لن يحسن في قيمة الحد الأعلى لدالة الهدف (Z=-5). كذلك فقد أشرنا من قبل بأن رفع قيمة x_3 إلى القيمة 1 سيؤول إلى بعد الحل الناتج عن أن يكون ممكناً. لذا فإن الفرص المتبقية أمامنا هي أن نرفع أي من المتغيرين المتبقيين x_2 أو x_4 إلى القيمة 0 . ولو تفحصنا قيود النموذج (٦،١٠) لوجدنا أن عملية رفع أي منهما لوحده لا تقود إلى حل ممكن (واحد أو أكثر من المتغيرات يأخذ قيمة سالبة). والسؤال الآن أي من مثل هذه المتغيرات أكثر تسارعاً في الوصول إلى حل ممكن؟.

للإجابة نعرف المقدار التالي لأي متغير حر x_j :

$$v_j = \sum_{all\ i} Min\{0, S_i - a_{ij}\} \qquad (٦,١١)$$

في الحقيقة فإن المقدار المعرف بالعلاقة (٦,١١) يمكن أن يمثل ما يمكن أن نسميه "مقدار البعد عن أن يكون الحل الناتج ممكناً لدى رفع المتغير x_j إلى 1" ولذا فإننا "نختار المتغير x_j الذي يملك أقل القيم (المطلقة) الناتجة ل v_j ".

ففي مثالنا حيث المتغيرات الحرة هي x_2 و x_4 نجد أن

$$v_2 = \sum_{all\ i} Min\{0, S_i - a_{i2}\} = Min\{0,\ S_1 - a_{12}\} + Min\{0, S_2 - a_{22}\} + Min\{,0, S_3 - a_{32}\}$$
$$= Min\{0,1+1\} + Min\{0,-2-0\} + Min\{0,-1+6\} = 0 + (-2) + 0 = -2$$

وبالمثل نجد أن $v_4 = (1-2) + 0 + 0 = -1$

وبذلك علينا أن نفرع على المتغير x_4. لنرفع x_4 إلى القيمة 1 أولاً فنجد أن ذلك يقود إلى الحل

$(S_1\ , S_2\ , S_3)_3 = (-1,2,2)$ وقيمته $Z_3 = -6$ الحل(3)

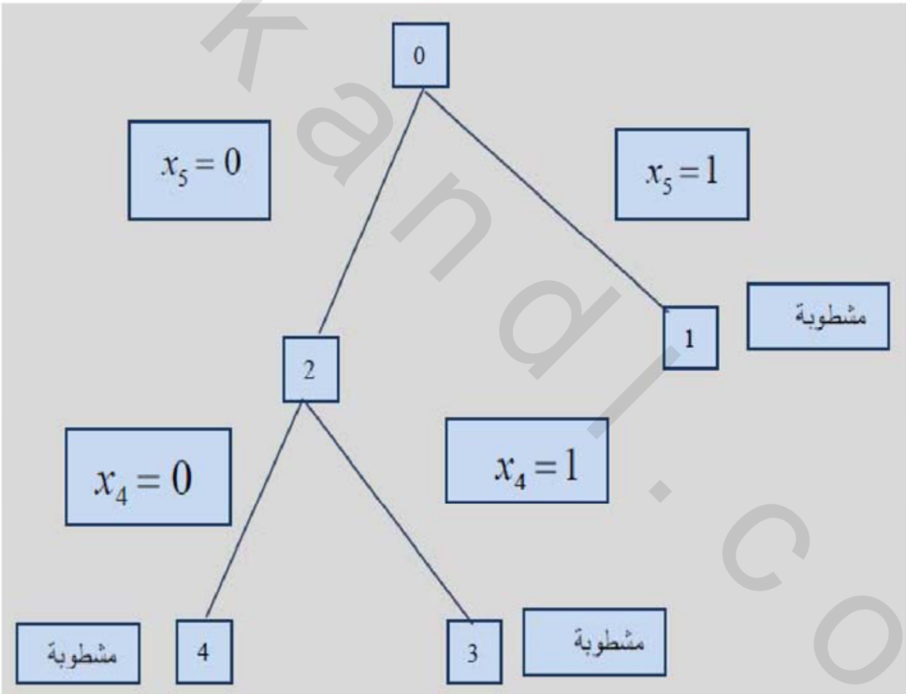
والحل (3) غير ممكن وفيه x_3, x_2 , x_1 هي المتغيرات الحرة في هذا الحل (حيث تم تثبيت المتغيرات x_5 , x_4 إلى القيمتين 0 و 1 على الترتيب) فأي منها مرشح لرفعه إلى القيمة 1. ولكن وبالعودة إلى أمثال المتغيرات x_3, x_2 , x_1 ، وهي 5 , 2 , 3 على الترتيب، نجد أن رفع x_1 إلى القيمة 1 يعطي القيمة Z=-3 ، ورفع x_2 إلى القيمة 1 يعطي القيمة Z=-4 ، ورفع x_3 إلى القيمة 1 يعطي القيمة Z= -1 . وكما نلاحظ فجميع قيم الدالة Z الناتجة أسوأ من قيمة الحد الأعلى Z=-5 الذي وصلنا إليه عند الحل (1) الممكن، لذا فإننا نستثني هذه المتغيرات الحرة من عمليات التفرع المحتملة.

نعود الآن ونفترض أن $x_4 = 0$ (مثبت) ولدينا مسبقا $x_5 = 0$ (مثبت) فتكون x_3 , x_2 , x_1 هي المتغيرات حرة، فلو رفع x_1 إلى القيمة 1 لحصلنا على القيمة Z=-5 . ولو رفعنا x_2 إلى القيمة 1 لحصلنا على القيمة Z=-6 لكن الحل الناتج غير ممكن.

ولو رفعنا x_3 إلى القيمة 1 لحصلنا على القيمة Z= -3 والحل الناتج غير ممكن كذلك. ولو أبقينا هذه المتغيرات على القيمة 0 لحصلنا على حل يطابق الحل الابتدائي (0) سنسميه الحل (4). وبذلك نكون قد أنهينا جميع عمليات التفرع الممكنة والحل الأمثل هو الحل (1) وهو:

$$x_1 = 0 \ , \ x_2 = 0 \ \ , x_3 = 0 \ , x_4 = 0, x_5 = 1, \ \ Z^* = -5$$

ويمكننا تلخيص عمليات التفرع التي أجريناها سابقاً بالشكل رقم (٦,١).



الشكل رقم (٦,١). ملخص عمليات التفرع لمثال (٦,٥).

إن عدد الحلول الممكنة في مثال (٦,٥) السابق هو $2^5=32$ حلاً، لكننا – وكما نلاحظ من الشكل رقم (٦,١) – فقد أجرينا حسابات كاملة لعدد قليل جداً منها وتم إسقاط الباقي باعتبارها حلولاً غير واعدة. فلو تفحصنا ما قمنا بعمله فعلياً لوجدنا الآتي.

بدأنا الحل بعملية تفرع على المتغير x_5. ففي الفرع الأول حيث ثبتنا $x_5=1$ تمت الحسابات ل $2^{5-1}=16$ حلاً، وفي الفرع الثاني حيث ثبتنا $x_5=0$ فقد فرعنا x_4 إلى أحد قيمتين هما $x_4=1$ و $x_4=0$ و في كلٍ منهما فقد تمت الحسابات ل $2^{5-2}=8$ حلاً. وبذلك يكون مجموع الحلول التي أخذها بعين الاعتبار مساوياً 16+8+8 =32 حلاً وقد أجرينا حسابات كاملة على خمس فقط منها (هي الحل (0)، الحل (1)، الحل (2)، الحل (3)، الحل (4)) وتم استبعاد أو إسقاط الباقي بشكل ضمني لأنها حلول غير واعدة.

ملاحظة (٦,١)

(أ) عرفنا أعلاه كل من المتغيرات الحرة بأنها المتغيرات التي لم يتم تثبيتها كما عرفنا الحلول الجزئية بأنها تلك التي نثبت فيها k من أصل n (k اقل من أو تساوي n) من المتغيرات.

وفي شكل كالشكل رقم (٦,١) فقد ذكرنا أنه في العقدة (3) مثلاً (حيث ثبتنا كل من x_4 , x_5) فإن كلاً من المتغيرات x_1 , x_2 , x_3 هي متغيرات حرة. ويقودنا ذلك إلى تسمية المتغير بأنه "حر عند عقدة معينة" إذا لم يتم تثبيته في أي فرع يقود إلى هذه العقدة. كذلك نسمي الحل بأنه "جزئي" إذا تم تثبيت قيمة متغير أو أكثر إلى إحدى القيمتين 0 أو 1 .

(ب) لتجنب التعقيد في الكتابة فإننا سنستخدم الترميز التالي للمتغيرات الثنائية القيم عند كل عقدة J_m ($m=0,1,2,.......$) (أو حل جزئي) .

$$x_j=1 \;\; (x_j=0) \quad \text{من أجل القيم} \quad +j(-j) \qquad (٦,١٢)$$

مع اعتبار أن $J_0=\phi$ دوماً والتي تعني أن جميع المتغيرات حرة في الحل الابتدائي (العقدة(0)). فلو طبقنا هذا الترميز على عقد الشكل رقم (٦،١) لكان لدينا النتائج التالية:

$$J_4=\{-5,-4\} \quad ، \quad J_3=\{-5,4\} \quad ، \quad J_2=\{-5\} \quad ، \quad J_1=\{5\}$$

(ج) لقد استخدمنا كلمة مشطوبة (omedFath) بجوار بعض العقد (الحلول الجزئية) في الشكل رقم (٦،١). وقد كنا نفعل ذلك في إحدى حالتين:

١ – إذا لم يكن بإمكان تلك العقدة (الحل الجزئي) أن تقود إلى قيمة أفضل لدالة الهدف.

٢– إذا لم يكن بإمكان تلك العقدة (الحل الجزئي) أن تقود إلى حل ممكن.

(د) سنرمز بالرمز Z_m لقيمة دالة الهدف في أي عقدة J_m $(m = 0,1,2,...)$ وسنرمز بالرمز Z^u للحد الأعلى الحالي لقيمة Z وسنعتبر أن $Z^u=\infty$ عند العقدة J_0.

(هـ) لوعدنا إلى العقدتين $J_3=\{-5,4\}$ و $J_4=\{-5,-4\}$ في مثالنا أعلاه نجد أنه بعد شطب العقدة (3) فقد انتقلنا إلى العقدة (4). وقد حصلنا على العقدة (4) بعملية استكمال لقيم أقصى متغير على اليمين (وهو x_4) من العقدة (3). ففي $J_3=\{-5,4\}$ فإن أقصى متغير على اليمين هو x_4 وقد أخذ القيمة 1 في هذه العقدة. وعند الانتقال للعقدة التالية J_4 فإننا نستكمل قيم x_4 بإعطائه القيمة 0 فنحصل على العقدة $J_4=\{-5,-4\}$. وقد قمنا بشطب هذه الأخيرة واعتبرنا عملية التعداد لكافة الحلول قد انتهت عند J_4 . والسبب في ذلك هو أن القيم السالبة في $J_4=\{-5,-4\}$ تعني أن كافة المتغيرات قد مرت بالقيمتين 1 أولاً ثم 0 ثانياً.

وسنعتمد جميع المصطلحات في هذه الملاحظة في كل مما يأتي.

الخوارزمية الجمعية

سنقدم، فيما تبقى من هذه الفقرة، ما أطلقنا عليه اسم "الخوارزمية الجمعية"، ولكن باستخدام الترميز (٦,١٢)، لحل النموذج العام (٦,٩) لمسائل البرمجة العددية الثنائية. وسنطبق خطوات هذه الخوارزمية لإعادة حل المثال (٦,٥) السابق والذي نعيد كتابته ثانية ولكن بصيغة النموذج العام (٦,٩).

(٦,١٥) صغر الدالة:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 8$$

وفقا للقيود:

$$-x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 + S_1 = 1$$

$$-7x_1 + 0.x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 + S_2 = -2$$

$$11x_1 - 6x_2 + 0.x_3 - 3x_4 - 3x_5 + S_3 = -1$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0 \quad ; \ j = 1,2,3,4,5$$

$$S_i \geq 0, i = 1,2,3$$

تعتمد هذه الخوارزمية على خطوتين رئيستين يمكن لأي منهما أن يتألف من عدد من التكرارات.

خطوة (1)

ابدأ من العقدة $J_0 = \phi$ حيث $Z^u = \infty$ وطبق الاختبارات الأربعة التالية على المتغيرات الحرة (نذكر بأن جميع المتغيرات تكون حرة في العقدة J_0).

اختبار (1). لأي متغير حر x_j في العقدة J_m ، إذا كان $a_{ij} \geq 0$ لجميع قيم i التي يكون من أجلها $S_i^m < 0$ فلا يمكن لهذا المتغير الحر أن يقود إلى حل ممكن ونعتبره عندها " متغير غير واعد " وعليه يتم إسقاطه من الاعتبار

اختبار (2). لأي متغير حر x_j في العقدة J_m إذا كان.

$$c_j + Z_m \geq Z^u \quad (٦,١٣)$$

فلا يمكن لهذا المتغير الحر أن يقود حل أفضل من الحل الحالي وبالتالي فهو "متغير غير واعد" وعليه يتم إسقاطه من الاعتبار. لاحظ أن هذا الاختبار لا يطبق في العقدة J_0 .

اختبار (3). لو كان $S_i^m < 0$ ولو أخذنا القيد المقابل وفرضنا أن F_m هي مجموعة المتغيرات الحرة التي لم يتم إسقاطها بالاختبارين(1) و(2) فلا يمكن لأي من المتغيرات الحرة في هذه المجموعة أن يقود إلى حل ممكن إذا تحقق الشرط التالي

من أجل واحدة على الأقل من $S_i^m < 0$ فإن $\sum_{x_j \in F_m} Min\{0, a_{ij}\} > S_i^m$ (٦,١٤)

وعليه يتم إسقاط جميع المتغيرات في F_m وعندها نقوم بشطب العقدة المقابلة J_m .

اختبار (4). إذا كانت F_m غير خالية وعرفنا

$$v_j^m = \sum_{i=1}^{l} Min\{0, S_i^m - a_{ij}\} \quad (٦,١٥)$$

حيث l هي عدد القيود ، وكان

$$v_k^m = Max_{j \in F_m} \{v_j^m\} \quad (٦,١٦)$$

عندئذ يتم اختيار المتغير الحر x_k . فإذا كان $v_k^m = 0$ فإن $x_k = 1$ مع متغيرات العقدة المقابلة J_m تنتج حلاً ممكناً محسناً ، وعندها نشطب العقدة التالية J_{m+1} والتي تنتج باستكمال قيم المتغير x_k في أقصى اليمين للعقدة J_m . أما إذا كان $v_k^m \neq 0$ فإننا

نعيد تطبيق الاختبار(4) على العقدة J_{m+1} حتى تصبح جميع عناصر العقدة المشطوبة سالبة.

خطوة (2).

نتوقف إذا وصلنا إلى عقدة J_m جميع عناصرها سالبة وعندها يكون أفضل الحلول الممكنة التي وصلنا إليها هو الحل الأمثل المنشود وإلا فإننا نكرر الخطوة (1).

فيما يلي سنطبق الخوارزمية الجمعية لإعادة حل المثال (٦,٥)

خطوة (1).

التكرار(0): نبدأ بوضع $J_0 = \phi$ حيث $Z^u = \infty$ ونطبق الاختبار (1) في العقدة $J_0 = \phi$ والتي تعني أن جميع المتغيرات حرة وقيمتها • فنحصل على الحل (0) التالي

$$Z_0 = -8 \quad \text{وقيمته} \quad (S_1^0 \ , S_2^0 \ , S_3^0) = (1, -2, -1)$$

وهنا لدينا $0 > S_2^0$ و $0 > S_3^0$ فهذا الحل غير ممكن. وبالعودة إلى البيانات في النموذج (٦,١٣) نجد أن ما يلي:

للمتغير x_2 : $a_{12} = -1 < 0 \ , a_{22} = 0$

وللمتغير x_3 : $a_{13} = 1 > 0 \ , a_{23} = 3 > 0, a_{23} = 0 \geq 0$

فشرط الاختبار (1) غير محقق للمتغير x_2 ولكنه محقق للمتغير x_3 ، لذا علينا إسقاط المتغير x_3 .

نطبق الاختبار (3) في العقدة J_0 حيث أسقطنا المتغير x_3 في الاختبار (1) وبذلك فإن $F_0 = \{1,2,4,5\}$. هنا لدينا $S_2^0 < 0$ و $S_3^0 < 0$ ، ولذا علينا أخذ القيدين المقابلين من النموذج وهما:

$$-7x_1 + 0.x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 + S_2 = -2$$

$$11x_1 - 6x_2 + 0.x_3 - 3x_4 - 3x_5 + S_3 = -1$$

فنجد منهما ما يلي :

$$\sum_{x_j \in F_0} Min\{0, a_{ij}\} = Min\{0,-7\} + Min\{0,0\} + Min\{0,-4\} + Min\{0,-3\} = -14 < S_2^0 = -2$$
$$\sum_{x_j \in F_0} Min\{0, a_{ij}\} = Min\{0,11\} + Min\{0,-6\} + Min\{0,-3\} + Min\{0,-3\} = -12 < S_3^0 = -1$$

ولذا فجميع المتغيرات في F_0 "غير واعدة" ولا يمكن لأي منها أن يقود إلى حل ممكن. نطبق الاختبار (4) في العقدة J_0 حيث أسقطنا المتغير x_3 في الاختبار (1) وحيث $F_0 \neq \phi$. نقوم الآن بحساب

$$v_j^m = \sum_{i=1}^{l} Min\{0, S_i^m - a_{ij}\}$$ لجمع قيم j عدا $j=3$

فنجد ما يلي :

$$v_1^0 = \sum_{i=1}^{3} Min\{0, S_i^0 - a_{i1}\} = Min\{0,1+1\} + Min\{0,-2+7\} + Min\{0,-1-11\} = -12$$
$$v_2^0 = \sum_{i=1}^{3} Min\{0, S_i^0 - a_{i2}\} = Min\{0,1+1\} + Min\{0,-2+0\} + Min\{0,-1+6\} = -2$$
$$v_4^0 = \sum_{i=1}^{3} Min\{0, S_i^0 - a_{i4}\} = Min\{0,1-2\} + Min\{0,-2+4\} + Min\{0,-1+3\} = -1$$
$$v_5^0 = \sum_{i=1}^{3} Min\{0, S_i^0 - a_{i5}\} = Min\{0,1+1\} + Min\{0,-2+3\} + Min\{0,-1+3\} = 0$$

ولما كان $v_k^m = Max_{j \in F_m} \{v_j^m\}$ محققاً من أجل x_5 وحيث أن $v_5^0 = 0$ لذا فإننا، وبموجب الاختبار (4)، نختار القيمة $x_5 = 1$.

التكرار (1). وصلنا في التكرار السابق إلى الاختيار $x_5 = 1$. لذا فنحن في العقدة $J_1 = \{5\}$ والتي تعني أن كافة المتغيرات في J_1 حرة عدا x_5 حيث ثبتناه على القيمة $x_5 = 1$ ويقودنا ذلك إلى الحل (1) التالي:

$$(S_1^1 \ , S_2^1 \ , S_3^1) = (2,1,2) \quad \text{وقيمته} \quad Z_1 = -5 \qquad \text{الحل}(1)$$

وهذا الحل ممكن، لذا $Z^u = -5$ والعقدة J_1 مشطوبة وعلينا الانتقال للتكرار التالي التكرار (2). نستكمل العقدة J_1 فنحصل على العقدة $J_2 = \{-5\}$ (وتعني أننا أخذنا $x_5 = 0$) والتي تقود للحل(2) التالي:

$$(S_1^2 \ , S_2^2 \ , S_3^2) = (1,-2,-1) \quad \text{وقيمته} \quad Z_2 = -8 \qquad \text{الحل} (2)$$

الآن نعيد تطبيق الاختبارات الأربعة على $J_2 = \{-5\}$ بطرق مماثلة لتلك التي فعلناها على العقدة J_0 فنجد أن الاختبار (1) يُسقط x_3. وبالنسبة للاختبار (2) نجد في هذه العقدة النتائج التالية للمتغيرات الحرة .(نذكر بأن x_5 غير حر في هذه العقدة)

للمتغير x_1 : لدينا $c_1 + Z_2 = 3 + (-8) = -5$ فالعلاقة $c_j + Z_m \geq Z^u$ محققة من أجل المتغير x_1، وبالتالي علينا أن نسقط x_1 .

للمتغير x_2 : لدينا $c_2 + Z_2 = 2 + (-8) = -6$ فالعلاقة $c_j + Z_m \geq Z^u$ غير محققة من أجل المتغير x_2.

للمتغير x_3 : لدينا $c_3 + Z_2 = 5 + (-8) = -3 > -5$ فالعلاقة $c_j + Z_m \geq Z^u$ محققة من أجل المتغير x_3، وبالتالي علينا أن نسقط x_3 .

للمتغير x_4 : لدينا $c_4 + Z_2 = 2 + (-8) = -6$ فالعلاقة $c_j + Z_m \geq Z^u$ غير محققة من أجل المتغير x_4.

لنطبق الآن الاختبار (3): لدينا $F_2 = \{2, 4\}$ غير خالية كما أنه لدينا $S_2^2 < 0$ و$S_3^2 < 0$ وبأخذ القيدين المقابلين من النموذج وهما:

$$-7x_1 + 0.x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 + S_2 = -2$$

$$11x_1 - 6x_2 + 0.x_3 - 3x_4 - 3x_5 + S_3 = -1$$

نجد منهما ما يلي :

$$\sum_{x_j \in F_2} Min\{0, a_{ij}\} = Min\{0,0\} + Min\{0,-4\} = -4 < S_2^0 = -2$$

$$\sum_{x_j \in F_2} Min\{0, a_{ij}\} = Min\{0,-6\} + Min\{0,-3\} = -9 < S_3^0 = -1$$

ولذا فجميع المتغيرات في F_2 غير واعدة ولا يمكن لأي منها أن يقود إلى حل ممكن.
نطبق الآن الاختبار (٤). لدينا :

$$v_2^2 = \sum_{i=1}^{3} Min\{0, S_i^2 - a_{i2}\} = Min\{0,1+1\} + Min\{0,-2+0\} + Min\{0,-1+6\} = -2$$

$$v_4^2 = \sum_{i=1}^{3} Min\{0, S_i^2 - a_{i4}\} = Min\{0,1-2\} + Min\{0,-2+4\} + Min\{0,-1+3\} = -1$$

وأكبرها 1- يختلف عن الصفر ويعود إلى x_4 ونضع x_4=1 ولكن الحل الناتج غير ممكن.
التكرار (3). لدينا إلى الآن x_4=1 ، x_5=0 (مثبتة) ولذا فإن $J_3 = \{-5,4\}$ والتي تقود للحل (3) التالي :

$$(S_1^3\ ,\ S_2^3\ \ ,S_3^3) = (-1,2,2) \quad \text{وقيمته} \quad Z_3 = -6 \quad \text{الحل (3)}$$

وكما في التكرارات السابقة فإن الاختبار (1) يُسقط x_3 ، والاختبار (2) يستثني كلاً من x_1 , x_2 , x_3 ولدينا x_4=1 ، x_5=0 (مثبتة)، وبالتالي $F_3 = \phi$ ولذا فإننا نشطب J_3.
التكرار (4). بما أننا شطبنا J_3 فإننا نستكمل قيمة عنصرها في أقصى اليمين لنحصل بذلك على $J_4 = \{-5,-4\}$ والتي تقود إلى الحل (4) التالي :

$$(S_1^3\ ,\ S_2^3\ \ ,S_3^3) = (1,-2,-1) \quad \text{وقيمته} \quad Z_4 = -8 \quad \text{الحل(4)}$$

أيضاً وكما في التكرارات السابقة فإن الاختبار (1) يُسقط x_3 ، والاختبار (2) يستثني كلاً من x_3, x_1 والاختبار (3) يقود إلى $F_4 = \{2\}$ والذي يعني أن x_2 غير واعد ولدينا x_4=0 ، x_5=0 (مثبتة)، ولذا فإننا نشطب J_4 .

وبما أن جميع عناصر J_4 سالبة فقد تم استعراض كافة الحلول والتي نجد منها أن الحل في J_1 هو الحل الأمثل وهذا الحل هو:

$$(x_1 \ , x_2 \ , x_3 \, , x_4 \ , x_5) = (0,0,0,0,1) \quad \text{وقيمته} \quad Z^* = Z_1 = -5 \ .$$

(٦,٥) تمارين (٦)

١- لدينا المسألة التالية:

كبر الدالة:

$$Z = 5x_1^2 x_2^3 x_3 x_4 + 2x_1 x_2^2 x_3 + 3x_1 x_3^2$$

وفقا للقيود:

$$2x_2 + 7x_2^2 x_3 x_4 + 5x_4^2 x_1 \quad \leq 10$$

$$x_j = 1 \ \text{أو} \ \ 0, \quad j = 1,2,3,4$$

المطلوب تحويل هذه المسألة إلى مسألة برمجة عددية ثنائية.

٢- ستقوم شركة بتنفيذ خمسة مشاريع خلال السنوات الثلاث القادمة. يعطي الجدول رقم (٦,٢) تكاليف تنفيذ كل من هذه المشاريع والربح المتوقع من كل مشروع والميزانية المتوافرة للتنفيذ في كل سنة [مليون دولار] لنفرض أن كل مشروع

يقع عليه الاختيار لتنفيذه فسيتم تنفيذه على مدار ثلاث سنوات وأن هدف الشركة هو جعل الأرباح الكلية العائدة من تنفيذ بعض أوكل المشاريع الخمسة أكبر ما يمكن، فالمطلوب

(أ) صياغة هذه المسألة كمسألة برمجة خطية عددية ثنائية.

(ب) إيجاد الحل الأمثل للمسألة باستخدام الخوارزمية الجمعية.

الجدول رقم (٦,٢).

رقم المشروع	تكلفة السنة 1	تكلفة السنة 2	تكلفة السنة 3	الربح المتوقع للمشروع
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
الميزانية المتوافرة للتنفيذ	25	25	25	

٣– لديك المسألة التالية:

كبر الدالة:

$$Z = 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5$$

وفقا للقيود:

$$3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 4x_5 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 \leq 0$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0 \quad ; \ j = 1,2,3,4,5$$

المطلوب:

(أ) أعد كتابة المسألة بالشكل النموذجي بحيث تكون أمثال جميع المتغيرات في دالة الهدف موجبة.

(ب) إيجاد الحل الأمثل للمسألة باستخدام "الخوارزمية الجمعية".

٤- تعتزم شركة أن تتخذ قراراً ببناء مصنع جديد في واحد من مكانيين A أو. Bكذلك فإن الشركة تنوي بناء مخزن كبير في المكان الذي ستختاره لبناء المصنع. يعطي الجدول رقم (٦،٣) كل هذه البدائل وتكاليفها.

إذا علمت أن الميزانية المتوافرة هي 25$ مليون وأن متغيرات القرار هي $y_i =1$ إذا كان جواب القرار ب "نعم" و $y_i =0$ إذا كان جواب القرار ب "لا" فالمطلوب

الجدول رقم (٦,٣).

رقم القرار	نوع القرار	متغير القرار	الربح المتوقع$	التكلفة $
1	البناء في الموقع A	y_1	7 مليون	20 مليون
2	البناء في الموقع B	y_2	5 مليون	15 مليون
3	بناء المخزن في الموقع A	y_3	4 مليون	12 مليون
4	بناء المخزن في الموقع B	y_4	3 مليون	10 مليون

(أ) صياغة المسألة كمسألة برمجة خطية عددية.

(ب) إيجاد الحل الأمثل باستخدام الخوارزمية الجمعية.

٥- أوجد الحل الأمثل للمسألة التالية باستخدام الخوارزمية الجمعية

صغر الدالة :

$$Z = 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 9x_4 + 10x_5 + 10x_6$$

وفقا للقيود:

$$-2x_1+6x_2+3x_3+4x_4+x_5-2x_6\geq 5$$

$$-5x_1-3x_2-x_3+3x_4-2x_5+x_6\geq -3$$

$$5x_1-x_2-4x_3-2x_4+2x_5-x_6\geq -1$$

$x_j = 1$ أو 0 ; $j = 1,2,3,4,5\ ,6$

٦- يقوم ثلاثة أشخاص بإنجاز ثلاثة أعمال وفقاً للأزمان الموضحة بالجدول رقم (٦،٤). المطلوب:

(أ) صياغة المسألة كمسألة برمجة خطية عددية.

(ب) إيجاد الحل الأمثل للمسألة باستخدام الخوارزمية الجمعية.

(ج) رسم الشكل الذي يمثل جميع عمليات التفرع على جميع المتغيرات.

الجدول رقم (٦،٤).

الأشخاص	الوظائف		
	1	2	3
A	10	15	12
B	7	8	10
C	20	9	15

٧- يمكن لشركة أن تنتج أحد السلع على واحدة من أربعة مكائن صناعية لكل منها تكاليف تجهيز وتكاليف إنتاج متغيرة وطاقة إنتاجية محددة. البيانات معطاة بالجدول رقم (٦،٥). ترغب الشركة بإنتاج 2000 وحدة يومياً على الأقل من هذه السلعة، والمطلوب:

(أ) صياغة هذه المسألة كمسألة برمجة خطية عددية.

(ب) إيجاد الحل الأمثل باستخدام الخوارزمية الجمعية.

الجدول رقم (٦,٥).

رقم الماكينة	التكاليف $		
	تكلفة التجهيز	تكلفة الإنتاج للوحدة	الطاقة الإنتاجية باليوم
1	1000	20	900
2	920	24	1000
3	800	16	1200
4	700	28	1600

٨- تدرس أحد دور النشر طباعة ٥ كتب جديدة. يحتوي الجدول رقم (٦,٦) على التكاليف التالية: الحد الأقصى الذي يمكن بيعه من كل كتاب، التكلفة المتغيرة لإنتاج كل كتاب، سعر بيع كل كتاب، تكلفة التجهيز لعملية إنتاج كل كتاب والطلب على كل كتاب. يمكن لدار النشر هذه أن تنتج 10000 كتاب شهرياً.

الجدول رقم (٦,٦).

التكاليف والطلب	رقم الكتاب				
	1	2	3	4	5
الطلب (نسخة)	5000	4000	3000	4000	3000
تكلفة الكتاب $	50	40	38	32	40
تكلفة التجهيز $	80	50	60	30	40

تهدف دار النشر لجعل الربح الكلي الناتج أكبر ما يمكن المطلوب:

(أ) صياغة المسألة بنموذج رياضي.

(ب) إيجاد الحل الأمثل للمسألة بالطريقة المناسبة.

٩- ترغب شركة بتنفيذ أربعة مشاريع تتنافس فيما بينها على الموارد المحدودة للشركة من المال. إن كل مشروع له عوائده الخاصة والتي تساوي رأس المال الذي تصرفه عليه الشركة مضافاً إليه العوائد الربحية لهذا المشروع. وفقاً لما يلي :

رقم المشروع	1	2	3	4
الربح المتوقع للمشروع /مليون $	40	30	50	60
التكلفة المتوقع للمشروع/مليون $	30	20	40	50

إذا علمت أنه قد توافرت للشركة ميزانية إجمالية مقدارها 100$ مليون فإنها ترغب معرفة أي المشاريع التي ستقوم بتنفيذها بحيث يتحقق لها أكبر ربح كلي ممكن.

المطلوب

(أ) صياغة المسألة كمسألة برمجة خطية عددية.

(ب) إيجاد الحل الأمثل للشركة.

١٠– لدينا حقيبة تتسع ل 45 كيلو غرام ونرغب بملئها بخمسة عناصر بياناتها كما يلي :

رقم السلعة	1	2	3	4	5
وزن الوحدة/كغ	18	12	15	16	13
العائد من الوحدة $	27	9	30	16	6.5

الهدف هو جعل العائد الكلي الناتج من ملء الحقيبة بواحد أو أكثر من هذه العناصر أكبر ما يمكن والمطلوب :

(أ) صياغة المسألة كمسألة برمجة عددية

(ب) إيجاد الحل الأمثل لها.

١١- أوجد الحل الأمثل لمثال (٣,٧) من الفصل الثالث باستخدام الخوارزمية الجمعية.

١٢- أوجد الحل الأمثل لمثال (٣,٩) من الفصل الثالث باستخدام الخوارزمية الجمعية.

١٣- أوجد الحل الأمثل لمثال (٣,١٢) من الفصل الثالث باستخدام الخوارزمية الجمعية.

١٤- أوجد الحل الأمثل لمثال (٣,١٣) من الفصل الثالث باستخدام الخوارزمية الجمعية.

١٥- أوجد الحل الأمثل لمثال (٣,١٤) من الفصل الثالث باستخدام الخوارزمية الجمعية.