الفصل السابع

طرق مستوي القطع
Cutting Plane Methods

(٧,١) مقدمة

كما رأينا في الفصل الخامس فإن "*طريقة التفرع والحد*" لحل مسائل "البرمجة العددية البحتة" تعتمد على القيام بإسقاط الشرط "أن متغيرات المسألة الأصلية لا تأخذ إلا قيما عددية صحيحة" وحل مسألة البرمجة الخطية الناتجة والتي أسميناها "المسألة المخففة". عندئذ إذا كانت جميع قيم المتغيرات في الحل الأمثل للمسألة المخففة الناتجة هي قيم عددية صحيحة فعندها يكون هذا الحل هو أيضا حلا أمثليا لمسألة البرمجة العددية الأصلية. وإلا فإننا نحرك دالة الهدف للمسألة المخففة الحالية اعتباراً من قيمتها المثلى بطريقة لا يمكننا فيها أن نتجاوز أي حل ممكن يمكن لقيمة دالة الهدف عنده أن تفوق القيمة المثلى لهذه المسألة المخففة. وبمعنى أخر فإن عملنا أشبه بإجراء عملية تهذيب للمسائل المخففة لحين الوصول إلى حل ممكن(فهو أمثل) للمسألة الأصلية.

والحل بالطريقة التي تسمى "طريقة مستوي القطع"(Cutting Plane Method) ينطلق أيضاً من "المسألة المخففة" (Relaxation Problem) ويعيد بناء فضاء الحل من خلال إضافة قيد إلى المسألة المخففة على أن يتم تصميم هذه القيد بطريقة خاصة وبحيث يحقق الخاصيتين الرئيستين التاليتين :

خاصية 1. أي حل ممكن لمسألة "البرمجة العددية الأصلية" يحقق القيد المضاف.

خاصية 2. الحل الأمثل "للمسألة المخففة الحالية" لا يحقق القيد المضاف.

ويسمى مثل هذا القيد المضاف باسم مستوي القطع (Cutting Plane). وفي الحقيقة فإن الخاصية2. تعني أن مثل مستوي القطع هذا يقطع أو يفصل(Cut) الحل الأمثل" للمسألة المخففة" عن فضاء حلها فيصبح حلاً غير ممكن. أما الخاصية 1. فتعني أن إضافة مثل مستوي القطع هذا لن يفقدنا أي حل ممكن من حلول المسألة الأصلية. وتتم عملية رد الحلول غير الممكنة الناتجة للمسائل المخففة المتتالية *باستخدام طريقة السمبلكس الثنوية* ، والتي تعرفنا عليها في الفصل الأول، إلى حلول مثلى ممكنة ولكنها حلول ذات قيم عددية صحيحة لتلك المسائل. فنكون بذلك قد حصلنا على حل أمثل لمسألة البرمجة العددية الأصلية وهو ما نبحث عنه. وسنوضح كافة الأمور من خلال المثالين التمهيديين التالين ، ولكننا نود قبل ذلك التذكير بالملاحظة (١) من مقدمة الباب الثاني وهي أنه إذا كان لدينا مسألتين تنتج الثانية عن الأولى بإضافة قيد أو أكثر لقيود الأولى فإن فضاء الحل للثانية يكون مجموعة جزئية من فضاء الحل للأولى.

مثال (٧,١)

تقوم شركة بإنتاج صنفين من السجاد A و B ، الربح المتوقع لكل وحدة من A هو 30 ريال والربح المتوقع لكل وحدة من B هو 25 ريال. تمر عملية إنتاج كل من صنفي السجاد بقسمين هما قسم النسيج وقسم الإخراج النهائي ، ويخضع كل منها لبعض القيود والتي تتمثل بما يلي :

١- توفر 40 ساعة عمل يومية في قسم النسيج.

٢- توفر 40 ساعة عمل يومية في قسم الاخراج النهائي.

٣- عدد الوحدات التي يمكن بيعها يوميا من النموذج B لا تتجاوز 12 وحدة.

٤- كل وحدة تصنع من A تستغرق ساعتين في قسم النسيج وساعة في قسم الإخراج النهائي وإن كل وحدة تصنع من B تستغرق ساعة في قسم النسيج و3 ساعات في قسم الإخراج النهائي.

ترغب الشركة في وضع برنامج إنتاجي لكلا الصنفين بحيث تكون الأرباح العائدة منهما معاً أكبر ما يمكن. المطلوب إيجاد الحل الأمثل للشركة.

الحل

لو رمزنا بالرمز x_2, x_1 لعدد الوحدات التي ستنتجها الشركة من الصنفين A وB على الترتيب لكان النموذج الرياضي لهذه المسألة هو

كبر الدالة :

$$Z = 30x_1 + 25x_2 \tag{٧,١}$$

وفقا للقيود :

$$2x_1 + x_2 \le 40$$

$$x_1 + 3x_2 \le 40$$

$$x_2 \le 12$$

$$x_1 \ , x_2 \ge 0$$

$x_1 \ , x_2$ أعداد صحيحة

ولكان جدول الحل الأمثل للمسألة المخففة، بعد حذف القيد الأخير ($x_1 \ , x_2$ أعداد صحيحة) معطى في الجدول رقم (٧,١).

الجدول رقم (٧,١).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	الحل
Z	0	0	13	4	0	680
x_1	1	0	0.6	-0.2	0	16
x_2	0	1	-0.2	0.4	0	8
s_3	0	0	0	0.2	-0.1	1

فالحل الأمثل للمسألة المخففة هو $x_1 = 16$ $x_2 = 8$ و $Z = 680$. ولما كانت قيم x_2, x_1 صحيحة فهذا الحل هو أيضاً حل أمثل للمسألة الأصلية (٧,١).

مثال (٧,٢)

كبر الدالة :

$$Z = 8x_1 + 5x_2 \qquad (٧,٢)$$

وفقا للقيود :

$$x_1 + x_2 \le 6$$

$$9x_1 + 5x_2 \le 45$$

x_1 , x_2 أعداد صحيحة

$$x_1 \ , x_2 \ge 0$$

وبإضافة المتغيرات الراكدة نجد أن المسألة المخففة هي :

كبر الدالة :

$$Z = 8x_1 + 5x_2 \qquad (٧,٣)$$

وفقا للقيود:

$$x_1 + x_2 + s_1 = 6$$

$$9x_1 + 5x_2 + s_2 = 45$$

$$x_1 \ , x_2, s_1 \ , s_2 \geq 0$$

والحل الأمثل للمسألة المخففة لهذا المثال معطى في الجدول رقم (٧,٢)
وفضاء الحل معطى للمسألة المخففة موضح كما في كما في الشكل رقم (٧,١).

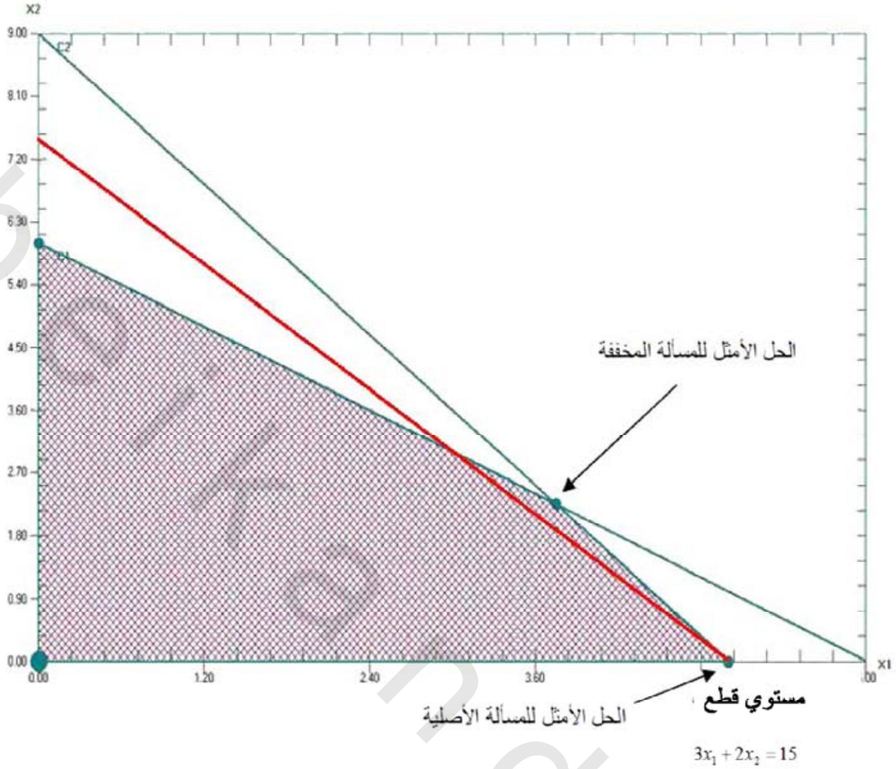
ولتطبيق طريقة مستوي القطع فإننا نختار أي قيد (في الحقيقة ثمة بعض القواعد التي نقوم بموجبها بتحديد مناسب للقيد الذي سنقوم باختياره) من جدول الحل الأمثل للمسألة المخففة والتي تكون فيه قيمة متغير من

الجدول رقم (٧,٢).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	الحل
Z	0	0	1.25	.75	41.25
x_2	0	1	2.25	-.25	2.25
x_1	1	0	-1.25	.25	3.75

المتغيرات الأساسية قيمة كسرية (غير صحيحة). فلو اخترنا القيد الثاني مثلاً وهو $x_1 - 1.25s_1 + .25s_2 = 3.75$ فإننا نعيد كتابته بحيث نكتب جميع المعاملات فيه على شكل مجموع (الجزء الصحيح + الجزء الكسري) فنجد

$$x_1 - 2s_1 + 0.75s_1 + 0.s_2 + 0.25s_2 = 3 + 0.75$$



الشكل رقم (٧,١).

الآن نعيد وضع الأجزاء الصحيحة بطرف والأجزاء الكسرية في الطرف الآخر فنجد

$$x_1 - 2s_1 + 0.s_2 - 3 = 0.75 - 0.75s_1 - 0.25s_2 \qquad (٧,٤)$$

وتقترح طريقة مستوي القطع إضافة القيد التالي لجدول الحل الأمثل (٧,٢) للمسألة المخففة:

الطرف الأيمن من (٧,٤) ≤ 0.

أي إضافة القيد التالي :

$$0.75 - 0.75s_1 - 0.25s_2 \le 0 \qquad (٧,٥)$$

ويسمى مثل هذا القيد المضاف باسم مستوى قطع (Cutting Plane).

وكما أشرنا أعلاه فإن مثل هذا القيد يجب أن يحقق الخاصيتن 1. و2. السابقتين. وسنوضح ذلك فيما يلي :

تحقق الخاصية1. لنفرض أن (x_1, x_2) هو حل ممكن للمسألة الأصلية عندئذٍ يكون (x_1, x_2) حلاً ممكناً للمسألة المخففة وبالتالي لابد لهذا الحل أن يحقق القيد (٧,٤) حيث $s_1, s_2 \ge 0$. ولما كان $0.75 < 1$ فإن أي حل ممكن (x_1, x_2) للمسألة الأصلية سيجعل الطرف الأيمن من القيد (٧,٤) أقل من الواحد أيضاً. ولكن أي حل ممكن (x_1, x_2) للمسألة الأصلية سيجعل الطرف الأيسر من القيد (٧,٤) عدداً صحيحاً، وبالتالي فإن أي حل ممكن (x_1, x_2) للمسألة الأصلية سيجعل الطرف الأيمن من القيد (٧,٤) عدداً صحيحاً أقل من الواحد، أي *صفر أو أقل*. ومن ذلك نجد أن أي حل ممكن (x_1, x_2) للمسألة الأصلية سيحقق القيد أو مستوي القطع (٧,٥)، وبذلك تتحقق الخاصية1.

تحقق الخاصية2. سنوضح الآن أن الحل الأمثل للمسألة المخففة الحالية لا يمكن أن يحقق مستوي القطع (٧,٥)، والذي يعني أن مثل هذا القطع يقطع أو يفصل الحل الأمثل للمسألة المخففة عن فضاء الحل للمسألة الأصلية. ولبيان ذلك نلاحظ من جدول الحل الأمثل (٧,٢) للمسألة المخففة أن $s_1 = s_2 = 0$ في هذا الحل وبالتالي لا يمكن لهذا الحل أن يحقق مستوى القطع (٧,٥).

لتطبق طريقة مستوي القطع نقوم بإضافة متغير راكد للقطع (٧,٥) فنحصل على القيد التالي :

$$-0.75s_1 - 0.25s_2 + s_3 = -0.75 \qquad (٧,٦)$$

ثم نقوم بإضافة القيد الناتج إلى جدول الحل الأمثل (٧,٢) للمسألة المخففة الحالية فنجد الجدول رقم (٧,٣) التالي :

الجدول رقم (٧,٣).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1 متغير داخل	s_2	s_3	الحل
Z	0	0	1.25	0.75	0	41.25
x_2	0	1	2.25	-0.25	0	2.25
x_1	1	0	-1.25	0.25	0	3.75
s_3 متغير خارج	0	0	-0.75	-0.25	1	-0.75
النسبة			-5/3	-3		

وكما نلاحظ فإن الحل المعطى بالجدول رقم (٧,٣) غير ممكن لأن $s_3 \le 0$. نقوم الآن بتطبيق طريقة السمبلكس الثنوية على الجدول رقم (٧,٣) للحصول على الحل الأمثل (راجع هذه الطريقة في نهاية الفصل الأول). فبما أن مسألتنا هي مسألة تكبير وبحسب سطر النسبة فإن المتغير الداخل هو s_1 فالعنصر المحوري هو 0.75- . وباستكمال الحسابات الخاصة بطريقة السمبلكس (العادية) فإننا نحصل على الجدول رقم (٧,٤). والحل في الجدول رقم (٧,٤) هو حل أمثل للمسألة المخففة وجميع قيم المتغيرات فيه صحيحة فهو بالتالي حل أمثل للمسألة الأصلية (٧,٢). وهذا الحل الأمثل هو $x_1 = 5,\ x_2 = 0$ وZ=40.

وللحصول على معادلة مستوي القطع، الذي أوصلنا للحل الأمثل المنشود للمسألة الأصلية، نوجد قيمة s_1 من القيد $x_1 + x_2 + s_1 = 6$ وقيمة s_2 من القيد $9x_1 + 5x_2 + s_2 = 45$ في النموذج (٧,٣) ونعوضهما في معادلة مستوي القطع (٧,٥) فنجد ما يلي :

الجدول رقم (٧,٤).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	S_3	الحل
Z	0	0	0	0.33	1.67	40
x_2	0	1	0	-1	3	0
x_1	1	0	0	0.67	-1.67	5
s_1	0	0	1	0.33	-1.33	1

$$0.75 - 0.75(6 - x_1 - x_2) - 0.25(45 - 9x_1 - 5x_2) = 0$$

وبإصلاح هذه العلاقة نحصل على $3x_1 + 2x_2 \le 15$ والتي تمثل مستوي القطع المطلوب. وقد أظهرنا هذا القطع كخط ملون في الشكل رقم (٧,١). لاحظ أن هذا القطع قد عزل الحل الأمثل للمسألة المخففة عن مجموعة الحلول للمسألة الأصلية.

(٧,٢) خوارزميات مستوي القطع

Cutting Plane Algorithms

بعد المثال التمهيدي السابق فإننا سنتعرف في هذه الفقرة على بعض الخوارزميات الأساسية التي تمكننا من حل "مسائل البرمجة الخطية العددية" البحتة والمختلطة.

(٧,٢,١) خوارزمية مستوي القطع لحل مسائل البرمجة الخطية العددية البحتة

تطبق هذه الخوارزمية على مسائل البرمجة الخطية العددية البحتة فقط حيث لا تأخذ المتغيرات في هذا النوع من المسائل إلا قيماً صحيحة. وتتطلب هذه الخوارزمية الشرط التالي

شرط1. " *أن تكون معاملات المتغيرات في كافة القيود وفي الأطراف اليمنى لهذه القيود بما في ذلك دالة الهدف أعداد صحيحة* ".

إن تحقيق الشرط1. ممكن دوماً، فمثلاً لو أخذنا القيد التالي $x_1 + \frac{3}{2}x_2 \le \frac{15}{3}$ وقمنا بتوحيد المقامات فيه لحصلنا على القيد المكافئ التالي $6x_1 + 9x_2 \le 30$ حيث كافة المعاملات فيه صحيحة.

خطوات الخوارزمية

خطوة (1)

نسقط الشرط أن المتغيرات تأخذ قيماً صحيحة فقط ونحل "المسألة المخففة" الناتجة. (مسألة البرمجة الخطية الناتجة). فإذا كان الحل الأمثل الناتج للمسألة المخففة أعداداً صحيحة (كما في مثال (٧,١) مثلاً) فإن هذا الحل هو حل أمثل للمسألة الأصلية وعندها نتوقف. وإلا انتقلنا إلى الخطوة (2).

خطوة (2)

نختار أحد المتغيرات ذات القيمة غير الصحيحة ونولد مستوي قطع من قيد هذا المتغير ونضيف مستوي القطع هذا إلى جدول الحل الأمثل للمسألة المخففة ثم نحل المسألة الناتجة بطريقة السمبلكس الثنوية ، ويكون ذلك على النحو التالي :

خطوة (2،أ). لنفرض أن جدول الحل الأمثل للمسألة المخففة (تكبير أو تصغير) كان على الشكل التالي(الجدول رقم (٧,٥)) في هذا الحل $x_1,......,x_n$ هي المتغيرات الأساسية و $s_1,........s_m$ هي المتغيرات غير الأساسية. الآن لنأخذ سطر x_i في هذا الجدول فنجد منه

الجدول رقم (٧,٥).

	x_1	.	x_i	.	x_n	s_1	...	s_j	...	s_m	الحل
z	0		0	.	0	b_1	...	b_j	...	b_m	z_0
x_1	1	.	0	.	0	a_{11}	.	a_{1j}	.	a_{1m}	v_1
....											....
x_i	0	.	1	.	0	a_{i1}	.	a_{ij}		a_{im}	v_i
...	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	...
x_n	0	.	0	.	1	a_{n1}	.	a_{nj}		a_{nm}	v_n

$$x_i = v_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_j \qquad (٧,٧)$$

حيث v_i هي قيمة غير صحيحة.

ويشار لمثل العلاقة (٧,٧) باسم "سطر أساس" (Source Row). في مثل هذا السطر نكتب كل من v_i و a_{ij} على الشكل [x]+f حيث [X]هي الجزء الصحيح من X و f هي الجزء الكسري من x ولذا فإن $0 \leq f < 1$ فيكون لدينا :

$$a_{ij} = [a_{ij}] + f_{ij} \quad \text{و} \quad v_i = [v_i] + f_i \qquad (٧,٨)$$

ثم نعوض (٧,٨) في سطر الأساس (٧,٧) فنجد ما يلي :

$$f_i - \sum_{j=1}^{m} f_{ij} s_j == v_i - [v_i] + \sum_{j=1}^{m} [a_{ij}] s_j \qquad (٧,٩)$$

وحيث أننا نشترط أن تكون قيم كل من المتغيرات x_i و s_j أعداداً صحيحة لكافة قيم i و j، فإن ذلك الاشتراط لا يتحقق إلا إذا كان الطرف الأيمن من العلاقة (٧,٩) عدداً صحيحاً، والذي يؤدي بدوره إلى أن يكون الطرف الأيسر من العلاقة (٧,٩) أيضا عدداً صحيحاً. ولما كان $f_{ij} \geq 0$ و $s_j \geq 0$ لجميع قيم i و j كان لدينا

$$f_i - \sum_{j=1}^{m} f_{ij} s_j \leq f_i \qquad (٧,١٠)$$

وبما أن $f_i < 1$ والطرف الأيسر من (٧,١٠) عدد صحيح، فسيكون لدينا بالضرورة

$$f_i - \sum_{j=1}^{m} f_{ij} s_j \leq 0 \qquad (٧,١١)$$

إذاً فالقيد (٧,١١) هو قيد ضروري لكي تكون قيم كل من المتغيرات x_i و s_j أعداداً صحيحة لكافة قيم i و j .

خطوة (2،ب). نضيف متغيراً راكداً y_i للقيد (٧,١١) ثم نضيف القيد الناتج للجدول رقم (٧,٥) والذي يمثل الحل الأمثل للمسألة المخففة فيكون لدينا

$$f_i - \sum_{j=1}^{m} f_{ij} s_j + y_i = 0 \qquad (٧,١٢)$$

كما ذكرنا أعلاه فإن مثل القيد (٧,١٢) يسمى "مستو قطع بحت" (Pure Cutting Plane). وكلمة "بحت" مردها إلى أن مسألتنا هي مسألة برمجة خطية عددية بحتة. ولذلك فإنه يطلق أيضاً على هذه الخوارزمية اسم "خوارزمية مستوي القطع البحتة" (Pure Cutting Plane Algorithm) .

والقيد المضاف (٧,١٢) يعني أن الحل الناتج بعد إضافة هذا القيد هو حل غير ممكن، لأنه وبموجب (٧,١١) فإن $y_i = - f_i \le 0$. فلا بد إذاً من رد مثل هذه القيمة السالبة، والتي تعتبر غير ممكنة، إلى قيمة ممكنة. ومن الطرق التي توافرت شروطها (شرط الأمثلية محقق في سطر دالة الهدف لكن قيمة أحد المتغيرات الأساسية غير موجبة) والتي يمكننا فيها الوصول إلى ما نريد هي "طريقة السمبلكس الثنوية" التي نوهنا عنها أعلاه.

خطوة (3)

نطبق "طريقة السمبلكس الثنوية" بعد إضافة القيد (٧,١٢) إلى جدول الحل الأمثل (٧,٥) ثم نحل المسألة المخففة الناتجة. فإذا كان الحل لهذه المسألة الأخيرة صحيحاً فإننا نتوقف (نذكر بما فعلناه في مثال (٧,٢))، وإلا فإننا نولد مستوي قطع جديداً ونكرر العمل السابق لحين الوصول إلى حل أمثل قيم جميع متغيراته صحيحة وموجبة.

يبقى السؤال الآن

هل من قاعدة لاختيار سطر الأساس والذي يتم من خلاله توليد مستوي قطع مناسب؟.

وبعبارة أخرى: هل من مستوي قطع أقوى أو أفضل من مستوي قطع آخر؟.

للإجابة نعود للقطع (٧,١١) المأخوذ من سطر الأساس x_i فنجد أنه يمكن تعريفه بالشكل المكافئ التالي :

$$\sum_{j=1}^{m} f_{ij} s_j \geq f_i \qquad (٧,١٣)$$

ولو أخذنا سطر الأساس x_k لوجدنا منه مستوي القطع التالي :

$$\sum_{j=1}^{m} f_{kj} s_j \geq f_k \qquad (٧,١٤)$$

ولدينا بهذا الخصوص التعريف التالي :

تعريف (٧,١)

نقول عن القطع (٧,١٣) إنه أفضل أو أقوى من القطع (٧,١٤) إذا كان

(أ) $f_i \geq f_k$ (ب) $f_{ij} \geq f_{kj}$ لجميع قيم j

على أن تتحقق واحدة على الأقل من المتراجحتين في (أ) أو (ب) بشكل حاد (أي من غير مساواة).

ثمة مقاييس أخرى للمفاضلة بين أكثر من مستوي قطع منها

(أ) أن نختار مستوي القطع الذي يملك أكبر قيمة كسرية (أي $Max_i \; f_i$).

(ب) أن نختار مستوي القطع الذي يملك أكبر قيمة ل $Max_i \; f_i / \sum_{j=1}^{m} f_{ij}$.

(ج) أن نختار مستوي القطع الذي يملك قيمة كسرية قريبة من ½ .

وقد أظهرت التجارب فعالية المقياس (II) ، ولذا فإننا سنعتمده غالباً في حساباتنا للأمثلة القادمة.

مثال (٧,٣)

أوجد الحل الأمثل للمسألة التالية باستخدام طريقة مستوي القطع

صغر الدالة:

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \qquad (٧,١٥)$$

وفقا للقيود:

$$3x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 4$$

x_1 , x_2 أعداد صحيحة

$$x_1 \ , x_2 \geq 0$$

الحل

إن فضاء الحل والحل الأمثل للمسألة المخففة لهذه المسألة موضحة كما في الشكل رقم (٧,٢). ولحل المسألة المخففة لهذه المسألة لابد لنا من إضافة المتغيرات الراكدة والاصطناعية حيث نحصل على الشكل القياسي التالي:

صغر الدالة:

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \qquad (٧,١٦)$$

وفقا للقيود:

$$3x_1 + x_2 - s_1 + a_1 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 - s_2 + a_2 = 4$$

$$x_1, x_2, s_1, a_1, s_2, a_2 \geq 0$$

وباستخدام طريقة المرحلتين(راجع الفصل الأول) نجد أن جدول الحل الأمثل للمسألة المخففة معطى كما في الجدول رقم (٧,٦).

الجدول رقم (٧,٦). الحل الأمثل للمسألة المخففة للمسألة (٧,١٥).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	الحل
Z	0	0	-1	-1	44/5=8.8
x_1	1	0	-2/5	1/5	4/5=0.8
x_2	0	1	1/5	-3/5	8/5=1.6

وكما نلاحظ فإن الحل الأمثل الناتج للمسألة المخففة هو أعداد غير صحيحة، لذا علينا توليد مستوي قطع. وهنا لدينا ما يلي :

سطر $\mathbf{x_1}$ هو : $x_1 - \frac{2}{5}s_1 + \frac{1}{5}s_2 = \frac{4}{5} = 0.8 = 0 + 0.8$ ومنه نجد أن $f_1 = 0.8$

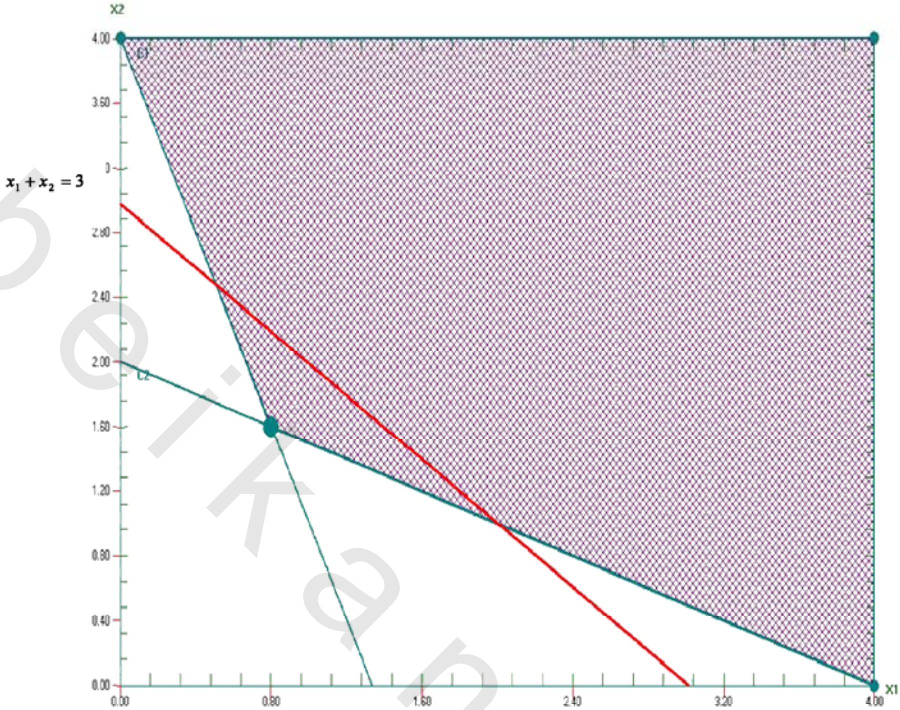
$a_{11} = -2/5 = -0.4 = -1 + 0.6$ ، $a_{12} = 1/5 = 0.2 = 0 + 0.2$ ، $f_{11} = 0.6$

، $f_{12} = 0.2$ وبالتالي فإن $1 = f_1/(f_{11} + f_{12}) = 0.8/(0.6 + 0.2)$.

سطر $\mathbf{x_2}$ هو : $x_2 + \frac{1}{5}s_1 - 3s_2 = \frac{8}{5} = 1.6 = 1 + 0.6$ ومنه نجد أن $f_2 = 0.6$

$a_{21} = 1/5 = 0.2 = 0 + 0.2$ ، $a_{22} = -3/5 = -0.6 = -1 + 0.4$ ،

$f_{21} = 0.2$ ، $f_{22} = 0.4$ وبالتالي فإن $1 = f_2/(f_{21} + f_{22}) = 0.6/(0.2 + 0.4)$.



الشكل رقم (٧,٢).

وبموجب معايير المفاضلة (I)، (II)، (III) أعلاه نجد أن اختيار سطر x_2 كسطر أساس أولى من اختيار سطر x_1 لأنه يتعادل مع x_1 في المعيار (II) ويحقق المعيار (III). وبموجب (٧,١٢) علينا أن نضيف مستوي القطع التالي إلى الجدول رقم (٧,٦)

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{5}s_1-\frac{2}{5}s_2 \le 0 \qquad (٧,١٧)$$

وبإضافة المتغير الراكد y_2 نجد

$$f_2-\sum_{j=1}^{m} f_{2j}s_j + y_2 = \frac{3}{5}-\frac{1}{5}s_1-\frac{2}{5}s_2+y_2 = 0$$

والذي يكافئ القيد التالي (نفرض أن $y_2 = s_3$)

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{5}s_1-\frac{2}{5}s_2+s_3=0 \qquad (٧,١٨)$$

فنحصل بهذه الإضافة على الجدول رقم (٧,٧) وهو يمثل حل غير ممكن لأن فيه $s_3 < 0$. ونظراً لأن شرط الأمثلية لمسألة التصغير هذه متحقق في سطر دالة الهدف فإنه يمكننا تطبيق طريقة السمبلكس الثنوية على الجدول رقم (٧,٧) الأخير.

وبحسب النتائج في عمود النسبة نجد أن المتغير الداخل هو s_1 . وبإجراء الحسابات بطريقة السمبلكس نحصل على النتائج الموضحة في الجدول رقم (٧,٨) الذي يمثل الحل الأمثل لأن قيم دالة الهدف وكذلك قيم جميع المتغيرات هي أعداد صحيحة ، كما أن شرط الأمثلية في سطر دالة الهدف مازال محققاً. وكما نلاحظ فقد لزمنا مستوي قطع واحد للوصول إلى الحل الأمثل للمسألة الأصلية (٧,١٥) وهو مستوي القطع (٧,١٧).

الجدول رقم (٧,٧).

المتغيرات	x_1	x_2	داخل s_1	s_2	s_3	الحل
Z	0	0	-1	-1	0	44/5
x_1	1	0	-2/5	1/5	0	4/5
x_2	0	1	1/5	-3/5	0	8/5
s_3 خارج	0	0	-1/5	-2/5	1	-3/5
النسبة			5	5/2		

الجدول رقم (٧,٨).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	الحل
Z	0	0	0	-1	-1	10
x_1	1	0	0	1	-2	2
x_2	0	1	0	-1	1	1
s_1	0	0	1	2	-5	3

ولإيجاد مستوي القطع هذا بدلالة المتغيرات الأصلية x_2 , x_1 فإننا نعوض عن s_2 , s_1 من القيود الأصلية في المسألة (٧,١٧) بعد إسقاط المتغيرات الاصطناعية a_2 , a_1 فنجد أن

$$s_2 = x_1 + 2x_2 - 4 \quad s_1 = 3x_1 + x_2 - 4$$

وبالتعويض في العلاقة (٧,١٧) وإصلاحها نجد مستوي القطع التالي:

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

وقد أظهرنا مستوي القطع أعلاه على شكل خط منقط في الشكل رقم (٧,٢).

(٧,٢,٢) خوارزمية مستوي القطع لحل مسائل البرمجة الخطية العددية المختلطة

سبق وأن عرفنا مسألة "*البرمجة الخطية العددية المختلطة*" بأنها تلك التي تأخذ فيها بعض متغيرات هذه المسألة قيماً صحيحة بينما تأخذ باقي المتغيرات قيما اختيارية. ولذا فإن ثمة فروق أساسية في خطوات الحصول على الحل الأمثل مقارنة مع الخوارزمية (٧,٢,١) السابق. وتتمثل هذه الفروق في أنه لا ضرورة هنا لتحقق *الشرط 1* أعلاه للقيود المتعلقة بالمتغيرات التي لا يشترط لها أن تأخذ قيماً صحيحة. وسنوضح هذه الفروق في خطوات الخوارزمية فيما يلي:

خطوات الخوارزمية

خطوة (1)

نسقط الشرط الخاص بأن بعض المتغيرات تأخذ قيماً صحيحة فقط ونحل "المسألة المخففة الناتجة" كمسألة برمجة خطية. فإذا كان الحل الأمثل "للمسألة المخففة الناتجة" يحقق الشرط المتعلق بطبيعة متغيرات المسألة الأصلية فإن هذا الحل هو حل أمثل للمسألة الأصلية وعندها نتوقف. وإلا انتقلنا إلى الخطوة (2).

خطوة (2)

نختار أحد المتغيرات ذات القيمة غير الصحيحة من بين المتغيرات التي يشترط في قيمها أن تكون صحيحة ونولد مستو قطع من قيد هذا المتغير ونضيفه مستو القطع هذا إلى جدول الحل الأمثل للمسألة المخففة ثم نحل المسألة الناتجة بطريقة السمبلكس الثنوية، ويكون ذلك على النحو التالي:

لنفرض، كما في السابق، أن المتغير x_i لا يأخذ إلا قيماً صحيحة وأن سطر x_i (كسطر أساس) في جدول الحل الأمثل "للمسألة المخففة الناتجة" هو:

$$x_i = v_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_j = v_i = [v_i] + f_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_j \qquad (٧,١٨)$$

(حيث v_i هي قيمة غير صحيحة) والذي يكافئ

$$x_i - [v_i] = f_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_j \qquad (٧,١٩)$$

وحيث أننا هنا لا نشترط أن تكون قيم كل من المتغيرات s_j أعداداً صحيحة فإننا لن نستطيع استخدام الطريقة التي شرحناها في (٧,٢,١) لتوليد مستو قطع المنشود. وهنا نلاحظ ما يلي.

بما أن x_i لا يأخذ إلا قيماً صحيحة فإن هذا يعني الآتي:

إما أن يكون $x_i \leq [v_i]$ ، أو أن يكون $x_i \geq [v_i] + 1$ (٧,٢٠)

ومن (٧,١٩) نجد أن الشرط (٧,٢٠) يعني أيضا ما يلي:

إما

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_j \geq f_i \qquad (٧,٢١)$$

أو

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_j \le f_i - 1 \qquad (٧,٢٢)$$

ومن الواضح أن (٧,٢١) و(٧,٢٢) لا يمكن أن تتحققا بآن واحد (نكرر هنا أننا لم نشترط أن تكون المتغيرات s_j صحيحة كما في السابق).

الآن لنعرف المجموعتين A^- , A^+ كما يلي

A^+ هي مجوعة الأدلة j التي تكون فيها $a_{ij} \ge 0$

A^- هي مجوعة الأدلة j التي تكون فيها $a_{ij} < 0$

عندئذ نجد من (٧,٢١) و(٧,٢٢) ما يلي :

إما

$$\sum_{j \in A^+} a_{ij} s_j \ge f_i \qquad (٧,٢٣)$$

أو

$$\frac{f_i}{f_i - 1} \cdot \sum_{j \in A^-} a_{ij} s_j \ge f_i \qquad (٧,٢٤)$$

ولا يمكن للعلاقتين (٧,٢٣) و(٧,٢٤) أيضاً أن تتحققا بآن واحد.

وهنا نلاحظ أنه يمكن دمج العلاقتين (٧,٢٣) و(٧,٢٤) بالعلاقة التالية :

$$\sum_{j \in A^+} a_{ij} s_j + \frac{f_i}{f_i - 1} \cdot \sum_{j \in A^-} a_{ij} s_j \ge f_i \qquad (٧,٢٥ \text{ أ})$$

وبإضافة المتغير الراكد y_i إلى العلاقة الأخيرة فإننا نحصل على العلاقة التالية :

$$y_i \quad - \left\{ \sum_{j \in A^+} a_{ij} s_j + \frac{f_i}{f_i - 1} \cdot \sum_{j \in A^-} a_{ij} s_j \right\} = -f_i \qquad (٧,٢٥ \text{ ب})$$

والعلاقة (٧,٢٥ ب) تمثل ما يطلق عليه اسم مستوي قطع مختلط (Mixed Cutting Plane). ولذلك يطلق أيضاً على هذه الخوارزمية اسم "خوارزمية مستوي القطع المختلطة" (The Mixed Plane Algorithm) .

ونظراً لأننا توصلنا للعلاقة (٧,٢٥) من العلاقة (٧,٢٠) ولما كانت هذه الأخيرة تمثل كما أسلفنا الشرط الضروري لكي يكون x_i صحيحاً، فإن مستوي القطع المختلط (٧,٢٥ ب) يمثل أيضاً مثل هذا الشرط الضروري.

الآن نضيف القيد (٧,٢٥ ب) إلى جدول الحل الأمثل "للمسألة المخففة الناتجة" فيكون الحل الناتج بعد إضافة هذا القيد هو حل غير ممكن. ثم نستخدم طريقة السمبلكس الثنوية على الجدول الناتج للحصول على حل أمثل جديد "للمسألة المخففة الناتجة"، فإذا كان هذا الحل الأمثل الجديد يحقق المتطلبات الخاصة بطبيعة كل من متغيرات المسألة الأصلية فإنه يمثل أيضاً الحل الأمثل لهذه المسألة الأخيرة وعندها نتوقف وإلا ننتقل إلى الخطوة (3).

خطوة (3)

نولد مستوي قطع مختلطاً جديداً ونكرر العمل السابق في الخطوة (2) لحين الوصول إلى حل أمثل يحقق المتطلبات الخاصة بطبيعة كل من متغيرات المسألة الأصلية.

سنوضح الآن كيفية تطبيق الخوارزمية (٧,٢,٢) من خلال المثال التالي :

مثال (٧,٤)

كبر الدالة :

$$Z = 7x_1 + 9x_2 \qquad (٧,٢٦)$$

وفقا للقيود:

$$3x_2 - x_1 \le 6$$

$$7x_1 + x_2 \le 35$$

x_1 عدد صحيح

$$x_1 \quad , \quad x_2 \ge 0$$

الحل

إذا أسقطنا الشرط "أن x_1 عدد صحيح" نتج لدينا المسألة المخففة التالية :

كبر الدالة :

$$Z = 7x_1 + 9x_2 \qquad (٧,٢٧)$$

وفقا للقيود :

$$3x_2 - x_1 \le 6$$

$$7x_1 + x_2 \le 35$$

$$x_1 \quad , \quad x_2 \ge 0$$

إن فضاء الحل للمسألة المخففة (٧,٢٧) معطى كما في الشكل رقم (٧,٣) وبإضافة المتغيرات الراكدة s_2 , s_1 للنموذج (٧,٢٧) نحصل على النموذج التالي :

كبر الدالة :

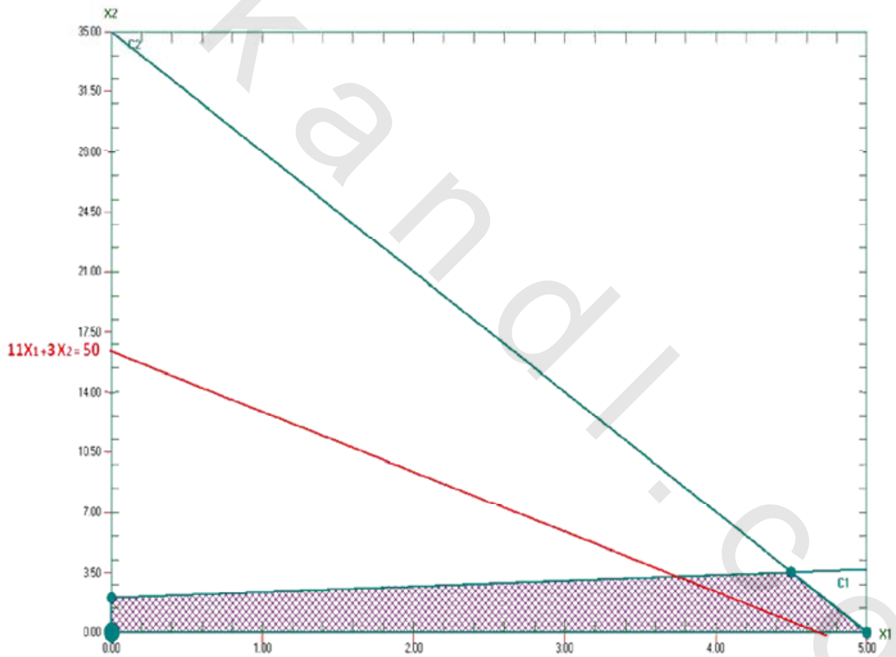
$$Z = 7x_1 + 9x_2 \qquad (٧,٢٨)$$

وفقا للقيود:

$$3x_2 - x_1 + s_1 = 6$$

$$7x_1 + x_2 + s_2 = 35$$

$$x_1 \ , x_2 \ , s_1 \ , s_2 \geq 0$$



الشكل رقم (٧,٣).

وبحل النموذج الناتج (٧,٢٨) نجد أن جدول الحل الأمثل ممثل بالجدول رقم (٧,٩).

فبما أن x_1 هو المتغير الوحيد الذي تقتصر قيمه على قيم صحيحة فلا بد من استخدام سطر x_1 كسطر أساس. ومن الجدول رقم (٧,٩) نجد

$$x_1 - \frac{1}{22}s_1 + \frac{3}{22}s_2 = \frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}$$

وهنا نلاحظ أن $f_1 = \frac{1}{2}$ وأن معامل s_1 موجب (3/22=) ومعامل s_2 سالب (-1/22=).

وبموجب (٧,٢٥ب) نجد مستوي القطع المختلط التالي:

$$\frac{3}{22}s_2 + \frac{1/2}{1/2-1}(-\frac{1}{22})s_1 \geq \frac{1}{2} \qquad (٧,٢٩\ أ)$$

الجدول رقم (٧,٩). الحل الأمثل للمسألة المخففة (٧,٢٨).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	الحل
Z	0	0	28/11	15/11	63
x_1	1	0	-1/22	3/22	9/2
x_2	0	1	7/22	1/22	7/2

وبإضافة المتغير الراكد y_1 نحصل على مستوي القطع المختلط التالي:

$$y_1 - \{\ \frac{3}{22}s_2 + \frac{1/2}{1/2-1}(-\frac{1}{22})s_1\ \} = -\frac{1}{2}$$

والذي يكافئ (نفرض أن $s_3 = y_1$)

$$s_3 - \frac{1}{22}s_1 - \frac{3}{22}s_2 = -\frac{1}{2} \qquad (٧,٢٩\ ب)$$

وبإضافة (٧,٢٩ب) إلى جدول الحل الأمثل (٧,٩) فإننا نحصل على الجدول رقم (٧,١٠) التالي.

الجدول رقم (٧,١٠).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2 داخل	s_3	الحل
Z	0	0	28/11	15/11	0	63
x_1	1	0	-1/22	3/22	0	9/2
x_2	0	1	7/22	1/22	0	7/2
s_3 خارج	0	0	-1/22	-3/22	1	-1/2
النسبة			-14	-5/2		

الآن نقوم بتطبيق طريقة السمبلكس الثنوية على الجدول رقم (٧,١٠)، فنجد من نتائج سطر النسبة أن s_2 هو المتغير الداخل وأن s_3 هو المتغير الخارج. وبإجراء الحسابات على الجدول رقم (٧,١٠) حسب طريقة السمبلكس (العادية) نجد الجدول رقم (٧,١١) التالي.

الجدول رقم (٧,١١).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	الحل
Z	0	0	23/11	0	10	58
x_1	1	0	-1/11	0	1	4
x_2	0	1	10/33	0	-1/3	10/3
s_2	0	0	1/3	1	-22/3	11/3

والجدول رقم (٧,١١) يمثل الحل الأمثل المنشود لأن شرط الأمثلية (كمسألة تكبير) محقق في سطر دالة الهدف، والمتطلبات المتعلقة بطبيعة متغيرات المسألة الأصلية (٧,٢٧) وهي x_1 عدد صحيح غير سالب (x_1 =4) و $x_2 \geq 0$ (x_2 =10/3) محققة لهذا الحل.

سنوجد الآن مستوى القطع المختلط (٧,٢٩ أ) بدلالة المتغيرات الأصلية x_1 , x_2 . فمن علاقات المساواة في النموذج (٧,٢٨) نجد أن

$$s_1 = 6 - \{3x_2 - x_1\} \quad ، \quad s_2 = 35 - \{7x_1 + x_2\}$$

وبالتعويض في (٧,٢٩ أ) نجد مستوي القطع المختلط التالي:

$$11x_1 + 3x_2 \le 50$$

وقد أظهرنا هذا القطع على شكل خط منقط في الشكل رقم (٧,٣).

ملاحظة (٧,٢)

(أ) تجدر الإشارة هنا إلى إن عدم اشتراطنا على المتغيرات s_j أن تكون ذات قيم عددية صحيحة، كما ورد أعلاه في الخوارزمية (٧,٢,٢)، يساعد في التوصل إلى مستوي قطع مختلط أقوى من القطع ذلك المعرف بالعلاقة (٧,٢٩ب)، وهذا القطع هو

$$y_i = -f_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j s_j \qquad (٧,٣٠)$$

حيث

$a_{ij} = \mu_j$ إذا كان s_j عدد غير صحيح وكان $a_{ij} \ge 0$

$\frac{f_i}{f_i - 1} a_{ij} = \mu_j$ إذا كان s_j عدد غير صحيح وكان $a_{ij} < 0$

$f_{ij} = \mu_j$ إذا كان s_j عدد صحيح وكان $f_{ij} \le f_i$

$\frac{f_i}{f_i - 1}(1 - f_{ij}) = \mu_j$ إذا كان s_j عدد صحيح وكان $f_{ij} > f_i$

(ب). قدمنا أعلاه نوعين مما أسميناه "مستوي القطع" أحدهما في الخوارزمية (٧,٢,١) والآخر في الخوارزمية (٧,٢,٢). ويوجد، في الحقيقة، أنواع أخرى من مستويات القطع كل له ميزاته وعيوبه الخاصة به. ولا يوجد نوع محدد من مستويات القطع يفوقها جميعاً ويمكن تطبيقه لكافة البرامج الخطية العددية، بل إننا قد نجد أحياناً

أن لمسألة برمجة خطية عددية خاصة مستوي قطع أنسب لحلها (ونعني به أسرع حسابيا) من مستوي قطع أخر.

(ج). كما نلاحظ فإن طرق مستويات القطع التي قدمناها في هذا الفصل لا تصلح إلا لحل مسائل البرمجة الخطية العددية (البحتة والمختلطة) أو تلك التي يمكن أن تؤول إلى هذا النوع من المسائل. ولذا فإنه ينظر إلى طرق مستويات القطع على أنها، وبشكل عام، غير فعالة لحل أي مسألة برمجة خطية عددية.

(٧,٣) تمارين (٧)

١- لدينا المسألة التالية:

كبر الدالة:

$$Z = 14x_1 + 18x_2$$

وفقا للقيود:

$$-x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$7x_1 + x_2 \leq 35$$

$$x_1 \quad , \; x_2 \geq 0$$

$x_1 \; , \; x_2$ وأعداد صحيحة

حيث يعطى الحل الأمثل للمسألة المخففة بالجدول رقم (٧,١٢).

الجدول رقم (٧,١٢).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	الحل
Z	0	0	56/11	30/11	126
x_1	1	0	-1/22	3/22	9/2
x_2	0	1	7/22	1/22	7/2

المطلوب إيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة بطريقة مستوي القطع.

٢- لدينا المسألة التالية:

صغر الدالة:

$$Z = 6x_1 + 8x_2$$

وفقا للقيود:

$$3x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 4$$

$$x_1 \quad , \; x_2 \geq 0$$

$x_1 \; , x_2$ وأعداد صحيحة

حيث يعطى الحل الأمثل للمسألة المخففة بالجدول رقم (٧,١٣).

الجدول رقم (٧,١٣).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	الحل
Z	0	0	-4/5	-18/5	88/5
x_1	1	0	-2/5	1/5	4/5
x_2	0	1	1/5	-3/5	8/5

المطلوب إيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة بطريقة مستوي القطع.

٣- لديك المسألة التالية :

صغر الدالة :

$$Z = 3x_1 + x_2$$

وفقا للقيود :

$$2x_1 - x_2 \le 6$$

$$x_1 + x_2 \le 4$$

$$x_1 \quad , \; x_2 \ge 0$$

x_1 عدد صحيح

المطلوب

(أ) إيجاد الحل الأمثل بطريقة مستوي القطع المختلطة.

(ب) إيجاد الحل الأمثل بطريقة التفرع والحد.

(ت) قارن بين نتائجك في (أ) و(ب).

٤- لديك المسألة التالية :

كبر الدالة :

$$Z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3$$

وفقا للقيود:

$$4x_1 - 4x_2 \le 5$$

$$-x_1 + 6x_2 \le 5$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \le 5$$

$$x_1, x_2 \ , x_3 \ge 0$$

x_1 عدد صحيح

حيث يعطى الحل الأمثل للمسألة المخففة بالجدول رقم (٧,١٤).

الجدول رقم (٧,١٤).

المتغيرات	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	الحل
Z	0	0	0	2	2	2	30
x_1	1	0	0	3/10	1/5	0	5/2
x_2	0	1	0	1/20	1/5	0	5/4
x_3	0	1	1	1/4	0	1	25/4

المطلوب إيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة بطريقة مستوي القطع المختلطة.

٥- تمتلك شركة أربع فروع في أربع مدن لإنتاج نوع من مكيفات الهواء تقوم بتوزيعها على أربع من المناطق الرئيسة في القطر. ولكل من عمليات الإنتاج في كل من الفروع الأربعة تكلفتها الخاصة (تكلفة ثابتة)، كما أن تكلفة إنتاج كل مكيف هواء والتي تتضمن تكلفة شحنه يعتمد على المدينة التي ينتج فيها والمنطقة التي يتم شحنه إليها. جميع بيانات التكاليف ($) موضحة في الجدول رقم (٧,١٥). ثمة بيانات أخرى

هي أن كل من الفروع الأربعة يمكنها أن تنتج لغاية 1500 مكيف هواء بالسنة و50000 على الأقل من طلب المنطقة 3 يجب أن يأتي من المدينة 1 أو من المدينة 2. ترغب الشركة بجعل التكاليف الكلية أقل ما يمكن، والمطلوب

(أ) صياغة المسألة كمسألة برمجة خطية عددية.

(ب) إيجاد الحل الأمثل للمسألة المخففة.

(ج) إيجاد الحل الأمثل للمسألة بطريقة مستوي القطع.

(د) إيجاد جميع القطوع المستوية بدلالة المتغيرات الأصلية للمسألة.

(هـ) إيجاد الحل الأمثل بطريقة التفرع والحد.

(و) مقارنة النتائج التي توصلت إليها في (ج) و(د).

الجدول رقم (٧,١٥).

المدن	المناطق				التكلفة الثابتة
	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	المنطقة 4	مليون $
1	290	270	262	215	6.2
3	206	225	230	290	6
2	230	221	208	260	5.8
4	225	206	221	270	5.5
الطلب	100000	150000	110000	90000	

٦- معمل فيه خمس مكائن تقوم بإنجاز خمس أعمال. يعتمد وقت إنجاز عمل ما على الماكينة التي ستنجزه، كما أن لكل ماكينة وقت لتجهيزها للإنتاج. جميع بيانات الأزمنة بالدقائق معطاة في الجدول رقم (٧,١٦). (وجود الفراغ في الجدول مقابل ماكينة وعمل يعني أن الماكينة لا يمكن أن تنجز العمل المقابل). ترغب إدارة المعمل بعمل جدولة تنفيذ للأعمال الخمسة على المكائن الخمسة بحيث يكون زمن التنفيذ الكلي أقل ما يمكن،

الجدول رقم (٧,١٦).

المكائن	رقم العمل					زمن التجهيز
	1	2	3	4	5	
ماكينة١	42	70	93			30
ماكينة٢		85	45			40
ماكينة٣	58			37		50
ماكينة٤	58		55		38	60
ماكينة٥		60		54		20

والمطلوب.

(أ) صياغة هذه المسألة كمسألة برمجة خطية عددية.

(ب) إيجاد الحل الأمثل للمسألة المخففة.

(ج) إيجاد الحل الأمثل للمسألة الأصلية بأكثر من طريقة.

(د) بيان أي الطرق التي استخدمتها في(ج) هي الأسهل في الوصول إلى الحل الأمثل للمسألة الأصلية.

٧– لديك المسألة التالية :

كبر الدالة :

$$Z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3$$

وفقا للقيود :

$$x_1 + 5x_3 \le 10$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \le 1$$

$$6x_1 - 5x_2 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \ , x_3 \geq 0$$

$x_1, x_2 \ , x_3$ أعداد صحيحة

حيث يعطى الحل الأمثل للمسألة المخففة بالجدول رقم (٧,١٧).

الجدول رقم (٧,١٧).

المتغيرات	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	الحل
Z	0	0	0	17/12	1/12	5/12	57/4
x_3	0	0	1	11/60	-1/12	-1/60	7/4
x_2	0	1	0	1/10	1/2	-1/10	3/2
x_1	1	0	0	1/12	5/12	1/12	5/4

المطلوب إيجاد ما يلي:

(أ) الحل الأمثل للمسألة بطريقة يعني مستوي القطع البحتة.

(ب) إذا كان x_1 هو المتغير الوحيد الذي يأخذ قيماً صحيحة فما هو الحل الأمثل للمسألة عندئذ؟.

٨- أعد حل المثال (٤,١٠) باستخدام طريقة مستوي القطع.

٩- أعد حل المثال (٢,١) من الفصل الثاني باستخدام مستوي القطع.

١٠- أعد حل المثال (٢,٢) من الفصل الثاني باستخدام طريقة القطع المستوي البحتة.

١١- أعد حل المثال (٢,٦) من الفصل الثاني باستخدام طريقة القطع المستوي.

١٢- أعد حل المثال (٥,٢) من الفصل الخامس باستخدام طريقة مستوي القطع. قارن طريقة مستوي القطع التي استخدمتها وطريقة التفرع والحد التي سبق لنا استخدامها في حل المثال (٥,٢) من حيث حجم الحسابات.

المراجع

أولاً: المراجع العربية

[١] البلخي، زيد تميم. *مقدمة في بحوث العمليات* – الطبعة الثانية. النشر العلمي والمطابع، الرياض: جامعة الملك سعود ٢٠٠٧م.

[٢] الألوسي، عبد الستار أحمد. *أساليب بحوث العمليات: الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار*، دار القلم للنشر والتوزيع، دبي ٢٠٠٣م.

ثانياً: المراجع الأجنبية

أ) الكتب

[3] Duan, L. and Xiaoling, S. *Nonlinear Integer Programming*, Springer , Berlin , 2006.

[4] Garfinkel, R.S. and Nemhauser, G.L., *Integer Programming*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1972.

[5] Greenberg, H., *Integer Programming*. New York, NY: Academic Press, 1971.

[6] Harmmer,P.L., Johnson,E.L., Kort,B.H. , And Nemhauser,G.l. (Editors) . *Studies In Integer Programming* .Amsterdam , North –Holland Publishing Company , 1977.

[7] Hillier, F.S. and Lieberman, G.J. *Introduction to Operations Research* . Holden-Day ,1980.

[8] John K. Karlof . *Integer Programming: Theory and Practice* ,Taylor & Francis Group, LLc ,2006

[9] Jünger M., and *Thomas M. Liebling 50 Years of Integer Programming 1958-2008:Springer Verlag* Berlin ,2010

[10] Kaufmann , A. Labordere,A.H. *Integer and Mixed Programming , Theory and Applications* . Academic Press, New York , 1977.
[11] Lawler, L. ET AL., *The Traveling Salesman Problem*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1985.
[12] Lawrence, J.R. , and Pasternack , B.A. *Applied Management Science* , John Wiley & Sons, New York 1998.
[13] Li D. and Sun X. *Nonlinear Integer Programming* (International Series in Operations Research & Management Science) 2006.
[14] Luenberger D.G., and Ye Y. . ,*Linear and Nonlinear Programming* (International Series in Operations Research & Management Science) Springer,2008
[15] Nauss,R.M. Parametric Integer Programming . University of Missouri Press , Columbia & London , 1979 .
[16] Nesa,W. and Coppins,*R. Linear Programming and Extensions*. MCgraw-Hill Book Company , New York , 1981.
[17] Nemhauser, G.L. and Wolsey, L.A., *Integer and Combinatorial Optimization*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1999.
[18] Parker, R. and Rardin, R., *Discrete Optimization*. Orlando, Fla.: Academic Press, 1988.
[19]Plane, D. and McMillan, C.,. *Discrete Optimization: Integer Programming and Network Analysis for Management Decision*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1971.
[20] Pochet , Y. , and Wolsey, L.A. *Production Planning by Mixed Integer Programming* . Springer , New York ,2006
[21] Salkin, H.M., *Integer Programming. Reading, Mass.: Addison-Wesley*, 1975.
[22] Salkin, H.M. and Mathur, K., *Foundations of Integer Programming*. New York, NY: North-Holland, 1989.
[23]Schrijver, A. *Theory of Linear and Integer Programming . John Willey A sons* , Amesterdam ,2000.
[24] Taha, H.A., *Integer Programming: Theory, Applications, and Computations*. New York, NY: Academic Press, 1975.
[25] Taha, H.A., Operations Research , *An Introduction* . Macmillan Publishing Company, New York, 1987.
[26]Williams H.P P.*Model Building in Mathematical Programming*, ,John Willey A sons ,New York ,1999.
[27] Winston,W.L. Operations Research , *Applications and Algorithms* . Duxbury Press , Belmont , California, 1994.
[28] Wolsey, L.A *Integer Programming ,John Willey A sons* ,New York, 1998.

ب) مجلات العلمية

[29] *European Journal of Operational Research*
[30] *Journal of the Operational Research Society*

ج) مواقع إلكترونية

[31] http://tomopt.com/tomlab/optimization/mip.php
[32] http://www.insightful.com/products/nuopt/SNUOPT_technical_note_MIP.pdf
[33] http://mat.gsia.cmu.edu/orclass/integer/integer.html.

نبذة عن المصفوفات والمحددات والمجموعات المحدبة

أولاً: المصفوفات

Matrices

لنفرض أن a_{ij} ($i=1,2,\ldots,m$ ، $j=1,2,\ldots,n$) هي أعداد حقيقية فإذا وضعنا هذه الأعداد بترتيب معين كما في الشكل التالي G:

$$G = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

فإن G يسمى مصفوفة من الدرجة **m×n** (عدد أسطرها m وعدد أعمدتها n).

وعادة ما نختصر كتابة G على الشكل $G=[a_{ij}]$ ونسمي الأعداد a_{ij} عناصر المصفوفة. وفي الحالة الخاصة $n=m$ فإننا نسميها مصفوفة مربعة من الدرجة n .وعندما $m=1$ فإنها تسمى مصفوفة سطر أما عندما $n=1$ فتسمى مصفوفة عمود. كذلك نسمي العناصر a_{ij} التي يكون فيها $i=j$ بقطر المصفوفة، ونسمي المصفوفة المربعة التي تكون جميع عناصر القطر فيها مساوية 1 وبقية عناصرها أصفارا باسم "مصفوفة الوحدة كما

نسمي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفارا باسم المصفوفة الصفرية.فمثلا المصفوفات G_1 ، G_2 ، G_3 G_4 التالية هي مصفوفة 5×4 ومصفوفة عمود 1× 4 ومصفوفة وحدة 3×3 ومصفوفة سطر 4×1 على الترتيب.

$$G_4 = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 2 \end{bmatrix} ، G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ، G_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix} ، G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 2 & 10 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

العمليات الأساسية على المصفوفات

إذا كان لدينا مصفوفتان $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ من درجة واحدة فإن مجموعهما(فرقهما) هو المصفوفة C التي عناصرها c_{ij} معرفة بالعلاقة التالية :

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

(+ للمجموع و− للفرق). ويعرف حاصل ضرب مصفوفة ما $A=[a_{ij}]$ بعدد r والذي نرمز له بالرمز rA بأنه المصفوفة الناتجة من ضرب كل عنصر من A بالعدد r أي $rA=[ra_{ij}]$. ومن الواضح أن A+B=B+A أي أن جمع المصفوفات تبديلي.

ولتعريف حاصل ضرب مصفوفتين $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ نشترط أن A من الدرجة m×n وأن B من الدرجة n×p عندئذ حاصل ضربهما والذي نرمز له بالرمز AB هو المصفوفة التي عناصرها m_{ij} معطاة بالعلاقة التالية :

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

وبوجه عام فإن AB≠BA . أي أن ضرب المصفوفات ليس تبديلياً .

فمثلا لو أخذنا المصفوفات G_2 وG_4 أعلاه فإن G_2G_4 هي مصفوفة 1×1 تحسب كما يلي 2×4 +7×8 +11×7 +8×2 = 157 . كذلك يمكننا التحقق أنه لو كانت I هي مصفوفة الوحدة من الدرجة n وكانت A مصفوفة من الدرجة m×n فإن AI=A .ولو كانت A مربعة ومن الدرجة n لكان AI=IA=A. وكمثال على جمع المصفوفات نأخذ المصفوفة G_1 أعلاه والمصفوفة التالية:

$$G_5=\begin{bmatrix}1&7&2&1\\3&2&3&2\\1&9&5&9\\4&8&2&10\\2&16&1&1\end{bmatrix}$$ عندئذ $$G_1+G_5=\begin{bmatrix}2&9&10&6\\6&1&7&4\\2&15&12&18\\8&14&4&20\\4&22&2&9\end{bmatrix}.$$

ثانياً: المحددات

Determinants

إن مفهوم المحددات وقيمتها من أهم الأمور المتعلقة بالمصفوفات لكننا لا نعرف المحددات إلا للمصفوفات المربعة. فإذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن محدد A (determinant) والذي سنرمز له ب det(A) يعطى كما يلي:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{2n}\\\dots\dots&\dots\dots&\dots\dots\\a_{n1}&a_{n2}&a_{nn}\end{vmatrix}$$

ويقال عن محدد A إنه من المرتبة n . وللمحددات قيمتها الخاصة بها وتتم حساب هذه القيمة استنادا إلى المحددات ذات المرتبة الثانية حيث تحسب قيمها كما يلي:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

وتتم حساب المحددات من مراتب أعلى من 2 إما حسب أحد أسطرها(أو حسب أحد أعمدتها) وذلك بإعطاء عناصر ذلك السطر(العمود) إشارات مختلفة ومتعاقبة ابتداء من الإشارة + وضرب النواتج بالمحددات المقابلة الناتجة . ويقصد بالمحدد المقابل لعنصر بأنه ذلك المحدد الجزئي الناتج من حذف السطر والعمود اللذان يتقاطعان في ذلك العنصر من المحدد الذي نرغب بحسابه. وللتوضيح فإن

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 2(6-63) - 8(5-56) + 4(54-48) = 27$$

ويتم حساب المحددات من مراتب أعلى بنفس الطريقة. ومن الواضح أنه إذا كانت جميع عناصر سطر (أو عمود) في محدد ما أصفارا فإن قيمة هذا المحدد تساوي الصفر فإذا كان مثل هذا السطر أو العمود غير موجود في محدد فيمكننا تسهيل حساب قيمته من خلال اختيار السطر أو العمود الذي يحوي أكبر عدد من الأصفار . فمثلا من المحدد التالي نلاحظ أن السطر الثاني هو الذي يحوي أكبر عدد من الأصفار الأمر الذي يسهل علينا حساب قيمته عن طريق هذا السطر حيث نجد

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 3[2(7) - 1(-25)] - 1[-7(-28) + 2(-2)] = -75$$

ثالثاً: تعريف المجموعات المحدبة

Convex sets

نقول عن مجموعة S جزئية غير خالية من الفضاء $\Re^n$ إنها مجموعة محدبة (Convex Set) إذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين X , Y منها تقع بكاملها داخل هذه المجموعة.

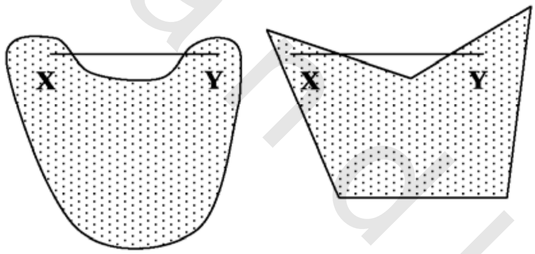
ويعطي الشكل رقم (١ ،أ) أمثلة على مجموعات غير محدبة في حين يمثل الشكل رقم (٢ ،أ) أمثلة على مجموعات محدبة.

وتعرف المجموعة المحدبة رياضياً كما يلي. نقول عن مجموعة غير خالية S إنها محدبة إذا تحقق الشرط التالي لأي عنصرين X,Y من S ولأي $0 \le \lambda \le 1$ فإن $\lambda X + (1-\lambda)Y \in S$ ويمكننا ، باستخدام العلاقة الأخيرة ، إثبات النظرية التالية بسهولة

نظرية (١,م)

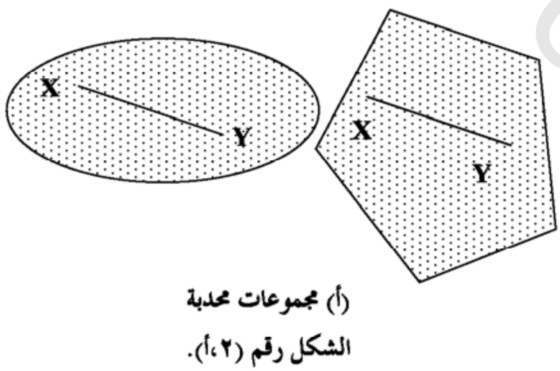
تقاطع أي عدد منته من المجموعات المحدبة (إذا لم يكن خالياً) هو أيضاً مجموعة محدبة.

كما يمكننا إثبات أن حل أي متباينة خطية هو مجموعة محدبة. وبموجب النظرية الأخيرة يكون فضاء الحل لأي برنامج خطي هو مجموعة محدبة ، لأن هذا الفضاء ليس إلا تقاطع مجموعات هي حلول لمتباينات خطية.



(ب) مجموعات غير محدبة

الشكل رقم (١، أ).



(أ) مجموعات محدبة

الشكل رقم (٢،أ).

ثبت المصطلحات

أولاً: عربي– إنجليزي

أ

إجراء	Procedure
احتمال	Probability
احتمالي	Probabilistic
إحصاء	Statistics
أداء	Performance
أدنى	Low
الأدنى	Lower
أساسي	Basic
إستراتيجية (إستراتيجيات)	Strategy (Strategies)
الإستراتيجية (الإستراتيجيات) المثلى	Optimal Strategy (Strategies)
أعلى	Upper

اقتصادي	Economic
أقصر مسار	Shortest path
أمثل	Optimal
أمثلية	Optimization
أمثلية جزئية	Sub-optimization
إمكانية (مكان للخدمة)	Facility
إنتاج	Production
انتظار	Waiting
أولي	Elementary

ب

بارز	Prominent
بحوث عمليات	Operation research
بديل (بدائل)	Alternative(s)
برمجة	Programming
برمجة خطية	Linear programming
برمجة خطية عددية	Integer Linear Programming
برمجة رياضية	Mathematical programming
برمجة عددية	Integer programming
برمجة عددية ذات متغيرات ثنائية القيم	(0-1) Integer Programming
برمجة عددية مختلطة	Mixed integer Programming
بناء	Model building

بيانات	Data

ت

تباين	Variance
تجزئة	Partition
تحليل الحساسية	Sensitivity analysis
تحليل بيانات	Data analysis
تخصيص	Assignment
تدرج أو مقياس	Scale
تدفق شبكي	Network flow
تصميم	Design
تصميم نظام	System design
تصنيف المشكلة	Problem classification
تعاوني	Cooperative
تفسير اقتصادي	Economic interpretation
تكاليف مباشرة	Direct costs
تلف	Deterioration
تنبؤ	Forecasting
تنفيذ	Implementation
توزيع	Distribution
توزيع طبيعي	Normal distribution
توزيع منتظم	Uniform distribution

ج

جدول	Table

ح

حاسب	Computer
حالة استقرار	Steady-state
حجم	Size
حد أدنى	Lower bound
حد أعلى	Upper bound
حرج	Critical
حساسية	Sensitivity
حظ	Chance
حل (حلول)	Solution
حل ابتدائي	Initial solution
حل أساسي	Basic solution
حل النموذج	Model solution
حل أمثل	Optimal solution
حل أمثل جزئي	Suboptimal solution
حل أمثل مضاعف	Multiple optimal solution
حل أمثل وحيد	Unique optimal solution

Non-optimal solution	حل غير أمثل
Infeasible solution	حل غير ممكن
Feasible solution	حل ممكن

خ

Property	خاصية
Pure	خالص أو بحت أو صرف
Service	خدمة
Discount	خصم
Quantity discount	الخصم على الكمية
Linear	خطي
Algorithm	خوارزمية
Iterative algorithm	خوارزمية تكرارية

د

Function	دالة
Objective function	دالة الهدف
Convex function	دالة محدبة
Concave function	دالة مقعرة
Degree	درجة
Cycle	دورة
Periodic	دورية
Dynamic	ديناميكيا (حركي)

ذ

ذكاء صناعي	Artificial intelligence

ر

ربح	Profit
رسم	Graph
رمز (رموز)	Symbol

ز

زمن أو وقت	Time

س

ساكن	Static
سطر محوري	Pivot row
السمبلكس	Simplex

ش

شبكة	Network
شجرة	Tree
شخصي	Personal

شرط (شروط)	Condition

ص

صف (صفوف)	Row(s)
صفة أو ميزة	Characteristic
صلاحية	Validation
صياغة	Formulation
صياغة المشكلة	Problem formulation
صيغة	Form

ض

ضمني	Implicit

ط

طبيعة (قدر)	Nature
طريقة	Method
طريقة التعداد الشامل	Total enumeration method
طريقة التعداد الضمني	Implicit enumeration method
طريقة السمبلكس	Simplex Method
طريقة السمبلكس الثنوية	Dual Simplex Method
طريقة بيانية	Graphical method

ع

عائد (عوائد)	Payoff(s)
عامل الخصم	Discount factor
عجز	Shortage
عدد صحيح	Integer
عددي	Digital
عشوائي	Random
عشوائي	Stochastic
عقدة	Node
عقدة حظ	Chance Node
عملية	Process
عمود محوري	Pivot column
عنصر	Element
عنصر محوري	Pivot element

غ

غير منته	Infinite

ف

فضاء	Space
فضاء الحل	Solution space

Effectiveness	فعالية
System effectiveness	فعالية نظام

ق

Controllable	قابل للضبط
Cut	قطع
Cutting plane	قطع مستوي
Pure cutting plane	قطع مستوي صرف
Mixed cutting plane	قطع مستوي مختلط
Constraint(s)	قيد (قيود)
Upper Value	القيمة العليا
Expected Value	قيمة متوقعة

ك

Complete	كامل
Perfect	كامل
Total	كلي
Quantity	كمية

ل

Game(s)	لعبة (ألعاب)

م

مباشر	Direct
مبدأ	Principle
متصل	Continuous
متطابق	Identical
متغير	Variable
متغير أساسي	Basic Variable
متغير قابل للضبط	Controllable variable
متغير قرار	Decision variable
متناظر	Symmetric
متوسط	Mean
متوقع	Expected
مجموعة محدبة	Convex set
محاكاة	Simulation
محدد	Deterministic
مختلط	Mixed
مخزون	Stock
مخطط	Diagram
مدخلات	Inputs
مرتبط	Dependent
مرحلة (مراحل)	Stage(s)
مسار	Path

مسألة أولية	Primal problem
مسألة ثنوية	Dual problem
مستقر	Stationary
مستقل	Independent
مستوى	Level
مشترك	Joint
مشروع	Project
مصفوفة	Matrix
مصفوفة العوائد	Payoff matrix
مطلق أو حاد أو كامل	Strict
معدل	Rate
معلمة	Parameter
معلومات	Information
معلومات غير كاملة	Imperfect Information
معلومات كاملة	Perfect Information
معيار	Criterion
مقبول	Admissible
مقياس الأداء	Performance measure
ملائم	Appropriate
ممكن	Feasible
منافسة	Competition
منتظم	Uniform
منته	Finite

منفصل	Discrete
منفعة	Utility
منقول مصفوفة	Transpose of a Matrix
موقع الخدمة	Facility Location
ميل	Slope

ن

نشاط	Activity
نضوب	Depletion
نظام	System
نظرية	Theorem
نقطة	Point
نقطة سرجية (أو نقطة توازن)	Saddle Point
نماذج البرمجة العددية	Models of integer programming
نمذجة	Modelling
نموذج	Model
نموذج أمثل	Optimal model
نموذج ثنوي	Dual Model
نموذج رياضي	Mathematical model

هـ

هدف	Objective

هيكل	Structure
هيكل النظام	System structure

و

وحيد	Unique
وزن	Weight

ي

يهيمن	Dominate

ثانياً: إنجليزي – عربي

A

Activity	نشاط
Admissible	مقبول
Algorithm	خوارزمية
Alternative(s)	بديل (بدائل)
Appropriate	ملائم
Artificial intelligence	ذكاء صناعي
Assignment	تخصيص

B

Basic	أساسي
Basic solution	حل أساسي
Basic Variable	متغير أساسي

C

Chance	حظ
Chance Node	عقدة حظ
Characteristic	صفة أو ميزة

Competition	منافسة
Complete	كامل
Computer	حاسب
Concave function	دالة مقعرة
Condition	شرط (شروط)
Constraint(s)	قيد (قيود)
Continuous	متصل
Controllable	قابل للضبط
Controllable variable	متغير قابل للضبط
Convex function	دالة محدبة
Convex set	مجموعة محدبة
Cooperative	تعاوني
Criterion	معيار
Critical	حرج
Cut	قطع
Cutting plane	قطع مستوي
Cycle	دورة

D

Data	بيانات
Data analysis	تحليل بيانات
Decision variable	متغير قرار

Degree	درجة
Dependent	مرتبط
Depletion	نضوب
Design	تصميم
Deterioration	تلف
Deterministic	محدد
Diagram	مخطط
Digital	عددي
Direct	مباشر
Direct costs	تكاليف مباشرة
Discount	خصم
Discount factor	عامل الخصم
Discrete	منفصل
Distribution	توزيع
Dominate	يهيمن
Dual problem	مسألة ثنوية
Dual Model	نموذج ثنوي
Dual Simplex Method	طريقة السمبلكس الثنوية
Dynamic	ديناميكيا (حركي)

E

Economic	اقتصادي

Economic interpretation	تفسير اقتصادي
Effectiveness	فعالية
Element	عنصر
Elementary	أولي
Expected	متوقع
Expected Value	قيمة متوقعة

F

Facility	إمكانية (مكان للخدمة)
Facility Location	موقع الخدمة
Feasible	ممكن
Feasible solution	حل ممكن
Finite	منته
Forecasting	تنبؤ
Form	صيغة
Formulation	صياغة
Function	دالة

G

Game(s)	لعبة(ألعاب)
Graph	رسم

طريقة بيانية	Graphical method

I

برمجة خطية عددية	Integer Linear Programming
برمجة عددية	Integer programming
برمجة عددية ثنائية ذات متغيرات ثنائية القيم	Integer Programming
تنفيذ	Implementation
حل ابتدائي	Initial solution
حل غير ممكن	Infeasible solution
خوارزمية تكرارية	Iterative algorithm
ضمني	Implicit
طريقة التعداد الضمني	Implicit enumeration method
عدد صحيح	Integer
غيرمنته	Infinite
متطابق	Identical
مدخلات	Inputs
مستقل	Independent
معلومات	Information

J

مشترك	Joint

L

Level	مستوى
Linear	خطي
Linear programming	برمجة خطية
Low	أدنى
Lower	الأدنى
Lower bound	حد أدنى

M

Mathematical model	نموذج رياضي
Mathematical programming	برمجة رياضية
Matrix	مصفوفة
Mean	متوسط
Method	طريقة
Mixed	مختلط
Mixed integer Programming	برمجة عددية مختلطة
Mixed cutting plane	قطع مستوي مختلط
Model	نموذج
Models of integer programming	نماذج البرمجة العددية
Model building	بناء
Model solution	حل النموذج

Modelling	نمذجة
Multiple optimal solution	حل أمثل مضاعف

N

Nature	طبيعة(قدر)
Network	شبكة
Network flow	تدفق شبكي
Node	عقدة
Non-optimal solution	حل غير أمثل
Normal distribution	توزيع طبيعي

O

Objective	هدف
Objective function	دالة الهدف
Operation research	بحوث عمليات
Optimal	أمثل
Optimal model	نموذج أمثل
Optimal solution	حل أمثل
Optimal Strategy (Strategies)	الإستراتيجية (الإستراتيجيات) المثلى
Optimization	أمثلية

p

Parameter	معلمة
Partition	تجزئة
Payoff(s)	عائد (عوائد)
Path	مسار
Payoff matrix	مصفوفة العوائد
Perfect	كامل
Perfect Information	معلومات كاملة
Imperfect Information	معلومات غير كاملة
Performance	أداء
Performance measure	مقياس الأداء
Periodic	دورية
Personal	شخصي
Pivot row	سطر محوري
Pivot column	عمود محوري
Pivot element	عنصر محوري
Point	نقطة
Primal problem	مسألة أولية
Principle	مبدأ
Probabilistic	احتمالي

Probability	احتمال
Problem classification	تصنيف المشكلة
Problem formulation	صياغة المشكلة
Procedure	إجراء
Process	عملية
Production	إنتاج
Profit	ربح
Programming	برمجة
Project	مشروع
Prominent	بارز
Property	خاصية
Pure	خالص أو بحت أو صرف
Pure cutting plane	قطع مستوي صرف

Q

Quantity	كمية
Quantity discount	الخصم على الكمية

R

Random	عشوائي
Rate	معدل
Row(s)	صف (صفوف)

S

Saddle Point	نقطة سرجية (أو نقطة توازن)
Scale	تدرج أو مقياس
Sensitivity	حساسية
Sensitivity analysis	تحليل الحساسية
Service	خدمة
Shortage	عجز
Shortest path	أقصر مسار
Simplex	السمبلكس
Simplex Method	طريقة السمبلكس
Simulation	محاكاة
Size	حجم
Slope	ميل
Solution	حل (حلول)
Solution space	فضاء الحل
Space	فضاء
Stage(s)	مرحلة (مراحل)
Static	ساكن
Stationary	مستقر
Statistics	إحصاء
Steady-state	حالة استقرار

عشوائي	Stochastic
مخزون	Stock
مطلق أو حاد أو كامل	Strict
هيكل	Structure
إستراتيجية (إستراتيجيات)	Strategy (Strategies)
حل أمثل جزئي	Suboptimal solution
أمثلية جزئية	Sub-optimization
رمز (رموز)	Symbol
متناظر	Symmetric
نظام	System
تصميم نظام	System design
فعالية نظام	System effectiveness
هيكل النظام	System structure

T

جدول	Table
نظرية	Theorem
زمن أو وقت	Time
كلي	Total
طريقة التعداد الشامل	Total enumeration method
منقول مصفوفة	Transpose of a Matrix
شجرة	Tree

U

Uniform	منتظم
Uniform distribution	توزيع منتظم
Unique	وحيد
Unique optimal solution	حل أمثل وحيد
Upper	أعلى
Upper bound	حد أعلى
Upper Value	القيمة العليا
Utility	منفعة

V

Validation	صلاحية
Variable	متغير
Variance	تباين

W

Waiting	انتظار
Weight	وزن

كشاف الموضوعات

ن