

الأسس النظرية

Theoretical Background

- الإجهادات والانفعالات والاتزان • المرونة • تأثير ضعف التربة في الشد على معامل مقياس الضغط • اللدونة

(٦, ١) الإجهادات والانفعالات والاتزان

STRESSES, STRAINS AND EQUILIBRIUM

يؤخذ نظرياً في الاعتبار أن التمدد في الأنبوب الأسطواني هو تمدد لأسطوانة غير نهائية الطول في حجم غير نهائي من التربة. وتوجد قيود للفرضية الأولى باعتبار أن مقياس الضغط له طول محدد، ولكنها مفيدة جداً؛ حيث إنها تسهل كثيراً المشكلة النظرية وستستخدم طوال هذا الفصل. يستعرض الفصل السابع تأثير هذه الفرضية والفرضيات الأخرى على معاملات التربة التي يتم الحصول عليها من مقياس الضغط. تتكون الإجهادات الرئيسية من: الإجهاد نصف القطري σ_{rr} ، والإجهاد الحلقي $\sigma_{\theta\theta}$ ، والإجهاد الرأسي σ_{zz} (شكل رقم ٢٨) ويمكن كتابة هذه الإجهادات كالتالي:

$$(٣) \quad \sigma_{rr} = \sigma_{OH} + \Delta\sigma_{rr}$$

$$(٤) \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{OH} + \Delta\sigma_{\theta\theta}$$

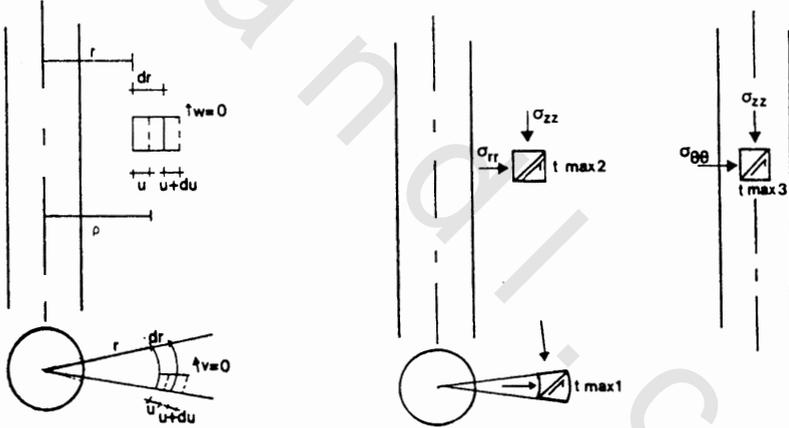
$$(٥) \quad \sigma_{zz} = \sigma_{OH} + \Delta\sigma_{zz}$$

حيث إن σ_{OH} و σ_{OV} هي الإجهادات عند السكون في الاتجاه الأفقي والرأسي على التوالي وكل من $\Delta\sigma_{rr}$ و $\Delta\sigma_{\theta\theta}$ و $\Delta\sigma_{zz}$ الزيادة أو النقصان في σ_{rr} و $\sigma_{\theta\theta}$ و σ_{zz} على التوالي. وبين شكل رقم (٢٨) اتجاهات إجهادات القص العظمى.

تتكون الإزاحات من الإزاحة نصف القطرية u والإزاحة الحلقية v والإزاحة الرأسية w (شكل رقم ٢٩). وبفرض أن التمدد يحصل في الأنبوب الأسطواني لانهائي الطول، فإن الإزاحات v و w تساوي صفرًا. ويرمز للمسافة نصف القطرية لموقع ابتدائي لنقطة في تربة قبل التحميل بالرمز r ، تقع نفس النقطة بعد فترة التحميل على مسافة نصف قطرية تساوي ρ وعلى هذا فإن:

(٦)

$$\rho = r + u$$



شكل رقم (٢٩). تعريف الإزاحات.

شكل رقم (٢٨). تعريف الإجهادات.

تتكون الانفعالات الرئيسية من الانفعال نصف القطري ϵ_{rr} والانفعال الحلقى $\epsilon_{\theta\theta}$ والانفعال الرأسي ϵ_{zz} ومن التعريف فإن العلاقات المطلوبة بين الانفعالات والإزاحات بنظريات الانفعال الصغير كالتالي :

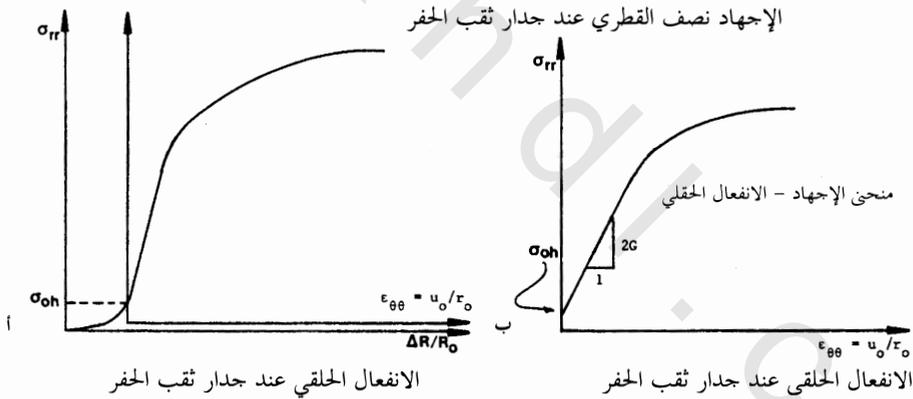
(٧)

$$\epsilon_{rr} = \frac{du}{dr}$$

$$(٨) \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}$$

$$(٩) \quad \varepsilon_{zz} = 0$$

يقيس مقياس الضغط منحنى الإجهاد-الانفعال الحلقي للتربة، ويوضح ذلك كالتالي. يتم الحصول على الإجهاد نصف قطري σ_{rr} بسهولة عند جدار ثقب الحفر من ضغط الأنبوب الأسطواني. ومن التعريف فإن الانفعال الحلقي في التربة عند جدار ثقب الحفر هو u_0/r_0 ، حيث إن u_0 هي الزيادة في نصف قطر ثقب الحفر و r_0 هو نصف القطر الابتدائي لثقب الحفر. يتم الحصول على كل من r_0 و u_0 بسهولة من قياسات الحجم خلال اختبار مقياس الضغط. ونتيجة ذلك نحصل على منحنى مقياس الضغط وهو منحنى الإجهاد - الانفعال الحلقي (شكل رقم ٣٠).



شكل رقم (٣٠). منحنى الإجهاد - الانفعال الحلقي من منحنى اختبار قياس الضغط.

من المفيد ملاحظة بخصوص نظريات الانفعال الكبير أن

(Baguelin et al., 1978):

$$(١٠) \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho^2 - r^2}{r^2} \right)$$

والتي تتوافق من حيث الحجم مع :

$$(11) \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \frac{\Delta V_c}{V_c}$$

حيث إن ΔV_c هي الزيادة في حجم التجويف و V_c هو حجم التجويف.
وتخفص معادلات الاتزان إلى :

$$(12) \quad \frac{d\Delta\sigma_{rr}}{d\rho} + \frac{\Delta\sigma_{rr} - \Delta\sigma_{\theta\theta}}{\rho} = 0$$

(٦، ٢) المرونة ELASTICITY

يفترض في هذه الحالة أن الانفعالات صغيرة وأن القوانين التأسيسية للمرونة الخطية (الانفعالات العمودية) كالتالي :

$$(13) \quad \varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} (\Delta\sigma_{rr} - \nu(\Delta\sigma_{\theta\theta} + \Delta\sigma_{zz}))$$

$$(14) \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} (\Delta\sigma_{\theta\theta} - \nu(\Delta\sigma_{zz} + \Delta\sigma_{rr}))$$

$$(15) \quad \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} (\Delta\sigma_{zz} - \nu(\Delta\sigma_{rr} + \Delta\sigma_{\theta\theta}))$$

كتبت معادلة الاتزان (معادلة ١٢) باستخدام r بدلاً من ρ نظراً لافتراض نظرية الانفعال الصغير وتمثل المعادلات ٧، ٨، ٩، ١٢، ١٣، ١٤، ١٥ معادلات بسبعة مجاهيل والتي تؤدي إلى المعادلة التفاضلية المتحركة في الإزاحة u التالية :

$$(16) \quad r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u = 0$$

أما شروط النهايات أو الحدود فهي كالتالي :

$$(17) \quad \text{(عند اللانهاية)} \quad r = \infty \quad \text{عند} \quad u = 0$$

$$(18) \quad \text{(عند جدار ثقب الحفر)} \quad r = r_0 \quad \text{عند} \quad u = u_0$$

وبهذا يكون الحل للإزاحة نصف القطرية، والإجهادات والانفعالات عند أي

نقطة في التربة كالتالي :

$$(١٩) \quad u = \frac{u_0 r_0}{r}$$

$$(٢٠) \quad \varepsilon_{rr} = \frac{u_0 r_0}{r^2}$$

$$(٢١) \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_0 r_0}{r^2}$$

$$(٢٢) \quad \sigma_{rr} = \sigma_{OH} + 2G \frac{u_0 r_0}{r^2}$$

$$(٢٣) \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{OH} - 2G \frac{u_0 r_0}{r^2}$$

لو كان الضغط المؤثر على جدار ثقب الحفر p فإن :

$$(٢٤) \quad \sigma_{rr} = \sigma_{OH} + (p - \sigma_{OH}) \frac{r_0^2}{r^2}$$

وتصبح المعادلات عند جدار ثقب الحفر كالتالي :

$$(٢٥) \quad u = u_0$$

$$(٢٦) \quad \varepsilon_{rr} = \frac{u_0}{r_0}$$

$$(٢٧) \quad \varepsilon_{\theta\theta} = -\frac{u_0}{r_0}$$

$$(٢٨) \quad \sigma_{rr} = \sigma_{OH} + 2G \frac{u_0}{r_0}$$

$$(٢٩) \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{OH} - 2G \frac{u_0}{r_0}$$

ويمكن ملاحظة التالي في المرونة :

١- الانفعال نصف القطري (ضغط) يساوي ويعاكس الانفعال الحلقي (شد).

٢- الانفعال الحجمي يساوي صفراً : لا تغير في الحجم.

$$(٣٠) \quad \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = 0$$

٣- الزيادة في الإجهاد نصف القطري $\Delta\sigma_{rr}$ (ضغط) مساوية للنقصان في الإجهاد الحلقي $\Delta\sigma_{\theta\theta}$.

$$(٣١) \quad \Delta\sigma_{rr} = -\Delta\sigma_{\theta\theta}$$

٤- الميل الابتدائي لمنحنى مقياس الضغط (شكل رقم ٣٠ ب) يساوي $2G$ (المعادلة ٢٨).

٥- تتغير كل من الإجهادات والانفعالات عكسياً مع مربع نصف القطر، فعلى سبيل المثال، الإجهاد نصف القطري عند مسافة تساوي ٤,٤٧ نصف قطر التجويف يساوي ٥٪ من قيمتها عند جدار التجويف. ويعطي هذا دلالة على المنطقة المتأثرة باختبار مقياس الضغط.

٦- تصبح المعادلة ٢٨ بتطبيق نظرية الانفعال الكبير كالتالي :

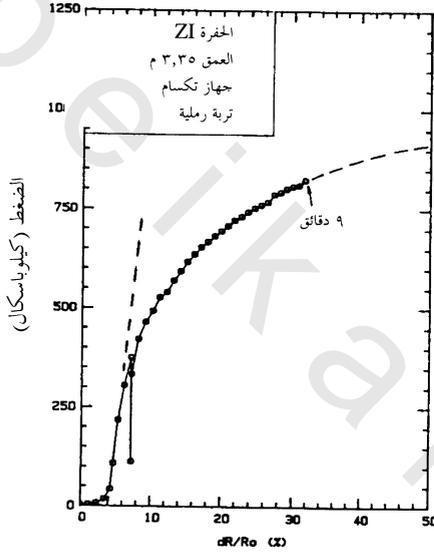
$$\sigma_{rr} = \sigma_{OH} + G \frac{\Delta V_c}{V_c} \quad (٣٢)$$

(٦,٣) تأثير ضعف التربة في الشد على معامل مقياس الضغط

INFLUENCE OF THE SOIL WEAKNESS IN TENSION ON THE PMT MODULUS

نجد أن التجاوب المرن للتربة يمتد p_y إلى ضغط الخضوع نصف القطري المساوي لـ ٤٠٠ كيلو باسكال عند اعتبار نتيجة اختبار مقياس الضغط كما هو موضح في شكل رقم (٣١). أما الإجهاد الأفقي الكلي عند السكون (p_{OH}) عند عمق الاختبار (٢,٧٥ م) فيساوي ٢٧,٥ كيلو باسكال. عند استخدام قيمة معامل ضغط الأرض عندما يكون السكون K_0 مساوياً ٠,٥ فإن الزيادة في الإجهاد نصف القطري، في نظرية المرونة، أعلى من p_{OH} تساوي النقصان في الإجهاد الحلقي تحت p_{OH} . وفي حالة شكل رقم (٣١) عند p_y ، فإن الإجهاد نصف القطري يساوي ٤٠٠ كيلو باسكال والإجهاد الحلقي المرن يساوي ٢٤٥ كيلو باسكال. ومن المستبعد أن تقاوم هذه التربة الرملية إجهاد الشد الكبير هذا، ومع ذلك فإن نظرية المرونة والتي تتوقع هذا الإجهاد الحلقي للشد غير المعقول، تستخدم لنطاق إجهاد نصف القطري من ١٠٠ كيلو باسكال إلى ٤٠٠ كيلو باسكال (شكل رقم ٣١) للحصول على المعامل E_0 . ويطبق السبب ذاته

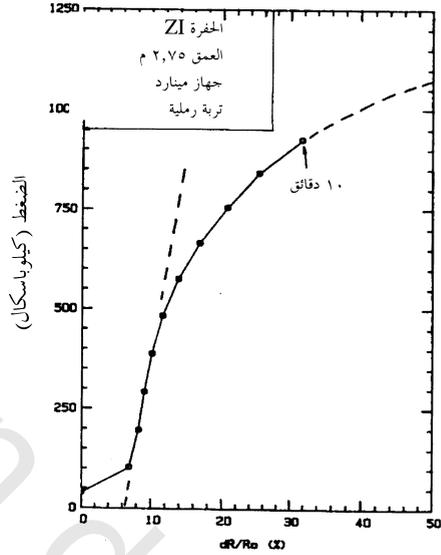
على شكل رقم (٣٢). لذا أصبحت نظرية المرونة المعدلة ضرورية لنمذجة أفضل للتربة حتى الضغط p_y .



$$E_o = 1.33 \times 1.04 \times \frac{1250}{0.120 - 0.04} = 21600 \text{ kPa}$$

$$p_L = 910 \text{ kPa}$$

$$p_o = 0.5 \times 11 \times 0.305 \times 20 = 34 \text{ kPa} \quad p_L^* = 876 \text{ kPa}$$



$$E_o = 1.33 \times 1.09 \times \frac{1250}{0.187 - 0.062} = 14500 \text{ kPa}$$

$$p_L = 1065 \text{ kPa}$$

$$p_o = 0.5 \times 9 \times 0.305 \times 20 = 27 \text{ kPa} \quad p_L^* = 1040 \text{ kPa}$$

شكل رقم (٣١). مثال لنتائج اختبار مقياس الضغط. شكل رقم (٣٢). مثال لنتائج اختبار مقياس الحجم.

تعرض منهجية المرونة التالية لدراسة تأثير اختلاف احتواء المعامل E^- في الاتجاه الحلقي عن المعامل E^+ في الاتجاه نصف القطري والرأسي بدلاً من احتواء نفس المعامل E_o في كل الاتجاهات. والمعادلات العامة التأسيسية المتعامدة للمرونة هي كالتالي

: (Jones, 1975)

$$(٣٣) \quad \varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E_r} - \frac{\nu_{\theta r} \sigma_{\theta}}{E_{\theta}} - \frac{\nu_{zr} \sigma_z}{E_z}$$

$$(٣٤) \quad \varepsilon_{\theta} = -\frac{\nu_{r\theta} \sigma_r}{E_r} + \frac{\sigma_{\theta}}{E_{\theta}} - \frac{\nu_{z\theta} \sigma_z}{E_z}$$

$$(٣٥) \quad \varepsilon_z = -\frac{v_{rz}\sigma_r}{E_r} - \frac{v_{\theta z}\sigma_\theta}{E_\theta} + \frac{\sigma_z}{E_z}$$

وبسبب قوانين التماثل ، فإنه يجب استيفاء أيضاً المعادلات التالية :

$$(٣٦) \quad E_r v_{\theta r} = E_\theta v_{r\theta}$$

$$(٣٧) \quad E_\theta v_{z\theta} = E_z v_{\theta z}$$

$$(٣٨) \quad E_z v_{rz} = E_r v_{zr}$$

والتغيرات لهذه المسألة هي كالتالي :

$$(٣٩) \quad E_z = E_r = E^+$$

$$(٤٠) \quad E_\theta = E^-$$

$$(٤١) \quad v_{rz} = v_{zr} = v_1$$

$$(٤٢) \quad v_{\theta z} = v_{z\theta} = v_2$$

$$(٤٣) \quad v_{z\theta} = v_{\theta z} = v_3$$

وتوجز المعادلات ٣٦ ، ٣٧ ، ٣٨ إلى :

$$(٤٤) \quad v_3 = \frac{E^+}{E^-} v_2 = a v_2$$

وتصبح المعادلات من ٣٣ إلى ٣٥ كالتالي :

$$(٤٥) \quad \varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E^+} - \frac{v_2\sigma_\theta}{E^-} - \frac{v_1\sigma_z}{E^+}$$

$$(٤٦) \quad \varepsilon_\theta = -\frac{v_2\sigma_r}{E^+} + \frac{\sigma_\theta}{E^-} - \frac{v_2\sigma_z}{E^+}$$

$$(٤٧) \quad \varepsilon_z = -\frac{v_1\sigma_r}{E^+} - \frac{v_2\sigma_\theta}{E^-} + \frac{\sigma_z}{E^+}$$

باستخدام شرط أن يكون الانفعال في مستوى واحد ($\varepsilon_z=0$) نحصل على :

$$(٤٨) \quad \sigma_r = \frac{E^+}{(1-2v_2^2-v_1)} \left(\frac{(1-v_2^2)}{1+v_1} \varepsilon_r + v_2 \varepsilon_\theta \right)$$

$$(٤٩) \quad \sigma_\theta = \frac{E^-}{(1-2v_2^2-v_1)} (v_2 \varepsilon_r + (1-v_1) \varepsilon_\theta)$$

$$(٥٠) \quad \sigma_r = S_{11}\epsilon_r + S_{12}\epsilon_\theta$$

$$(٥١) \quad \sigma_\theta = S_{21}\epsilon_r + S_{22}\epsilon_\theta$$

علاقات الانفعال مع الإزاحة للتمدد الأسطواني هي كالتالي :

$$(٥٢) \quad \epsilon_r = \frac{du}{dr}$$

$$(٥٣) \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

حيث إن u هي الإزاحة نصف القطرية لنقطة عند نصف قطر يساوي r من محور الأسطوانة. وتوجز معادلات الاتزان إلى :

$$(٥٤) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

وتؤدي المعادلات ٥٠ إلى ٥٤ إلى المعادلة التفاضلية الموجهة التالية :

$$(٥٥) \quad r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \left(1 + \frac{S_{12} - S_{21}}{S_{11}}\right) \frac{du}{dr} - \frac{S_{22}}{S_{11}} u = 0$$

والتي تأخذ في الاعتبار شروط النهايات أو الحدود فإن حل هذه المعادلة كالتالي :

$$(٥٦) \quad u = u_o \left[\frac{r_o}{r} \right]^{\frac{1}{2S_{11}}} \left[(S_{21} - S_{12}) - \sqrt{(S_{12} - S_{21})^2 + 4S_{11}S_{22}} \right]$$

حيث إن u_o الإزاحة عند جدار التجويف و r_o نصف قطر التجويف أما أس r_o/r في المعادلة ٥٦ فيطلق عليه n_2 . ويمكن التعبير عن σ_r كما يلي :

$$(٥٧) \quad \sigma_r = \frac{u_o}{r} \left(\frac{r_o}{r} \right)^{n_2} (S_{12} - n_2 S_{11})$$

وعند جدار التجويف يصبح :

$$(٥٨) \quad \sigma_{r_o} = (S_{12} - n_2 S_{11}) \frac{u_o}{r_o}$$

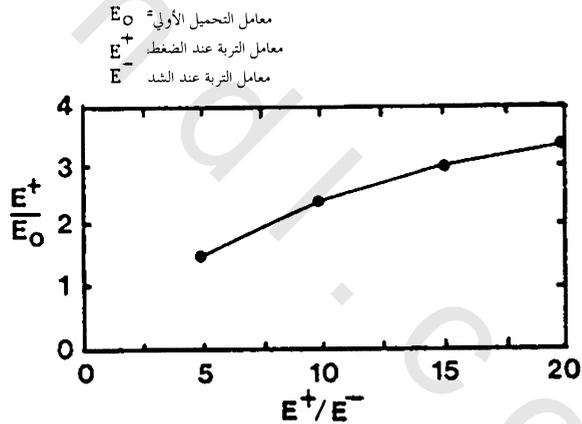
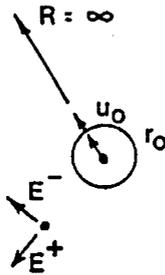
حيث إن S_{11} و S_{12} معطاة في المعادلات من ٤٨ إلى ٥١. وتقارن معادلة ٥٨ بحل المرونة موحدة الخواص ($E^+ = E = E_o$) :

$$(٥٩) \quad \sigma_{r_o} = - \left(\frac{E_o}{1+\nu} \right) \frac{u_o}{r_o}$$

لنأخذ في الاعتبار الحالة عندما يكون $E^+/E^- = 10$ و $v_1 = 0.33$ عندئذ يكون $v_2 = 0.033$ من المعادلة ٤٤ و $E^+ u_o / r_o$ و $\sigma_{r_o} = -0.309$ من المعادلة ٥٨. وهذا يمكن مقارنته بـ $\sigma_{r_o} = -0.7519 \frac{E_o u_o}{r_o}$ باستخدام المعادلة ٥٩، وحيث إن r_o ، u_o ، σ_{r_o} ذات قيم مميزة مقاسة فإن $E^+ = 2.43 E_o$. تم إعداد شكل رقم (٣٣) الذي يوضح أن القيم المعطاة لـ E^+/E^- تقلل قيمة E_o بمقدار ٢ إلى ٣ أضعاف باستخدام هذه المنهجية.

توجد طريقة أخرى لحل هذه المشكلة وذلك باعتبار أن التربة مادة غير قابلة للشد لذا فإن $E^- = 0$ واعتبار الوسط المرن عبارة عن دائرة بنصف قطر يساوي R . في هذه الحالة تصبح قيم S_{21} ، S_{12} ، S_{22} صفراً وتصبح معادلة S_{11} كالتالي :

$$(٦٠) \quad S_{11} = \frac{E^+}{1-v_1^2}$$



شكل رقم (٣٣). تأثير اعتبار الشد على قيم معاملات التربة المتباينة الخواص في اتجاهين متعاكسين.

وتكون معادلة الاتزان ، المعادلات التأسيسية ومعادلة تعريف الانفعال كالتالي :

$$(٦١) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r}{r} = 0$$

$$(٦٢) \quad \sigma_r = S_{11}\epsilon_r$$

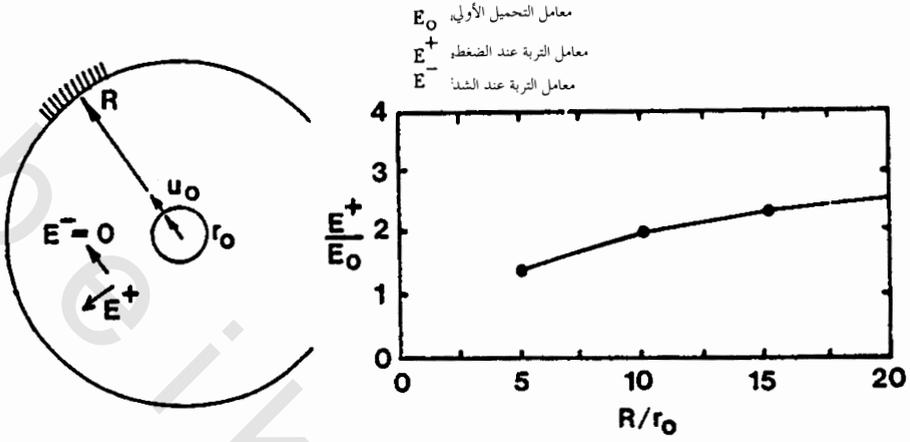
$$(٦٣) \quad \epsilon_r = \frac{du}{dr}$$

ويؤدي ضم المعادلات السابقة إلى :

$$(٦٤) \quad \sigma_{ro} = \frac{E^+}{(1-\nu_1^2)Ln \frac{r_o}{R}} \frac{u_o}{r_o}$$

تقارن هذه المعادلة مرة أخرى بالمعادلة ٥٩ . وعندما تكون نسبة بويسون تساوي ٠,٣٣ ، و $R=20r_o$ فإن العلاقة بين E^+ و E هي $E^+=2.53E$. باستخدام هذه المنهجية أعد شكل رقم (٣٤) والذي يشير إلى أن القيم الموضحة لـ E^+ و R/r_o أقل بضعفين أو ثلاثة أضعاف. تبين نتائج هذه النظرية احتياج مينارد إلى ضرب E_o بمعامل التصحيح $1/\alpha$ ؛ وذلك للتوافق مع نتائج الهبوط لاختبارات القواعد السطحية (Menard, 1975). ويتغير بالفعل المعامل $1/\alpha$ من (١) للتربة الطينية زائدة الإدماج ، حيث من المعقول أن يفرض أن E^+ يساوي E ، إلى أربعة أضعاف للتربة الرملية شديدة الكثافة ؛ حيث إن E^+ أكبر بكثير من E . وعلى هذا فمن المنطقي اعتبار أن E^+/E هو $1/\alpha$ (Leblanc, 1982).

وللتحقق معملياً ما إذا كان الشد مشكلة حقيقية في تمدد مقياس الضغط على الأقل عند الأعماق البسيطة ، تم إجراء الاختبار البسيط التالي. وضع مقياس الضغط والذي قطره يساوي ٧٤ ملم عند أقل عمق ممكن في الرواسب الطينية ، ثم نفخ الأنبوب الأسطواني ورصد انتشار الشق (أشكال أرقام ٣٥ إلى ٣٧). وتؤدي حقيقة انعطاف الشق بزواوية قائمة عند $R=12r_o$ إلى إثبات أن هذه القيمة هي بمثابة منطقة التأثر لمقياس الضغط لتلك الرواسب.



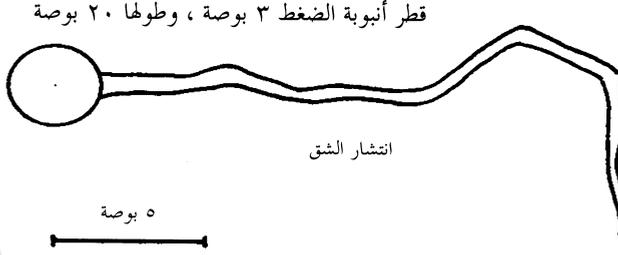
شكل رقم (٣٤). تأثير اعتبار الشد على قيم المعاملات للتربة التي لا تتحمل الشد.



شكل رقم (٣٦). أنبوب مقياس الضغط عند التمدد الأقصى.



شكل رقم (٣٥). أنبوب مقياس الضغط قبل التمدد.

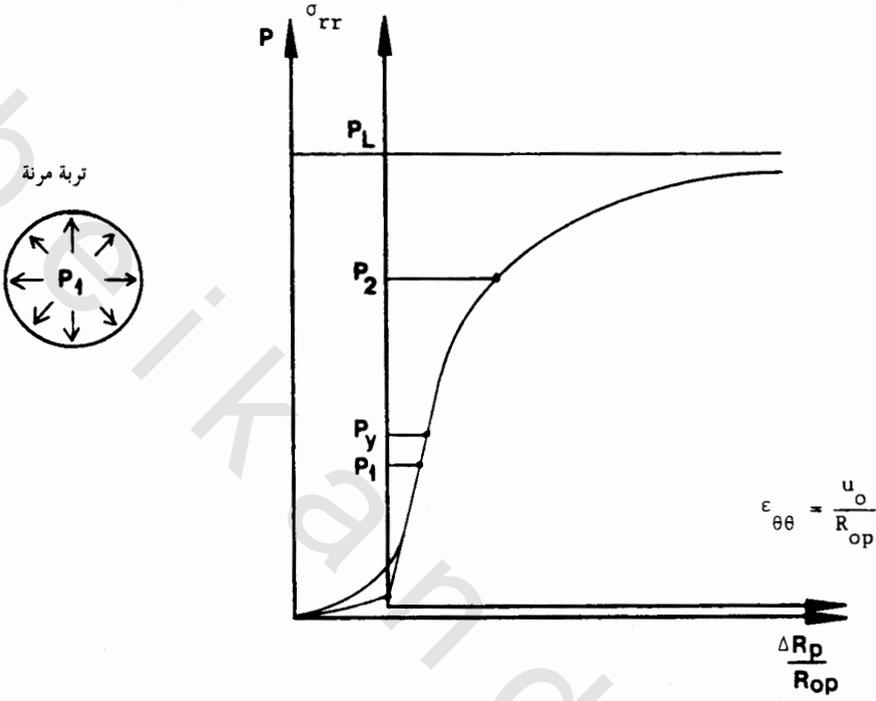


شكل رقم (٣٧). شق الشد عند التمدد النهائي.

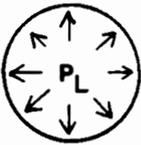
(٦،٤) اللدونة PLASTICITY

عند زيادة الإجهاد على التربة ؛ وذلك بتمدد الأنبوب الأسطواني ، فإنها تصل إلى نقطة تخضع عندها لللدونة ؛ حيث إن سلوك التربة يكون مرناً قبل الوصول إلى هذه المرحلة ، وبذلك يكون منحنى مقياس الضغط خطأً مستقيماً. بعد هذه النقطة يسمح بأن يكون منحنى مقياس الضغط غير خطي. وتظهر حلقة من التربة اللدنة حول التجويف عند بداية الخضوع (شكل رقم ٣٨). وتتسع هذه المنطقة اللدنة عند الاستمرار في تطبيق الضغط على جدار التجويف. وبهذا تدخل التربة مجال عدم الخضوع المرن ، مما يزيد من مقاومة الأنبوب الأسطواني للتمدد. وتتزايد هذه المقاومة بشكل أقل حتى يصل الضغط إلى الضغط النهائي وذلك عندما تكون التربة كاملة في حالة اللدونة.

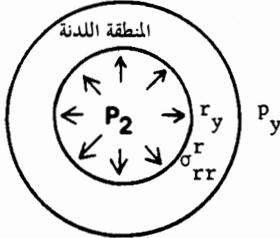
وتكون نظرية اللدونة ذات فائدة بإعطاء تعبيرات لكل من الضغط النهائي p_L والضغط p_y واللذين عندهما يبدأ الخضوع . ولإيجاد هذه التعبيرات فإنه من الضروري فرض قاعدة للخضوع للحصول على p_y وقاعدة للخضوع بجانب قانون للتغير في الحجم في منطقة اللدونة للحصول على p_y . وفي الأجزاء اللاحقة أجري التمييز بين التربة المتماسكة وغير المتماسكة.



المنطقة اللدنة



المنطقة المرنة



المنطقة المرنة



شكل رقم (٣٨). تدرج المناطق المرنة واللدنة.

يعتبر اختبار مقياس الضغط في التربة المتناسكة اختباراً محبوساً وفي هذه الحالة فإن خاصية الخضوع المناسبة هي خاصية تريسكا:

$$(٦٥) \quad \sigma_{11} - \sigma_{33} = 2S_u$$

حيث إن σ_{33} و σ_{11} هما الإجهاد الرئيسي الكلي الأكبر والأصغر على التوالي. وقد استخدم كل من الإجهاد الرئيسي الأكبر والأصغر على أنهما $\sigma_{\theta\theta}$ و σ_{rr} على التوالي. ويفترض أن يظل الإجهاد الرأسي σ_{zz} هو الإجهاد الرئيسي المتوسط. وعلى هذا فإن الخضوع سوف يحدث عندما :

$$(٦٦) \quad \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2S_u$$

وتبقى هذه العلاقة حقيقية داخل المنطقة اللدنة. يؤدي استخدام المعادلات ٣، ٤، ٣١، ٦٦ إلى التعبير التالي لضغط الخضوع p_y باستخدام المعادلة التالية :

$$(٦٧) \quad p_y = \sigma_{OH} + S_u$$

تطبق كل من خاصية الخضوع (المعادلة ٦٦) ومعادلة الاتزان (المعادلة ١٢) في منطقة اللدونة. يؤدي ذلك إلى المعادلة التفاضلية والتي إذا تم تكاملها تعطي التعبير التالي لـ σ_{rr} في أي مكان داخل المنطقة اللدنة.

$$(٦٨) \quad \sigma_{rr} = p_y + S_u \ln\left(\frac{\rho_y^2}{\rho^2}\right)$$

حيث إن p_y هي المسافة نصف القطرية إلى الحد الفاصل بين المرونة واللدونة (شكل رقم ٣٨). يكون الضغط النهائي p_L ، الذي يناظر التمدد اللانهائي للأنبوب الأسطواني ، هو قيمة الإجهاد نصف القطري σ_{rr} عند جدار التجويف ($p=p_0$) عندما تمتد منطقة اللدونة إلى اللانهاية ($p_0=\infty, p_y=\infty$). ومن الضروري وجود قانون لتغير الحجم لوصف انضغاطية التربة في المنطقة اللدنة للحصول على القيمة الحدية لـ p_y^2 / p_0^2 عندما يصل كل من p_0, p_y إلى اللانهاية. وقد استخدم هنا قانون عدم تغير الحجم. وتنطبق هذه الفرضية للسلوك غير المصرف للتربة المشبعة المتماسكة. ويسمح هذا القانون بإقامة علاقة بين النسبة p_y^2 / p_0^2 والانفعال ϵ_y عند الحد الفاصل بين المرونة واللدونة. تستخدم عندئذ المعادلات ٦٧ و ٢٨ المكتوبة بصيغة الانفعال الكبير لإيجاد الانفعال ϵ_y . وبالتالي الحد p_y^2 / p_0^2 . ويؤدي ذلك إلى التعبير التالي لـ p_L :

$$(٦٩) \quad p_L = \sigma_{OH} + S_u \left(1 + Ln \frac{G}{S_u} \right)$$

يعتبر اختبار مقياس الضغط في التربة غير المتماسكة اختباراً مصرفاً. في هذه الحالة فإن خاصية الخضوع المناسبة هي خاصية مور-كولومب:

$$(٧٠) \quad \sigma'_{33} = k_a \sigma'_{11}$$

حيث إن σ'_{33} و σ'_{11} هما الإجهاد الرئيسي الفعال الأكبر والأصغر على التوالي و k_a هو معامل ضغط التربة النشط:

$$(٧١) \quad k_a = \tan^2 \left(45 - \frac{\phi}{2} \right)$$

حيث إن ϕ هو زاوية الاحتكاك للتربة. وتكتب خاصية الخضوع للتمدد الأسطواني كالتالي:

$$(٧٢) \quad \sigma'_{\theta\theta} = k_a \sigma'_{rr}$$

وحيث إن σ'_{rr} و $\sigma'_{\theta\theta}$ هما الإجهاد نصف القطري والحلقي الفعال على التوالي. باستخدام نفس الطريقة التي استخدمت للتربة المتماسكة، يمكن الحصول على قيمة ضغط الخضوع الفعال p'_y والضغط النهائي الفعال p'_L كالتالي:

$$(٧٣) \quad p'_y = \sigma'_{OH} (1 + \sin \phi)$$

$$(٧٤) \quad p'_L = \sigma'_{OH} (1 + \sin \phi) \left(\frac{G}{\sigma'_{OH} \sin \phi} \right)^{\frac{1}{2}(1-k_a)}$$

لاحظ أن هذا التعبير للمقدار p'_L يعتمد على فرضية عدم تغيير الحجم. وهذه الفرضية صحيحة في التربة الرملية فقط عند نسبة الفراغ الحرج. ويمكن أن تكون قيم p'_L للتربة الرملية المضغطة (رمل متفكك) منخفضة إلى ٠,٥ من القيمة المعطاة بالمعادلة ٧٤، بينما قيم p'_L للتربة الرملية المتمددة (رمل كثيف) تكون عالية إلى ضعفي القيمة المعطاة بالمعادلة ٧٤ (Baguelin et al., 1978). ويشمل التعبير النظري المناسب لـ p'_L قانون الانضغاطية أو التمدد والذي يتطلب إجراء اختبارات معملية منفصلة (Baguelin et al., 1978).