

الفصل الرابع

مقاييس النزعة المركزية

أولاً- المتوسطات الإحصائية

- ١- المتوسط الحسابي
- ٢- الوسط الفرضي
- ٢- المتوسط المرجح
- ٣- المتوسط الهندسي
- ٤- المتوسط الهندسي المرجع
- ٥- الوسط التوافقي
- ٦- الوسط التربيعي

ثانياً: الوسيط

ثالثاً: المئينات

رابعاً: الربيعات

خامساً: العشيرات

سادساً: المنوال

سابعاً: العلاقة بين مقاييس النزعة المركزية

ثامناً: خواص مقاييس النزعة المركزية

أولا - المتوسطات الإحصائية.

إن وصف الجداول التكرارية وتحديد شكل المنحنيات التي تمثلها، وكذا المقارنة بين المنحنيات لمختلف المتغيرات في الظاهرة المراد دراستها، يتم باستخدام مقاييس خاصة وهي مقاييس النزعة المركزية، ماس التبعثر والتشتت تم مقاييس الالتواء و التفرطح.

و كلمة نزعة مركزية تعني التمرکز و التكتف حول رقم معين، حيث يلاحظ عامة أن قيم الظاهرة تميل دائما إلى التمرکز عند قيمة معينة في التوزيع التكراري. لهذا فهناك مقاييس إحصائية تحاول تلخيص البيانات/قيم الظاهرة في رقم واحد يدل عليها ويرمز لها. هذا الرقم يوضح نزعة البيانات إلى التمرکز حول فئة معينة، وكلما ابتعدنا عن هذه القيمة فإن عدد البيانات يبدأ في التناقص. ولهذا فهناك من الطرق ما توصلنا إلى تحديد هذا الرقم جبريا أو بالرسم وسوف نعرض فيما يلي أهمها:

١ - المتوسط الحسابي:

هو أشهر مقاييس النزعة المركزية الذي يقاس بجمع قيم كل عناصر المجموعة ثم قسمة النتيجة على عدد عناصر المجموعة، بمعنى آخر مجموع القياسات الخاصة بظاهرة معينة على عدد القياسات. ويعتبر المتوسط الحسابي أهم مقاييس النزعة المركزية وأكثرها استخداما، كما أنه يسهل حسابه.

أ- المتوسط الحسابي في حالة البيانات الغير مبوبة.

إن متوسط عدد من القيم هو خارج قسمة مجموع هذه القيم على عددها ويرمز للمتوسط الحسابي برمز $\bar{X}$ ، ويمكن أن يكتب جبريا كالآتي:

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع المفردات}}{\text{عدد المفردات}}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} \quad \text{وبالرموز: } \bar{X} = \frac{\text{مجموع } X}{N}$$

فلنرمز لأي مفردة من مفردات مجموعة من القيم بالرمز X وإلى عدد القيم بالرمز N فعندها يكون $\bar{X}$ ، X_1 ، X_2 ، X_3 ...، هي القيم المرغوب في حساب متوسطها، الحسابي وهكذا فان:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N}{N}$$

مثال:

حساب المتوسط الحسابي للقيم التالية ٨، ٣، ٥، ١٢، ١٠ هو كالتالي

$$\bar{X} = \frac{\text{مجموع } X}{N} = \frac{٨ + ٣ + ٥ + ١٢ + ١٠}{٥} = ٧,٦$$

في المتوسط الحسابي لابد أن يكون مجموع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي مساوية لصفرًا.

وبالتطبيق على المثال السابق نجد:

$$\begin{aligned} ٠ &= (١٠ - ٧,٦) + (١٢ - ٧,٦) + (٥ - ٧,٦) + (٣ - ٧,٦) + (٨ - ٧,٦) \\ ٠ &= ٧,٢ + (-٧,٢) = ٢,٤ - ٤,٤ - ٢,٦ + ٤,٦ + (-٠,٤) \end{aligned}$$

ب- المتوسط الحسابي في حالة البيانات المبوبة.

أما إذا كانت القيم/البيانات موزعة في جدول توزيع تكراري يحتوي على فئات فنحن هنالا نعرف قيمة كل حالة وإنما نعرف أن كل حالة تنحصر قيمتها بين رقمين هما الحد الأدنى والأعلى للفئة، لذلك علينا افتراض قيمة متساوية لكل أفراد الفئة الواحدة، وذلك

بأن نعطي كل حالة في الفئة قيمة هي مركز تلك الفئة ويحسب المتوسط الحسابي وفق القانون التالي:

$$\bar{x} = \frac{\sum F_i \times C_i}{\sum F_i}$$

مجموع C_i مجموع F_i

ويلاحظ أن هذه القاعدة تطبق فقط في حالة الجداول التكرارية المقفلة، أما الجداول التكرارية المفتوحة أي التي لا تتضمن الحد الأعلى أو الأدنى أو كلاهما في التوزيع التكراري فإنه من المستحيل التوصل إلى مراكز هذه الفئات لإيجاد المتوسط الحسابي و سوف نرى لاحقاً كيف نصل إلى المتوسط الحسابي في مثل هذا النوع من الجداول.

مثال: الجدول التالي يبين توزيع ٦٠ مولوداً حياً حسب مدة حملها بالأسبوع. والمطلوب حساب متوسط مدة الحمل لهؤلاء المواليد عن طريق المتوسط الحسابي.

عدد المواليد	مدة الحمل
٣	٢٨ - ٣٠
٥	٣١ - ٣٣
٣٠	٣٤ - ٣٦
٢٠	٣٧ - ٣٩
٢	٤٠ - ٤٢
٦٠	المجموع

لحساب المتوسط الحسابي في حالة البيانات المبوبة لابد من حساب منتصفات الفئات والتي تساوي

$$\frac{\text{الحد الأدنى للفئة} + \text{الحد الأعلى لها}}{2}$$

مثلاً $28 + 30 = 29$ أسبوعاً.

٢

ثم نقوم بحساب مجموع كل تكرار مضروباً في مركز الفئة المقابل له أي مجموع $K \times S$ كما هو مبين في الجدول التالي:

مدة الحمل	عدد المواليد ك/	س	ك × س
٢٨ - ٣٠	٣	٢٩	٨٧
٣١ - ٣٣	٥	٣٢	١٦٠
٣٤ - ٣٦	٣٠	٣٥	١٠٥٠
٣٧ - ٣٩	٢٠	٣٨	٧٦٠
٤٠ - ٤٢	٢	٤١	٨٢
المجموع	٦٠		٢١٣٩

$$\bar{S} = \frac{\text{مجموع } K \times S}{\text{مجموع ك}} = \frac{2139}{60} = 35.65 \text{ أسبوعاً}$$

أي بالتقريب ٣٦ أسبوعاً الموافقة لتسعة أشهر، أي أن الأغلبية من هؤلاء الأطفال ولدوا في أوانهم.

٢- الوسط الفرضي

أ- الوسط الفرضي في حالة البيانات الغير مبوبة.

إذا كانت القيم كبيرة فيمكن اختيار قيمة منها ككمية/ أو قيمة ثابتة ونقوم بطرح القيم الأخرى منها بحيث نحصل على قيم متغير جديد يقسم على عدد القيم ويضاف إلى القيمة المختارة، فنحصل بذلك على المتوسط الحسابي.

مجموع انحرافات القيم عن وسطها الفرضي
عدد القيم

الوسط الفرضي = الوسط الفرض +

$$\text{أي} \quad \text{س} = \text{أ} + \frac{\text{م ج ح}}{\text{ن}}$$

مثال: إيجاد المتوسط الحسابي للقيم التالية: ١٥٠٠٠، ١٨٦٠٠، ١٧٨٠٠، ١٤٥٠٠، ١٩٠٠٠. في هذه الحالة نفترض أن القيمة المختارة للمتوسط هي ١٤٥٠٠ ثم نطرح هذا الرقم من بقية القيم الأخرى فتحصل على ما يلي:

$$\begin{aligned} & (15000 - 14500) + (18600 - 14500) + (17800 - 14500) + (14500 - 14500) + (19000 - 14500) \\ & = 500 + 4100 + 3300 + 0 + 4500 \\ & 12400 = 4500 + 0 + 3300 + 4100 + 500 \end{aligned}$$

ثم نقسم على عدد المفردات أو القيم هذه النتيجة فنحصل على ١٢٤٠٠/٥ = ٢٤٨٠.

وبهذا يصبح المتوسط الحسابي = ١٤٥٠٠ + ٢٤٨٠ = ١٦٩٨٥٠.

و بالطريقة العادية نجد المتوسط الحسابي في هذا المثال يساوي:

٨٤٩٠٠	١٩٠٠٠ + ١٤٥٠٠ + ١٧٨٠٠ + ١٨٦٠٠ + ١٥٠٠	م ج ح س
٥	٥	ن
		= ١٦٩٨٥٠.

وبهذا نرى أننا حصلنا على نفس النتيجة في كلا الحالتين ويكون مجموع الانحراف عن الوسط دائما يساوي صفرا.

$$\begin{aligned}
& - ١٦٩٨٠) + (١٧٨٠٠ - ١٦٩٨٠) + (١٨٦٠٠ - ١٦٩٨٠) + (١٥٠٠٠ - ١٦٩٨٠) \\
& = ٢٠٢٠ - ٢٤٨٠ + ٨٢٠ - ١٦٢٠ - ١٩٨٠ + = (١٩٠٠٠ - ١٦٩٨٠) + (١٤٥٠٠ \\
& .٠ = ٤٤٦٠ - ٤٤٦٠ +
\end{aligned}$$

ب- الوسط الفرضي في حالة البيانات المبوبة:

يمكن حساب المتوسط الحسابي بطريقة أخرى أسهل إذا كان الجدول هو توزيع تكراري منتظم أي تساوت فيه أطوال الفئات، بحيث يصبح طول الفئة هو القاسم المشترك وذلك لتبسيط العملية الحسابية، خاصة في حالة الجداول ذات الفئات العديدة أي التوزيعات التكرارية الطويلة.

وفي هذه الحالة نفترض أن الوسط الفرضي يساوي مركز فئة معينة، بحيث نحسب انحرافات بقية الفئات عن هذا الوسط الفرضي ويستحسن أن يكون هذا الوسط الفرضي المختار في وسط الجدول مقابل أكبر تكرار كلما أمكن ذلك وهذا لتسهيل العمليات الحسابية وبهذا فلو وسط الفرضي في حالة البيانات المبوبة تساوي:

مجموع حوا صل ضرب التكرار × انحرافات الفئات عن الوسط الفرضي

الوسط الفرضي = أ +

مجموع التكرارات

$$\text{س} = \frac{\text{مجم ك} \times \text{ح}}{\text{مجم ك}} + \text{أ}$$

وبتطبيق هذا القانون على المثال السابق نجد الوسط الفرضي يكون مساويا إلى:

مدة الحمل	ك	س	ح	ك × ح
٢٨ - ٣٠	٣	٢٩	٦ -	١٨ -
٣١ - ٣٣	٥	٣٢	٣ -	١٥ -

٠	٠	٣٥	٣٠	٣٦ - ٣٤
٦٠	٣ +	٣٨	٢٠	٣٩ - ٣٧
١٢	٦ +	٤١	٢	٤٢ - ٤٠
٣٩	٠		٦٠	المجموع

$$س = أ + \frac{\text{مجموع ك} \times \text{ح}}{\text{مجموع ك}} = ٣٥ + \frac{٣٩}{٦٠} = ٣٥,٦٥ \text{ أسبوعا}$$

٣- الوسط الحسابي المرجح.

أ - الوسط المرجح في حالة البيانات الغير مبوبة.

وهذا يستخدم عندما نفاضل بين مفردات توزيع أي ظاهرة في الأهمية، أي إذا علمنا أن بعض مفرداتها تكتسي أهمية بالنسبة للبحث على أخرى، حيث يرجح كل مفردة أو قيمة بأهميتها ويحسب وفق القانون التالي:

$$\text{الوسط المرجح} = \frac{\text{مجموع س} \times \text{و}}{\text{مجموع و}}$$

مثال: من تحقيق رصده فيه ١٠٠ عائلة وجد ٢٠ عائلة لديها ٤ أطفال ٤٠ لديهم ٥ أطفال، ٣٠ لديهم ٦ أطفال والباقي لديهم ٧ أطفال
إذن الوسط المرجح للأطفال هؤلاء الأسر هو:

$$\text{مجموع س} \times \text{و}$$

$$\text{مجموع و}$$

$$٥,٣ \text{ طفل لكل عائلة} = \frac{٥٣٠}{١٠٠} = \frac{١٠ \times ٧ + (٣٠ \times ٦) + (٤٠ \times ٥) + (٢٠ \times ٤)}{١٠٠}$$

٤ - الوسط الحسابي بالطريقة المختصرة:

يمكننا كذلك حساب المتوسط الحسابي بطريقة مختصرة سهلة ولإيجاده نقوم مثل في الوسط الفرضي بحساب مراكز الفئات س ثم تحديد وسط فرضي أ والذي يكون مقابل لأكبر تكرار من مراكز الفئات ثم نجد انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي ح وفي الأخير نجد الانحرافات المختصرة.

$$\frac{\text{الانحراف مركز الفئة عن الوسط الفرضي}}{\text{طول الفئة}} = \frac{\text{ح}}{\text{ل}}$$

ثم نجد حاصل ضرب مجموع الانحرافات المختصرة في التكرار المقابل لها. وبهذا الوسط الحسابي بالطريقة المختصرة يساوي:

$$\bar{س} = أ + \frac{\text{مجم ح} \times \text{ك}}{\text{مجم ك}} \times \text{ل}$$

وبتطبيق هذه المعادلة على المثال السابق أعلاه نجد أن متوسط مدة حمل هؤلاء المواليد بطريقته المختصرة كما يلي:

مدة الحمل	ك	س	ل	ح	ح	ح × ك
٣٠ - ٢٨	٣	٢٩	٢	٦ -	٣ -	٩ -
٣٣ - ٣١	٥	٣٢	٢	٣ -	١,٥ -	٧,٥ -

٠	٠	٠	٢	٣٥	٣٠	٣٦ - ٣٤
٣٠	١,٥	٣ +	٢	٣٨	٢٠	٣٩ - ٣٧
٦	٣	٦ +	٢	٤١	٢	٤٢ - ٤٠
١٩,٥	٠	٠			٦٠	المجموع

$$س = أ + \frac{م ج \times ك}{م ج ك}$$

$$٣٥ + \frac{١٩,٥ \times ٢}{٦٠} = ٣٥,٦٥ \text{ أسبوعا}$$

١ - ٨ - المتوسط الهندسي:

يستخدم المتوسط الهندسي في حالة المفردات التي تزيد بنسب ثابتة كما دراسة النمو السكاني والاقتصادي ... إلخ حيث يعتبر أنسب المتوسطات في حالة معدلات التغير ويحسب وفق المعادلة التالية:

أ/- في حالة البيانات غير المبوبة:

$$لوه = \frac{١}{ن} م ج لوس$$

مثال: بلغ عدد سكان الجزائر في سنة ١٩٩٠ ٢٥,٠٢٢,٠٠٠ نسمة وفي سنة ٢٠٠٤ حوالي ٣٢١,٠٠٠,٠٠٠ نسمة. فعدد السكان في منتصف هذه الفترة أي في عام ١٩٩٧ كان:

$$هـ = \sqrt[3]{(٢٥,٠٢٢,٠٠٠)(٣٢١,٠٠٠,٠٠٠)} = ٢٨,٣٢٠,٠٠٠$$

ب/- في حالة البيانات المبوبة:

يحسب المتوسط الهندسي عندما يكون لدينا جدول مبوب في فئات وفق العلاقة التالية:

$$\text{هـ} = \sqrt[n]{\text{س ١ ك ١ س ٢ ك ٢ سن كن}} \\ \text{أي أن لو هـ} = \frac{\text{مج ك لو س}}{\text{مج ك}}$$

مثال: أحسب الوسط الهندسي للجدول التالي الذي يوضح معدل وفيات الأطفال الرضع لـ ٨٠ دولة مثلاً.

معدل وفيات الأطفال الرضع	ك	س	لو س	ك × لو س
١٠ - ٢٠	٥	١٥	١,١٨	٥,٨٨
٢٠ - ٣٠	١٥	٢٥	١,٣٩	٢٠,٩٧
٣٠ - ٤٠	٢٠	٣٥	١,٥٤	٣٠,٨٨
٤٠ - ٥٠	١٨	٤٥	١,٦٥	٢٩,٧٦
٥٠ - ٦٠	٢٢	٥٥	١,٧٤	٣٨,٢٩
المجموع	٨٠			١٢٥,٧٨

لو هـ = $\frac{\text{مج ك لو س}}{\text{مج ك}} = \frac{125,78}{80} = 1,57$ وهو متوسط التغير في معدل وفيات الرضع لـ ٨٠ دولة.

- 1-9 المتوسط الهندسي المرجح:

ويحسب وفق الصيغة التالية:

$$\text{هـ} = \frac{\sum \text{س ١ و ٠١ س ٢ و ٢ س ن ون}}{\text{س ١ و ٠١ س ٢ و ٢ س ن ون}}$$

$$\text{أي أن لو هـ} = \frac{\text{مـج و لو س}}{\text{مـج و}}$$

مثال: أوجد الوسط الهندسي المرجح للبيانات التالية:

السنة	عدد الولادات (س)	عدد الوفيات المزايد الجدد (و)
٢٠٠٠	١٧٠,٠٠٠	٩٥
٢٠٠١	١٥٠,٠٠٠	٦٠
٢٠٠٢	١٨٠,٠٠٠	٦٥
٢٠٠٣	١٦٠,٠٠٠	٨٠
٢٠٠٤	١٧٥,٠٠٠	٦٣

الحل:

س	و	لو س	و لو س
١٧٠,٠٠٠	٩٥	٥,٢٣	٤٩٦,٨٩
١٥٠,٠٠٠	٦٠	٥,١٨	٣١٠,٥٦
١٨٠,٠٠٠	٦٥	٥,٢٥	٣٤١,٥٩
١٦٠,٠٠٠	٨٠	٢,٥٠	٤١٦,٣٣
١٧٥,٠٠٠	٦٣	٥,٢٤	٣٣٠,٣١
	٣٦٣		١٨٩٥,٦٨
			٨

$$\text{لو هـ} = \frac{\text{مـج و لو س}}{\text{مـج و}} = \frac{١٨٩٥,٦٨}{٣٦٣} = ٥,٢٢$$

١ - ١٠ - الوسط التوافقي:

هو عبارة عن وسط يحسب معدلات زمنية وهو مقلوب الوسط الحسابي لمقلوبات قيم المتغير المدروس. ويعتبر أفضل المتوسطات لتمثيل المعدلات في التغير والسرعات وكذلك الأسعار والأثمان ... الخ. ويحسب وفق الصيغ التالية:

أ/- في حالة البيانات غير المبوبة:

إذا كانت لدينا مجموعة من القيم عددها ن و هي س_١ س_٢ ... س_ن فأول خطوة نقوم بها هي إيجاد مقلوب هذه القيم $\frac{1}{س_١}$ أي $\frac{1}{س}$ $\frac{1}{س_ن}$

وبعد هذا نقوم بتطبيق الصيغة التالية:

$$ق = \frac{ن}{\frac{1}{س_١} + \frac{1}{س_٢} + \frac{1}{س_٣} + \dots + \frac{1}{س_ن}}$$

مثال: لدينا البيانات التالية ٦، ٨، ١٣، ١٥ والمطلوب حساب متوسطها التوافقي.

٤

$$ق = \frac{4}{\dots}$$

$$0,07 + 0,08 + 0,12 + 0,17$$

$$9,10 =$$

ب/- في حالة البيانات المبوبة:

في هذه الحالة يتوجب علينا معرفة مراكز الفئات (س) لأننا سوف نقوم بحساب مقlobات هذه المراكز أي $\frac{1}{س}$ ثم نقوم بضرب النتيجة في التكرار المقابل لها كما سنوضحه في المثال اللاحق عن المعادلة المطبقة لإيجاده فهي نحو التالي:

$$ق = \frac{\text{مج ك}}{\text{مج ك س}}$$

مثال: الجدول التالي يوضح تطور عدد الوفيات حسب الفئات العمرية.

الفئات	ك	س	$\frac{1}{س}$	$\frac{ك \times 1}{س}$
٥ - ٠	١٥	٢,٥	٠,٤	٩
١٠ - ٥	١٣	٧,٥	٠,١٣	١,٦٩
١٥ - ١٠	٢٠	١٢,٥	٠,٠٨	١,٦
٢٠ - ١٥	٣٥	١٧,٥	٠,٠٦	٢,١٠
٢٥ - ٢٠	٥	٢٢,٥	٠,٠٤	٠,٢
المجموع	٨٨			١١,٥٩

$$ق = \frac{\text{مج ك}}{\text{مج ك س}} = \frac{٨٨}{١١,٥٩} = ٧,٦٤$$

١- 11 الوسط التربيعي:

الوسط التربيعي هو الجذر التربيعي للوسط الحسابي لمربعات قيم المتغير المدروس.

أ/- في حالة البيانات غير المبوبة:

$$ت = \sqrt{\frac{\sum س^2}{ن}}$$

مثال: إيجاد الوسط التربيعي للقيم التالية: ٥، ٨، ١٧، ٢٠

$$ت = \sqrt{\frac{٥^2 + ٨^2 + ١٧^2 + ٢٠^2}{٤}} = \sqrt{\frac{٤٠٠ + ٦٤ + ٢٨٩ + ٤٠٠}{٤}} = \sqrt{\frac{٧٧٨}{٤}} = \sqrt{١٩٤,٥} = ١٣,٩٤$$

=

=

ت =

$$13,95 = 194,5 =$$

ب/- في حالة البيانات المبوبة:

$$ت = \frac{\text{مج س}^2 \text{ك}}{\text{مج ك}}$$

مثال: أوجد الوسط التربيعي للقيم التالية:

الفئات	ك	س	س ^٢	س ^٢ × ك
١٠ - ٢٠	٣٠	١٥	٢٢٥	٦٧٥٠
٢٠ - ٣٠	٢٥	٢٥	٦٢٥	١٥٦٢٥
٣٠ - ٤٠	١٣	٣٥	١٢٢٥	١٥٩٢٥
٤٠ - ٥٠	٣٥	٤٥	٢٠٢٥	٧٠٨٧٥
٥٠ - ٦٠	١٠	٥٥	٣٠٢٥	٣٠٢٥٠
المجموع	١١٣			١٣٩٤٢٥

$$ت = \frac{\sqrt{\frac{\sum ك \cdot س^2}{\sum ك}}}{\sqrt{\frac{139425}{113}}} = \frac{\sqrt{1233,85}}{\sqrt{1233,85}} = 35,13$$

١٢-١ - العلاقة بين المتوسطات:

لو قارنا بين مختلف أنواع المتوسطات السابقة الذكر نجد أن:

المتوسط التربيعي < المتوسط الحسابي < المتوسط الهندسي < الوسط التوافقي

أي أن ت < س < هـ < ق، وهذه المترابطة تبقى صحيحة مهما اختلف التوزيع التكراري في بياناته.

مثال: أوجد المتوسط بمختلف الطرق للجدول التالي الذي يبين مدة زواج ١٠٠ امرأة.

مدة الزواج	ك
١ - ٥	١٥
٥ - ٩	٣٢
٩ - ١٣	١٨
١٣ - ١٧	٢٢
١٧ - ٢١	١٣
المجموع	١٠٠

$$١- حساب الوسط التربيعي: ث = \sqrt{\frac{\sum s^2 \cdot k}{\sum k}}$$

$$٢- المتوسط الحسابي: س = \frac{\sum k \cdot s}{\sum k}$$

$$٣- الوسط الهندسي: ه = \sqrt[n]{\frac{s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot \dots \cdot s_n}{n}} = \frac{1}{n} \sum \log s$$

$$٤- الوسط التوافقي: ق = \frac{\sum k}{\sum \frac{k}{s}}$$

مدة الزواج	ك	س	ك.س	س ^٢	ك.س ^٢	س ^١	ك.س ^١
١ - ٥	١٥	٣	٤٥	٩	١٣٥	٠٠ ٣٣	٥
٥ - ٩	٣٢	٧	٢٢٤	٤٩	١٥٦٨	٠٠ ١٤	٤٠٥٧
٩ - ١٣	١٨	١١	١٩٨	١٢ ١١	٢١٧٨	٠٠ ٠٩	١٠٦٤
١٣ - ١٧	٢٢	١٥	٣٣٠	٢٢ ٥	٤٩٥٠	٠٠ ٠٧	١٠٤٧
١٧ - ٢١	١٣	١٩	٢٤٧	٣٦ ١	٤٦٩٣	٠٠ ٠٥	٠٠٦٨
المجموع	١٠٠		١٠٤٤		١٣٥٢٤		١٣٠٣ ٦

$$\text{بالتعويض في القوانين السابقة نجد } \frac{\sqrt{13524}}{100} = 11,63 \text{ سنة.}$$

$$\text{س} = \frac{10,44}{100} = 10,44 \text{ سنة.}$$

$$\text{ق} = \frac{100}{13,36} = 7,48 \text{ سنة.}$$

- 2 الوسيط ط:

الوسيط هو القيمة التي تقسم مجموعة من القيم إلى قسمين متساويين أي أن تكون القيم الأكبر منها مساوية للقيم الأصغر منها بحيث تكون قيم المتغير مرتبة تصاعدياً أو تنازلياً، بمعنى آخر هو القيمة التي تقع في منتصف سلسلة مرتبة ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً بحيث يكون عدد المفردات الأصغر منها مساوية لعدد المفردات الأكبر منها.

2-1 - الوسيط في حالة البيانات الغير مبوبة:

نقوم بترتيب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً ثم نأخذ القيمة التي تقع في الوسط تماماً إذا كان مجموع عدد البيانات فردياً، أما إذا كان مجموع عدد أفراد البيانات زوجياً فإن الوسيط هو القيمة الناتجة عن جمع القيمتين اللتين تقعان في الوسط وقسمة النتيجة على اثنين.

مثال ١: في حالة عدد البيانات فردياً.

إذا كانت أعمار تسعة أفراد هي ١٥، ٣٢، ٤٤، ٢٨، ٣٣، ١٧، ٢٣، ٣٠، ١٨ فوسيط أعمارهم هو:

أولاً: نقوم بترتيب القيم ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً، ثم نأخذ القيمة التي تقسم السلسلة إلى قسمين متساويين كما يلي: ١٥، ١٧، ٢٣، ٢٨، ٣٠، ٣٢، ٣٥، ٤٤.

فالوسيط هو السن ٢٨ سنة لأنه يقسم التوزيع إلى جزئين متساويين ٤ أفراد قبله و ٤ أفراد بعده.

وعلى هذا يصبح ترتيب الوسيط عندما يكون عدد القيم فردياً عبارة عن محصلة قسمة عدد الحالات / البيانات + ١ تقسيم ٢، ثم إذا حدث وتحصلنا على كسوراً عشرية فسنقوم بتقريب الناتج إلى أقرب عدد صحيح لمعرفة ترتيب الوسيط.

وفي المثال السابق يصبح ترتيب الوسيط هو $\frac{5}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$

وبالفعل أخذ الوسيط الرتبة الخامسة في السلسلة المرتبة تصاعديا السابقة.

مثال ٢: في حالة وجود بيانات زوجية العدد

أما إذا كان العدد زوجيا فسوف تصبح هناك قيمتين للوسيط وعلينا أن نأخذ متوسطها.

ومثال ذلك إذا زدنا قيمة أخرى للمثال السابق وليكن فردا عاشرا سنه يبلغ ٣١ سنة فسيصبح الوسيط حينها ١٥، ١٧، ١٨، ٢٣، ٢٨، ٣٠، ٣١، ٣٢، ٣٣، ٤٤. لهذا نحسبه أو بالأحرى نجده عن طريق أخذ المتوسط لهذين الوسيطين أي:

$$و = \frac{30 + 28}{2} = 29 \text{ سنة.}$$

$$أما عن رتبته فتساوي $\frac{1 + 1}{2} = 1$ و $5,5 =$$$

وبالفعل ٢٩ سنة أخذ المرتبة ٥،٥ في السلسلة المرتبة تصاعديا.

أما عن مرتبة القيم التي تدخل في حساب قيمة الوسيط فهي $\frac{1}{2} = 0.5$

$$و = 1 + 0.5 = 1.5 \approx 2 \text{ وبالفعل } 28 \text{ أخذ الرتبة } 5 \text{ و } 30 \text{ المرتبة}$$

السادسة.

٢ - ٢ - حساب الوسيط في حالة البيانات المبوبة:

أما إذا كانت المعطيات مرتبة في جدول تكراري ذو فئات فحساب الوسيط يكون أولا بحساب رتبته.

$$\text{حيث أن رتبة الوسيط تساوي رتبة الوسيط في حالة البيانات المبوبة} = \frac{n}{2}$$

ثم نقوم بالبحث عن هذه الرتبة أما في التكرار المجتمع الصاعد أن النازل أم التكرار المجتمع النسبي الصاعد أم النازل ... الخ، لهذا فهناك عدة طرق الحساب الوسيط نذكر منها.

٢ - ٢ - ١ الطريقة الأولى:

مثال: لدينا الجدول التالي الذي يبين وزن ١٠٠ مولود جديد والمطلوب حساب وسيط تلك الأوزان.

الوزن عند الولادة بالغرام	ك
١٥٠٠ - ١٠٠٠	٣
٢٠٠٠ - ١٥٠٠	٦
٢٥٠٠ - ٢٠٠٠	١٢
٣٠٠٠ - ٢٥٠٠	١٨
٣٥٠٠ - ٣٠٠٠	٢٥
٤٠٠٠ - ٣٥٠٠	١٨
٤٥٠٠ - ٤٠٠٠	١٠
٥٠٠٠ - ٤٥٠٠	٨
المجموع	١٠٠

الطريقة الأولى:

$$\text{الوسيط} = \frac{\text{الحد الأدنى للفترة الوسطية} + \text{الحد الأعلى للفترة الوسطية}}{2}$$

رتبة الوسيط - التكرار المجتمع الصاعد للفترة قبل الوسطية

تكرار الفئة الوسطية

الفئات	ك	ك المجتمع الصاعد	التكرار النسبي	التكرار المجتمع النسبي	ك المجتمع النازل	ك المجتمع النسبي النازل
١٥٠٠ - ١٠٠٠	٣	٣	٠,٠٣	٠,٠٣	١٠٠	١
٢٠٠٠ - ١٥٠٠	٦	٩	٠,٠٦	٠,٠٩	٩٧	٠,٩٧
٢٥٠٠ - ٢٠٠٠	١٢	٢١	٠,١٢	٠,٢١	٩١	٠,٩١
٣٠٠٠ - ٢٥٠٠	١٨	٣٩	٠,١٨	٠,٣٩	٧٩	٠,٧٩
٣٥٠٠ - ٣٠٠٠	٢٥	٦٤	٠,٢٥	٠,٦٤	٦١	٠,٦١
٤٠٠٠ - ٣٥٠٠	١٨	٨٢	٠,١٨	٠,٨٢	٣٦	٠,٣٦
٤٥٠٠ - ٤٠٠٠	١٠	٩٢	٠,١٠	٠,٩٢	١٨	٠,١٨
٥٠٠٠ - ٤٥٠٠	٨	١٠٠	٠,٠٨	١	٨	٠,٠٨
المجموع	١٠٠					

أول شيء نقوم به لحساب الوسيط هو إيجاد رتبته وفي هذا المثال نجد أنها تقدر بـ

$$٥٠ = \frac{١٠٠}{٢} = \frac{ن}{٢}$$

إذا ألقينا نظرة على التكرار المجتمع الصاعد نجد هذه الرتبة ضمتها فئة وزن ٣٠٠٠ - ٣٥٠٠ لوجود ٦٤ طفل، إذ أن التكرار المجتمع قبل هذه الفئة ٣٩ طفل في فئة ٢٥٠٠ - ٣٠٠٠ غ أي أن ترتيب الوسط لا يغطي هذه الفئة بل يقع في الفئة ٣٠٠٠ - ٣٥٠٠ وبتطبيق القانون السابق لإيجاد الوسيط نجد أن

$$و = ح + \frac{\frac{ن - ن_{س-1}}{2}}{ك} = ٣٠٠٠ + \frac{\frac{٣٩ - ٥٠}{50}}{١} = ٥٠٠ \times$$

$$٣٢٢٠ = (٥٠٠٠ \times ٠,٤٤) + ٣٠٠٠ \text{ غ.}$$

٢ - ٢ - ٢ الطريقة الثانية:

وفي هذه الطريقة نقوم باستخدام التكرار المجتمع النازل بدل التكرار المجتمع الصاعد ويصبح بذلك القانون كالآتي:
الوسيط =

رتبة الوسيط - التكرار المجتمع النازل للفئة بعد الوسطي

الحد الأعلى

× طول الفئة

للفئة

الوسطية الوسطية

تكرار الفئة الوسطية

وبتطبيق القانون على المثال السابق نجد ويساوي

$$و = ٣٥٠٠ - \frac{٣٦ - ٥٠}{٢٥} \times ٥٠٠ = ٢٨٠ - ٣٥٠٠ = ٣٢٢٠ \text{ غ}$$

٢ - ٢ - ٣ الطريقة الثالثة:

وهذه الطريقة تسمى بالطريقة النسبية لهذا فعند استعمالها لا بد من حساب التكرار النسبي وقانونها كالآتي :

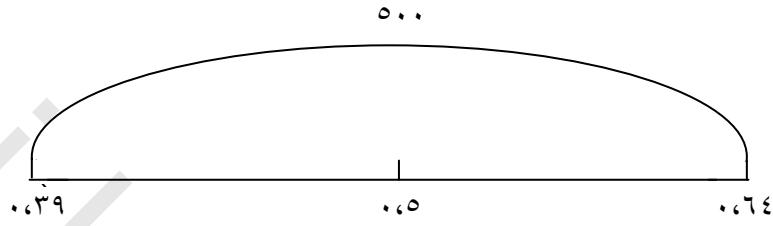
$$\text{الوسيط} = \frac{\text{قيمة الحد الأدنى للفئة الوسطية} + \left[\frac{\text{التكرارات النسبية المجتمع الصاعدة للفئة قبل الوسطية}}{\text{التكرارات النسبية للفئة الوسطية}} \right] \times ٠,٥}{١}$$

وبتعويض هذه المعادلة على المثال السابق نجد:

$$و = \frac{٥٠٠}{٠,٢٥} + ٣٠٠٠ = (٠,٣٩ - ٠,٥) ٢٠٠٠ + ٣٠٠٠ = (٠,١١) ٢٠٠٠ = ٣٢٢٠ غ$$

٢ - ٢ - ٤ الطريقة الرابعة:

وهي طريقة بيانية نسبيا وهي كالتالي:



$$و = ٣٠٠٠ س$$

$$٠,١١ = ٠,٣٩ - ٠,٥٠$$

$$\text{لدينا } ٠,٢٥ \leftarrow ٥٠٠ غ$$

$$\text{س} \leftarrow ٠,١١$$

$$س = \frac{٥٠٠ \times ٠,١١}{٠,٢٥} = ٢٢٠ غ$$

$$و = ٣٢٢٠ = ٢٢٠ + ٣٠٠٠ غ$$

٢ - ٢ - ٥ الطريقة الخامسة:

وهي طريقة نسبية كذلك وتحسب وفق القانون التالي:

$$\text{الوسيط} = \frac{\text{الحد الأدنى للفتنة الوسطية}}{\text{الفتنة الوسطية}} \times \left[\frac{\text{٠,٥ - التكرار المجتمع الصاعد النسبي السابق للفتنة الوسطية}}{\text{التكرار النسبي للفتنة الوسطية}} \right]$$

$$و = ٣٠٠٠ + \frac{٠,٣٩ - ٠,٢٥}{٠,٢٥} \times ٥٠٠ = ٣٠٠٠ + ٢٢٠ = ٣٢٢٠ غ$$

٢ - ٢ - ٦ الطريقة السادسة:

وهي طريقة تقريبية كذلك ويحسب الوسيط فيها كما يلي:

إن التكرارات المجتمعة قبل الفئة الوسطية تساوي ٣٩.

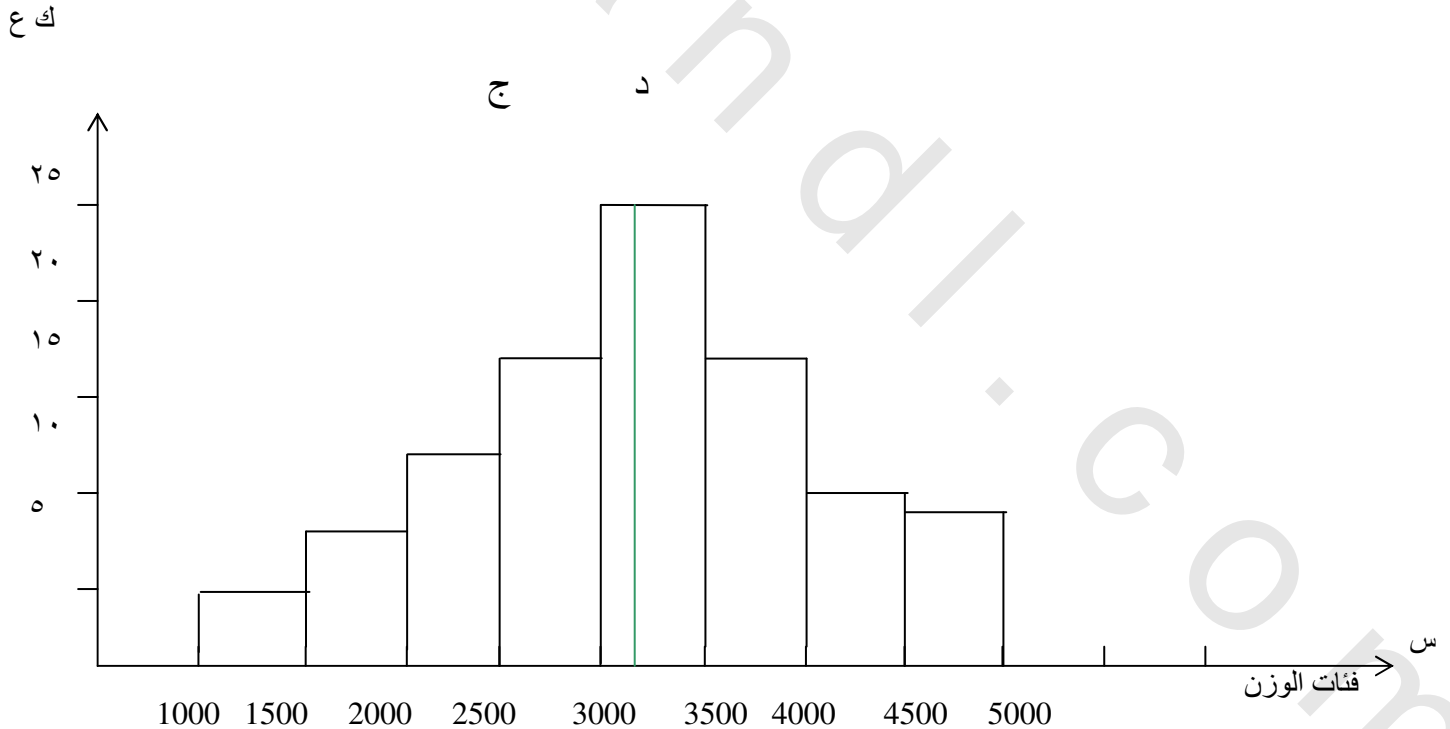
إذن نأخذ ١١ طفل من ذوي وزن ٣٠٠٠ - ٣٥٠٠ والبالغ عددهم ٢٥ طفل ويصبح

الوسيط بذلك يقدر بـ:

$$و = ٣٠٠٠ + \frac{١١}{٢٥} (٣٠٠٠ - ٣٥٠٠) = ٣٠٠٠ + (٠,٤٤) (٥٠٠) = ٣٢٢٠ غ.$$

٢ - ٢ - ٧ الطريقة السابعة:

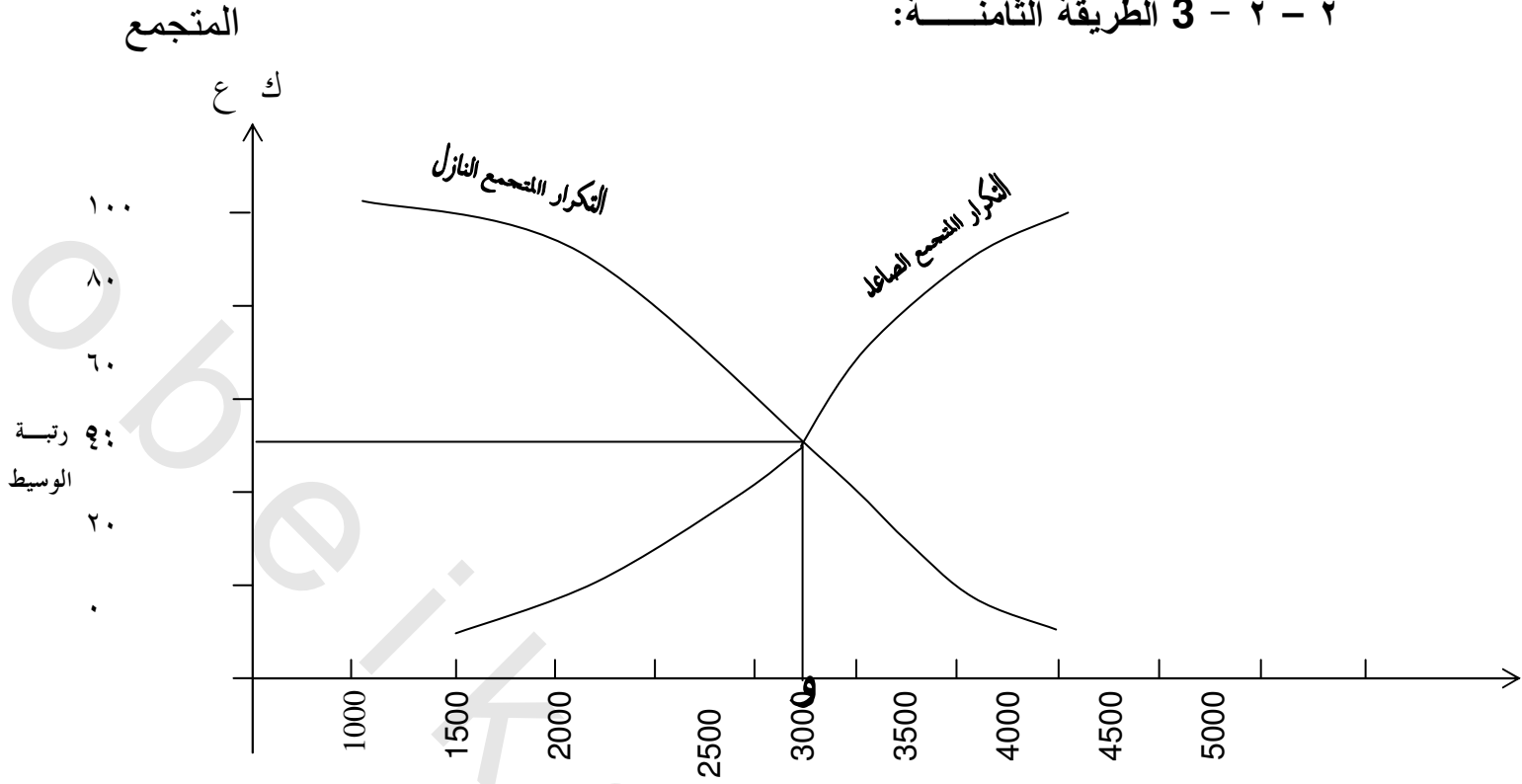
وهي عن طريقة رسم المدرج التكراري للبيانات كما يلي:



لدينا من الرسم أو = (أب) = (٥٠٠) = ٢٠٠

أو = ٣٢٢٠ = ٢٢٠ + ٣٠٠٠ غ.

٢ - ٢ - ٣ الطريقة الثامنة:



كما توجد طرق أخرى لإيجاد الوسيط لكن هذه أهمها.

٢ - ٣ - ترتيب الوسيط عند الفئة التي لا تكرر لها:

إذا صادفنا ترتيب الوسيط عند فئة منعدمة التكرار فمن الصعب الاستعانة بإحدى

القوانين السالفة الذكر لهذا نقوم بحسابه كما يلي:

مثال: لدينا الجدول التالي الذي يبين توزيع مجموعة من الأفراد حسب سنهم

والمطلوب إيجاد الوسيط أي وسيط سنهم.

السن	ك
١٠ - ٢٠	٨
٢٠ - ٣٠	١٨
٣٠ - ٤٠	٣٤
٤٠ - ٥٠	٠
٥٠ - ٦٠	٢٠
٦٠ - ٧٠	٨
٧٠ - ٨٠	١٦
٨٠ - ٩٠	١٦
المجموع	١٢٠

لحساب الوسيط في هذه الحالة نقوم بحساب التكرار المجتمع الصاعد والنازل وطبعا

$$\text{نقوم بحساب رتبة الوسيط التي تساوي } \frac{N}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

السن	ك	ك الصاعد	ك الضايط
١٠ - ٢٠	٨	٨	١٢٠
٢٠ - ٣٠	١٨	٢٦	١١٢
٣٠ - ٤٠	٣٤	٦٠	٩٤
٤٠ - ٥٠	٠	٦٠	٦٠
٥٠ - ٦٠	٢٠	٨٠	٦٠
٦٠ - ٧٠	٨	٨٨	٤٠
٧٠ - ٨٠	١٦	١٠٤	٣٢
٨٠ - ٩٠	١٦	١٢٠	١٦
المجموع	١٢٠		

نلاحظ من هذا الجدول أن التكرار المجتمع الصاعد يصل إلى ٦٠ عند فئة ٣٠ - ٤٠ وهي الفئة الوسيطة بما أن رتبة الوسيط هي ٦٠ إذن فتوجد ضمنها ثم يظل كما هو في الفئة التي تليها لأن تكرارها متساويا لصفر، إذن فالوسيط يقع في نهاية الفئة ٣٠ - ٤٠. وإذا ما نظرنا إلى التكرار المجتمع النازل فنجد أن رتبة الوسيط ٦٠ عند الفئة التي تمتد أطرافها من ٥٠ - ٦٠ ثم يظل ثابتا في الفئة التي تسبقها، إذن فالوسيط يقع في بداية الفئة ٥٠ - ٦٠ أي أن ترتيب الوسيط بهذا يقع بين ٤٠ - ٥٠ وهي حدود الفئة المنعدمة التكرار لهذا فالوسيط في مثل هذه الحالة مركز الفئة التي لا تكرار لها أي أن الوسيط $\frac{٥٠+٤٠}{2}$

$$= \frac{٤٥}{2}$$

٤ - المئينات:

هو عبارة عن تقسيم مساحة المنحنى لتوزيع تكراري إلى مئة جزء متساوي فالمئين الأول م_١ هو القيمة التي يسبقها ١% من البيانات ويليه ٩٩% من القيم وهذا بافتراض أن البيانات مرتبة مسبقا ترتيبا تصاعديا والمئين الأربعون م_{٤٠}، هو القيمة التي يسبقها ٤٠% من البيانات ويليه ٦٠% وبالطبع بالافتراض أن هذه البيانات/القيم مرتبة ترتيبا تصاعديا.

المئين في حالة البيانات المبوبة:

ويحسب وفق المعادلة التالية في حالة التكرار المجتمع الصاعد

$$\text{المئين} = \frac{\text{الحد الأدنى} + \text{تكرار الفئة المئينة} \times \text{طول الفئة}}{\text{تكرار الفئة المئينة} + \text{تكرار المجتمع الصاعد السابق للفئة المئينة}}$$

مثال: أحسب المئين لتوزيع ١٢٠ فرد حسب سنهم المطلوب حساب م_{٣٠}

السن	ك	ك الصاعد	ك النازل
١٠ - ٢٠	٨	٨	١٢٠
٢٠ - ٣٠	١٨	٢٦	١١٢
٣٠ - ٤٠	٣٤	٦٠	٩٤
٤٠ - ٥٠	١٨	٧٨	٦٠
٥٠ - ٦٠	٢	٨٠	٤٢
٦٠ - ٧٠	٨	٨٨	٤٠
٧٠ - ٨٠	١٦	١٠٤	٣٢
٨٠ - ٩٠	١٦	١٢٠	١٦
المجموع	١٢٠		
ع			

٣٠

$$\text{لإيجاد المئين نستخرج ترتيب } ٣٠\text{ م} = \frac{120 \times 36}{120}$$

$$36 - 26$$

$$\text{إذا } ٣٠\text{ م} = 30 + \frac{10 \times 32,94}{26 - 20}$$

٤ - الربيعيات:

يقصد بالربيعيات في التحليل الإحصائي هي تقسيم مساحة منحنى التوزيع التكراري إلى أربعة أجزاء متساوية، حيث يوجد ثلاث ربيعيات مرتبة من اليسار إلى اليمين وهي:

— الربع الأول أو الأدنى م٢٥.

— الربع الثاني أو الوسيط م٥٠.

— الربع الثالث أو الأعلى م٧٥.

ففي بعض الأحيان نحتاج إلى معرفة القيمة التي تقع عند ربع السلسلة الإحصائية الصاعد أم النازلة لمجموعة من البيانات مثلما نعمل في الوسيط أين كنا نبحت عن القيمة التي تقيم السلسلة الإحصائية إلى جزأين متساويتين.

تعريف الربع الأدنى: هو القيمة التي يقل عنها ربع القيم ويزيد عنها 3/4 القيم ويمكن إيجاده بعد ترتيب البيانات تصاعدياً أم تنازلياً:

في حالة البيانات المبوبة:

$$\text{رتبة الربع الأدنى } ١ = \frac{N}{4}$$

ن
٤

أما قيمته فتحسب وفق المعادلة التالية:

$$\text{قيمة } ١ =$$

$$\text{الحد الأدنى لفئة} + \frac{\text{تكرار الفئة الربعية} \times \text{طول الفئة الربعية}}{\text{ترتيب الربع الأول} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة الربعية}}$$

وبتطبيق القانون على الجدول أعلاه نجد ر_١ تقدر بما يلي:

$$- \text{رتبة ر}_1 = \frac{120}{4} = \frac{N}{4} = 30$$

$$R_1 = 30 + \frac{26-30}{26-60} \times 10 = 30 + \frac{4}{34} \times 10 = 31,18 \text{ سنة}$$

الربع الأعلى/ الثالث:

وهو القيمة التي يسبقها ثلاث أرباع القيم $\frac{3}{4}$ ويليهما الربع أي ربع القيم ويحسب كما يلي:

إن رتبة ر_٣ في هذه الحالة تحسب وفق المعادلة التالية $R_3 = \frac{N^3}{4}$ وهناك حالتين لإيجاده مثل ر_١.

في حالة التكرار المتجمع الصاعد:

$$R_3 = \frac{\text{ترتيب الربع الثالث} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الربع الثالث}}{\text{تكرار فئة الربع الثالث}} \times \text{طول الفئة الربيعية الثالث}$$

$$90 = \frac{120 \times 3}{4} = \text{رتبة ر}_3 \text{ على المثال أعلاه نجد رتبة ر}_3 = 90$$

إذن الفئة الربيعية الثالثة هي: ٧٠ - ٨٠.

$$70,009 = 10 \times \frac{88-90}{88-120} + 70 = R_3 \text{ وبالتعويض في القانون نجد:}$$

أي أن ٧٥% من هؤلاء الأفراد يقل سنهم عن ٧٠,٠٠٩ سنة وأن ٢٥% منهم يزيد عن ٧٠,٠٠٩ سنة.

5 - العَشِيرَات:

نقصد به تقسيم مساحة المنحنى لتوزيع التكراري إلى عشرة أقسام متساوية وكل قسم نسميه عشير، فمثلا العشير الرابع هو القيمة التي يسبقها ١٠/٤ من البيانات ويليه ١٠/٦ منها طبقا بافتراض دائما ترتيب البيانات تصاعديا.

في حالة البيانات المبوبة: ويحسب كما يلي:

$$\text{رتبة العشير} = \frac{\text{العشير المطلوب}}{\text{مجموع ك}}$$

١٠

أما قيمته فتحسب وفق المعادلة التالية:

$$\text{قيمة العشير} = \frac{\text{رتبة العشير} - \text{التكرار المتجمع السابق للفئة العشرية}}{\text{تكرار الفئة العشرية}} \times \text{طول الفئة العشرية}$$

وبتطبيق القانون على المثال السابق نجد العشير الثالث مثلا يقدر بـ:

$$\text{رتبة العشير الثالث} = ٣م = \frac{٣}{١٠} \times ١٢٠ = ٣٦$$

$$٣م = ٣٠ + \frac{٣٦ - ٣٠}{٢٦ - ٢٠} \times ١٠ = ٣٢,٩٤$$

٦ - المنوال:

المنوال لمجموعة من القيم هو القيمة الأكثر انتشارا أو الأكثر تكرارا وشيوعا بين القيم وهذا هو الأساس الذي بناءا عليه يعتبر المنوال وسطا ممثلا للقيم التي حسب لأجلها وعلى ذلك فإن تحديده يتوقف على تكرار القيم المجموعة الإحصائية ويتم إيجاد المنوال

حسابيا وعن طريق الرسم إلا أن قيمة المنوال قد لا توجد، وحتى وأن وجدت في بعض الأحيان قد لا تكون واحدة في السلسلة الإحصائية أو الجدول التكراري.
أ/ في حالة البيانات غير المبوبة:

إذا لم يتكرر أي من القيم فلا يوجد منوالا.

مثال ١: لدينا البيانات التالية: ٣، ٥، ٨، ١٠، ١٢، ١٥، ١٦.

لا يوجد منوال لهذه القيم حيث أيا من القيم لم يتكرر أكثر من مرة.

مثال ٢: إذا تكرر أحد القيم فيكون منوال واحد فقط مثلا في السلسلة التالية ٢، ٢، ٥، ٧، ٩، ٩، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ١٨.

فالمنوال هو رقم ٩ لأنه هو الذي تكرر كثيرا ٣ مرات عن القيم الأخرى

مثال ٣: كما يمكن أن نأخذ السلسلة الإحصائية منوالين فأكثر كما هو مبين في المثال التالي: ٢، ٣، ٤، ٤، ٤، ٥، ٥، ٧، ٧، ٩.

إذا هذه السلسلة لديها منوالين هما ٤، ٧ ويسمى المنوال في هذه الحالة بالمنوال المزدوج.
ب/ في حالة البيانات المبوبة:

إن طريقة حساب المنوال في هذه الحالة تختلف عن كيفية استخراجها من البيانات المبوبة وهناك عدة طرق لحسابه من بينها ما يلي:

مثال: أوجد المنوال السن الأكثر شيوعا لعينة مكونة من ١٧٠ امرأة موزعة حسب سنها عند أول زواج.

السن عند أول زواج	ك
١٥ - ١٨	١٠
١٨ - ٢١	٢٠
٢١ - ٢٤	٢٥
٢٤ - ٢٧	٣٠
٢٧ - ٣٠	٤٠
٣٠ - ٣٣	٢٠
٣٣ - ٣٦	١٨
٣٦ - ٣٩	٥
٣٩ - ٤٢	٢
المجموع	١٧٠

الطريقة الأولى:

باعتبار مركز الفئة ذات أكبر تكرار في الجدول التكراري، ومن الجدول السابق نلاحظ أن المنوال هذا التوزيع هو مركز الفئة ٢٧ - ٣٠ وهو بذلك:

$$= \frac{٢٧ + ٣٠}{٢}$$

٢٨،٥ سنة، وذلك لأن تكرارها هو أكبر تكرار في الجدول.

إن قدر بـ ٤٠ امرأة متزوجة ما بين سن ٢٧ - ٣٠ سنة، والواضح أن هذه الطريقة هي تقريبية فهي تفترض تماثل التوزيع على جانبي مركز الفئة المنوالية.

الطريقة الثانية:

وهي طريقة حسابية نستخدم من خلالها الصيغة التالية:

$$\text{المنوال} = \frac{\text{تكرار الفئة بعد المنوالية}}{\text{تكرار الفئة بعد المنوالية} + \text{تكرار الفئة قبل المنوالية}} \times \text{طول الفئة}$$

$$\text{مو} = \text{أ} + \frac{\text{ك}_٢}{\text{ك}_١ + \text{ك}_٢} \times \text{ل}$$

وبتطبيق هذا القانون على المثال السابق نجد المنوال يساوي:

$$\text{مو} = ٢٧ + \frac{٢٠}{٣٠ + ٢٠} \times ٣ = ٢٧,٩٩ \text{ سنة}$$

الطريقة الثالثة:

وهي طريقة الفروق وواضع هذه الطريقة هو كارل برسون وهي لا تختلف كثيرا عن سابقتها فهي تهتم بالفروق بين التكرارات أكثر مما تهتم بالتكرارات نفسها ذلك لأن الخطوة الأولى في هذه الطريقة تنحصر في إيجاد الفرق بين التكرارات الفئة المنوالية

والفئتين اللتين حولها، ووضع المنوال يتحدد في هذه الطريقة بالفرق بين تكرار الفئة المنوالية والتي حولها وبتالي يحسب المنوال بهذه الطريقة وفق لصيغة التالية:

$$\text{المنوال} = \frac{\text{تكرار الفئة المنوالية} - \text{تكرار الفئة قبل المنوالية}}{\text{تكرار الفئة المنوالية} - \text{تكرار الفئة قبل المنوالية}} + \frac{\text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \text{الفئة المنوالية}}{2} \times \text{طول}$$

$$\text{مو} = \frac{\text{ف}^1}{\text{ف}^1 + \text{ف}^2} \times \text{ل}$$

$$\text{وبتطبيق قانون برسون على المثال نجد مو} = 27 + \frac{30 - 40}{(20 - 40) + (30 - 40)} \times 3 = 27,99 \text{ سنة}$$

نلاحظ أن المنوال محسوبا بكلتا الطريقتين الثانية والثالثة متساوي إلا أنه مع الطريقة الأولى لا يساويه وهذا ليس بغريب حيث أن الطريقة الأولى كما قلنا تقريبية وعدم الدقة أو التفاوت في النتيجة يرتفع كلما كان مدى الفئة طويلا.

الطريقة الرابعة:

وهي طريقة الرافعة إذ أنها تنتظر إلى الفئة المنوالية على أنها تمثل رافعة تتجاوزها قوة يعبر عنها تكرار الفئة قبل المنوالية ومقاومة يعبر عنها بتكرار الفئة بعد المنوالية وعلى هذا يمكن تحديد موضع المنوال أو قيمته عند نقطة ارتكازها/ الرافعة، وبالنظر إلى المثال السابق يصبح المنوال يقدر بما يلي:

لما كان قانون الرافعة يساوي:

$$\text{القوة} \times \text{ذراع} = \text{المقاومة} \times \text{ذراع}$$

فإن التكرار السابق للفئة المنوالية $\times س =$ التكرار اللاحق للفئة المنوالية $\times (س - ١٠)$

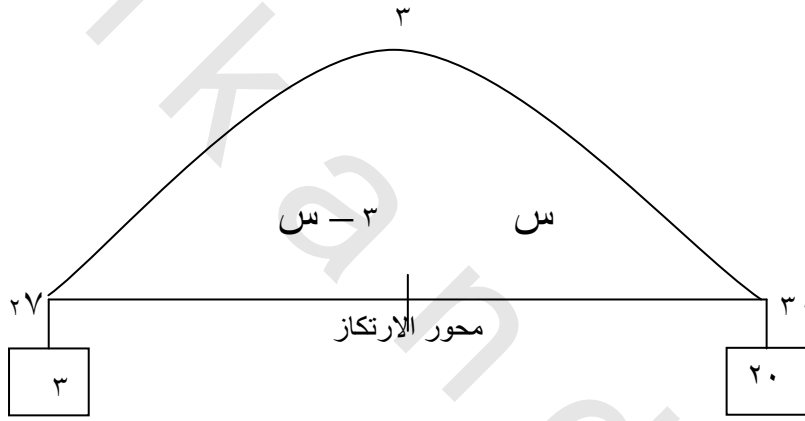
بالتعويض نجد: $س \times ٣٠ = ٣ \times ٢٠ - س$

$$س \times ٣٠ = ٦٠ - س$$

$$٣٠ س = ٦٠ + س$$

$$١,٢ = \frac{٦٠}{٥٠} = س \quad ٦٠ = س \times ٥٠$$

إذا فالمنوال $= ٢٧ + ١,٢ = ٢٨,٢$ سنة



الطريقة الخامسة:

وهي طريقة المحاور، ونستعملها لإيجاد المنوال بفرض أن قيمة المنوال تقع على بعد

س من بداية الفئة وعلى بعد ٣ - س من نهايتها بحيث يصبح المنوال $= ٣٠ + س$ وبما

$$\text{أن: } \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}}$$

$$\frac{س - ٣}{س} = \frac{٣٠}{١٠}$$

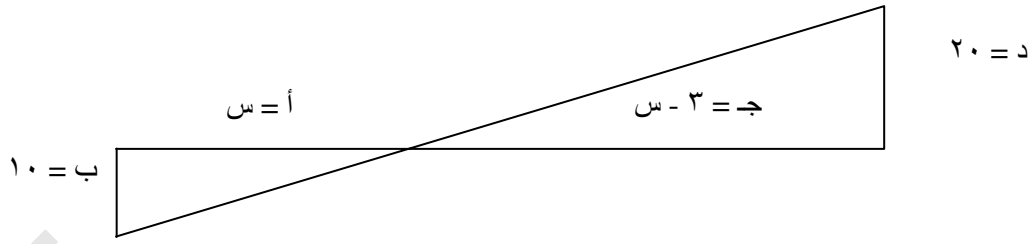
$$\text{أي: } ٢٠ س = ٣٠ - ٣ س \Leftrightarrow ٢٠ س + ٣ س = ٣٠$$

$$٢٣ س = ٣٠$$

$$\Leftrightarrow ٣٠ = س \times ٢٣ \Leftrightarrow س = \frac{٣٠}{٢٣}$$

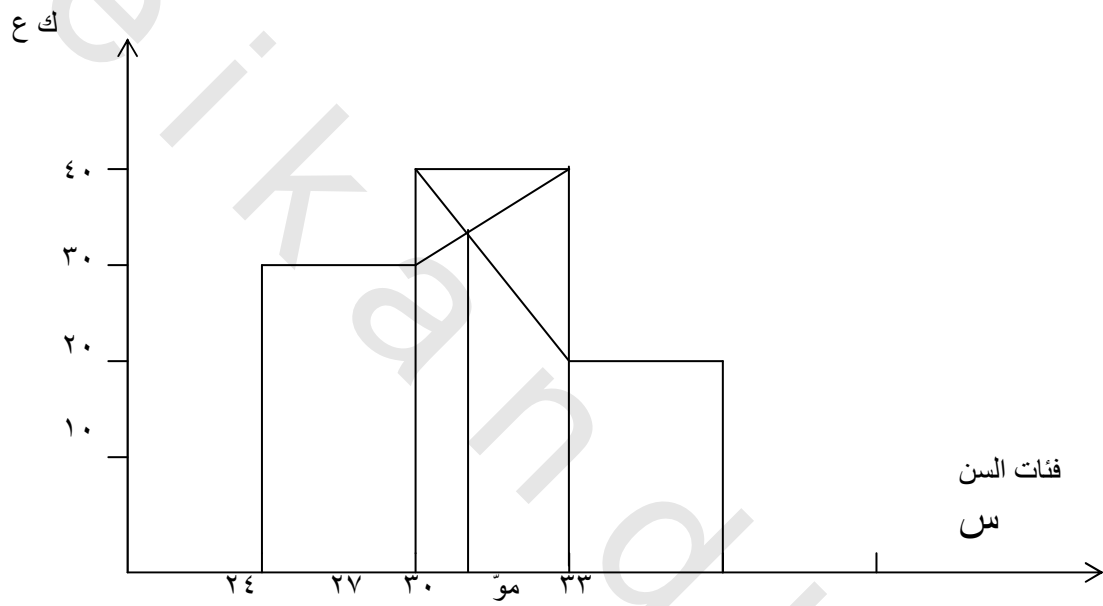
$$١,٣٠٤٣$$

المنوال $= 1 + 27 = 28$ سنة.



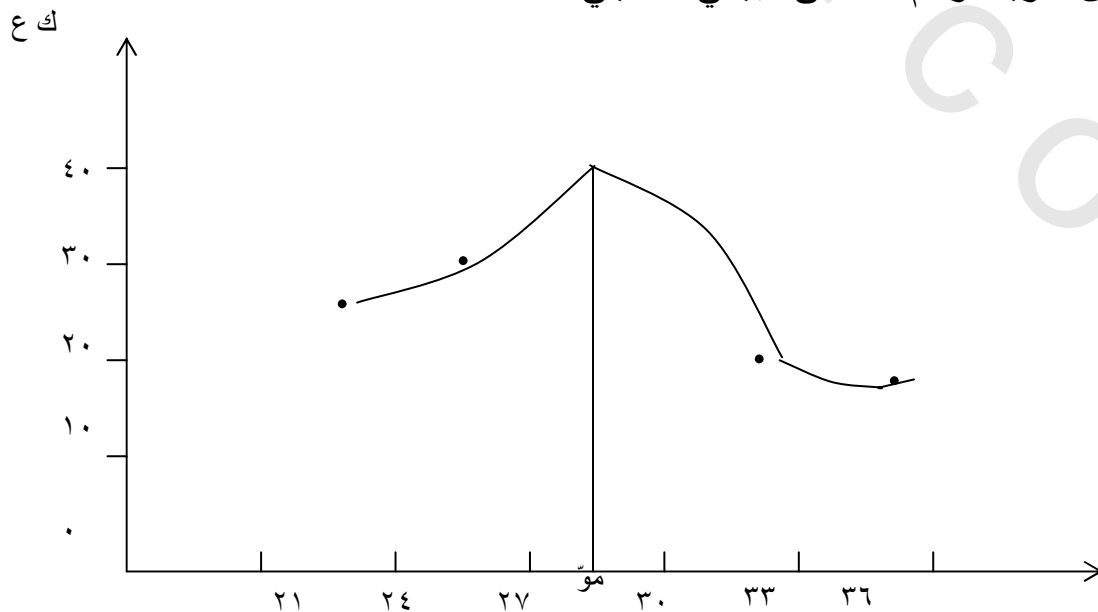
الطريقة السادسة:

وهي طريقة تستعمل عن طريقة الرسم المدرج التكراري كما يلي:



الطريقة السابعة:

عن طريقة رسم المنحنى البياني كما يلي:



إيجاد المنوال في حالة البيانات الكمية المفصلة:

إن أكبر تكرار يقابل المتغيرات المنفصلة في جدول تكراري هو المنوال كما نلاحظه من هذا الجدول الذي يبين عدد الأبناء لمجموعة من العائلات.

عدد العائلات	عدد الأبناء في العائلة
٣	٠
٧	١
١١	٢
١٤	٣
٢٠	٤
١٦	٥
١٢	٦
٧	٧
٩٠	المجموع

وفي هذا الجدول ذوي أن المنوال فيه موجود عند القيمة ٤ أي أربعة أطفال في العائلة وعلى ذلك يكون المنوال ٤ مباشرة دون إجراء عمليات حسابية كما هو في حالة البيانات الكمية المتصلة فبمجرد ملاحظة التكرارات فأكبرها في التوزيع مثل ما هو في هذا الجدول ٢٠ عائلة القيمة التي تقابلها هو المنوال.

إيجاد المنوال من البيانات الكيفية:

استجوبت عينة من عمال مؤسسة ما فكان توزيعهم حسب حالتهم المدنية كالآتي:

الحالة المدنية	ك
أعزب	٣٠
متزوج	٣٠
مطلق	١٢
أرمل	١٠
المجموع	٨٢

المنوال في هذا التوزيع هو القيمة التي تقابل أكبر تكرار وهم إذن العمال العزاب والمتزوجين إذن فهذا التوزيع يحتوي على منوال مزدوج.

المنوال في التوزيعات التكرارية الغير منتظمة:

إيجاد المنوال في التوزيعات التكرارية الغير منتظمة لابد من تعديل التكرارات ثم نطبق أي من الصيغ السالفة الذكر، كما هو مبين في المثال التالي:

مثال: أوجد المنوال من الجدول التالي الذي يبين مدة أقدميه العمال في مهنتهم في مؤسسة ما.

الفرق	$\frac{ك}{س}$	س	ك	الفئات
	٢,٥	٢	٥	١٢ - ١٠
	٣	٤	١٢	١٦ - ١٢
	٤,٢٥	٤	١٧	٢٠ - ١٦
٣,٧٥	٨	٥	٤٠	٢٥ - ٢٠
٥,٩	٢,١	١٠	٢١	٣٥ - ٢٥
			٩٥	المجموع
				ع

يتضح من التوزيع هذا أن الفئة المنوالية هي: ٢٥ - ٢٠ لأنها مقابلة لأكثر تكرار معدل والمقدر بـ ٨

ولإيجاد المنوال يجب إعداد جدول مثل ما سبق لتعديل التكرارات ويصبح بعدها المنوال:

$$\text{مو} = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \frac{ك_2}{ك_1 + ك_2} \times ل$$

$$\text{مو} = ٢٠ + \frac{٣,٧٥}{٥,٩ + ٣,٧٥} \times ٥ = ٢١,٩٤ \text{ سنة}$$

٧- العلاقة بين مقاييس النزعة المركزية:

تكمّن الإحصائيين من إيجاد علاقة تقريبية بين المتوسطات الثلاثة: المتوسط الحسابي، الوسيط -المنوال- وتستخدم هذه العلاقة عندما يتعذر استخراج إحداها كما يحدث عندما يراد إيجاد المتوسط الحسابي من الجدول التكرارية المفتوحة أين لا يمكن معرفة مركز الفئة الأولى والأخيرة في الجدول مثلا.

وسوف نعرض فيما يلي طبيعة العلاقة التقريبية في الحالات التالية:

١- إذا كان التوزيع التكراري متماثلا تماما:

يكون التوزيع التكراري متماثلا تماما إذا كان المنحنى الذي يمثله يتمثل حول المحور الرأسي، أين يقسم المنحنى إلى جزئين متطابقين، وهذا النوع من التوزيعات تنقص فيه التكرارات بالتماثل على جانبي أكبر تكرار فيه وهذا ما يسمى بالمنحنى الإعتدالي.

أحسب المتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال وكذا قسم برسم المنحنى التكراري للجدول التالي:

الفئات	ك
١٠ - ١٥	٢
١٥ - ٢٠	١٥
٢٠ - ٢٥	٢٠
٢٥ - ٣٠	٢٦
٣٠ - ٣٥	٢٠
٣٥ - ٤٠	١٥
٤٠ - ٤٥	٢
المجموع	١٠٠

الحل:

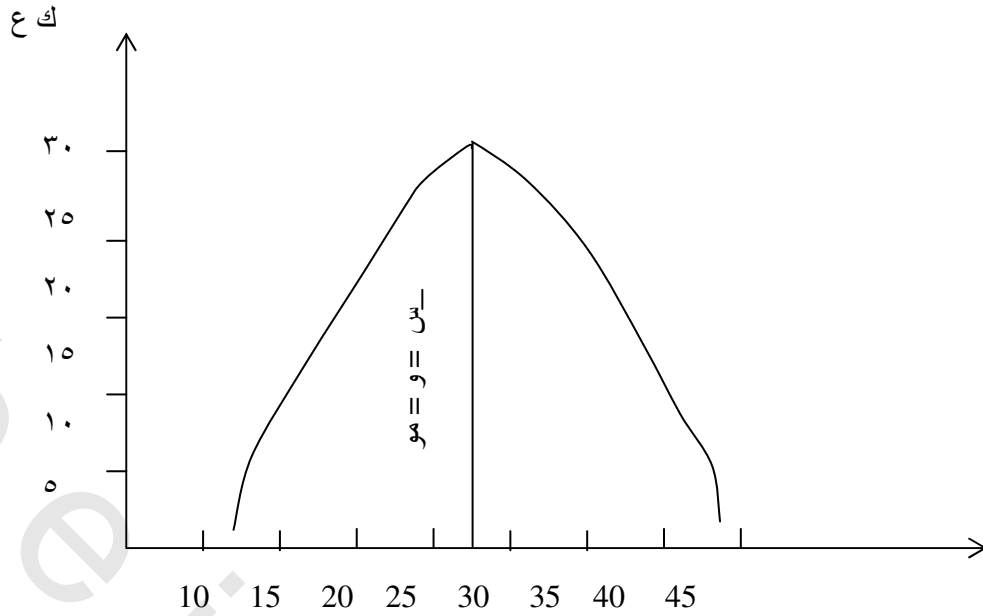
الفئة ت	ك	س	ك × س	ك م الصاعد	ك م نازل
١٥ - ١٠	٢	١٢,٥	٢٥	٢	١٠٠
٢٠ - ١٥	١٥	١٧,٥	٢٦٢,٥	١٧	٩٨
٢٥ - ٢٠	٢٠	٢٢,٥	٤٥٠	٣٧	٨٣
٣٠ - ٢٥	٢٦	٢٧,٥	٧١٥	٦٣	٦٣
٣٥ - ٣٠	٢٠	٣٢,٥	٦٥٠	٨٣	٣٧
٤٠ - ٣٥	١٥	٣٧,٥	٥٦٢,٥	٩٨	١٧
٤٥ - ٤٠	٢	٤٢,٥	٨٥	١٠٠	٢
المجموع	١٠٠		٢٧٥٠		

$$س = \frac{\text{مج ك س}}{\text{مج ك}} = \frac{٢٧٥٠}{١٠٠} = ٢٧,٥$$

$$\text{الوسيط} = \text{و} + \frac{\text{ن} - \text{ن س}}{٢} \times \frac{٣٧ - ٥٠}{٢٦} + ٢٥ = ٢٧,٥$$

$$\text{المنوال} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \text{ف}١}{٢ + ١} \times \text{ل} + \frac{٢٠}{٢٠ + ٢٠} \times ٥ = ٢٧,٥$$

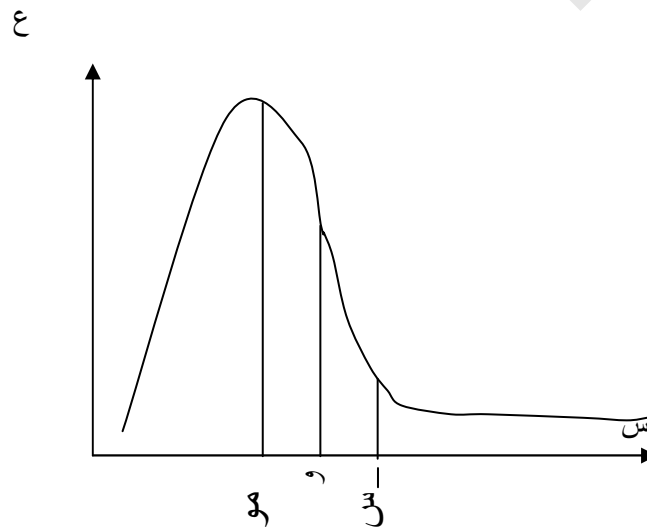
وفي هذه الحالة نجد أن المنحنى يتخذ شكلا اعتداليا كما وجدنا $س = مو = و = ٢٧,٥$ معنى هذا أن جميع مقاييس النزعة المركزية تنطبق على بعضها البعض وتتساوى جميعا في التوزيع التكراري المعتدل.



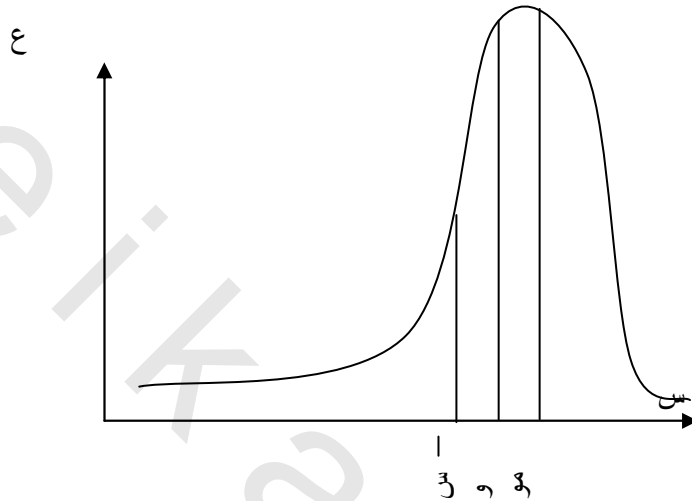
إذا كانت التوزيعات التكرارية قريبة من التماثل أو ملتوية بطريقة غير شديدة لاحظ أن بعض التكرارات لا تمثل توزيعاً معتدلاً حول قيمة متوسطة بل تتوزع بطريقة غير معتدلة في الجدول، وفي هذا النوع من الجداول تختلف قيم كل من الوسط/المتوسط الوسط والمنوال حسب نوع الالتواء الموجب والسالب.

أ/- عندما يكون التوزيع التكراري ملتوياً التواء موجب $\theta < 0$.

في هذه الحالة يمتد الطرف الطويل للمنحنى إلى الجهة اليمنى ويصبح ترتيب مقاييس النزعة المركزية كما يلي المتوسط، الوسط، ثم المنوال أي أن س، و، مو.



ب/- عندما يكون التوزيع التكراري مئويا التواء سالب $\sigma > 0$ في هذه الحالة يمتد الطرف الطويل إلى الجهة اليسرى ويصبح حينها ترتيب مقاييس النزعة المركزية كما يلي المنوال، الوسيط، المتوسط- أي أن مو، و، س.



٨ - خواص مقاييس النزعة المركزية الثلاث:

٨-١- الوسط الحسابي أو المتوسط الحسابي:

- إن المجموع الجبري لانحرافات مجموعة من القيم عن وسطها الحسابي يساوي دائما صفرا.
- $\sum x = 0$.
- يستغل في حساب المتوسط الحسابي جميع قيم التوزيع لذلك فهو أدق المتوسطات الثلاث وأكثر ثباتا.
- يستخرج المتوسط الحسابي كذلك لاستعماله في معاملات أخرى كمقاس التشتت إلا أن عيوب تكمن في المتغيرات.
- أنه لا يمكن استعماله في البيانات المتغيرات الكيفية.
- لا يمكن حسابه في الجداول التكرارية المفتوحة.

- يتأثر بالقيم الشاذة، أي الكبيرة جدا أو الصغيرة جدا عن بقية قيم الجدول التكراري.

٨-٢- الوسيط أو الأوسط:

- إن قيمة الوسيط على العكس من الوسط الحسابي لا تتأثر بالقيم الشاذة لهذا في حالة وجود مثل هذه القيم يفضل استخدام الوسيط.
- يمكن حساب الوسيط من الجداول التكرارية- المفتوحة لأننا في حسابه لا نحتاج لمعرفة مراكز الفئات مثل حالة المتوسط الحسابي.
- يمكن إيجاد قيمة الوسيط من خلال الرسم البياني كالمنحني المتجمع الصاعد والنازل.
- إذا كان البحث يهتم بمعرفة ما إذا كانت قيمة معينة تقع في النصف العلوي أو السفلي من التوزيع.

٨-٣- المنوال:

- يعتبر المنوال المقياس الوحيد الذي يمكن استعماله لإيجاد تركز المتغيرات الكيفية.
- ويمتاز المنوال بسهولة حسابه وسرعته، ولما كان المنوال يدل على الدرجة الأكثر شيوعا لذلك فهو يصلح لمعالجة المشاكل التي تهدف إلى معرفة تركيز الظاهرة وموقعها وخاصة في النواحي الديموغرافية، إلا أن حساب المنوال يكون بطرق تقريبية وعموما يفضل المنوال في الحالات التالية.
- إذا أريد الحصول على معامل مركزي في أقصى وقت ممكن دون الاهتمام كثيرا بالدقة في حسابه إذا كان هدف الباحث معرفة القيمة التي يتفق عليها أغلب أفراد المجموعة / العينة.

تمريعات

التمرين لأول:

أحسب متوسط أوزان ١٠٠ طالب التالي. بالطريقة العادية و عن طريق الوسط الفرضي.

الوزن بالكلغ	التكرارات (ك)
٦٢ - ٦٠	٥
٦٥ - ٦٣	١٨
٦٨ - ٦٦	٤٢
٧١ - ٦٩	٢٧
٧٤ - ٧٢	٨
المجموع	١٠٠

الحل: إيجاد مراكز الفئات ثم مجموع مراكز الفئات مضروباً في التكرارات المقابلة لها. كما هو مبين في الجدول ثم الانحرافات عن مراكز الفئات.

الوزن بالكلغ	ك	س	ك × س	ح	ك × ح
٦٢ - ٦٠	٥	٦١	٣٠٥	٦ -	٣٠ -
٦٥ - ٦٣	١٨	٦٤	١١٥٢	٣ -	٥٤ -
٦٨ - ٦٦	٤٢	٦٧	٢٨١٤	٠	٠
٧١ - ٦٩	٢٧	٧٠	١٨٩٠	٣+	٨١
٧٤ - ٧٢	٨	٧٣	٥٨٤	٦+	٤٨
المجموع	١٠٠		٦٧٤٥	٠	٤٥

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموع (ك × س)}}{\text{مجموع (س)}} = \frac{6745}{100} = 67,45 \text{ كلغ}$$

$$\text{عن طريق الوسط الفرضي س} = \bar{أ} + \frac{\text{مجموع (ك × ح)}}{\text{مجموع (ك)}}$$

$$= 67 + \frac{6745}{100} = 67,45 \text{ كلغ}$$

التمرين الثاني:

حدد متوسط مدة أقدميه السكن لـ ٧٠ عائلة في منطقة معينة، موزعين حسب الفئات التالية:

المدة	ك
٦٠ - ٥٠	٨
٧٠ - ٦٠	١٠
٨٠ - ٧٠	١٦
٩٠ - ٨٠	١٥
١٠٠ - ٩٠	١٠
١٢٠ - ١٠٠	٨
١٨٠ - ١٢٠	٣
المجموع	٧٠

الحل: حساب مراكز الفئات ثم ضربها في التكرار المقابل لها كما يلي:

المدة	ك	س	ك × س
٦٠ - ٥٠	٨	٥٥	٤٤٠
٧٠ - ٦٠	١٠	٦٥	٦٥٠
٨٠ - ٧٠	١٦	٧٥	١٢٠٠
٩٠ - ٨٠	١٥	٨٥	١٢٧٥
١٠٠ - ٩٠	١٠	٩٥	٩٥٠
١٢٠ - ١٠٠	٨	١١٠	٨٨٠
١٨٠ - ١٢٠	٣	١٥٠	٤٥٠
المجموع	٧٠		٥٨٤٥

ملاحظة: نلاحظ أن الفئات في هذا الجدول غير متساوية و رغم هذا فلم نقوم بتعديل التكرارات، لأنه ما بهما هو مركز الفئة و بالتالي سيكون متوسط مدة إقامة هؤلاء العائلات في تلك المنطقة هو كالتالي بالطريقة العادية:

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموع (ك × س)}}{\text{مجموع (س)}} = \frac{5845}{70} = 83,5 \text{ سنة}$$

$$\frac{\text{مـ ج ك} \times \text{و}}{\text{مـ ج و}} = \text{المتوسط الحسابي المرجح}$$

مثال: لدينا ثلاث مصالح للتوليد في ثلاث مستشفيات.

المصلحة الأولى: أ/- عدد النساء اللواتي وضعن عددهن ٢٠ عدد المتوفيات و ٠٠٥.

المصلحة الثانية: ب/- عدد النساء اللواتي وضعن عددهن ٢٥ عدد المتوفيات و ٠٠٣.

المصلحة الثالثة: ج/- عدد النساء اللواتي وضعن عددهن ٣٠ عدد المتوفيات و ٠٠٤.

والمطلوب حساب المتوسط الحسابي المرجح.

$$\text{س} = \frac{\text{مـ ج ك} \times \text{و}}{\text{مـ ج و}}$$

المصالح	ك	و	ك × و
أ	٢٠	٥	١٠٠
ب	٢٥	٣	٧٥
ج	٣٠	٤	١٢٠
المجموع		١٢	٢٩٥

$$\text{س} = \frac{\text{مـ ج ك} \times \text{و}}{\text{مـ ج و}} = \frac{٢٩٥}{١٢} = ٢٤,٥٨$$

التمرين الثالث:

أوجد وسيط مدة زواج ٢٠٠ زوج عن طريق التكرار المتجمع الصاعد.

المدة	ك
٠ - ٤	٣١
٤ - ٨	٣٦
٨ - ١٢	٤٠
١٢ - ١٦	٦٠
١٦ - ٢٠	٢٠
٢٠ - ٢٤	١٣
المجموع	٢٠٠

الحل:

المدة	ك	ك المتجمع الصاعد
٠ - ٤	٣١	٣١
٤ - ٨	٣٦	٦٧
٨ - ١٢	٤٠	١٠٧
١٢ - ١٦	٦٠	١٦٧
١٦ - ٢٠	٢٠	١٨٧
٢٠ - ٢٤	١٣	٢٠٠
المجموع	٢٠٠	

$$و = د + و \times \frac{\frac{ن}{2} - (ن)(س)}{ك}$$

$$١ - \text{حساب رتبة الوسيط} = \frac{ن}{2} = \frac{200}{2} = ١٠٠$$

∴ الفئة الوسيطة ٨ - ١٢ لأنها تحتوي على تكرار ١٠٧

$$\therefore \text{و} = ٨ + \frac{67 - 100}{40} \times ٤ = ١١,٣ \text{ سنة}$$

التمرين الرابع:

الجدول التالي يبين لنا توزيع مجموعة من المرضى في المستشفى مصابين بمرض السرطان حسب سنهم. و المطلوب حساب منوال السن عند هؤلاء المصابين حسب طريقة الفروق لكارل بارسون.

السن	ك
٣٠ - ٢٠	٣٢
٤٠ - ٣٠	٤٠
٥٠ - ٤٠	٥٠
٦٠ - ٥٠	٣٠
٧٠ - ٦٠	٢٥
٨٠ - ٧٠	١٥
٩٠ - ٨٠	٢٠
المجموع	٢١٢

$$\text{مو} = أ + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times L$$

نلاحظ أن أكبر تكرار في هذا التوزيع هو ٥٠ إذا الفئة المنوالية هي ٤٠ - ٥٠ و بتطبيق

$$\text{القانون نجد مو} = ٤٠ + \frac{40 - 50}{(30 - 50)(40 - 50)} \times ١٠ = ٤٣,٣٣ \text{ سنة}$$