الفصـــل الثامـــــن

تحديد الأسس الواجب توافرها لمنهج التفاضل والتكامل للصف الثالث الثانوى العام وبناء الهيكـــل المقتـــــــــرح

القسم الاول : الاسس الواجب توافرها لمنهج التفاضل والتكامل :

اولا : الأسس الخاصة بالاهداف ٠

ثانيا : الأسس الخاصة بالمحتوى ٠

ثالثا : الأسس الخاصة بطرق التدريس ٠

رابعا : الأسس الخاصة بالوسائل التعليمية ٠

خامسا : الأسس الخاصة بكتاب التفاضل والتكامل ٠

سادسا : الأسس الخاصة بدليل المعلم ٠

سابعا : الأسس الخاصة بالتقويـــــم ٠

القسم الثانى : بناء الهيكل العام المقترح لمنهج التفاضل والتكامل للصف الثالث الثانوى العام:

- الأساس النظرى حول بناء الهيكل العام المقترح ٠
- مفهوم الهيكـــل العام المقترح للصف الثالث الثانوى العام ٠
- مقومات الهيكل العام ٠
- خطوات تخطيط الهيكل العام ٠

obeikandl.com

القســـــــم الاول

تحديد الاسس الواجب توافرها فى بناء منهج التفاضل والتكامـــــــــل للصف الثالث الثانوى العـــــام

نظرا لان طبيعة العمل العلمى فى مجال البحث الحالى تتطلب الاسس (الشـــروط) الواجب توافرها فى الجوانب المختلفة للعملية التعليمية الخاصة ببناء منهج التفاضل والتكامـــل للصف الثالث الثانوي العام ، فقد قام الباحث بتحديد مجموعة من الاسس (شروط) وذلـــك استنادا الى ماتم انجازه فى الفصول السابقة على هذا الفصل فى البحث الحالى وهى فصـــول : الدراسات السابقة ، والفصل الخاص بتطوير منهج التفاضل والتكامل والفصل الخاص بتحليـــل محتوى منهج التفاضل والتكامل للصف الثالث الثانوى العام ، والفصل الخاص ببناء الاختبـار التشخيصى ، وفصل تحديد الصعوبات التى تواجه تدريس التفاضل والتكامل • وقد تم تحديـــد مجموعة الاسس على النحو التالى :

اولا : الاسس الخاصة بالاهداف :

مامدى مراعاة الاهداف بالنواحى الاتية ؟

(أ) الاهداف وجوانب التعلم المختلفة :

- الاهتمام بالمهارات التى تناسب المتعلم •
- توجيه المتعلم نحو اغراض واقعيـــة •
- تعليم الطالب لذاته •
- التركيز على اكساب المتعلم القدرة على التنبوء •
- الاهتمام بأنماط التفكير المرغوب فيها •
- الاهتمام بتعليم المهارات الاساسية اللازمة للحياة •
- الكشف عن المهارات الخاصة لدى الطلاب •
- الاسهام فى تطوير الجوانب السلوكية للطالب •

(ب) الاهداف وطالب الصف الثالث الثانوى العام :

- الاهتمام بالسلوكيات التى يجب ان يسلكها الطالب نتيجة لما يمر به من مواقف تعليميـــة

- التركيز على اثارة الدافعيـــة لدى الطلاب ٠
- التركيز على تنمية روح المبادأة لدى الطلاب ٠

(جـ) الاهداف بصفة عامـــة :

- وضوح اهداف منهج التفاضل والتكامل للمعلم والطالب ٠
- تحديد اهداف منهج التفاضل والتكامل قبل تحديد محتواه ٠
- الاهتمام بصياغة الاهداف فى عبارات سلوكية ٠
- صياغتها بطريقة تؤ دى الى نمو متصل عند الطلاب ٠
- مدى مراعاتها لنضج الطلاب وحاجاتهم الاجتماعية ٠
- مدى مساعدتها للمعلم فى ان يضعها موضع التنفيذ ٠

ثانيا : الاسس الخاصـــة بالمحتوى :

مامدى مراعاة المحتوى بالنواحى الاتية :؟

(أ) المحتوي والحداثة :

- مسايرة موضوعات المحتوي لروح العصر ٠

(ب) المحتوى والاهمية :

- اهميـة المادة العلمية ٠
- الاهتمام بالتشويق الذي تتيحه مادة التفاضل والتكامل ٠
- الاهتمام بالموضوعات الاكثر اهمية لدى الطلاب ٠
- اثارة حب الاستزادة من العلم لدى المتعلم ٠

(جـ) المحتوى وشمول وتكامل المعرفة العـلمية :

- شموله وارتباطه وتكامله بالموضوعات ذات الصلة الوثيقة بأفرع الرياضيات الاخرى
- الاهتمام بادخال افرع الرياضيات الاخرى ٠

(د) المحتوى وطالب الصف الثالث الثانوى العام :

- حصول الطالب على تعليم ذي معنى ٠
- مراعاة المحتوي لطبيعة المتعلم وخصائص نموه ٠

obeikandl.com

(هـ) المحتوي والبناء المعرفى :

- التركيز على المفاهيم الأساسية للتفاضل والتكامل ٠
- الاهتمام باتساع محتوي المنهج بدلا من المناهج المنفصلة ٠
- التأكيد على الخبرة المتكاملة ٠

(و) المحتوى والتنظيم التكاملى :

- تنظيم المادة العلمية والمفاهيم الأساسية بدلا من الحقائق المنفصلة وغير المترابطة
- التركيز على توثيق الروابط بين الموضوعات الدراسية المختلفة ٠
- الاهتمام بتحقيق التكامل بين الجوانب المعرفية والمهارية والوجدانية ٠

(ز) اسس خاصة بالمحتوي بصفة عامة :

- مدى توضيح المفاهيم على اساس رياضى سليم ٠
- مدى المعالجة السليمة للنظرية الأساسية فى التفاضل والتكامل ٠
- مدى التمهيد للتعميم ووضوح الصيغ الضمنية المقدمة ٠
- مدى التمييز بين البرهان والحدس ٠
- مدى اتاحة الفرص امام الطلاب لاكتشاف مبادىء التفاضل والتكامل ٠
- مدى المساعدة على فهم الحياة المعاصرة ومشكلاتها ٠
- مدى تحقيق الاهداف المرجوة للتفاضل والتكامل ٠
- مدى اشباع ميول وحاجات الطلاب ٠
- مدى المساعدة فى تقديم التعلم المستمر الذى يحقق نمو الفرد ٠

ثالثا : الأسس الخاصة بطرق التدريس :

مامدى اهتمام طرق التدريس بالنواحى الاتية ؟

(أ) تنوع طرق التدريس :

- توجيه الاهتمام للممارسة من خلال معايشة المواقف التعليمية ٠
- الاسهام فى تحقيق الترابط بين التفاضل والتكامل وفروع الرياضيات الاخرى ٠
- القدرة على التجديد والابتكار ٠

obeikandi.com

- القدرة على توجيه الطلاب فى الاتجاه المرغوب ٠
- الاهتمام بعمليات الممارســـة ٠
- الاخذ بأساليب حل المشكلات ٠

(ب) طرق التدريس والتعلم الذاتى :

- التركيز على تنميـــة القدرة للاعتماد على النفس ٠
- اتاحة الفرص المتنوعة للمتعلم للتعبير عن رأيه ٠
- تهيئة الفرص لاشباع حاجات الطلاب٠
- مساعدة الطالب على ان يتعلم كيف يعلم نفسه بنفسه ٠
- مساعدة الطالب لاكتشاف ذاته وطاقاته ٠
- اهتمام طرق التدريس باثارة الدافعية لدى الطلاب لاثارة التساؤلات وتقديـــــــم الاجابات ٠

رابعا : الأسس الخاصة بالوسائل التعليمية :

مامدى اهتمام الوسائل بالجوانب الاتية : ؟

(أ) الوسائل التعليمية للطالب :

- مشاركة المعلم والطالب فى التخطيط للوسائل وعملها واستخدامها وصيانتها ٠
- التنوع فى استخدام الوسائل لمواجهة الفروق الفردية بين الطلاب ٠

(ب) الوسائل التعليمية والتطور العلمى :

- الاهتمام بتوافر شروط الدقة العلميـــة فى الوسائل المتاحة ٠
- اطلاع المعلم على المستحدث فى ميدان الوسائل التعليمية ٠

خامسا : الأسس الخاصة بكتاب التفاضل والتكامل :

مامدى اهتمام كتاب التفاضل والتكامل بالجوانب التالية :

(أ) المؤلفون وكتاب التفاضل والتكامل :

- مدى تقديم مقترحات لاستخدام كتاب التفاضل والتكامل ٠

obeikandl.com

- مدى مراعاة الفروق الفردية بين الطلاب ٠
- مدى مشاركة الاخصائيين وخبراء المناهج فى تأليف الكتاب ٠

(ب) كتاب التفاضل والتكامل وتنظيم المادة :

- مدى ملاءمة المادة العلمية لمستوى طلاب الصف الثالث الثانوى ٠
- مدى مراعاة تنمية القدرة على التفكير واكتساب أسلوب حل المشكلات ٠
- مدى مراعاة الترابط والتسلسل فى المادة العلمية وتكاملها بفروع الرياضيات الاخرى ٠
- مدى ارتباط الرسوم والاشكال بالمادة العلمية بالكتاب ٠

(جـ) كتاب التفاضل والتكامل والمراجع المعينة :

- مدى توافر مراجع التفاضل والتكامل بمكتبات المدارس والمكتبات العامة ٠
- مدى ملاءمتها لطالب الصف الثالث الثانوى العام ٠
- مدى ارتباطها بمنهج التفاضل والتكامل وتنوعها لمراعاة الفروق الفردية للطلاب ٠

سادسا : الأسس الخاصة بدليل المعلم لمنهج التفاضل والتكامل :

مامدى الاهتمام بالجوانب التالية :

- مدى اهتمام المؤلفين لوضع دليل للمعلم فى منهج التفاضل والتكامل ٠
- مدي تضمن دليل المعلم لاستراتيجيات تعليمية واضحة للمعلم لمنهج التفاضل والتكامل

سابعا : الأسس الخاصة بالتقويـــم : :

مامدى اهتمام عملية التقويم (فى التفاضل والتكامل) بالجوانب التالية ٠

(أ) التقويم والشمول :

- الاهتمام بتقويم الجوانب المعرفية ٠
- الاهتمام بتقويم الجوانب الوجدانية ٠
- الاهتمام بتقويم الجوانب المهارية ٠

(ب) التقويم والتنوع :

- مدى استخدام بطاقات الملاحظة ٠
- مدى استخدام الاسئلة الموضوعية ٠

obeikandl.com

(جـ) التقويم والاستمراريـــة :

- مدى اتاحة الفرص للتقويم اثناء كل درس من دروس التفاضل والتكامل .
- مدى اتاحة الفرص للتقويم بعد كل درس من دروس التفاضل والتكامل .
- مدى اتاحة الفرص للتقويم بعد كل مجموعة من دروس التفاضل والتكامل .
- مدى اتاحة الفرص للتقويم فى نهاية المنهج .

(د) التقويم والموضوعيـــة :

- مدى توفر شروط الموضوعية فى الاختبارات وبطاقة الملاحظة والاجابات النموذجية

(هـ) التقويم الذاتى والطالب :

- مدى توفر فرص التقويم الذاتى للمتعلم .

(د) التقويم ومعلم الرياضيات :

- مدى مشاركة معلم الرياضيات فى اعداد أدوات تقويم التفاضل والتكامل .
- التعاون بين معلمى الرياضيات فى الاعداد لادوات التقويم .
- مدى الفرص المتاحة للمعلم لتقويم الطلاب والمنهج .
- مدي مشاركة التوجيه الفنى للرياضيات مع المعلم فى التقويم .
- مدى اشتراك الادارة المدرسية مع المعلم فى التقويم .

obeikandl.com

القســـم الثانـــــى

بناء الهيكل العام المقترح لمنهج التفاضل والتكامل للصف الثالث الثانوى العام

الأساس النظري حول بناء الهيكل العام المقترح :

سوف يتناول الباحث فى هذا الجزء الهيكل العام " البرنامج المقترح " وذلك فى ضـــو الأسس الواجب توافرها فى بناء منهج التفاضل والتكامل للصف الثالث الثانوى العام والتى عرضها الباحث فى القسم الاول من هذا الفصل ، وقد قام الباحث بتحديدها وذلك استنادا لما تـــم انجازه فى الفصول السابقة على هذا الفصل فى البحث الحالى ٠وسوف يقتصر الباحث فـــى تحديده للهيكل العام وذلك بتقسيمه الى خمس وحدات دراسية حيث تضم كل وحدة من الوحـــدات الخمسة عنوان الوحدة ، الاهداف ، المحتوى ، ارشادات لمعلم الرياضيات ٠

مفهوم الهيكل العام " البرنامج المقترح " :

يشمل الهيكل العام خمس وحدات دراسية صممت لتلائم طلاب الصف الثالث الثانـــوى العام ، وهذا الهيكل يقوم اساسا على نشاط الطلاب وفاعليتهم ، ويهدف هذا الهيكل الـــى تعليم طلاب الصف الثالث الثانوى العام الكثير من الحقائق والمعلومات والمصطلحات والمفاهيم والتعميمات ، كما يهدف الهيكل العام المقترح الى اكسابهم بعض القيم والاتجاهات والميـــول والمهارات ٠

مقومات الهيكل العام " البرنامج المقترح " :

- انه على درجة كبيرة من الايجاز اذ ان الباحث اعتمد على اختيار موضوعات المحتـــوى على اساس ماسبق تحديده من الاسس الواجب توافرها لمنهج التفاضل والتكامل ٠
- الهيكل العام ليس فى حقيقة الامر سوي مجرد موضوعات مقترحة يمكن تناولها فى اطـــار منهج التفاضل والتكامل بالصف الثالث الثانوى العام ٠
- كما ان محتوي وحدات الهيكل العام للمنهج المقترح تعبر عن الاهداف المقترحـــة لهذا الهيكل ٠

obeikandl.com

خطوات تخطيط بناء الهيكل العام :

في ضوء العرض السابق ، وما قام به الباحث في تحديده لمفهوم الهيكل العام " البرنامج المقترح " يمكن تحديد الخطوات التي اتبعت في تخطيط وبناء الهيكل العام المقترح على النحو التالي :

(أ) اختيار موضوعات الهيكل العام :" البرنامج المقترح " :

وذلك بالاستعانة بالدراسات التي اجرتها المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم لتطوير تدريس الرياضيات وكذلك بالاستعانة ببعض الكتب والمراجع .*

---

* استعان الباحث بعدد من المراجع نذكر منها :

(١) محمد عادل سودان واخرون : مشروع ريادي لتطوير تدريس الرياضيات في المرحلة الثانوية، الصف الثالث الثانوي ، الجزء الاول ، المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم (القاهرة مطبعة التقدم ، ١٩٧٩) .

(٢) ــــــــــــ الرياضيات الحديثة للصف الثالث الثانوي ـ المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم (القاهرة، الهيئة العامة للمطابع ، ١٩٨٠) .

(٣) ــــــــــــ: مشروع ريادي لتطوير تدريس الرياضيات في المرحلة الثانوية الصف الثاني الثانوي ، المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم (القاهرة ، مطابع الشروق ١٩٧٨) .

(٤) الفريد هوبر، ترجمة لبيب جورجي: رواد الرياضيات (القاهرة، النهضة، ١٩٦٥) .

(٥) موراى ر. شبيجل : نظريات ومسائل في الدوال المركبة (القاهرة، المكتب المصري الحديث ، ١٩٨١) .

(٦) ــــــــــــ : نظريات ومسائل في التفاضل والتكامل المتقدم (القاهرة الدار الدولية للتقديم والتوزيع ، ١٩٨٩) .

(٧) خليفة عبدالسميع خليفة : تدريس الرياضيات للمدرسة الثانوية (القاهرة، المطبعة الفنية الحديثة ، ط ١ ، ١٩٨٣) .

(٨) فرانك آيرز ، ترجمة نخبة من الاساتذة المتخصصين : نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل (القاهرة، موءسسة الاهرام ١٩٧٧) .

(٩) اليونسكو : اتجاهات حديثة في تدريس الرياضيات المجلد الثاني (القاهرة ، الهيئة المصرية العامة للكتاب ١٩٧٧) .

(١٠) تيدي س . ج . ليفيت . ترجمة بولس روبل واخرين : النهايات والاتصال في حساب التفاضل والتكامل (القاهرة، الدار الدولية للنشر والتوزيع ١٩٨٩) .

. . . . . .

= (١١) نظله حسن احمد خضر : المدرس والرياضيات الحديثة والتقليدية (القاهرة، عالم الكتب ، ١٩٨٥) .

(١٢) فريدريك هـ.بل ترجمة وليم عبيد واخرين : طرق تدريس الرياضيات (القاهرة ، الدار العربية للنشر ، ج ٢ ، ١٩٨٦) .

(١٣) محمد القويز واخـــرون : الرياضيات الحديثة للصف الثالث الثانوي (دار الاصفهانى للطباعة ج ١ ، ١٩٨٢) .

(١٤) ــــــــــ : الرياضيات للصف الثالث الثانوى (دار الاصفهانى للطباعة بجدة ، ج ١ ، ١٩٨٢) .

(١٥) جلال الصياد واخرون : الرياضيات للصف الثالث الثانوى (دار الاصفهانى للطباعة ج ١ ، ١٩٨٤) .

(١٦) على نصر الوكيل واخرون : التفاضل والتكامل للصف الثالث الثانوى (القاهـــرة، مطابع دار الهلال ، ١٩٨٩) .

(١٧) محمد رجائى طحمير واخرون : الميكانيكا والتكامل للصف الثالث الثانوى علمي رياضيات (القاهرة، موءسسة دار التعاون ، ١٩٨٨) .

(١٨) - *Klin Morris (1966) Calculus: An intuitive and physical approach (New York - Second edition).*

(١٩) - *Marvien L. Bittinger (1976): Calculus: A modeling approach Addison-Weslay publishing Company, California).*

(٢٠) - *B. Simon (1982): Calculus with analytic Geometry: (Scott, Farsman and Company, United States of America).*

(٢١) - *Advanced Mathematics Book1(1967): The School Mathematics Project. (Cambridge, At the University Press).*

(٢٢) - *Advanced Mathematics Book2 (1968): The School Mathematics Project. (Cambridge, At the University Press).*

(٢٣) - *Sheldon P. Gordon (1985): A discrete approach to the Calculus (International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, July, 1985, Vol.16, N.4).*

(٢٤) - *F.H. Simons (1986): A Course in Calculus Using a Personal Computer (International Journal of Mathematical Education in Scince and Technology, 117, No.3).*

(٢٥) - *A.J. Briginohaw (1986): Teaching Undergraduate Analysis (International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. Vol. 17, No.6).*

(٢٦) - *A. Van Dermeer (1980): Bridging the gulf between formal Calculus and physical reasoning. (---------- Vol.11 No.3)*

(٢٧) - *I. Suvorov: Higher Mathematics (Printed in the Union of Soviet Socialist Republics).*

(٢٨) - *Unesco (1972): New Trends in Mathematics Teaching. Analysis V.3.*

obeikandl.com

(٢) تحديد اهداف الهيكل العام " البرنامج المقترح "

فى ضوء ماحصل عليه الباحث من معلومات عن الخطوة السابقة وفى ضوء تحديد موضوعات الهيكل العام ، قام الباحث بتقسيم الهيكل العام الى خمس وحدات دراسية ولكل وحدة اهدافها وذلك طبقا لتقسيم بتلر (١) انه يوجد ثلاثة تصنيفات كبري لاهداف تدريس الرياضيات وهى :

١ ـ المعرفة Knowledge وتنقسم الى قسمين هما :

أ ـ التذكر (تذكر الحقائق ، النظريات ، التعريفات وغيرها) .

ب ـ المهارات Skills

٢ ـ الفهم Understanding

وقد تمت هذه الخطوة على مرحلتين :

ـ المرحلة الاولى : وهى تمثل الاهداف العامة للهيكل مثل (معرفة الحقائق والمعلومات والمصطلحات والمفاهيم والتعميمات والاتجاهات والمهارات) .

ـ المرحلة الثانية: قام الباحث بترجمة الاهداف العامة للمنهج الى اهداف سلوكية لكل وحدة من وحدات الهيكل حتى يمكن قياسها .

ويرى شبلر " ان اهداف الوحدة (المنهج) يمكن ان تصاغ فى هدف عام واحد او اثنين على الاكثر . ثم يصاغ هذا الهدف على صورة قائمة من الاهداف السلوكية . (٢)

وعليه فانه يمكن ان يصاغ الهدفان التعليميان التاليان للهيكل العام " البرنامج المقترح وهما :

١ ـ ان يتمكن طالب الصف الثالث الثانوي من المفاهيم والحقائق والنظريات التى يتضمنها محتوي منهج التفاضل والتكامل بالهيكل العام المقترح .

٢ ـ ان يتمكن طالب الصف الثالث الثانوي من تطبيق هذه المفاهيم والحقائق بصورة مباشرة او غير مباشرة فى حل تمارين التفاضل والتكامل .

---

(١) عادل ابراهيم الباز :دراسة تشخيصية للصعوبات التى تواجه طلاب الصف الثانى الثانوى العام فى حل تمارين الهندسة الفراغية (رسالة ماجستير غير منشورة، كلية التربية ، جامعة الزقازيق ١٩٨٤) .

(٢) عادل ابراهيم الباز : فعالية تدريس منهج مطور للهندسة الفراغية فى المرحلة الثانوية (رسالة دكتوراه غير منشورة ، كلية التربية، جامعة الزقازيق ، ١٩٨٧) .

obeikandi.com

(٣) اختيار محتوي الهيكل العام " البرنامج المقترح " :

لقد تمت خطوة اختبار المحتوي فى المراحل التالية :

أ ــ اختيار موضوعات الهيكل ٠

ب ــ اختيار المحتوي التفصيلى ٠ وقد اكتفى الباحث بذكر اهم جوانب الفكرة الاساسية مبتعدا عن التفاصيل الزائدة التى ربما تمثل عبئا على الطالب فى الصف الثالث الثانوي ٠

جـ ــ تقسيم الهيكل العام الى وحدات ٠

قسم الباحث الهيكل الى خمس وحدات ولقد راعى الباحث فى تنظيم الوحدات ترتيبها وتسلسل الافكار والحقائق ٠

الهيكل العام المقترح للصف الثالث الثانوي العام*

ويتكون من خمس وحدات رئيسية

الوحدة الاولى : المتتابعات والمتسلسلات :

تهدف وحدة المتتابعات والمتسلسلات الى تحقيق اهداف معرفية ووجدانية ومهارية على النحو التالى :

* انظر الملحق رقم (٩) ص (٢٨٩) وهو استبيان الاستطلاع الراى حول البرنامج المقترح لمنهج التفاضل والتكامل ٠
وقد تم عرض هذا الاستبيان على مجموعة من المحكمين وهم :

(١) أ٠د٠ محمد رضا البغدادى : استاذ ورئيس قسم المناهج وطرق التدريس بكلية التربية بالفيوم ، جامعة القاهرة ٠

(٢) أ٠د٠ كمال احمد ديب : استاذ الرياضيات المساعد ورئيس قسم الرياضيات كلية التربية بالفيوم جامعة القاهرة٠

(٣) أ٠د٠ خليفة عبدالسميع خليفة : استاذ المناهج وطرق تدريس الرياضيات المساعد بكلية التربية بالفيوم جامعة القاهرة ٠

(٤) أ٠د٠ مجدي عزيز ابراهيم : استاذ المناهج وطرق تدريس الرياضيات المساعد بكلية التربية دمياط جامعة المنصورة٠

(٥) أ٠ نسيم صموئيل برسوم : موجه عام الرياضيات بديوان عام وكالة وزارة التربية والتعليم بالفيوم٠

(٦) أ٠ ميلاد حليم فانوس : موجه اول الرياضيات بديون عام وكالة وزارة التربية والتعليم بالفيوم٠

(٧) أ٠ صلاح الدين اسماعيل : موجه اول الرياضيات بادارة الفيوم التعليمية ٠

obeikandl.com

(أ) الاهـــداف المعرفيـــة

(١) بالنسبة الى معرفة حقائق ومعلومات مثل :

- يتعرف الطالب على تقارب المتتابعة من الرسم البيانى أو من التمثيل على خط الأعداد .
- يحدد الطالب متى تكون المتتابعة تقاربية او تباعدية .
- يحكم الطالب على ان المتتابعة تقاربية او تباعدية .
- يقارن الطالب بين تمثيل المتتابعة على خط الاعداد وبيانيا .
- يذكر الطالب انواع النهايات .
- يذكر الطالب تعريف تقارب المتتابعة .

(٢) بالنسبة الى معرفة مصطلحات ومفاهيم :

أ ـ مصطلحات : مقياس العدد الحقيقى .

ب ـ مفاهيم : مجموعة الاعداد الحقيقية الممتدة، خاصية المسافة على ح، الجـــوار والجوار المثقوب ، تقارب المتتابعة .

(٣) مهارات عقلية : ان يستنتج الطالب خواص قياس العدد الحقيقى ـ تنمية القدرة لـــدى الطلاب على التحليل وادراك العلاقات بين الاسباب والنتائج ، استنتاج مفهـــوم تقارب المتتابعة من الرسم البيانى ومن خط الاعداد .

(ب) الاهداف الوجدانيـــة

تهدف دراسة الوحدة الى اكتساب الطلاب اتجاهات وميول وقيم ايجابية على النحو التالى:

(١) بالنسبة الى الاتجاهات :

- تكوين اتجـاه ايجابـى لـدى الطـلاب نحو الاهتمام بدراسة (المفاهيم الاوليـة فى مجموعة الاعداد الحقيقية ، متتابعات الاعداد الحقيقية ، نهاية المتتابعة، نهايـة الدالة) .
- تقدير جهود العلماء والمكتشفين فى كشف ودراسة المتتابعات والمسلسلات .

(٢) الميـــول :

تهدف دراسة الوحدة الاولى الى اكتساب الطلاب الميول الاتيـــة :

- الميل نحو تتبع موضوعات النهايات .

obeikandl.com

- الميل الى استخدام مصادر ومراجع اخري غير الكتاب المدرسى ٠
- الميل الى عمل المجلات الحائطيـــة والرسوم والاشكال التوضيحيـــة الخاصـــة بتقارب المتتابعات والمتسلسلات ٠

(٣) بالنسبة للقيـم :

تهدف دراسة الوحدة الاولى الى اكتساب الطلاب القيم الاتيـة :

ان يقدر الطالب قيمة :

- الدقـة ٠
- النظام ٠
- تقدير قيمة المكتشفات الحديثـة فى هذا المجال ٠

(جـ) الاهداف المهاريـة

تهدف دراسة الوحدة الى اكتساب الطلاب الاهداف المهارية الاتية :

- المهارة فـى رسم الاشكال التوضيحية والرسوم الخاصة بموضوعات الوحدة ٠
- المهارة فى برهنـة نظريات تقارب المتتابعة ٠
- ان يحل الطالب بعض المسائل على تقارب المتتابعات ٠
- المهارة فى حساب نهاية المتتابعة ٠
- المهارة فى تحديد منطقة الجوار والجوار المثقوب وحساب عدد الحدود التى تقع داخـل الجوار ٠
- المهارة فى ايجاد ن التى تحقق | ح$_{ن}$ − ل | < و

ثانيا : المحتـوى :

المتتابعـات والمتسلسـلات :

المفاهيم الاولية فى مجموعة الاعداد الحقيقيـة :

× مجموعة الاعداد الحقيقية الممتدة (ح* = $\{-\infty\} \cup$ ح $\cup \{\infty\}$

× خاصية المسافة على ح :

obeikandi.com

تعريف : اذا كان س ، ص عددين حقيقتين فان القيمة المطلقة للفرق بين س ، ص يسمى المسافة بين العددين ويرمز لها بالرمز ف (س ، ص) اى ان

ف (س ، ص) = | س ـ ص |

تعريف : مقياس العدد الحقيقى ٠

اذا كان س عددا حقيقيا فان المسافة بين العددين س ، ٠ اى ف (س ، ٠) تسمى مقياس العدد س او معيار العدد س ويرمز له بالرمز | س |

ف (س ، ٠) = | س | = { س اذا كانت س > ٠ ؛ ـ س اذا كانت س < ٠ ؛ صفر اذا كانت س = ٠ }

خواص قياس العدد الحقيقى ٠

∀ س ، ص ∈ ح فان

(١) | س ص | = | س | | ص |

(٢) | س + ص | ≤ | س | + | ص |

(٣) | س ـ ص | ≥ | | س | ـ | ص | |

(٤) إذا كانت جـ > ٠ حيث جـ ∈ ح فان | س | ≤ جـ ⇔ ـ جـ ≤ س ≤ جـ

(٥) إذا كانت حـ > ٠ حيث حـ ∈ ح فان | س | ≥ حـ ⇔ س ≥ حـ أو س ≤ ـ حـ

(٦) $\sqrt{س^{٢}}$ = | س | ∀ س ∈ ح

الجوار والجوار المثقوب لنقطـــة

ج (أ ، هـ) =] أ ـ هـ ، أ + هـ [

ج (أ ، هـ) = { س : | س ـ أ | < هـ }

ج (أ، هـ) =] أ ـ هـ، أ+ هـ [ـ {أ}

ج (أ، هـ) = { س : ٠ < | س ـ أ | < هـ }

متتابعات الاعداد الحقيقيـــة :

ـ تعريف المتتابعة كنوع خاص من الدوال الحقيقية ٠

ـ كتابـــة عدة حدود من المتتابعـــة ٠

obeikandl.com

- المتتابعات الحسابية والهندسية ٠
- المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهيـــة ٠

تعريف : اذا كانت (ح ر) متتابعة منتهية مكونة من ن حدا فان مجموع حدودهـا

ح١ + ح٢ + ح٣ + ٠٠٠٠ + ح ن تسمى متسلسلة منتهيـــة ٠

تعريف : تسمى المتسلسلة المنتهية $\sum_{ر=١}^{ن}$ ح ر متسلسلة حسابية او هندسيـــــة

اذا كانت المتتابعة (ح ن) حسابية او هندسية على الترتيب ٠

- تمثيل المتتابعات على خط الاعداد ٠
- تمثيل المتتابعات بيانيا ٠

انواع النهايـــات :

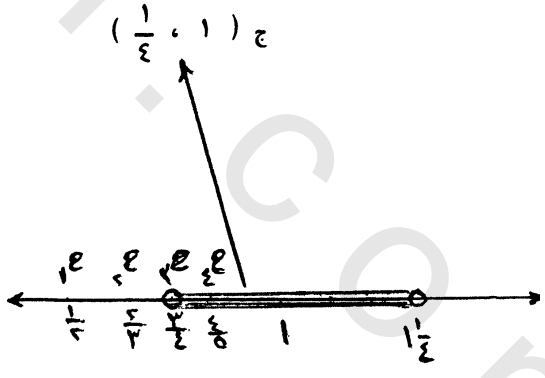
(١) نهاية المتتابعة ٠

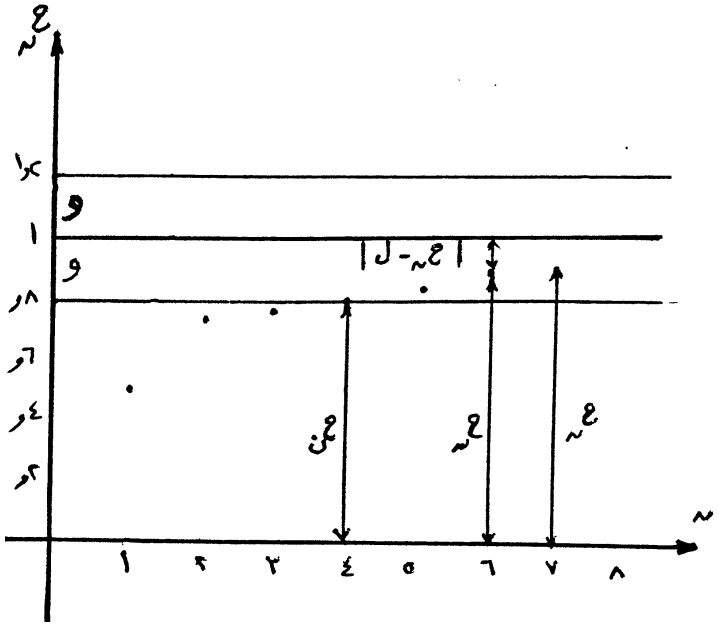
(٢) نهاية المتسلسلة ٠

(٣) نهاية الدالة ٠

(١) تقارب المتتابعة ـ نهاية المتتابعـــة ٠

المتتابعة ح ن = ($\frac{ن}{ن + ١}$) يمكن تمثيلها على خط الاعداد او بيانا كالاتى





من الرسم :

اذا احتوي كل جوار لعدد حقيقى ل جميع حدود متتابعه فيما عدا عدد محـــــــدود منها فاننا نقول ان ل نهاية المتتابعة ٠

تعريف : يقال ان المتتابعة (ح ن) تتقارب للنهاية ل اذا كان لكل عدد حقيقى و > ٠ (مهما صغرت قيمته) (يوجد ن ∈ ص + (تعتمد قيمته على قيمة و) بحيث

| ح ن – ل | < و لجميع قيم ن > ن

اى ان نهـــــا ح ن = ل اذاكان لكل و > ٠ يوجد ن ∈ ص + بحيث | ح ن – ل | < و
ن ← ∞

لكل ن > ن

(٢) نهاية المتسلسلة

تقديم نهاية المتسلسلة كتطبيق لنهاية المتتابعة فى معرفة تقارب وتباعد المتسلســـلات

– ايجاد نهاية المتتابعة باستخدام النظريات :

اولا : اذا كانت نهـــــا ح ن = أ ، نهـــــا ك ن = ب فان
ن ← ∞ ن ← ∞

(أ) نهـــــا [ح ن ± ك ن] = أ ± ب
ن ← ∞

(ب) نهـــــا [حـ (ح ن)] = جـ أ ..... (حـ ∈ ح)
ن ← ∞

(جـ) نهـــــا [(ح ن ٠ ك ن)] = أ ب
ن ← ∞

(د) نهـــــا [ح ن / ك ن] = أ / ب ..... ب ≠ ٠
ن ← ∞

ثانيا : نهـــــا ١ / ن = صفر
ن ← ∞

نهـــــا $\frac{١}{ن^{م}}$ = { صفر ..... م > ٠ ، ١ ..... م = ٠ ، غير موجودة ..... م < ٠ }
ن ← ∞

ثالثا : نهـــــا $ر^{ن}$ = صفر ..... (حيث ـ ١ < ر < ١)
ن ← ∞

رابعا : إذا كانت (ك ن) محدودة ، نهـــــا (ح ن) = صفر فان ك ن ح ن = صفر
ن ← ∞ ن ← ∞

ثالثا : ارشادات للمعلم :

- يقدم مفهوم الجوار بالقدر والمستوي اللازمين لتوظيفه فى توضيح بعض المفاهيم الاخرى . مثل : نهاية المتتابعة ـ نهاية الدالة ـ القيم العظمى والصغرى المحلية ٠
- التعريف الرياضى لنهايـــة المتتابعة يتميز بمستوي عال من التجريد يتطلب الدقـــة الرياضية وعلى المعلم ان يشرك الطالب فى استنتاج التعريف من خلال استقـــراء سلوك المتتابعة من خلال امثلة متعددة ٠

الوحدة الثانيـــــــة

النهايـــات والاتصـــــال

اولا : الاهـــــداف :

تهدف وحدة " النهايات والاتصال الى تحقيق اهداف معرفيـــة ووجدانية ومهاريـــة على النحو التالى :

(أ) الاهـــــداف المعرفيـــة

تهدف الوحدة الى تحقيق الكثير من الأهداف المعرفية الاتيـة:

(١) معرفة بالنسبة الى حقائق ومعلومات مثل :

- نهاية الدالة عند نقطة ، النهاية اليمنى والنهاية اليسرى ، الاساس الرياضى المشتـــرك لانواع النهايات ، شروط وجود النهاية عند نقطة ، خصائص النهايات ، بعض النهايات المشهورة ، طرق حساب نهاية دالة حقيقية ، نهاية الدالة عند اللانهاية ، اتصـــال

دالة عند نقطة ، شروط اتصال دالة عند نقطة ، الاتصال على فترة وخواص الـــــدوال المتصلة ، شروط اتصال دالة فى فترة مغلقة ، بعض انماط الدوال المتصلة ٠

- ان يعرف الطالب ان :

٠ وجود نهاية الدالة عند نقطة ما يعتبر مستقلا عن تعريف الدالة عند هذه النقطة فقـــد توجد نهاية للدالة عند نقطة غير معرفة عندها ٠

٠ الفارق الكبير بين معنى نهاية الدالة عند نقطة مثل أ وقيمة الدالة عند أ (وهـــــى القيمة التى تنتج بالتعويض من متغير الدالة بالعدد أ)

٠ لا يساعد تعريف نهاية دالة عند نقطة على تعيين النهاية ولكن يساعد على اثبـــــات ان النهاية هى القيمة المعطاه ٠

٠ عند تعيين نهاية الدالة عندما س $\to$ أ يجب ان تكون الدالة معرفة فى جوار أ

٠ عند تعيين نهاية الدالة عندما س $\to$ أ$^{+}$ يجب ان تكون الدالة معرفة فى يمين أ

٠ عند تعيين نهاية الدالة عندما س $\to$ أ$^{-}$ يجب ان تكون الدالة معرفة فى يسار أ

٠ عند بحث نهاية الدالة المعرفة باكثر من قاعدة عند النقطة التى يتغير عندها تعريـــف الدالة يجب بحث النهاية اليمنى والنهاية اليسري والمقارنة بينهما فاذا تساوت النهايتـان فان للدالة نهاية وتساوى القيمة المشتركة للنهايتين ٠

عند تعيين نهاية الدالة عند اللانهاية يجب ان تكون الدالة معرفة عند ∞

- يشرح الطالب نهاية الدالة عند نقطة من الرسم البيانى ٠
- يذكر الطالب شروط وجود النهايـــة عند نقطة ٠
- يحدد الطالب اذا كانت الدالة متصلة عند النقط المعطاه أم لا ٠
- يثبت الطالب بعض نظريات النهايات ٠
- يذكر الطالب شروط اتصال دالة عند نقطة
- يذكر الطالب شروط اتصال دالة على فترة ٠

(٢) معرفة بالنسبة لمصطلحات ومفاهيم :

مفاهيم : مفهوم نهاية دالة عند نقطة ، مفهوم النهاية اليمنى، مفهوم النهاية اليســـرى ، المفهوم الرياضى لنهايـــة دالة عند اللانهاية ، مفهوم الاتصال ٠

(٣) بالنسبة الى التعميمات :

- من تعريف نهاية الدالة عند اللانهاية يمكن ان نعامل الدالة د (س) عندما س ← ∞ كما لو كانت متتابعة وبذلك تنطبق جميع خواص نهايات المتتابعات على نهاية الدالة عند اللانهاية ٠
- اذا كانت د (س) ، ر (س) متصلتين على الفترة س فان الدوال الاتية تكون متصلة على نفس الفترة ٠

[حاصل جمع دالتين ، باقى طرح دالتين ، حاصل ضرب دالتين ، خارج قسمة دالتين ، الاتصال على فترة]

(٤) بالنسبة الى المهارات العقلية

- يستنتج الطالب الاساس الرياضى المشترك لانواع النهايات ٠
- يستنتج الطالب خصائص النهايات ٠
- كتابة بعض البحوث القصيرة عن موضوعات مثل النهايات والاتصال ٠
- تنمية القدرة على الاطلاع على مراجع اخرى غير الكتاب المدرسى ٠

(ب) الاهداف الوجدانية

تهدف دراسة الوحدة الثانية الى اكتساب الطلاب اتجاهات وميول وقيم ايجابية على النحو التالى :

(١) بالنسبة الى الاتجاهات :

- يتكون لدى الطلاب اتجاه ايجابى نحو القيام بدراسة (المفهوم الرياضى لنهاية الدالة ، والمفهوم الرياضى لنهاية الدالة عند اللانهاية، ومفهوم الاتصال) ٠

(٢) بالنسبة للميول :

- اكساب الميل لدي الطلاب لتتبع موضوع الاتصال ٠
- الميل الى استخدام مصادر ومراجع اخرى غير الكتاب المدرسى ٠
- الميل الى عمل المجلات الحائطية والرسوم والاشكال التوضيحية الخاصة بالنهايات والاتصال ٠

obeikandl.com

(٣) القيـم :

تهدف دراسة الوحدة الثانية الى اكتساب الطلاب القيم الاتيـــة :

ان يقدر الطالب قيمـــة :

- الدقة ٠
- النظام ٠
- تقدير قيمة المكتشفات الحديثة فى هذا المجال ٠

(جـ) الاهداف المهاريـــــة

تهدف دراسة الوحدة الى اكتساب الطلاب الاهداف المهارية الاتية :

- تدريب الطلاب على رسم الاشكال التوضيحيـة والرسوم الخاصة بموضوعات الوحدة ٠
- المهارة فى برهنـة نظريات النهايات ٠
- المهـارة فـــــــى ايجاد نهاية الدالة عند نقطة
- المهارة فى حـــل تمارين على ايجاد نهاية الدالة عند اللانهاية ٠
- المهارة فى حل تمارين على اتصال دالة عند نقطة واتصال دالة على فترة٠

ثانيا : المحتـــــوى :

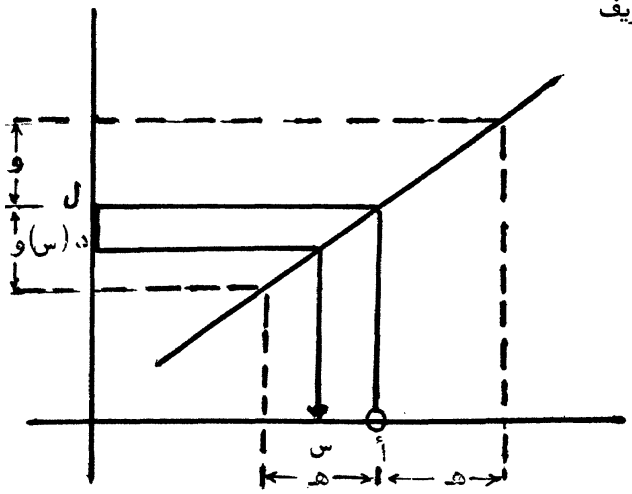
النهايـــات والاتصـــال

ـ نهاية دالة عند نقطة :ـ

٠ يعالج مفهوم نهاية الدالة باستخدام المدخل الاتى : دراسة الفرق المطلق بيـــن كل من د (س) ، ل من ناحية ، س ، أ من ناحية اخرى ويستخدم هذا المدخـل فى اثبات ان د (س) تؤول للنهاية ل عندما س تؤ ول الى أ ٠

٠ يمكن الاستعانة بالرسم البيانى لتوضيح التعريف

نهـا د(س) = ل اذا كان لكل و > ٠ توجد هـ > ٠
س ← أ بحيث
| د (س) ـ ل | < و لكل ٠ < | س ـ أ | < هـ



• قاعدة : اذا كانت س = أ + هـ

وكانت س ← أ ... (أ ∋ ح) فان : هـ ← صفر

وعلى ذلك فان نهـــا د (س) = ل تكافئ نهـــا د (أ + هـ) = ل
س ← أ هـ ← ٠

ـ النهاية اليمنى والنهاية اليسرى :ـ

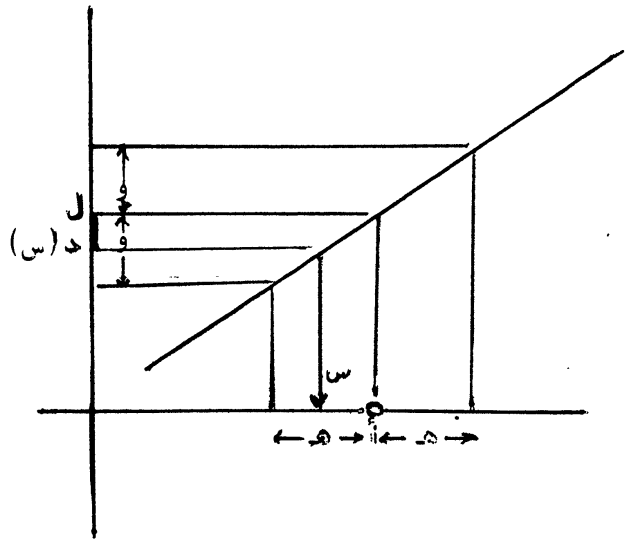
• تعريف : يقال ان الدالة د (س) تو ول للنهاية ل ١ عندما س ← أ من اليمين
اذا كان لكل و > ٠ توجد هـ > ٠ حيث | د (س) ـ ل ١ | < و
لكل ٠ < س ـ أ < هـ ونعبر عن ذلك بأن نكتب

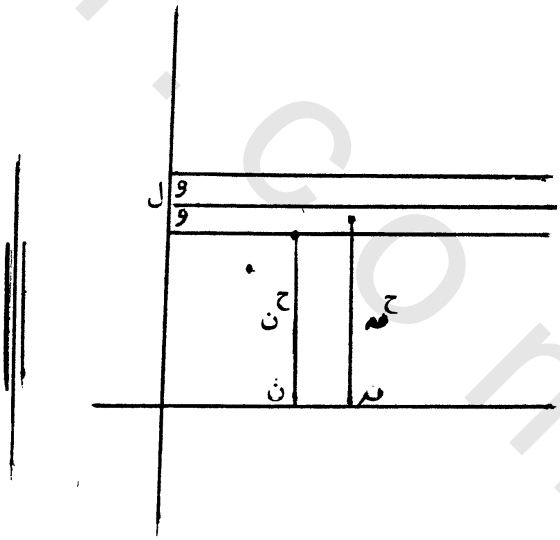
نهـــا د (س) = ل ١ ، د (أ +) = ل ١
س ← أ+

• تعريف : يقال ان الدالة د (س) تؤ ول للنهاية ل ٢ عندما س ← أ من اليســـار
اذا كان لكل و > ٠ يوجد هـ > ٠ حيث | د (س) ـ ل ٢ | < و لكل ٠ < أ ـ س < هـ
ونعبر عن ذلك بان نكتب

نهـــا د (س) = ل ٢ ، د (أ ـ) = ل ٢
س ← أ ـ

الاساس الرياضى المشترك لانواع النهايات (١)





(١) تم اضافة هذا الجزء حتى يربط الطالب بين نهاية المتتابعة ونهاية الدالة ، انظر فى هذا الصدد على سبيل المثال ـ نظلة حسن احمد خضر : مرجع سابق ص ٢٢٤ ٠

obeikandl.com

- اذا بحثنا فى التعريفين نجد ان كل تعريف يبدأ لكل و > ٠ وينتهى بالقيمة < و ٠
- الفرق الاساسى بين التعريفين هو أن تعريف نهاية الدالة يتضمن العدد هـ الذي يقيس قرب س من أ وتعريف نهاية المتتابعة يختص بالعدد ن الذي يقيس كبر العدد ن
- ولكن باستخدام لغة الجوار نجد ان التعريفين يتضمنان نفس الاساس ، عندما نقول ٠ < | س ـ أ | < هـ تعنى ان س ∈ ج (أ ، هـ)

وعندما نقول ان $ن_{م} > ن$ فاننا نعنى ان $ن_{م}$ فى جوار + ∞ (المحذوف مركزه)

وكذلك | د (س) ـ ل | < و تعنى أن د (س) ج (ل ، و)

بالمثل | $ح_{ن}$ ـ ل | < و تعنى ان $ح_{ن}$ ∈ ج (ل ، و)

وعلى ذلك فالاساس المتضمن فى التعريفين هو

ان لكل جوار لنقطة ل يوجد جوار لنقطة أ بحيث س ∈ ج (أ ، هـ) يودى الى د (س) فى جوار ل ٠

ـ شروط وجود النهاية عند نقطة :

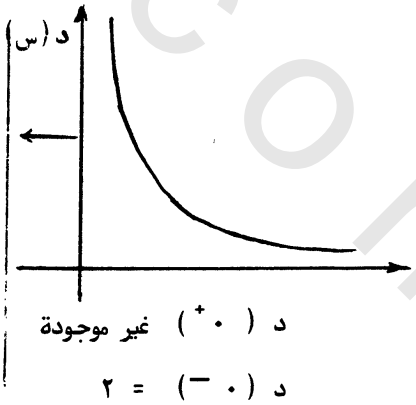
نظرية : الدالة د (س) تؤول للنهاية ل عندما س ← أ اذا وفقط اذا كانت نهايتاها اليمنى واليسري عند أ موجودتين وكل منهما تساوى ل اي

نهـا د (س) = ل اذا وفقط اذا كانت د (أ $^{-}$) = د (أ $^{+}$) = ل
س ← أ

ـ عرض لامثلة بالرسم البيانى لتوضيح هذه الشروط :

(١)

د (س) = { $\frac{١}{س}$ ، س < ٠ ؛ ١ ، س ≥ ٠ }



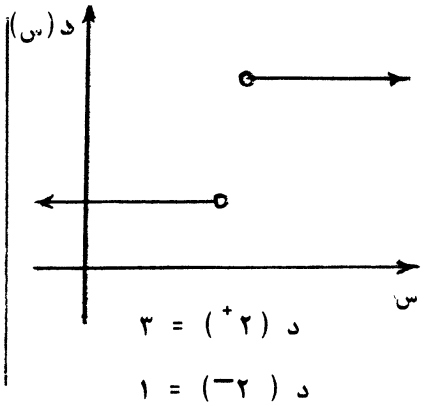
د (٠$^{+}$) غير موجودة

د (٠$^{-}$) = ٢

النهاية عند (٠) غير موجودة

(٢)

د (س) = { ٣ ، س < ٢ ؛ ١ ، س > ٢ }



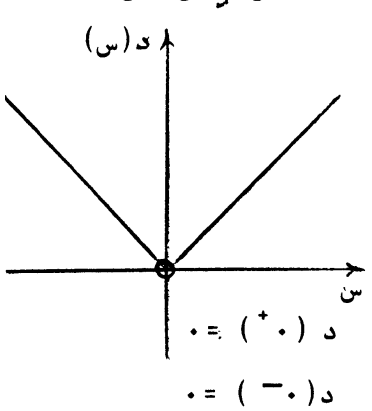
د (٢$^{+}$) = ٣

د (٢$^{-}$) = ١

النهاية عند (٢) غير موجودة

(٣)

د (س) = { $\frac{س^{٢}}{س}$ ، س < ٠ ؛ ١ ـ س ، س ≥ ٠ }



د (٠$^{+}$) = ٠

د (٠$^{-}$) = ٠

نهـا د (س) = ٠
س ← ٠

obeikandi.com

- خصائص النهايات :
  - خاصية الجمع ٠
  - خاصية الضرب ٠
  - خاصية القسمة ٠
- بعض النهايات المشهورة :ـ

(١) $\lim_{س \to أ} س = أ$ ..... لكل أ $\in$ ح

(٢) $\lim_{س \to أ} حـ =$ حـ .... لكل حـ ، أ $\in$ ح

نظرية ٠

$\lim_{س \to أ} (حـ_{٠} + جـ_{١} س + جـ_{٢} س^{٢} + ... + جـ_{ن} س^{ن}) = جـ_{١} + جـ_{١} أ + جـ_{٢} أ^{٢} + ... + جـ_{ن} أ^{ن}$

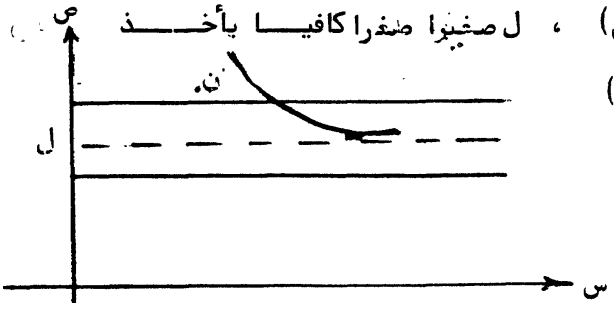
نظرية ٠ $\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن م^{ن-١}$ (حيث ن عدد صحيح $\neq$ ٠)

نتائج ($\lim_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م} أ^{ن-م}$ ، $\lim_{هـ \to ٠} \frac{(أ + هـ)^{ن} - أ^{ن}}{هـ} = ن أ^{ن-١}$)

(ن ، م اعداد صحيحة $\neq$ ٠) (ن عدد صحيح $\neq$ ٠)

- طرق حساب نهاية دالة حقيقية ٠
- نهاية الدالة عند اللانهايـــة
  - المفهوم الرياضى لنهاية دالة عند اللانهايـــة

تعريف : يقال ان الدالة د (س) تؤول للنهاية (ل) عندما س $\to$ ∞ اذا كنـــا نستطيع ان نجعل الفرق بين د (س) ، ل صغيرا صغرا كافيـــا بأخـــذ س كبيرة٠ كبرا كافيا (اكبر من $ن_{٠}$)



اي $\lim_{س \to \infty} د (س) = ل$

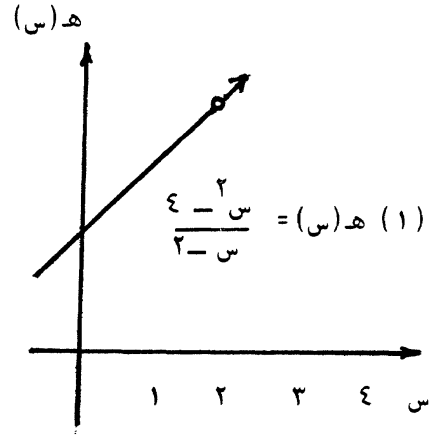
obeikandl.com

اذا كان لكل و > ٠ يوجد ن بحيث | د (س) ـ ل | < و لكل س > ن.

• الطرق التى يمكن ان نحسب بها تلك النهايـــة

ـ اتصال دالة عند نقطة :ـ

يمكن ان نصل الى مفهوم الاتصال بعد عرض التمثيل البيانى لعدة دوال كالاتى

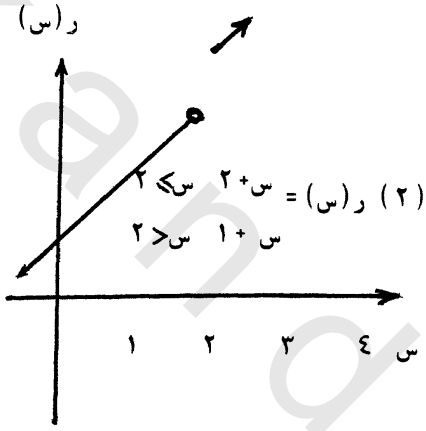


(١) هـ(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$

مجالها = ح ـ {٢}

٠ هـ (٢) غير موجودة

٠ نهـا هـ (س) = ٤
س ← ٢

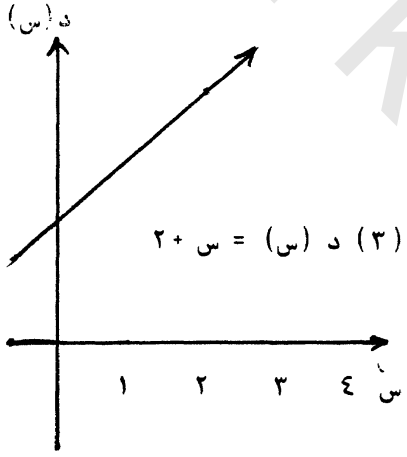


(٢) ر(س) = س + ٢ ، س ≤ ٢
س + ١ ، س > ٢

مجالها ح

٠ ر (٢) = ٤

٠ نهـا ر (س) غير موجودة
س ← ٢



(٣) د (س) = س + ٢

مجالها ح

٠د(٢) = ٤

٠ نهـا د (س) = ٤
س ← ٢

٠ نهـا د (س) = د (٢)
س ← ٢

تعريف : تكون الدالة د متصلة عند س = أ اذا تحققت الشروط الثلاثة

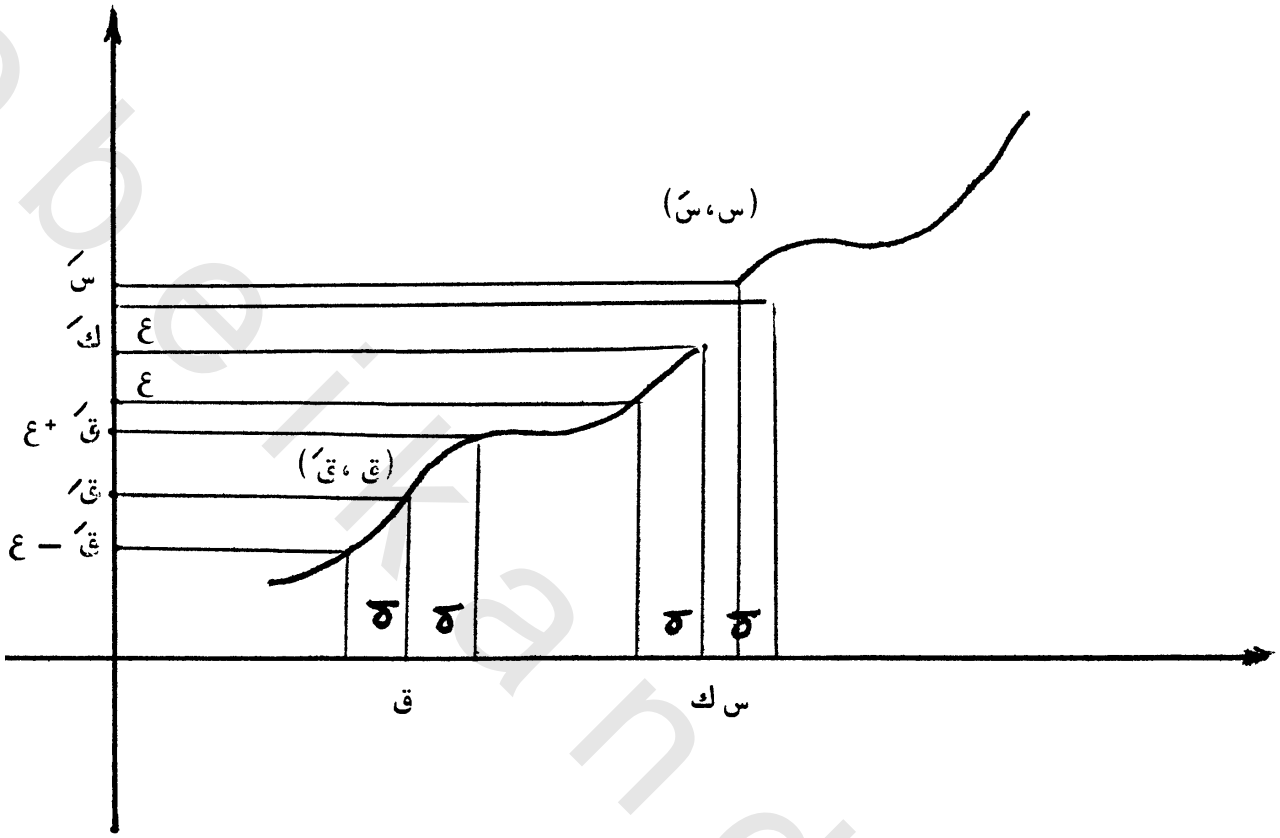
(١) د (س) معرفة عند س = أ وفى جوارها ٠

(٢) د (س) لها نهايـــة محدودة عند س = أ

(٣) نهـــــا د (س) = د (أ)
س ← أ

obeikandl.com

مدخل حدسى للاتصال :



من الشكل نلاحظ ان

الاثر متصلا عند ق اذا كان لكل جوار للنقطة قَ نصف قطره ع يوجد جوار للنقطة ق نصف قطره δ بحيث ان كل نقطة من نقط جوار النقطة ق ترسم الى نقطة تنتمى لجوار النقطة قَ

ونلاحظ ان الحيوان رفع ذيله عند النقطة (ك ، كَ) وبالتالى ، فالنقط القريبة من ك على يسارها ترسم الى نقط قريبة من كَ ، اما النقط القريبة من ك على يمينها " مثلا " ترسم الى نقط قريبة من كَ .

اى ان س ∋ ج (ك) ، سَ ∉ ج (كَ)

تعريف :

تكون الدالة د متصلة عند نقطة ق فى مجالها اذا وفقط اذا كان لكل عدد حقيقى موجب ع يوجد عدد حقيقى موجب δ بحيث ان لكل س فى مجال د

ا س − ق ا < δ ⟵ ا د (س) − د (ق) ا < ع

- اعادة تعريف الدالة حتى تكون متصلة ٠
- الاتصال على فترة وخواص الدوال المتصلة ٠

تعريف :

(١) اذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المفتوحة ف =] أ ، ب [فاننا تقول أن د متصلة فى ف اذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمى لهذه الفقرة ٠

(٢) اذا كانت الدالة معرفة على الفترة المغلقة ف = [أ ، ب] فاننا نقول أن د متصلة فى ف تحققت الشروط التالية ٠

(أ) د متصلة فى] أ ، ب [

(ب) د متصلة من اليمين عند أ

(جـ) د متصلة من اليسار عند ب ٠

يمكن وضع شروط اتصال دالة فى فترة ف = [أ ، ب] كما يلى

(أ) $\forall$ س$_{.}$ $\in$] أ ، ب [فان $\lim_{س \to س_{.}}$ د (س) = د (س$_{.}$) ٠

(ب) $\lim_{س \to أ^{+}}$ د (س) = د (أ)

(جـ) $\lim_{س \to ب^{-}}$ د (س) = د د (ب) ٠

نظرية : اذا كانت د (س) ، ر (س) متصلتين على الفترة س فان الدوال الاتية تكون متصلة على نفس الفترة ٠

١ ـ د (س) $\pm$ ر (س)

٢ ـ ك ٠ د (س) لكل ك $\in$ ح

٣ ـ د (س) ٠ ر (س)

٤ ـ $\frac{د (س)}{ر (س)}$ عدا النقط التى يكون عندها ر (س) = ٠

obeikandi.com

- نظريـــــة :

اذا كانت الدالة د متصلة على الفترة المغلقة [أ ، ب] فان للدالة د عندئذ قيمـــــة عظمى $\leq$ على ف وقيمـــة صغري ك على ف ٠

- بعض أنماط الدوال المتصلة ٠

(أ) الدالة كثيرة الحدود

$$د (س) = أ_{٠} + أ_{١} س + ٠٠٠٠ + أ_{ن} س^{ن} \quad \text{متصلة على ح}$$

(ب) الدالة الكسريـــة

$$\frac{أ_{٠} + أ_{١} س + ٠٠٠٠ + أ_{ن} س^{ن}}{ب_{٠} + ل_{١} س + ٠٠٠٠ ب_{ن} س^{ن}} \quad \text{متصلة على ح (عدا عند أصفار المقام)}$$

ثالثا ارشادات للمعلم :

- من المناسب ان نقدم أمثلة لبعض الدوال التى لها نهاية سواء كانت نهاية محدودة او غيـــر محدوده ولدوال أخري لها نهاية من اليمين او من اليسار للتمهيد لتعريف نهاية الدالة٠ (١)
- التعريف الرياضى لنهايـــة الدالة يتميز بمستوي عال من التجريد تفرضه الدقـــه الرياضيـــة وعلى المعلم أن يشرك الطالب فى استنتاج التعريف من خلال استقراء سلوك الدالة مـــن خلال أمثلة متعددة ٠ (٢)
- لا يساعد التعريف على تعيين النهاية ولكنه يساعد على اثبات أن النهاية هى القيمـــــة المعطاه ٠
- وجود نهايـــة للدالة عند نقطة ما يعتبر مستقلا عن تعريف الدالة عند هذه النقطة فقـــد توجد نهاية للدالة عند نقطة غير معرفة عندها (مثال الدالة $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ عند س = ٢)

وقد لا توجد نهاية للدالة عند نقطة معرفة عندها مثال الدالة ٠

$$د (س) = \begin{cases} ٥ & ٠٠٠٠ \; س \; ٢ \\ ٤ & ٠٠٠٠ \; س \; ٢ \end{cases} \quad \text{عند س = ٢}$$

---

(١) نظلة حسن احمد خضر : مرجع سابق ، ص ٢٢٠٠

(٢) وزارة التربية والتعليم : مكتب وكيل الوزارة مستشار الرياضيات بالقاهرة(توجيهات) ٠

obeikandl.com

- عند تعيين نهاية الدالة عند س ← أ يجب أن تكون الدالة معرفة فى جوار أ ٠
- عند تعيين نهاية الدالة عندما س ← أ $^{+}$ يجب أن تكون الدالة معرفة فى يمين أ وكذلك عند تعيين نهاية الدالة عندما س ← أ $^{-}$ يجب كان تكون الدالة معرفة فى يسار أ ٠
- لبحث نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة عند النقطة التى يتغير عندها تعريف الداله يجب بحث النهاية اليمنى والنهاية اليسرى والمقارنة بينهما فاذا تساوت النهايتان فان للدالة نهاية وتساوي القيمة المشتركة للنهايتين ٠
- عند تعيين نهاية الدالة عند اللانهاية يجب أن تكون داله معرفة عند
- من تعريف نهاية الدالة عند اللانهاية يمكن أن نعامل الدالة د (س) عندما س ← ∞ كما لو كانت متتابعة وبذلك تنطبق جميع خواص نهايات المتتابعات على نهاية الدالة عند اللانهاية ٠

الوحدة الثالثة

الاشتقاق وتطبيقاته

اولا : الأهداف :

تهدف وحدة " الاشتقاق وتطبيقاته " الى تحقيق أهداف معرفية ووجدانية ومهارية على النحو الاتى :

(أ) الأهداف المعرفية

(١) معرفة بالنسبة الى حقائق ومعلومات مثل :

- دالة التغير ، دالة متوسطة التغير ، معدل التغير ، التفسير الهندسى لمعدل التغير ، المشتقة الاولى ، قابلية الاشتقاق ، المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى ، بعض قواعد الاشتقاق ، المشتقات العليا ، مشتقات الدوال المثلثية ، تطبيقات على المشتقة المعدلات الزمنية ، تفاضل الدوال المتجهة ، المعدلات الزمنية المرتبطة ٠
- بحث اشتقاق الدالة يجب أن يكون فى الفترة المعرفة عليها ٠
- اذا كانت الدالة معرفة بأكثر من قاعدة فانه يجب بحث المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى عند بحث اشتقاق الدالة عند النقطة التي يتغير عندها تعريف الدالة ٠

obeikandl.com

- عند دراسة قابليـــة الاشتقاق للدالة د (س) عند س = أ فاننا نبحث وجود نهايـــــة المقدار $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ عندما هـ ← ٠ ومن ثم فاننا نبحث النهايـة اليمنى والنهاية اليسرى لهذا المقدار وليس للدالة الاصلية ٠
- اذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق فانها تكون متصلة ولكن العكس غير صحيح يمكن أن تكون الدالة متصلة ولكنها غير قابلة للاشتقاق مثل د (س) = | س | ٠
- يشرح الطالب التفسير الهندسى للمشتقة الاولى ٠
- يحكم الطالب على أن الدالة قابلة للاشتقاق أو غير قابلة للاشتقاق عند النقطة المعطاه ٠
- يذكر الطالب رموز المشتقة الاولى وبعض قواعد الاشتقاق ٠
- يذكر الطالب مشتقات الدوال المثلثية ٠
- يثبت الطالب بعض نظريات الاشتقاق ٠

(٢) معرفة بالنسبة الى مصطلحات ومفاهيم

مفاهيم مثل :

مفهوم الاشتقاق (قابلية الاشتقاق) ، المشتقة اليمنى، المشتقة اليسرى ٠

(٣) معرفة بالنسبة الى التعميمات :

$$\frac{ك}{ك\ س}\left[ا\left(د + ر + ق + \cdots\right)\right](س) = \left(د' + ر' + ق' + \cdots\right) س$$

$$\frac{ك}{ك\ س}\left[ا\ د \cdot ر \cdot ق\right](س) = د' \cdot ر \cdot ق + ر' \cdot د \cdot ق + ق' \cdot د \cdot ر$$

(٤) بالنسبة الى مهارات عقليـة:

- أن يستنتج الطالب معادلتى المماس والعمودي المنحنى عند نقطة عليه ٠
- أن ينتقـــد الطالب بعض أجزاء من الوحدة ٠
- كتابة بعض البحوث القصيرة عن موضوعات مثل (الدالة الضمنية والاشتقاق الضمنى) ٠

obeikandl.com

- تنمية القدرة لدى الطلاب على التحليل وفهم وادراك العلاقات بين الاسباب والنتائج ٠
- تنمية القدرة لدى الطلاب على التثقيف الذاتى عن طريق القراء ة والاطلاع ومتابعة ما ينشر من موءلفات فى مجال التفاضل والتكامل ٠

(ب) الاهداف الوجدانية

تهدف دراسة الوحدة الثالثة الى اكتساب الطلاب اتجاهات وميول وقيم ايجابية على النحو التالى :

(١) بالنسبة الى الاتجاهات :

- يتعرف فى حياته العامه على حل المشكلات وذلك بالتعرف على الاشتقاق وتطبيقاته٠
- تقدير جهود العلماء والمكتشفين فى كشف ودراسة الاشتقاق وتطبيقاته ٠

(٢) بالنسبة الى الميول :

- اكساب الميل نحو تتبع موضوع الاشتقاق وتطبيقاته ٠
- الميل الى استخدام مصادر ومراجع اخرى غير الكتاب المدرسى ٠
- الميل الى عمل المجلات الحائطية والرسوم والاشكال التوضيحية الخاصة بالوحدة

(٣) بالنسبة الى القيم :

- تقدير قيمة المكتشفات العلمية الحديثة فى مجال الاشتقاق وتطبيقاته ٠

(ج) الاهداف المهارية

- اكساب الطلاب القدر المناسب من المهارات الحسابية٠
- أن يبرهن الطالب أنه اذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق فانها تكون متصلة والعكس غير صحيح ٠
- أن يبرهن الطالب بعض النظريات الخاصة بقواعد الاشتقاق ٠
- أن يحل الطالب بعض مسائل الاشتقاق وتطبيقاته مثل ايجاد معادلة المماس والعمودى٠
- أن يحدد الطالب متى تكون الدالة قابلة للاشتقاق ٠
- أن يرسم الطالب التفسير الهندسى للمشتقة الاولى ٠
- ان يحسب الطالب المشتقات من رتب أعلى لبعض الدوال ومشتقات الدوال المثلثة ٠

obeikandi.com

- أن يطبق الطالب ٠
  - الاشتقاق فى حل بعض المشكلات الرياضية والحياتيـــــة ٠
  - تفاضل الدوال المتجهة فى الميكانيكا ٠
  - المعدلات الزمنية البسيطة والمرتبطة فى تطبيقات الميكانيكا والحياة العملية ٠

ثانيا : المحتـــــــوى :

الاشتقـــــاق وتطبيقاتـــــــه

- دالة التغير ـ دالة متوسط التغير ـ معدل التغير

(أ) دالة التغير ت (هـ) = د (س$_{١}$ + هـ) ـ د (س$_{١}$) ٠

(ب) دالة متوسط التغير م (هـ) = $\frac{\text{د (س}_{١}\text{ + هـ) ـ د (س}_{١}\text{)}}{\text{هـ}}$ عند س = س$_{١}$

(جـ) معدل التغير = نهـــــا $\frac{\text{د (س}_{١}\text{ + هـ) ـ د (س}_{١}\text{)}}{\text{هـ}}$ (معدل التغير فـــــى
هـ ← ٠
المتغيـــر ص عند س = س$_{١}$)

- التفسير الهندسى لمعدل التغير ـ المشتقـــة الاولى ٠
  - ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة (س$_{١}$ ، د (س$_{٢}$))

= نهـــــا $\frac{\text{د (س}_{١}\text{ + هـ) ـ د (س}_{١}\text{)}}{\text{هـ}}$
هـ ← ٠

  - طاى = نهـــا $\frac{\text{د (س}_{١}\text{ + هـ) ـ د (س}_{١}\text{)}}{\text{هـ}}$
هـ ← ٠

  - نهـــا $\frac{\text{د (س + هـ) ـ د (س)}}{\text{هـ}}$ = عدد حقيقى عند كل قيمة للمتغيـــــر س
هـ ← ٠

أى أنها بدورها دالة فى س ويطلق عليها الدالة المشتقة أو المشتقة الاولى، المعامـل التفاضلى الاول أو معدل التغير ٠

  - رموز المشتقة الاولى ($\frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}}$ أو $\frac{\text{ك}}{\text{ك س}}$ (د (س)) أو صَ أو دَ (س) ٠

• $د'(س) = \frac{ك ص}{ك س} = نهـا_{هـ \to 0} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ} = نهـا_{س_1 \to س} \frac{د(س_1) - د(س)}{س_1 - س}$

$= نهـا_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$

- تفسير معنى المشتقة عن طريق السرعة اللحظية •

• $ع = نهـا_{\Delta ن \to 0} \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = نهـا_{\Delta ن \to 0} \frac{د(ن + \Delta ن) - د(ن)}{\Delta ن}$

- قابلية الاشتقاق :

• تكون الدالة ص = د (س) قابلة للاشتقاق عند النقطة س = أ اذا كان $(\frac{ك ص}{ك س})_{س = أ}$

لها وجود أى نها $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ لهـا وجود

$هـ \to 0$

• نظريـــة

اذا كانت الدالة ص = د (س) قابلة للاشتقاق عند س = أ فانها تكون متصلة عند نفس النقطة •

• نتيجة • عكس النظرية السابقة غير صحيح بمعنى أنه قد تكون الدالة متصلة عند نقطة ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة •

- المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى :-

$د'(س^+) = نهـا_{هـ \to 0^+} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$ ، $د'(س^-) = نهـا_{هـ \to 0^-}$

$\frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

- الشرط اللازم والكافي لوجود النهاية : وجود النهاية اليمنى واليسرى وتساوي هاتين النهايتين وعليه : د' (س) يكون لها وجود اذا وفقط اذا كان

(١) $د'(س^+)$ لها وجود (٢) $د'(س^-)$ لها وجود (٣) $د'(س^+) = د'(س^-)$

obeikandi.com

- بعض قواعد الاشتقاق :

• اذا كان ص = أ حيث أ ثابت فان $\frac{ك ص}{ك س}$ = صفر

• اذا كان ص = $س^{ن}$ حيث ن ∈ ص ، فان $\frac{ك ص}{ك س}$ = ن $س^{ن - ١}$

• $\frac{ك}{ك س}$ (أ د (س)) = أ $\frac{ك}{ك س}$ د (س)

• $\frac{ك}{ك س}$ [(د ± ر ± ق ± ٠٠٠٠) (س)] = (دَ + رَ + قَ + ٠٠) ((س)

• تفاضل حاصل ضرب دالتين ٠

• تفاضل خارج قسمة دالتين ٠

- مشتقة دالة الدالة ــ قاعدة التسلسل ٠

• نظرية : اذا كانت ص = د (ع) قابلة للاشتقاق بالنسبة الى ع

ع = ر (س) قابلة للاشتقاق بالنسبة الى س فان

ص = د [ر (س)] قابلة للاشتقاق بالنسبة الى س

$\frac{ك ص}{ك س} = \frac{ك ص}{ك ع} \times \frac{ك ع}{ك س}$ (تسمى هذه القاعدة بقاعدة التسلسل)

- نتيجة : اذا كانت ص = $ع^{ن}$ حيث ع دالة فى س وقابلة للاشتقاق عند س فان

$\frac{ك}{ك س}$ ($ع^{ن}$) = ن $ع^{ن - ١} \times \frac{ك ع}{ك س}$

- الدالة الضمنية ــ الاشتقاق الضمنى ٠

• مشتقة الدالة الضمنيـــة ٠

- المشتقات العليا ٠

- مشتقات الدوال المثلثية ٠

- مشتقات الدوال المثلثية العكسية ــ مشتقة الدالة الاسية ــ مشتقة الدالة اللوغارتيمية ٠

- تفاضل الدوال الزائدية ، تفاضل الدوال الزائدية العكسية ٠

obeikandl.com

- تطبيقات على المشتقـــة الاولى ٠

• معادلة كل من المماس والعمودى للمنحنى عند نقطة عليه

• معادلة المماس للمنحنى عند النقطة أ = (س$_{1}$ ، ص$_{1}$) هى

$$ص - ص_{1} = \left(\frac{ك ص}{ك س}\right)_{أ} (س - س_{1})$$

معادلة العمودى للمنحنى عند النقطة أ = (س$_{1}$ ، ص$_{1}$) هى

$$ص - ص_{1} = \frac{-1}{\left(\frac{د ص}{د س}\right)_{أ}} (س - س_{1})$$

- المعدلات الزمنيـــة :

• $ع = \frac{ك ف}{ك ن}$

• $حـ = \frac{ك ع}{ك ن} = \frac{ك^{٢} ف}{ك ن^{٢}} = ع \cdot \frac{ك ع}{ك ف}$

- تفاضل الدوال المتجهة :

باستخدام المتجهات	باستخدام القياسات الجبرية للمتجهات
(١) $\frac{ك \overrightarrow{ر}}{ك ن} = نهـا_{هـ \to ٠} \frac{\overrightarrow{ر}(ن + هـ) - \overrightarrow{ر}(ن)}{هـ} = \frac{ك \overrightarrow{ر}}{ك ن} \overrightarrow{ى}$	$\frac{ك ر}{ك ن} = نهـا_{هـ \to ٠} \frac{ر (ن+هـ) - ر (ن)}{هـ}$
(٢) $\overrightarrow{ف} = \overrightarrow{ر} - \overrightarrow{ر}$ ، $\frac{ك ف}{ك ن} = \frac{ك \overrightarrow{ر}}{ك ن} = \frac{ك ر}{ك ن} \overrightarrow{ى}$	ف = ر - ر٠ ، $\frac{ك ف}{ك ن} = \frac{ك ر}{ك ن}$
(٣) $\overrightarrow{ع} = \frac{ك \overrightarrow{ر}}{ك ن} = \frac{ك \overrightarrow{ف}}{ك ن}$	$ع = \frac{ك ر}{ك ن} = \frac{ك ف}{ك ن}$
(٤) $\overrightarrow{جـ} = \frac{ك \overrightarrow{ع}}{ك ن}$	$جـ = \frac{ك ع}{ك ن}$

- المعدلات الزمنية المرتبطـــة :

obeikandi.com

ثالثا : ارشادات للمعلم : :

- عند تدريس المشتقة يجب العناية بابراز وتوضيح اهمية الدوال التفاضلية .
- عند تقديم المشتقة يستحسن ان نوضح معناها بطرق حدسية ملموسة فى المراحل المبكرة عن طريق التفسير الهندسى والتفسير عن طريق المعدل اللحظى لتغير الدالة أو عن طريق السرعة اللحظية وبطريقة مجردة عن طريق المعالجة التجريدية للنهايات . (١)
- بحث اشتقاق الدالة يجب أن يكون فى الفترة المعرفة عليها الدالة .
- اذا كانت الدالة معرفة بأكثر من قاعدة فانه يجب بحث المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى عند بحث اشتقاق الدالة عند النقطة التى يتغير عندها تعريف الدالة .
- عند دراسة قابلية الاشتقاق للدالة د (س) عند س = أ فاننا نبحث وجود نهاية للمقدار $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ عندما هـ ← ٠ ومن ثم فاننا نبحث النهاية اليمنى والنهاية اليسري لهذا المقدار وليس للدالة الاصلية .
- تأكيدا للنقطة السابقة يجب أن يميز الطالب بين مفهوم المشتقة اليمنى (أو اليسرى) للدالة وبين مفهوم النهاية اليمنى (أو اليسرى) للدالة .
- يراعى الاهتمام بتقديم الامثلة العكسية لتأكيد المفاهيم الاساسية على سبيل المثال : اذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق فانها تكون متصلة ولكن العكس غير صحيح ويتضح هذا من دراسة الدالة د (س) = ا س ا فعلى الرغم من أنها متصلة عند س = ٠ فانها غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة .
- اذا كانت الدالة معرفة بأكثر من قاعدة يمين ويسار نقطة معينة فانه عند بحث قابلية الاشتقاق للدالة عند هذه النقطة فانه من الخطأ تطبيق قواعد الاشتقاق لايجاد المشتقة اليمنى أو المشتقة اليسرى للدالة لان هذا المبدأ غير صحيح دائما كأسلوب لاثبات تساوي المشتقين ومن ثم قابلية الاشتقاق .

مثال .

$$د(س) = \begin{cases} ٢س + ٣ & س \leq ١ \\ ٣س + ٥ & س > ١ \end{cases}$$

---

(١) انظر فى هذا الصدد على سبيل المثال :
نظلة حسن احمد خضر . مرجع سابق ص ٢٢٥ .

فالدالة فى هذه الحالة غير متصلة ومن ثم فهى غير قابلة للاشتقاق ، وعلى الرغم من ذلك فعند تطبيق قواعد الاشتقاق فان ناتجى المشتقة فى الحالتين متساويتان وكل منهما = ٠٢ وعند تطبيق التعريف فان المشتقة اليمنى = ٢ بينما المشتقة اليسرى = نهـا ($\frac{٢}{هـ}$ + ٢) غير معرفة
هـ ← ٠

الوحدة الرابعة

سلوك الدالة ورسم منحناها

تهدف وحدة سلوك الدالة ورسم منحناها الى تحقيق أهداف معرفية ووجدانية ومهارية على النحو التالى :

(أ) الأهداف المعرفية

يمكن للوحدة أن تحقق الكثير من الأهداف المعرفية الاتية:

(١) معرفة بالنسبة للحقائق والمعلومات مثل :

- الدوال المطردة ، استخدام المشتقة الاولى لدراسة تزايد وتناقص الدالة ، القيم العظمى والصغرى المحلية لدالة حقيقية ، تحديد القيم العظمى والصغرى المحلية ، القيم العظمى والصغرى المطلقة لدالة فى فترة مغلقة ، نقط الانقلاب ، التحدب لاعلى والتحدب لاسفل ٠
- أن يشرح الطالب تزايد وتناقص الدوال ٠
- أن يحدد الطالب متى تكون الدالة متزايدة فعلا أو متناقصة فعلا ٠
- أن يحكم الطالب على وجود نهاية عظمى أو صغرى ٠
- أن يتعرف الطالب علي القيم العظمى والصغرى المحلية والمطلقة٠
- أن يشرح الطالب بالرسم التحدب لاعلى والتحدب لاسفل ٠
- أن يقابل الطالب القيمة العظمى المحلية والصغرى المحلية بالقيمة العظمى المطلقة والصغرى المطلقة ٠
- أن يعرف الطالب أنه قد تتعدد القيم العظمى المحلية أو القيم الصغرى المحلية للدالة فى حين أن القيمة العظمى المطلقة أو الصغرى المطلقة تكون وحيدة القيمة ٠
- يذكر الطالب تعريف التحدب لاعلى والتحدب لاسفل ونقطة الانقلاب ٠

obeikandl.com

(٢) بالنسبة الى المصطلحات والمفاهيم :

النهاية العظمى المحلية ، النهاية الصغرى المحلية ، نقطة الانقلاب ، التحـــــــدب لاعلى والتحدب لأسفل ٠

(٣) بالنسبة الى التعميمات:

ـ ان يستخدم الطالب القيم العظمى والصغرى المحلية ونقطة الانقلاب فى رســـــــم المنحنيات ٠

(٤) بالنسبة للمهارات العقلية :

ـ أن يستنتج الطالب الخصائص المشتركة بين النهايات العظمى والصغرى المحلية ٠

ـ ان ينتقد الطالب موضوعا من موضوعات الوحدة ٠

ـ ان يكتب بعض البحوث القصيرة عن أي موضوع من موضوعات الوحدة ٠

(ب) الأهداف الوحدانيـــــــة

تهدف دراسة الوحدة الرابعة الى اكتساب الطلاب اتجاهات وميول وقيم ايجابية علـــــى النحو التالى ٠

(١) بالنسبة للاتجاهات :

ـ تكوين اتجاه ايجابى لدى الطلاب نحو الاهتمام بدراسة موضوع النهايات العظمى والصغري وتطبيقاته ٠

ـ تقدير أهمية النهاية العظمى والصغري فى تطبيقات الحياة العملية ٠

(٢) بالنسبـــة للميـــول :

تهدف دراسة الوحدة الرابعة الى اكساب الطلاب الميول الاتية :

ـ الميل نحوتتبع موضوع الاشتقاق وتطبيقاته ٠

ـ الميل الى دراسة موضوع النهايات العظمى والصغرى وتطبيقاته ٠

ـ الميل الى استخدام مصادر ومراجع اخرى ٠

ـ الميل الى عمل المجلات الحائطية والرسوم والاشكال التوضيحية الخاصة بموضوعـــات الوحدة ٠

obeikandi.com

(٣) القـيم :

- تهدف دراسة الوحدة الرابعة الى اكتساب الطلاب القيم الاتية ٠
- التقدير عن طريق تطبيقات النهايات العظمى والصغرى فى الحياة العملية٠
- الدقـــــة فى رسم منحنيات الدوال ٠

(ج) الاهـــــداف المهاريـــــة

تهدف دراسة الوحدة الى اكتساب الطلاب الاهداف المهارية الاتية :

- المهارة فى برهنـــة النظريات الخاصة بالنهايات العظمى والصغرى ٠
- المهارة فى حـــل بعض المسائل على النهايات العظمى والصغرى ٠
- المهارة فى تحديد مناطق التزايد والتناقص ٠
- المهارة فى تحديد مناطق التحدب لاعلى والتحدب لاسفل فى رسم المنحنيات ٠
- المهارة فى رسم منحنيات الدوال حتى الدرجة الثالثة ٠
- المهارة فى الحساب النهاية العظمى والصغرى لدالة ٠
- المهارة فى تطبيق موضوع النهايات العظمى والصغرى فى كيفية رسم المنحنيات، وفـــــى الحياة العملية ٠

ثانيا : المحتوى : سلوك الدالـــــة ورسم منحناهـــــــا

- الدوال المطردة (تزايد وتناقص الدوال) :-

تعريف : يقال أن الدالة د متزايدة فى الفترة] أ ، ب [اذا كانت معرفة فيها وكان

د (س١) < د (س٢) لكل س١ < س٢ فى هذه الفترة ٠

تعريف : يقال أن الدالة د متناقصة فى الفترة] أ، ب [اذا كانت معرفة فيها وكان

د (س١) > د (س٢) لكل س١ < س٢ فى هذه الفترة ٠

- استخدام المشتقة الاولى لدراسة تزايد وتناقص الدالة :-

نظرية : اذا كانت الدالة د متصلة فى الفترة] أ ، ب [وقابلة للاشتقاق فى] أ،ب [فـــان

١ - اذا كان د' (س) > ٠ لكل س ∈] أ، ب [فان الدالة د تكون متزايدة فعلا فى] أ، ب [

٢ - اذا كان د (س) < ٠ لكل س ∈] أ، ب [فان الدالة د تكون متناقصة فعلا فى] أ، ب [

٣ - اذا كان د (س) = ٠ لكل س ∈] أ، ب [فان الدالة تكون ثابتة ٠

٤ - اذا كان د (س) ≥ ٠ لكل س ∈] أ،ب [فان الدالة د تكون متزايدة فى] أ، ب [٠

٥ - اذا كان د (س) ≤ ٠ لكل س ∈] أ، ب [فان الدالة د تكون متناقصة فى] أ،ب [٠

obeikandi.com

ـ القيم العظمى والصغرى المحلية لدالة حقيقيـــــة :

تعريف : اذا كانت د دالة معرفة على]أ،ب[فاننا نقول أن لها قيمة عظمى محليـــــة عند النقطة س١ ∈]أ، ب[اذا وجد جوار ج (س١) بحيث د (س١) ≥ د (س) لكل س ∈ ج (س١) ٠

تعريف : اذا كانت د دالة معرفة على]أ، ب[فاننا نقول أن لها قيمة صغـــــــرى عند النقطة س٢ ∈]أ، ب[اذا وجد ج (س٢) بحيث أن د (س٢) ≤ د(س) لكـــل س ∈ ج (س٢) ٠

نظرية : اذا كانت الدالة د المعرفة على] أ، ب[قابلة للاشتقاق عند س١ ∈]أ ، ب[وكان للدالة قيمة عظمى أو صغرى محلية عند س١ فان دَ (س١) = صفر

ـ تحديد القيم الصغرى المحلية والعظمى المحلية :ـ

نظرية : اذا كان دَ (س) > ٠ على يسار س١ فى ج (س١) وكان دَ (س) < ٠ علـــى يمين س١ فى نفس الجوار فان س١ تكون نقطة للدالة عندها قيمة عظمى محلية ٠

نظرية : اذا كان دَ (س) < ٠ على يسار س٢ فى ج (س٢) وكان دَ (س) > ٠ علـــى يمين س٢ فى نفس الجوار فان س٢ تكون نقطة للدالة عندها قيمة صغري محلية ٠

نظرية : اذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق على ج (س١) وكان

دَ (س١) = ٠ ، دً (س١) < ٠ فان س١ تكون نقطة للدالة عندها قيمة عظمى محلية ٠

نظرية : اذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق على ج (س٢) وكان

دَ (س٢) = ٠ ، دً (س١) > ٠ فان س٢ تكون نقطة للدالة عندها قيمة صغرى محلية

ـ القيم العظمى والصغرى المطلقة لدالة فى فترة مغلقة :ـ

تعريف : اذا كانت الدالة د معرفة فى]أ، ب[فان القيمة المطلقة لها فى هذه الفتـرة هى أكبر قيمة فى مجموعة قيم الدالة { د (س) : س ∈]أ، ب[}

تعريف : اذا كانت الدالة د معرفة فى]أ، ب[فان القيمة الصغرى المطلقـــــة لها فى هذه الفترة هى أصغر قيمة فى مجموعة قيم الدالة { د (س) : س ∈]أ، ب[}

تعريف : يقال أن س١ نقطة حرجة للدالة د اذا تحقق أحد الشرطين الاتيين :

(١) دَ (س١) موجودة وتساوى الصفر (٢) دَ (س١) غير موجودة ٠

ـ حساب القيم العظمى والصغري المطلقـــة لدالة متصلة فى فترة معلقة ٠

ـ تطبيقات على القيم العظمى والصغري المطلقة ٠

ـ التحدب الى أعلى والتحدب الى أسفل ونقط الانقلاب ٠

openkanali.com

• نظرية : لتكن د متصلة فى [أ ، ب] وقابلة للاشتقاق مرتين فى] أ ، ب [

(١) اذا كان د ً (س) > ٠ فى منطقة ما فان المنحنى يكون محدبا لاسفل فى هذه المنطقة ٠

(٢) اذا كان د ً (س) < ٠ فى منطقة ما فان المنحنى يكون محدبا لاعلى فى هذه المنطقة ٠

• تعريف نقط الانقلاب ٠

لتكن د معرفة ومتصلة على [أ ، ب]

النقط التى ﺟ] ا ، ب [وتفصل بين مناطق التحدب الى أعلى والى أسفل تسمى نقط الانقلاب ٠

ـ رسم منحنيات الدوال ٠ الخطوط التقاربية الرأسية والافقية والمائلة فى رسم المنحنيات ٠

ثالثا : الارشادات :

• يوجد أنواع مختلفة من النهايات العظمى والصغري ويستحسن أن يوضح المعلم الفرق بينها اما عن طريق الرسم البيانى واعطاء فكرة ملموسة أو عن طريق التعريفات والمعالجة المجردة حسب مستوى الطالب ومعلوماته السابقة ٠

• قد تتعدد القيم العظمى المحلية أو القيم الصغرى المحلية للدالة فى حين أن القيمة العظمى المطلقة والصغرى المطلقة تكون وحيدة القيمة ٠

• لا مجال للمقارنة بين القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية للدالة حيث أن العظمى أو الصغرى تكون بالمقارنة لقيم الدالة فى جوار معين ٠

• عند بحث التحدب ونقط الانقلاب (ابحث اتصال الدالة على فترة تعريفها ـ أوجد د ً (س) وابحث اشارته بعد تعيين جذوره (اصفاره) ـ عين النقط من بين جذور د ً (س) والتى بجوارها تتغير اشارة د ً (س) فتكون هى نقط الانقلاب ٠

الوحدة الخامسة

التكامل وتطبيقاته

اولا : الاهداف :

تهدف وحدة التكامل وتطبيقاته الى تحقيق أهداف معرفية ووجدانية ومهارية على النحو التالى :

(أ) الاهـــداف المعرفيـــــة

يمكن للوحدة أن تحقق الكثير من الأهداف المعرفيـــة الاتية :

(١) معرفة بالنسبة للحقائق والمعلومات مثل :

- تجزىء فترة مغلقة ، الدالة الثابتة ، المعنى الهندسى للتكامل ، خواص التكامـــل المشتقة العكسية ، النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل ، بعض تطبيقات التكامـــل مثل ايجاد مساحات المناطق المستوية ، ايجاد معادلة منحنى اذا علم ميل المماس عند أى نقطة عليه ، ايجاد المسافة بمعلومة السرعة وايجاد السرعة بمعلومية العجلـــة ، وايجاد حجوم بعض الاجسام مثل (المخروط ، المخروط الدائرى القائم ، الناقـــص ، الكرة ، القطعة الكروية ، القطاع الكروي) .

(فهم)

- أن يشرح الطالب المعنى الهندسى للتكامل .
- أن يستنبط الطالب الصور المختلفة لطرق التكامل .
- أن يوضح الطالب النظرية الاساسية فى التفاضل والتكامل .
- أن يستنبط الطالب التطبيقات المختلفة على التكامل .
- أن يفسر الطالب كيفية ايجاد بعض مساحات المناطق المستوية .
- أن يربط الطالب بين التكامل والفروع الاخرى للرياضيات .
- أن يطبق التكامل فى موضوعات رياضية أخرى .
- أن يستخدم الطالب حساب التفاضل والتكامل فى حل بعض المسائل فى الميكانيكا .
- أن يذكر الطالب بعض قواعد التكامل .

(٢) بالنسبة للمصطلحات والمفاهيم

مفاهيم ... مفهوم التكامـــل .

(٣) بالنسبة الى المهارات العقلية .

- تدريـــــب الطلاب على التحليل وفهم وادراك العلاقات بين الاسباب والنتائج .
- تعويـــــد الطالب الاطلاع ومتابعة ما ينشر عن التكامل .

obeikandl.com

(ب) الاهـــــداف الوجدانيـــــــة

تهدف دراسة الوحدة الخامســـة الى اكتساب الطلاب اتجاهات وميول وقيم ايجابيـــــة على النحو التالى :

(١) بالنسبة الى الاتجاهات:

- تكوين اتجاه ايجابى لدى الطلاب نحو الاهتمام بدراسة التكامل .
- تقدير جهود العلماء والمكتشفين فى كشف ودراسة التكامل .

(٢) بالنسبة الى الميول :

تهدف دراسة الوحدة الخامسة الى اكتساب الطلاب الميول الاتية :

- الميل نحو تتبع موضوع التكامل وتطبيقاته فى الحياة العملية .
- الميل الى استخدام مصادر ومراجع اخرى غير الكتاب المدرسى .
- الميل الى عمل المجلات الحائطية والرسوم والاشكال التوضيحية الخاصة بالتكامل .

(٣) بالنسبة الى القيم :

تهدف دراسة الوحدة الى اكتساب الطلاب القيم الاتية .

- يتعلم تقييم نفسه وذلك بمعرفة اخطائه وتصحيحها حتى يصبح ذلك سلوكا عاما له.
- الدقة فى ايجاد بعض المساحات والحجوم .
- أن يقبل الطالب الطرق المختلفة لحل المسائل .
- قيمة العمل الجماعى من خلال الدراسة والمشاركة فى نشاط جمعيات الرياضيات .

(ج) الأهـــــداف المهاريـــــــــة

تهدف دراسة الوحدة الى اكتساب الطلاب الاهداف المهارية الاتية :

- المهارة فى رســـــم الاشكال التوضيحية والرسوم الخاصة بموضوعات الوحدة .
- المهارة فى برهنة النظريات الخاصة بالتكامل .
- المهارة فى حـــل بعض التطبيقات فى الميكانيكا والهندسة الفراغية باستخدام التكامل .
- المهارة فى حساب التكامل المحدود لبعض المقادير .
- المهارة فى تطبيق التكامل فى حل بعض المشكلات الرياضية والحياتية .

obeikandl.com

ثانيا : المحتـــــــوى :

التكامـــــــل

- تجزىء فترة مغلقـــة ٠
- مفهوم التكامل ٠
  - التمهيد بتكامل الدوال السلمية ٠
  - التكامل المحدد كنهايـــة مجموع ٠

تعريف :

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\,ك\,س = \text{نهـــا}_{ن \to \infty} \sum_{ر=1}^{ن} د(ق_ر) \cdot \Delta س_ر$$

نظرية :

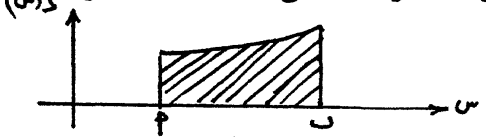
اذا كانت الدالة د متصلة فى فترة مغلقة فانها تكون قابلة للتكامل على هذه الفتـــــــرة

- الدالة الثانية :

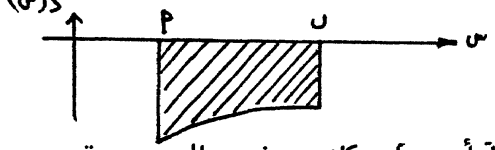
نظرية : الدالة الثابتة د : د (س) = ث حيث ث عدد حقيقى قابلة للتكامل علـــــــى أى فترة [أ ، ب] كما أن $\int_{أ}^{ب} ث\,ك\,س = ث(ب - أ)$ حيث ث = ثابت ٠

- المعنى الهندسى للتكامل :

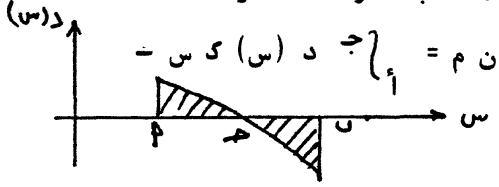
قاعدة (١) : اذا كانت د دالة متصلة فى الفترة [أ ، ب] وكانت غير سالبة فى هذه الفتـــــرة فان م = $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ك\,س$



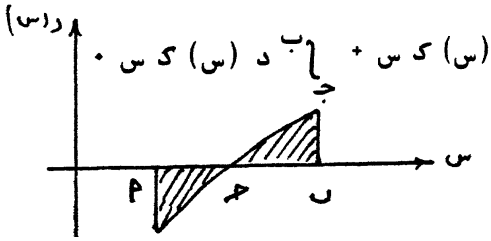
قاعدة (٢) : اذا كانت د متصلة فى الفترة [أ ، ب] وكانت غير موجبة فى هذه الفترة فـــان م = $-\int_{أ}^{ب} د(س)\,ك\,س$



قاعدة (٣) : اذا كانت د متصلة فى [أ ، ب] ، جـ ∈ [أ ، ب] وكانت د غير سالبـــــة فى [أ ، جـ] وغير موجبـــة فى [جـ ، ب] فان م = $\int_{أ}^{جـ} د(س)\,ك\,س - \int_{جـ}^{ب} د(س)\,ك\,س$ ٠



قاعدة (٤) اذا كانت د متصلة فى [أ ، ب] ، جـ ∈ [أ ، ب] وكانت د غير موجبة فى [أ ، جـ] وغير سالبة فى [جـ ، ب] فان م = $-\int_{أ}^{جـ} د(س)\,ك\,س + \int_{جـ}^{ب} د(س)\,ك\,س$ ٠



obeikandi.com

ـ تعريفان هامان :

تعريف $\int_{أ}^{أ} د(س)\,ك س = صفر$

تعريف $\int_{ب}^{أ} د(س)\,ك س = - \int_{أ}^{ب} د(س)\,ك س$

ـ خواص التكامل :

(١) اذا كانت د (س) دالة متصلة على الفترة [أ، ب] ، جـ عدد حقيقى فـــــــان

$\int_{أ}^{ب} جـ \cdot د(س)\,ك س = جـ \int_{أ}^{ب} د(س)\,ك س$

(٢) $\int_{أ}^{ب} [د_١(س) \pm د_٢(س) \pm د_٣(س)]\,ك س = \int_{أ}^{ب} د_١(س)\,ك س \pm \int_{أ}^{ب} د_٢(س)\,ك س$

$\pm \int_{أ}^{ب} د_٣(س)\,ك س$

(٣) اذا كانت الدالة د قابلة للتكامل على [أ، ب] وكانت د (س) ≥ ٠ لكل س ∈ [أ، ب]

فان $\int_{أ}^{ب} د(س)\,ك س \geq$ صفر

(٤) اذا كانت جـ ∈ [أ، ب] وكانت الدالة د قابلة للتكامل على كل من الفترتيـــــــــن

[أ، جـ] ، [جـ ، ب] فان د تكون قابلة للتكامل على [أ، ب]

$\int_{أ}^{ب} د(س)\,ك س = \int_{أ}^{جـ} د(س)\,ك س + \int_{جـ}^{ب} د(س)\,ك س$

ـ المشتقة العكسية :

• تعريف : اذا كان لدينا دالة متصلة د وأمكن ايجاد دالة ي قابلة للاشتقاق عند كـــل نقطة فى مجال الدالة د بحيث كان ى' (س) = د (س) فان ى (س) تسمـــــــى دالة مشتقة عكسية أو دالة أصلية مقابلة للدالة د ٠

$ى(س) = \int د(س)\,ك س \iff ى'(س) = د(س)$

نظرية :

$\int (س^{ن})\,ك س = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$ حيث ن ≠ - ١ ، ث ثابت

obeikandi.com

خصائص التكامل :

(١) $\int (أ س^{ن}) \, ك س = أ \int (س^{ن}) \, ك س = \frac{أ س^{ن+1}}{ن+1} + ث$ حيث أ، ث ثابتان

(٢) $\int [د_{١}(س) + د_{٢}(س)] \, ك س = \int د_{١}(س) \, ك س + \int د_{٢}(س) \, ك س$

نظريـــة :

$\int (أ س + ب)^{ن} \, ك س = \frac{(أ س + ب)^{ن+1}}{ن+1} + ث$

- تكامل بعض الدوال المثلثية ـ تكامل بعض الدوال الزائديـــة .
- النظرية الاساسية للتفاضل والتكامل .

اذا كانت الدالة د متصلة فى الفترة المغلقة [أ، ب] وكانت ى مشتقة عكسيـــة لهذه الدالة فى هذه القترة فان $\int_{أ}^{ب} د(س) \, ك س = ى(ب) - ى(أ)$ وتسمـــى هذه بالنظريـــة الاساسية للتفاضل والتكامـــل .

- بعض تطبيقات التكامل :

اولا : مساحات المناطق المستوية .

من الممكن استخدام التكامل فى المشكلات المتعلقة بحساب مساحة منطقة واقعـــة بين منحنيين .

ثانيا : تطبيقات هندسية وفيزيائية .

أ ـ ايجاد معادلة منحنى اذا علم ميل المماس عند أى نقطة عليه .

ب ـ ايجاد المسافة بمعلومية السرعة وايجاد السرعة بمعلومية العجلة .

- حجوم الاجسام الدورانية .
- تعريف الجسم الدورانى
- حجم الجسم الدورانى المتولد من دوران منطقة مستوية محدودة بمنحنى فى فترة ف

Washer Method: $V = \int_{a}^{b} [(\text{outer radius})^2 - (\text{Inner radius})^2] dx$

Shell Method: $V = \int_{a}^{b} 2 \, (\text{radius}) \, (\text{height}) dx$

obeikandl.com

- حجوم بعض الاجسام عَن طريق التكامل ٠
  - حجم المخروط الدائرى القائم ٠
  - حجم المخروط الدائرى القائم الناقص المتوازى القاعدتين ٠
  - حجم الكـــرة ٠
  - حجم القطعة الكروية ٠
  - حجم القطاع الكروى ٠

ثالثا : الارشـــادات :

- تدريس التكامل غير المحدود كعملية معكوسة للتفاضل لا يمثل صعوبة للتلاميذ (١) الا أن تقديم التكامل كعملية معكوسة للتفاضل قد لا يساعد على فهم (معنى) المفاهيم الاساسية للتكامل المحدود وتطبيقاتها مثل ايجاد طول القوس ، والحجوم والمساحات بالاحداثيات القطبية وعزم القصور الذاتى ،ومركز الثقل ٠
- تتجه بعض البرامج الحديثة الى تقديم مفهوم التكامل عن طريق التكامل المحدود ثم الانتقال الى التكامل غير المحدود عن طريق النظرية الاساسية فى التفاضل والتكامل ٠
- عند تدريس التكامل المحدود٠ (وكما فى حالة تدريس المشتقة يستحسن ان نقدم التكامل بطرق حدسية ملموسة فى المراحل المبكرة عن طريق النواحى الهندسية وحتى نتدرج فى المعالجة التجريدية الخاصة بنمو مفهوم التكامل يمكن التمهيد بتكامل الدوال السلمية وعن طريق التكامل المحدود كنهاية مجموع (بطريقة مأخوذة عن ريمان) مع التدرج من الطرق الحدسية الى المجردة فى العرض ٠

** فى نهاية الهيكل العام المقترح الذى تم عرضه فى الصفحات السابقة يرى الباحث "انه بالاستفادة من الدراسات السابقة ومن استبيانات الاساتذة الجامعيين وطبيعة التفاضل والتكامل الصارمه ومن الصعوبات التى لمسناها من التجريب على طلبة الصف الثالث الثانوى ، ومن أن هذا المحتوى لابد أن يشمل على تعاريف ونظريات عديدة "

ان هذا المحتوى يبدأ تدريسه من الصف الاول الثانوى بمدخل حلزونى ملموس وموزع على الصفوف الثلاثة حتى لا تتكدس التعارف فى صف دراسى واحد ويكون هذا المحتوى ضمن مقررات الهندسة التحليلية والميكانيكا والجبر والفيزياء٠

---

(١) نظله حسن احمد خضر : مرجع سابق ص ٢٤٢٠