[٦]

الإبداع وتدريس الرياضيات

تمهيد:

إن التطورات المعاصرة فى مجال الرياضيات كمادة علمية، صاحبها ظهور اتجاه يؤكد أهمية تعليم الرياضيات كمنهج دراسى من أجل تنمية الإبداع. ويمكن تحقيق هدف تنمية الإبداع الرياضى من خلال تعليم وتعلم الأنشطة الإثرائية المصاحبة لتعليم وتعلم مقرر الرياضيات، سواء أكان ذلك على مستوى التلاميذ العاديين أم الموهوبين.

ويمكن تفعيل دور الأنشطة الإثرائية الرياضية، إذا:

١ ـ إتسمت بالتدرج من السهل إلى الصعب، ومن المحسوس إلى المجرد.

٢ ـ تنوعت فى مفاهيمها ومضامينها وأهدافها.

٣ ـ اعتمدت فى تدريسها على مداخل وأساليب تعليم مختلفة.

٤ ـ إستندت على موضوعات تتحدى ذكاء التلاميذ قليلا.

٥ ـ ارتبطت بموضوعات رياضية سبق للتلاميذ دراستها.

٦ ـ تضمنت مجالات اكتشافية يرغب التلاميذ فى معرفتها.

٧ ـ استطاعت أن تشحذ همم التلاميذ، وتثير دوافعهم للتعلم بصفة مستمرة.

إن تحقيق ما تقدم، بجانب وجود معلم واع، ومتمكن أكاديميًا وتربويًا ومهنيًا، يعنى أن العملية التعليمية التعلمية لمادة الرياضيات تسير بطريقة صحيحة على

أساس منهجية الإبداع فى الرياضيات، حيث تؤكد هذه المنهجية وجود الإبداع بدرجات متفاوتة عند جميع التلاميذ بلا استثناء، وإذا كان الأمر بحاجة إلى الإيقاظ والتدريب لبعضهم، وإلى استخدام مداخل تدريس مناسبة للبعض الآخر.

وفى شأن الإبداع الرياضى عند التلاميذ، ننوه إلى أنهم أفراد ما زالت خبرتهم محدودة، ومازالوا تحت التدريب، ومازال بعضهم لم تكتمل قدراتهم الذهنية وإمكاناتهم العقلية، وخاصة الصغار منهم، ولذلك لا يجب النظر إليهم كمكتشفين لنظريات جديدة، وكقادرين على حل المشكلات الرياضية الشائكة والعويصة، وإنما ينظر إلى التلميذ المبدع ـ بدءً من المرحلة الإبتدائية وإنتهاءً بالمرحلة الثانوية ـ بأنه فى حدود إمكاناته الجسدية والذهنية، يستطيع أن يأتى بحل للمسألة غير معروف لديه سلفًا، أو أنه يقدر على مواجهة معضلة رياضية تتحدى ذكاءه قليلا، أولا يعتمد على الآخرين وإنما يعمل بجهده الذاتى دون كلل أو ملل ليصل إلى الحل الصحيح.

أولاً: الإبداع فى الرياضيات

إن صلة الإبداع بالرياضيات تتميز بالتكامل، وأحيانا تصل إلى درجة التلازم والوجوبية، لأن الرياضيات فى حد ذاتها تقوم على مجموعة من البنى والنظريات والبراهين التى تحتاج إلى إمعان وإعمال العقل فيها، والتى تمثل وهجات ذهنية قابلة للإبداع فيها لكى ما تظهر مجموعة من الأنساق الرياضية الجديدة، أو لكى تظهر ـ على أقل تقدير ـ مجموعة من الاستخدامات الوظيفية والحياتية المعاصرة، حيث يكون للرياضيات اليد الطولى فيها.

وعلى مستوى آخر، فإن علاقة الإبداع بتطوير الرياضيات علاقة موثوق فى صحتها، وأكيدة فى وجودها، إذ على جهود المبدعين الرياضيين يتحقق تطوير الرياضيات، وتتقدم أنظمتها المختلفة، حيث يتم:

١ ـ وضع نظريات جديدة.

٢ ـ تقديم براهين مستحدثة.

٣ ـ بناءفروض قابلة للتحقق والإثبات.

٤ ـ مراجعة نظريات ونماذج قديمة للأخذ بما يناسب العصر، وإهمال الباقى.

وتوجد أربعة مفاهيم للإبداع فى ضوء علاقته بالرياضيات، وهى:

[١] الإبداع كمرادف للتعبير الذاتى:

لأن العواطف تكون حبيسة داخل الإنسان، لذلك فإن الرياضى المبدع يطلق العنان لتلك العواطف، ليس فقط فى مجال مادة الرياضيات، وإنما أيضا يمكنه تحقيق ذلك فى مجالات متنوعة، وبذلك يتحرر المبدع الرياضى مما يختلج داخله من انفعالات وتوترات، معبرًا عن ذاته الإنسانية بذكاء وموضوعية وعقلانية.

[٢] الإبداع كأساس يحافظ على المنطقية العاقلة والمعقولة:

حيث أن المنطقية العاقلة والمعقولة هى أساس الإبداع اللغوى، فإنه يمكن تحقيق ذلك أيضا فى الرياضيات، إذ تتكون من مجموعة من الكلمات والتعبيرات المضبوطة، كما تتركب من مجموعة القواعد المنطقية الصحيحة، ولذلك فإن الرياضى المبدع بمجرد أن يتعلم أساسيات الرياضيات، يستطيع منفردًا أن يضع مجموعة من المسلمات غير المتناقضة، وأن يستنتج قواعد وقوانين جديدة، وأن يستغل ذلك فى تشييد بناءات وتراكيب رياضية حديثة ومعاصرة.

[٣] الأصالة:

يتمكن الرياضى المبدع من تحقيق إستراتيجيات رياضية جديدة وغير نمطية، تساعده وتساعد الآخرين فى إجراء العمليات الرياضية، التى تحمل فى معناها ودلالاتها معنى ومضمون الاستكشاف.

[٤] الإبداع الجمالى:

لأن الإنسان يستطيع أن يتعلم من مظاهر ونواحى الجمال من حوله، سواء أكان ذلك طبيعيًا (البيئة من حول الإنسان)، أم صناعيا (الاختراعات والاكتشافات الحديثة)، فإن المبدع الرياضى ينظر إلى الرياضيات كفن جميل أصيل، له وجوده المعنوى والمادى على السواء، وله استخداماته الشخصية والعامة أيضا.

على سبيل المثال، يتجلى الإبداع الجمالى فى الرياضيات، فى:

- القدرة على إنتاج طرق غير معروفة من قبل، أو غير عادية، فى حل المسائل الرياضية.
- القدرة على الربط بين المعطيات والمطلوب إثباته، ووضع خطة غير مألوفة، أو خريطة لتحقيق هذه القدرة إجرائيًا.
- القدرة على تحليل المسائل بطرق متعددة، بحيث لا يكون الهدف من ذلك مجرد الوصول إلى الحل وتحقيقه، إنما بجانب ذلك، تحديد التشابه والاختلاف.
- القدرة على حل المشكلات الرياضية غير المألوفة، مع إمكانية تقديم حلول متنوعة لها.
- القدرة على تحقيق اكتشافات رياضية، غير معروفة من قبل للتلاميذ، على أساس مستوى دراستهم.
- القدرة على اكتشاف المغالطات الرياضية، والتعامل معها بذكاء وحنكة بما يسهم فى تصحيحها.
- القدرة على اكتشاف الأنماط الرياضية، وعلى بناء النماذج الرياضية العامة، وأيضا النماذج التى تخص حل كل مسألة من المسائل الرياضية.
- القدرة على حل الألغاز الرياضية، والتعامل مع الأحاجى الرياضية بتمكن رائع.

وجدير بالذكر أن جوهر العملية الإبداعية فى الرياضيات يتجلى واضحًا، إذا استطاع المدرس أو التلميذ الخروج عن نمطية التفكير الرياضى، وأيضا إذا تغلبا على الجمود الفكرى عند التعامل مع المسائل الرياضية، إذ إن قدرة الرياضيات الإبداعية لهى قدرة رائعة، إذ عن طريقها يمكن إنتاج عديد من الإجابات الأصيلة والمتنوعة فى المواقف الرياضية مفتوحة النهاية.

وحقيقة الأمر أن الإبداع الرياضى هو القدرة على إنتاج أصيل Produce Original، يظهر فى تقديم حلول غير عادية للمشكلات الرياضية، كما يمكن استخدامه تطبيقيا ووظيفيا فى حل عديد من المعضلات الحياتية، التى تقابل التلاميذ فى حياتهم العملية.

ويمكن تحديد العوامل العقلية الإبداعية المهمة فى تدريس وتعلم الرياضيات، فى الآتى:

- التعامل مع الرياضيات كأبنية وتراكيب من العلاقات المجردة.
- استخدام خط الأعداد فى فهم العمليات الأساسية الأربعة فى الحساب (الجمع والطرح والضرب والقسمة).
- ترجمة الصياغات اللفظية وتجريدها فى صياغات رمزية.
- تطبيق الاستدلال المنطقى والتتابعى الذى يرتبط بالبرهان والاستنباط.
- جمع المفاهيم الرياضية فى صياغات تعميمية.
- الانتقال من السهل إلى الصعب، ومن المحسوس إلى المجرد فى حل المسائل الرياضية.
- تفكيك الأبنية والتراكيب الرياضية إلى مفاهيمها الأولية.
- الانتقال من طريقة مباشرة إلى طريقة غير مباشرة، فى التعامل مع القضايا والمشكلات الرياضية.

- ربط المعطيات بالمطلوب فى خطوات منطقية صحيحة.
- القيام بعمليات تفكير عكسية تبدأ بالمطلوب تحقيقه لتصل إلى المعطيات الواردة فى المسائل الرياضية.
- مرونة التفكير الرياضى وتشعبه، بما يسهم فى تحقيق تفكير رياضى منظومى.
- تأكيد قوة الذاكرة الرياضية وتشعبها.
- التعامل مع المفاهيم المكانية بما يحقق قدرة هائلة فى تحقيق التصور المكانى، الذى عن طريقه يمكن فهم وإدراك العلاقات على أساس البعد الثالث.

ثانيًا: تنمية الإبداع فى تعليم وتعلم الرياضيات

من منطلق أن النجاح يولد مزيدًا من النجاح، فإن الإبداع ـ أيضًا ـ يولد مزيدًا من الإبداع، فى أى مجال من المجالات: النظرية والعملية.

وفيما يخص تعليم وتعلم الرياضيات، وفقا لما جاء بمعايير (NCTM, 1989)، فإن كل تلميذ يكون قابلا للقيام بأنشطة إبداعية، وتحقيقه لذلك، يرقى بمستوى إبداعاته فى مادة الرياضيات، وذلك تحت الشروط التالية:

- تطبيق مبدأ العدالة والمساواة فى تعليم وتعلم الرياضيات بالنسبة لجميع التلاميذ.
- التأكد من وجود توقعات متساوية وعالية عند التلاميذ بالنسبة لتعلمهم مادة الرياضيات.
- العمل على تقديم تدعيم قوى لقدرات التلاميذ الرياضية.
- التركيز على التفكير والاستدلال فى تعليم الرياضيات، مع الاهتمام قليلا بالحسابات والمسائل الروتينية.
- تطوير برامج ومواد تعليم الرياضيات المقررة، على أساس مشاركة التلاميذ فى هذه العملية.

- التدريب والمران على المستحدثات التى تسهم فى تنمية الإبداع فى تعليم وتعلم الرياضيات.

ويمكن تنمية الإبداع لدى التلاميذ فى تعلمهم لمادة الرياضيات، على أساس التصور التالى، الذى يقوم على ثلاثة أبعاد، هى:

[١] الأهداف:

ولتحقيق الأهداف بدرجة عالية من الكفاءة والدقة والموثوقية بما يؤكد إبداعاتها المنشودة، يجب أن يساعد المدرس التلاميذ على تنمية إبداعاتهم من خلال:

- التخلص من معوقات الإبداع.
- رسم الخطط المناسبة لاكساب مهارات الإبداع.
- تفعيل أساليب التدريب على استخدام الإبداع تعلميا.

[٢] الاستراتيجيات:

وتمثل الأساليب التى تستخدم فى تنمية الإبداع، مثل:

- تقديم مواقف تعلم مفتوحة النهاية.
- الربط بين عناصر متباعدة، واستخدام المعلومات المتوافرة فى مجال معلوم لحل مشكلات غير معلومة فى المجال نفسه، أو فى مجال آخر.
- انتاج عناصر تعلم، واستخدامها إبداعيًا.
- فحص المشكلات والمعلومات، بهدف محاولة الربط بينها فى علاقات إبداعية.
- استخدام العصف الذهنى فى طرح المشكلات وحلها.
- تشخيص جوانب الغموض فى المشكلات، والتى تكون سببًا مباشرًا فى صعوبة حلها.
- تحديد أسباب فشل بعض التلاميذ فى الوصول للحلول الصحيحة للمشكلات، مع محالة تقديم أساليب متنوعة يمكن عن طريقها تدارك ذلك الفشل.

- تعريف التلاميذ ببعض المسائل أو القضايا التى يكون من الصعب بمكانة حدوثها، مثل: ماذا يحدث لو.....؟
- وضع الأسئلة التى تحفز التلاميذ على التفكير، وتثير دوافعهم الكامنة.

[٣] المحتوى الدراسى:

يجب أن يتمحور المحتوى الدراسى حول الآتى:

- يتسم بالسلاسة والوضوح.
- يكون فى حدود إمكانات التلاميذ الدراسية، أو يتحدها قليلا.
- يقوم على البناء التركيبى الذى يتسم بالموضوعية والعقلانية.
- يناسب الوقت المخصص لتدريسه.
- تتوافر أدوات التعليم التى يجب أن تصاحب تعليمه.
- تستخدم أساليب معاصره فى تدريسه.
- تصميم أساليب التقويم بما يتوافق مع أهدافه، وبما يؤكد مخرجاته المأمولة.
- تتصف موضوعاته بالحداثة والمعاصرة، مع إمكانية برمجتها إلكترونيًا.

والتصور السابق يتطلب تحقيقه وجود الشروط الثلاثة التالية:

* تهيئة التلميذ دهنيًا ووجدانيًا ليقبل على التعلم الإبداعى بحماسة قلبية.
* تهيئة بيئة (أو مناخ) الفصل بما يوفر ويحقق مقومات التفاعل البينشخصى بين جميع أطراف العملية التعليمية التعلمية.
* إعداد المعلم بما يكسبه وينمى لديه تمكنًا أكاديميًا ومهنيًا، بدرجة رفيعة المستوى.

ويمكن تنمية الإبداع فى تعليم وتعلم الرياضيات عن طريق البرامج الإثرائية، وهى مجموعة الممارسات والأنشطة التى تتميز بطبيعة أكاديمية، تثير فى التلاميذ رغبة

حقيقية فى دراساتها بإبداع وتمكن قويين، كما تعمل "على إطلاق العنان لتفكيرهم البناء، وأيضا تفجر طاقاتهم الكامنة من أجل تحقيق المزيد من الاكتشافات، وتساعدهم فى حل عديد من المعضلات والمشكلات الدراسية والعملية على حد سواء.

ومما يؤكد الدور المهم للأنشطة الإثرائية فى تنمية الإبداع الرياضى أنها تعمل على تحقيق الأهداف الإبداعية التالية:

- تجذب إهتمام التلاميذ ليتعلم مادة الرياضيات بشوق ومتعة، رغم أنها مادة دراسية تقوم على مجموعة من المفاهيم والتعميمات والنظريات التى تتسم بالجفاف، كما تقوم لغتها فى مجملها على التجريد.
- تثير بقوة الفضول الفكرى والطموح العقلى من أجل دراسة المزيد من شتى جوانب مادة الرياضيات.
- تساعد على تعميق الفهم عند دراسة جوانب مادة الرياضيات، التى تتسم أحيانا بالصعوبة.
- لا تعمل فقط على تنمية القدرات الرياضية الإبداعية للتلاميذ، وإنما تسهم أيضا فى تحقيق التلاميذ لقدرات إبداعية رياضية جديدة ومعاصرة.
- تؤكد أن مادة الرياضيات مادة لينة وسلسة، وليست حكرًا فى دراستها على مجموعات بعينها من التلاميذ، إذ يمكن تعليمها على مستوى جميع التلاميذ، وذلك يزيل الخوف أو الرهبة أو القلق أو الاضطراب من نفس بعض التلاميذ، ممن لا يميلون كثيرًا لتعلمها.

ومن أهم صور الأنشطة الإثرائية: الألغاز والأحاجى والطرائف الرياضية، وأيضا المغالطات الرياضية، وكذلك القصص المثيرة لبعض الاكتشافات الرياضية النادرة التى قام بها مجموعة من الرياضيين الأفذاذ.

وجدير بالذكر إن إثراء منهج الرياضيات بمجموعة من الأنشطة الإثرائية ليس

مشكلة صعبة أو عويصة، إذ يمكن تحقيق هذا الإثراء من خلال مجموعة من الإجراءات العلمية المدروسة، والتى عن طريقها يمكن إدخال مجموعة الأنشطة المأمولة، التى تقلل من صعوبة وتجريد المعلومات الرياضية، وتسهم ـ فى الوقت نفسه ـ فى استثارة دوافع التلاميذ وميولهم نحو مزيد من الإقبال نحو دراستها.

عندما يتحقق إثراء منهج الرياضيات باستخدام مجموعة من الأنشطة المناسبة، فذلك يعمل بدرجة على:

١ ـ رفع مستوى التحصيل الدراسى.

٢ ـ الاهتمام بالعمليات العقليا العليا.

٣ ـ توسيع مدى الإنتاجية الرياضية عند التلاميذ، وتقويتها إبداعيًا.

٤ ـ إثارة اهتمامات التلاميذ الثقافية، سواء أكان ذلك على مستوى مادة الرياضيات أم على مستوى بقية المواد الدراسية، وسواء أكان ذلك على مستوى المدرسة أم على مستوى المجتمع.

٥ ـ رفع مستوى الذات والثقة والطموح عند التلاميذ.

٦ ـ تأكيد أهمية قوة العلاقات الإنسانية والاجتماعية بين التلاميذ بعضهم البعض.

٧ ـ تحفيز التلاميذ لمزيد من الدراسة النظرية والعلمية فى مجال الرياضيات.

٨ ـ تحفيز التلاميذ لمزيد من دراسة المواد المختلفة بجانب دراستهم لمادة الرياضيات، على أساس أن النجاح يولد مزيدًا من النجاح.

٩ ـ توفير فرص عمل مناسبة وبسيطة للقيام ببعض الأبحاث الرياضية فى حدود قدرات التلاميذ.

١٠ ـ تحسين قدرات حل المشكلات الرياضية، وتعميم تلك الحلول فى المواقف المشابهة.

ثالثًا: تنمية المناهج الإبداعية فى الرياضيات

بدأت فى بلدان عديدة حركات إصلاح منهجية لكثير من العناصر الخاصة بعلم تدريس الرياضيات، وذلك فى الفترة ما بين أواخر الخمسينيات وبداية السبعينيات فى القرن الماضى.

وقد تحققت هذه الحركة من خلال بعض المشروعات التجريبية، وتم تقديم نتائج تلك المشروعات إلى السلطات الحكومية التربوية الأعلى.

وفى هذا الشأن تم تطوير مناهج الرياضيات، حيث تعاون علماء الرياضيات مع المسئولين فى مدرسة الرياضة، فإنبلج عن هذا التعاون حركة الإصلاح فى أوروبا، والتى تم الإشارة إليها بمنظمة التعاون الاقتصادى الأوروبى (Organization for European Economic Co- operation: OEEC). ومؤخرًا ظهرت منظمة التنمية والتعاون الاقتصادى (Organization of Economic Co- operation and Development: OECI). وفى المنظمتين السابقتين، تحققت مجموعة من اللقاءات التى ناقشت الحركات التمويلية لعمليات الإصلاح.

لقد ظهر إيمان قوى بما يمكن أن تحدثه حركات التغيير/ الإصلاح فى المناهج لتتضمن الأفكار الجديدة، التى على أساسها يتم إعادة كتابة مناهج الرياضيات. فالعمل الذى تم عن طريق اللجنة النرويجية Nordic بشأن تحديث الرياضيات (NCMM)، تأسس على أساس أن الرياضيين فى النرويج، يقومون بالعمل فى منهج الرياضيات، كما أن الملف الخاص لما قام به المتعلمون كان تأثيره كبيرًا على حركة الإصلاح المنهجى فى الرياضيات، على النحو التالى:

فى الوقت نفسه، الذى كان ينظر فيه إلى التعليم الرياضى كتدريب لبداية عملية تنمية منهج الرياضيات، تحرك المتعلمون الرياضيون داخل نطاق المكان التقليدى

لتعليم الرياضيات، وبذلك ألتفت آراء المعاصرين والتقليديين من أجل تطوير منهج الرياضيات.

حقيقة، بدءً من عام ١٩٧٠ توقفت حركة إصلاح منهج الرياضيات فى كثير من المدن، حيث توقفت التحليلات المتنوعة للإصلاحات المنهجية فى مكانها، ولم تتحرك قيد أنملة. لكن مع بداية عام ١٩٨٠ بدأت هناك حركة اهتمام جديدة بمنهج الرياضيات، ولقد إنشقت هذه الحركة وبزغت فى كثير من الدول. ففى الولايات المتحدة الأمريكية دق كتاب "أمة فى خطر" ناقوس الخطر، فزاد ذلك من وعى الأمريكيين بضرورة الاهتمام بدراسة تأثير منافسة الدول الأسيوية الشرقية للموقف الاقتصادى للولايات المتحدة الأمريكية. ونتيجة لذلك استشعرت أمريكا بالخطر الذى يهدد التعليم فيها، فبدأت بعمليات التحدى لهذا الوضع فى ضوء التنظيمات المحلية التى كانت سائدة آنذاك، فقدمت مستندات منهجية عن أحوال التعليم الأمريكى.

فى نهاية عام ١٩٨٠، تم تحرير بعض المعايير الخاصة بتطوير مناهج الرياضيات المدرسية (NCTM). ولقد تم عمل نسخ متنوعة، حيث تحرر الإصدار الأول عام ١٩٨٩ فى الولايات المتحدة الأمريكية (NCTM, 1989). وفى المملكة المتحدة، تم تنمية المناهج المحلية القائمة آنذاك فى حدود الوقت نفسه، وفى المدن النرويجية Nordic تحققت حركات إصلاح منهجية فى حدود عام ١٩٩٠.

لقد تم بناء بعض تلك المناهج على أساس فلسفات أخرى للتنظيم التعليمى، تخالف الفلسفات التى كانت سائدة فى معظم المدن، حيث تحقق تجديد الأفكار الرياضية عن طريق إعادة إنتاجها وفق أسس معاصرة، وبذلك تم إعداد أو إعادة صياغة بعض الموضوعات الرياضية بما يتوافق مع التغيرات المأمولة لمناهج الرياضيات.

ولقد ظهر هذا واضحًا جدًا فى ملفات الرياضيات المنهجية فى السويد Sewedish، وأيضًا فى المناهج القومية التى كانت سائدة فى المملكة المتحدة (U.K).

ولكن، على الرغم من التغييرات المتنوعة التى حدثت فى مناهج الرياضيات فى كثير من الدول، فإن تلك المناهج ظلت على حالها دون تغيير فى عديد من الدول.

ما يمكننا قوله فى هذا الشأن بالنسبة لموقف الرياضيات الحالى فى عديد من الدول؛إنه من الصعب أن نقول شيئًا بشأن الموقف (العالمى) العام بالنسبة لتعليم الرياضيات، ولكن على الجانب الآخر، يمكننا الزعم بأن التعليم فى عديد من الدول يبدو متأثرًا بالاتجاهات العالمية فيما يخص حركات الإصلاح التربوى.

إن المقارنات العالمية التى تعرض الأوضاع التعليمية، والتى صممت عن طريق السلطات السياسية والتعليمية فى بعض الدول، تظهر أن ملفات منهجية جديدة قد بدأت فى الانشقاق والبزوغ فى وقتنا الحالى، لتتماشى مع متطلبات حركة الإصلاح التعليمى المعاصرة.

هناك خلفية أخرى يجب مناقشتها، وهى تتضمن المنافسة الاقتصادية نظرًا لأهمية وقوة هذه المنافسة. لقد الاهتمام العالمى بالحالة التعليمية، ولهذا فإن النظام التعليمى، وأيضًا الأداءات والممارسات التربوية فى دولة بعينها، لا تختلف كثيرًا عن الأنظمة والأداءات والممارسات السائدة فى الدول الأخرى.

إن النظرة إلى الحالة التعليمية فى دول عديدة تدعو إلى سرعة تحقيق عمليات الإصلاح التربوى، على مستوى بقية الدول، وخاصة بعدما تأكد وجود تأثير قوى من ملفات منهجية لبناء مناهج جديدة فى الرياضيات. وفى عام ١٩٩٧ قام الطلاب ببناء وتحديد مصطلحاتهم الرياضية الخاصة. ويبدو ذلك واضحًا الآن فى ظهور نظريات تعليمية ثقافية ـ اجتماعية ذات تأثير قوى على الملفات المنهجية الخاصة

بتعليم الرياضيات، ناهيك عن أن المتعلمين ـ أحيانًا ـ كان دورهم واضحًا وقويًا فى الحركة التعليمية التى استهدفت تطوير مناهج الرياضيات.

وعلى صعيد آخر، تركزت توجهات كثير من السياسيين حول المحافظة على مصادر تعليم الرياضيات، واعتبارها قياس الوجود الحقيقى فى التعليم ليتماشى ويواكب العصر.

فى عام ١٩٨٨، تحققت أجزاء مهمة لبرنامج رياضى تعليمى تم تصميمه فى الرياضيات والهندسة الجبرية. وفى المقابل، تمت تنمية برامج متشابهة، ولكنها لا تحتوى على عناصر جديدة بشكل جذرى.

وفى هذا الشأن، قام جيمفى Jimfey فى عام ١٩٨٨بعمل قائمة، تضمنت مجموعة من الأسئلة والمشكلات التى ما زالت لها وجود حقيقى فى تعليم الرياضيات، حتى وقتنا هذا.

أيضًا، ظهر توجه يدعو إلى تحقيق تنمية تقوم على أساس استخدام الوسائل المرئية، وإلى تفعيل دور التواصل فى العملية التعليمية، لذلك من المأمول وجود وسائل جديدة لتعليم الرياضيات فى المستقبل القريب.

وبعد الطرح السابق، من المجدى طرح السؤال:

ماذا يقصد بوثائق المنهج Curriculum Documents؟

هناك دائمًا تعريفات محدودة وشاملة للمنهج، حيث يقدم التعريف المحدد المنهج كمقرر، لذلك فإنه غالبًا يُعرف المحتوى، ويقدم بعض الإرشادات عن التقييم. أما الرؤية الشاملة للمنهج (تعريف المنهج فى مفهومه الواسع) فإنها تتضمن عددًا من الوثائق الأخرى لأشكال مردودات أو مخرجات المنهج المختلفة، مثل المنهج المقصود، والمنهج المُضمن (الخفى أو المستتر أو الضمنى)، والمنهج المحقق (الذى يتم تدريسه بالفعل فى الفصول الدراسية).

وقد تواجهنا مشكلة حقيقية عند الحديث عن "المنهج القومى" من خلال التعريف التالى:

المنهج المدرسى أو الدراسى كمفهوم، يجب توضيحه بشكل أكثر شمولاً، دون التركيز عليه كمقرر دراسى، بحيث يتضمن المنهج الأهداف والمحتوى وطرق التدريس وعمليات التقييم، ودون ذلك لا يستطيع الفرد التحدث بشكل صحيح عن المنهج. ويعتمد المنهج القومى على المدرسين كأفراد يقومون بفهم وتجسيد أهداف المنهج فى خطوات إجرائية، كما يقومون بإرشاد الطلاب فى تعلمهم.

فى ضوء ما تقدم، يجب أن يركز التوضيح المنهجى على الملاحظات الخاصة، التى تتم عبر عمليات الإصلاح المنهجى.

وعليه يجب أن يتم إعداد الملفات المنهجية الأكثر أهمية عن طريق لجان خاصة، يتمركز عملها حول عمليات الإصلاح المنهجى، وبذلك تحتل المصطلحات الأيديولوجية مكانًا بارزًا فى المستندات التى تتضمنها الملفات المنهجية.

وهناك عناصر أخرى ترتبط بالتنمية المنهجية، وهى مشروعات "المقارنات" العالمية، ورغم أن تلك المشروعات لها فلسفات مختلفة، فإنها تمتلك عنصرًا واحدًا مشتركًا يشير أو يتضمن ما يجب الاهتمامات به فى المنهج.

وتتضمن ملفات المنهج عمليات دراسية، تهدف الوصول للأهداف العامة، وهى أساس بناء المنهج، وأيضًا تتضمن تلك الملفات مواد تعليمية تحليلية، وبذلك تشتمل الملفات على الآراء الخاصة لمصممى المنهج.

وإذا كان مشروع تصميم المنهج يهدف تنمية وبناء الكفاءات الرياضية، فإنه على أساس ما جاء فى أدبيات الرياضيات، يجب أن يتضمن أو يشير هيكل منهج الرياضيات إلى العنصرين الأساسيين التاليين:

- الكفاءة الرياضية.
- الأفكار الرياضية الكبيرة.

كما يجب أن يتضمن ذلك الهيكل العناصر الفرعية التالية:

- المعايير المنهجية الرياضية.
- المواقف والنصوص الرياضية.

والسؤال: لماذا يتم تدريس الملفات المنهجية؟

يقدم **جيفرى هاوسون** Geoffrey Howson بعض الأسباب فى الاستشهاد التالى:

تحمل المناهج القومية رسالة عن النظام الرياضى وأهدافه وطموحاته، وأيضًا حتى ما يتم إدراكه كمواطن ضعف فى هذا النظام، حيث يتم تقديم بعض التوصيات عنها.

ولأن موضوعات المنهج القومى ترتبط بالمجتمع، لذلك تبدو للبعض وكأنها مختارة بشكل عشوائى، وأيضًا، لأن منهج الرياضيات القومى يجب أن يتميز بالوضوح، فمن الممكن أن يتضمن منهج الرياضيات قائمة تشتمل على عشرة مشكلات تدور حول التنمية المنهجية، حيث يمكن تصنيف تلك المشكلات فى محاور ثلاثة رئيسة، هى:

* التأثيرات على المنهج والعمليات المنهجية.
* التتابع الخاص بالملفات المنهجية.
* التغيرات الخاصة بالوقت.

وفيما يلى توضيح التصنيفات السابقة.

*** التأثيرات على المنهج والعمليات المنهجية**

يمكن لبعض قوى المجتمع أن تؤثر بشكل كبير فى بناء وتصميم منهج

الرياضيات، وذلك مثل: الأيديولوجية السائدة، والنظام الاقتصادى القائم، ...إلخ.

وفى البداية، عند بناء وتصميم منهج الرياضيات، تبدو الضغوط الخاصة بالتنمية المنهجية، حيث يكون تأثيرها أكبر من تلك التى تبذل عن طريق المجتمع.

ولا تعنى التنمية التكنولوجية والاقتصادية من خلال منهج الرياضيات أن يضغط المجتمع لتقديم تعليم شامل حول تلك التنمية، إذ يجب أن يدور منهج الرياضيات حول الأساسيات والمفاهيم التى يجب أن يتعلمها التلاميذ، والتى قد تتأثر بعديد من التغيرات فى الممارسات التعليمية، حيث يمكن رؤية الحركة التعليمية بشكل مباشر من خلال الأنظمة الحالية للقواعد التعليمية التى قد تتغير، أو لبعض الحالات التى يتم تقديمها كدعامات لتعلم التلاميذ. ويشمل توظيف المطالب التعليمية التعلمية بعض التعديلات بشأن التتابعات المهمة فى العملية التربوية، حيث يجب النظر إلى تأثير المقارنات الدولية على المناهج القومية، وذلك من حيث:

- التركيب.
- المحتوى.
- عمليات المراجعة.

وأيضًا، يجب دراسة العنصر الذى يدور حوله تأثير النظرية الأكاديمية من خلال:

- البحث التعليمى الرياضى.
- علم أصول التدريس (على سبيل المثال: النظريات التعليمية).
- ماهية الرياضيات وطبيعتها وتركيبها.

*** تتابعات الملفات المنهجية:**

وهذه تقتضى النظر بعين الاعتبار إلى المنطلقات التالية فى تصميم منهج الرياضيات:

- تأثير المواد المنهجية على المدرسين كأفراد، وعلى أساليب تدريسهم لموضوعات مادة الرياضيات.
- تحقيق تأثير تضمين التغيرات المنهجية على الكتب النصية، من حيث: المحتوى والبناء.
- استخدام الأساليب المعاصرة فى تدريس الرياضيات.
- تأثير الملفات المنهجية على عملية تعزيز تعلم الرياضيات، وعلى مواصلة تعلمها فى التعليم العالى.
- اختيار التلاميذ ممن لديهم قدرات خاصة فى تعلم الرياضيات.
- الخلفية الرياضية للتلاميذ، التى تساعدهم على تحقيق التفوق فى تعلم الرياضيات.

*** التغيرات مع الوقت:**

ترتبط التغيرات فى المحتوى الرياضى بالتغيرات المناظرة فى الوقت المخصص لتدريس هذا المحتوى، وذلك يظهر واضحًا بإلقاء نظرة على تنمية تعلم الهندسة فى منهج الرياضيات، حيث العمل التقليدى على المسطرة والفرجار، كما تقدم الأشكال الهندسية درجات مختلفة جدًا من التركيز، حيث توجد اهتمامات عملية تشتمل على طريقة التقديم، وأساليب العرض فى قراءة الخريطة والأرض كجسم كروى لتحديد "الأبعاد" الخاصة (خطوط الطول والعرض). وعلى أساس الفوائد المرئية فى تعلم الهندسة؛ وعلى أساس ممارسة التقييمات الخاصة بحل التدريبات الهندسية، من خلال الاختبارات المعيارية، يتحقق التغير فى أداءات التلاميذ فى ضوء الوقت المتاح لتعلمهم.

والسؤال:

كيف يمكن دراسة الملفات المنهجية؟

تتحقق دراسة الملفات المنهجية من خلال أساليب البحث المختلفة، مع مراعاة أنه رغم أن طرق البحث الكمى تكون ممكنة فى دراسة المنهج، فإن الطرق الكيفية هى الأكثر استخدامًا فى المواقف الصفية. أما الطرق التاريخية والمقارنة فتمثل خيارات واضحة محددة فى تعليم وتعلم بعض الموضوعات الرياضية. والطرق اللغوية؛ تستخدم لدراسة لغة الرياضيات لتحديد كيف يتم وصف عملية تعليم الرياضيات وتنظيماتها.

ولكون عملية تعليم وتعلم الرياضيات شيقة، فإن حركات الإصلاح المنهجية الرئيسة تقدم لغة جديدة فى هذا الشأن.

ومما يذكر قدمت الملفات المنهجية المتنوعة فى عام ١٩٨٠ مصطلح "معايير"، وهو يمثل إنعكاسًا للفلسفة الشاملة للبناء المنهجى. وإذا كانت لفظة "المعيار" ارتبطت بالإنتاج الصناعى أولاً، فإن هذا المصطلح أصبح الآن جزءً من "اللغة التعليمية". فى الوقت الحالى يستخدم هذا المصطلح الجديد فى "الفصل ذو الكفاءة"، وخاصة بعد إمكان دراسة الملفات المنهجية تحت منظورات مختلفة. وفى تعليم الرياضيات، توجد أبعادًا عديدة، تمتلك درجة كبيرة من الأهمية، وذلك مثل: مصطلح الإفادة، مع مراعاة أن هناك تركيزًا كبيرًا عبر السنين على تلك المصطلحات. ويوجد جانب آخر يمكن استخدامه كمؤشر فى تحليل الملفات المنهجية الخاصة بالتلاميذ، حيث تستخدم دراسة الملفات المنهجية لتنمية طرق التدريس فى التعليم العام. وعلى جانب آخر، فإن الدراسات المنهجية لديها تقليد أكاديمى طويل الأمد، لأنها مثلت جزءً من المناهج العامة (علم أصول التدريس) لبعض الوقت.

رابعًا: خرائط المعرفة: أدوات لبناء الهيكل الرياضى الإبداعى

من الممكن أن يتم تدعيم خبرة البناء الرياضى عن طريق تقديم أشكال معرفية رياضية فى شكل شبكة عمل. وفى هذا الحديث، يتم تقديم نمطين خاصين لشبكة عمل رياضية، هما: خرائط العقل وخرائط المفاهيم، وكلاهما يمثل خرائط معرفية تهدف عرض الأفكار والمصطلحات التى ترتبط بدراسة أى موضوع تعليمى تعلمى. وعليه، عندما تلاؤم هذه الخرائط موضوع التعليم والتعلم، فإنها تعتبر بمثابة أدوات تدريسية تستخدم فى تعليم الرياضيات، وخاصة ما يتعلق ببناء الهيكل الرياضى. وحيث إن الاستخدامات الممكنة لخرائط المعرفة لها مزاياها وحدودها وخبراتها، فإن خرائط العقل وخرائط المفاهيم تعتبر أدوات فعالة لبناء الهيكل الرياضى.

إن المعرفة الرياضية على أساس موضوعاتها، لديها سمات شبكة العمل. على سبيل المثال: المفاهيم والتعريفات والنظريات والبراهين والقواعد والقضايا المتنوعة التى ترتبط بمكونات العالم الخارجى، يمكن تحديدها كخرائط للمعرفة. أيضًا، أجمعت المناقشات التعليمية على إمكانية اكتساب الرياضيات من خلال خبرة التلاميذ فى عمليات المشاركة عند جمع بعض الحقائق والقواعد المجردة، وأيضًا عند تطبيق المعايير الرياضية المدرسية. وتظهر أهمية هذا الموقف بوضوح، عند محاولة الربط بين الأفكار العامة والعناصر المركزية فى تعلم الرياضيات.

ويمكن إكساب سمات شبكة العمل الرياضى كخبرة، كما يمكن تعلمها عن طريق الأشكال المرئية فى الرياضيات، وذلك عن طريق خرائط العقل وخرائط المفاهيم، إذ إن كلاهما يمكن أن يقدم شبكة للعمل الرياضى، ولذلك تتمثل قوة كل منهما فى كونهما أدوات تقنية تدريسية لتعليم الرياضيات، خاصة ما يرتبط بالبناء الهيكلى لمادة الرياضيات. هذه الخرائط أدوات سهلة وبسيطة، تدعم العملة التعليمية داخل الفصول الدراسية.

[١] خرائط العقل:

تم تنمية خريطة العقل فى البداية عن طريق **تونى بوزان Tony Buzan** الرياضى والسيكولوجى، والباحث العقلى، حيث نظر إليها كتقنية خاصة لأخذ ملاحظات مختصرة على قدر الإمكان وأيضًا كتشويق للعين كلما أمكن تحقيق ذلك. وبعد ذلك تحول نهج خرائط العقل لتحقيق استخدامات ممكنة فى طرق عديدة متنوعة لتعلم الرياضيات، دون أن تكون مجرد نقاط مختصرة لحلول المسائل: إن خرائط العقل تستخدم فى العملية التعليمية، وتم استخدامها فى الرياضيات حديثًا. إن طريقة خرائط العقل تتحدث أساسًا بأن النصفين المتواجدين فى العقل البشرى يمكنهم أداء مهام مختلفة. فالجزء الأيسر مسئول عن المنطق والكلمات والحساب والتخطيط والتتابعات والتحليلات والقوائم. أما الجانب الأيمن، يقوم بمهام أدائية مثل: التخيل والعاطفة واللون والأشكال والهندسة والتركيب والتأليف. إن خرائط العقل تستخدم كلا الجانبين للعقل، وتجعلهم يعملون معًا لتقديم إنتاج جيد والاحتفاظ بالذاكرة. ويظهر هذا عن طريق تقديم البناء المنطقى المستخدم فى الصورة الفنية الخاصة بالإبداعات على المستوى الفردى. إن خرائط العقل تربط التخيلات بالبناء والصورة بالمنطق.

[٢] خرائط المفاهيم:

تم تقديم خرائط المفاهيم لأول مرة عن طريق **نوفاك Novak** كأداة بحثية، تعرض رسمًا خاصًا للمفاهيم ترتبط بالمطلوب تحليل جوانبه.

إن طريقة خريطة المفاهيم يتم تنميتها بشكل خاص لمساعدة المتعلمين فى التمكن من البناء المعرفى الخاص بهم، أى ما يعرفه المتعلمون بالفعل. وبعد التحقق مما تقدم، يتم تعليم الموضوعات التى ترتبط ببنيتهم المعرفية وفقًا لذلك.

على الرغم من أن الهدف الأساسى استهدف آنذاك كيفية استخدام خريطة المفاهيم فى البحث، فقد تبين أنها أداة مهمة لمساعدة للتلاميذ فى "أن يتعلموا كيف

يتعلموا"، بشكل متتابع حيث تستخدم رياضيًا فى تجسيد الخبرة، وتبين إمكانية توظيفها أيضًا كأداة يمكن استخدامها فى تعليم كل العلوم بلا استثناء.

[٣] قواعد لعمل خرائط المعرفة:

تتسم خرائط العقل وخرائط المفاهيم بالتسلسل المركب، وذلك وفق القواعد التالية:

* خرائط العقل

يمكن رسم خريطة العقل باستخدام ورقة كبيرة ثم كتابة موضوع خريطة العقل فى منتصف الورقة، على أن يتم رسم خطوط رئيسة لكل الأفكار الأساسية التى يتضمنها الموضوع. يتم كتابة الكلمات الرئيسة ويتم الإشارة إلى أثر الأفكار الأساسية بخطوط. ومن الخطوط الرئيسة المرسومة تُشتق الأفكار الثانوية وهكذا، وذلك وفقًا للمبدأ: من المجرد إلى الواقعى، ومن العام إلى الخاص. ويمكن استخدام الألوان عند رسم خريطة العقل، وإضافة بعض الصور والرسوم التخطيطية والرموز (مثل: الأسهم الصغيرة، والأشكال الهندسية، وعلامات التوضيح، أو علامات الأسئلة، والرموز المعرفة ذاتيًا).

* خرائط المفاهيم:

وأيضًا يمكن رسم خريطة المفاهيم باستخدام ورقة كبيرة، ثم كتابة موضوع الخريطة فى المقدمة. تُرتب المفاهيم وفق مستويات الجودة والشمولية والعمومية والتجريد والمفاهيم العليا والأكثر تخصصًا لتنتهى بالمفاهيم الأقل تجريدًا. إذا كان من الممكن، تُرتب المفاهيم لتصبح الأفكار بدورها مرتبة من خلال الأسهم بشكل متسلسل تحت بعضها، ويُكتب تحت السهم بعض الأمثلة (ارسم خطوط من المفاهيم العليا إلى المفاهيم السفلى لتربط بينهم، حقق ذلك مع نفس المفاهيم الأخرى بنفس الشكل).

وعلى الخطوط المتشعبة، يتم كتابة الكلمات أو الجمل التى توضح العلاقة بين المفاهيم. وتحت آخر سهم، يتم وضع الأمثلة التى ترتبط بالمفاهيم (ككلمات رابطة، تُكتب جملة، مثل: ارسم دوائر حول المفاهيم، ولا ترسم دوائر حول الأمثلة).

[٤] كفاءة خرائط المعرفة كأدوات لبناء الهيكل الرياضى:

يُظهر البناء المتسلسل لكل من خرائط العقل وخرائط المفاهيم الافتراضات العامة التى تقدم التتابع المعرفى، مع مراعاة إمكانية تنظيم المعرفة الرياضية فى خريطة العقل أو خريطة المفاهيم وفقًا لهذا التقديم العقلى للمعرفة.

بالنسبة للرياضيات، فإنها غالبًا تنشق أو تتفرع كشجرة لها جذورها وأغصانها وفروعها، وتصنف الأغصان الصغيرة وفقًا للتصنيفات العامة المحددة، ولهذا فإن خريطة العقل أو خريطة المفاهيم بمثابة شجرة تنمو زمنيًا.

إن بناء خريطة العقل تشبه شجرة نراها من أعلى، أى من الأطراف العليا التى يشتمل عليها الموضوع فى خريطة العقل، حيث تشبه الخطوط الخاصة بالأفكار غصون الشجرة. أيضًا تشبه خرائط المفاهيم الشجرة فى صورتها الكلية، وإن كان يمكن رؤيتها فقط من جانب آخر. بالإضافة إلى ما تقدم، توضح خرائط المفاهيم أيضًا العلاقات والروابط بين المفاهيم المختلفة، حيث يرتبط بناء تلك الخرائط بالسمات الخاصة بالرياضيات. وبعامة يمكن توضيح العلاقات بين الموضوعات الرياضية عن طريق خرائط العقل وخرائط المفاهيم بشكل تركيبى بنائى يساعد فى بناء الهيكل الرياضى.

ومن خلال بعض التوضيحات والسمات المهمة يمكن معرفة أساليب استخدام خرائط المعرفة فى تعليم الرياضيات، وأيضًا فى اكتساب بعض الخبرات الصفية، مع مراعاة أن هذه الخرائط تقدم فوائد جلية فى تعليم الرياضيات، خاصة فى بناء الهيكل الرياضى وفق مستويات عالية من الجودة.

[٤-١] خرائط العقل

فيما يلى أهم استخدامات خرائط العقل:

* تساعد خرائط العقل فى تنظيم المعلومات:

يسمح البناء الخاص بخريطة العقل بتنظيم بناء المعارف الرياضية، فالنظرة الشاملة للموضوعات الرياضية يمكن تقديمها وتوضيحها عن طريق استخدام الألوان والصور.

بالإضافة إلى ما تقدم، تساعد التدعيمات الخاصة بخريطة العقل فى تنمية عمليات التفكير الطبيعية، والتى ـ غالبًا ـ ما تتحقق بطريقة عشوائية وفى شكل غير خطى، ناهيك عن أن خرائط العقل لديها بناء مفتوح، ولذلك يتمكن الفرد من ربط الأفكار بشكل عملى، دون عناء عقلى.

ومما يذكر، تؤكد تقارير المعلمين أن التلاميذ الضعاف فى الرياضيات استفادوا من خرائط المفاهيم، حيث أنها ساعدتهم فى تنظيم معارفهم. لقد أدرك هؤلاء التلاميذ لأول مرة الارتباطات بين المفاهيم الرياضية عند استخدام خريطة العقل، لذلك قد أخبروا مدرسيهم بأنهم بعد حصولهم على الرسومات التى تتضمنها خريطة العقل استطاعوا رؤية "البناء الخاص بالمعرفة الرياضية.

* تجعل خرائط العقل بناءات التلاميذ المعرفية مرئية:

تقدم خرائط العقل المرسومة عن طريق التلاميذ معلومات عن خلفياتهم المعرفية. بمعنى، تساعد خرائط العقل كلاً من المتعلم والمدرس لكونها تقدم أدوات مرئية مساعدة.

* تنمى الخرائط لدى التلاميذ الوعى بتنظيم المعرفة:

تعزز هذه العملية عن طريق الأداء العقلى للتلاميذ، فى المجموعات الصغيرة،

بناء خرائط العقل، وذلك يساعد التلاميذ من خلال مناقشة المفاهيم والعلاقات التى تربط بينهم.

من الممكن ملاحظة أن التلاميذ لم يحصلوا فقط على تنمية وتنظيم المعارف، ولكنهم اكتسبوا أيضًا الوعى بالنقاط المفقودة بين المفاهيم من خلال الرسم الكلى. على سبيل المثال، قد يجد التلميذ صعوبة فى توضيح العلاقة فى السؤال د (س) = س٢، وبذلك تجسد الخريطة السؤال للتلميذ.

* إذا أصبحت الاتصالات الخاطئة فى معارف التلاميذ مرئية، فيجب أن يقوم بتعديلها المعلم:

فى هذه الحالة، يوجه المعلم التلميذ، ويسأله لماذا قام بمثل هذا الخطأ. والتوضيح الذى يقدمه التلميذ يوضح من أين جاء الخطأ، وبذلك يمكن تعديله.

قد يربط أحد التلاميذ المفاهيم عن طريق إجراء "التحولات الملائمة"، وعندما يطلب من التلميذ توضيح فحوى هذا الارتباط، فقد يظهر تخوفه من المعلم، ويدعى بأن ما قاله قد جاء فى الكتاب المدرسى هكذا.

* يمكن فحص مدى تطور التلاميذ فى فهم الموضوع، بسؤالهم عمل خريطة عقلية:

فى بداية دراسة الموضوع، وبعد الانتهاء من دراسته، يطلب المعلم من التلاميذ تصميم خريطة عقلية، ليتعرف قدرتهم على تحديد المفاهيم، وإرتباطها بالموضوع، بطريقة جيدة.

* يمكن أن تستخدم خرائط العقل كمساعد قوى لتفعيل الذاكرة:

عندما يصمم التلميذ الخريطة العقلية بشكل فريد وقوى، فذلك يعنى أنه يستطيع استدعاء المعلومات التى يُخزنها فى الذاكرة بشكل أسرع، وبذلك تصبح

العملية التعليمية شاملة بشكل أكبر، وتستمر المعلومات التى يخزنها التلميذ فى عقله لفترة أطول.

* تساعد خريطة العقل فى التكرار والتلخيص:

فى نهاية الوحدة التدريسية للموضوع، يستطيع التلميذ أن يكرر المعلومات ويلخصها عن طريق خريطة العقل، التى تعتبر بمثابة ملخص جيد لما يتعلمه التلميذ، كما تعتبر مؤشرًا لمدى قوة ذاكرته.

المدرسون العديديون الذين يقدمون الخرائط العقلية فى تعليم وتعلم الرياضيات يمكنهم ملاحظة أن بعض التلاميذ يبدءون بمصادرهم الخاصة لبناء العقل باستخدام الخرائط فى المنزل، خاصة عند استعدادهم للامتحان، وذلك بعد حصولهم على خلفية عامة عن موضوعات المنهج.

يمكن للتلميذ عمل خرائط عقلية لتمارين الكتاب المدرسى، حيث يستطيع تقديم محتويات تلك التمارين بطرق بنائية.

* يمكن أن تلخص خريطة العقل الأفكار للتلاميذ المتنوعين:

تنمى خريطة العقل المهام العامة المطلوب تحقيقها فى حجرة الدراسة، حيث يكتب المدرس الموضوع فى منتصف السبورة، ويسأل التلاميذ عن الأفكار المرتبطة بذلك الموضوع. وبالنسبة لكل فكرة، يرسم المدرس فرعًا أساسيًا لخريطة العقل، وأيضًا يطلب من التلاميذ أن يقولوا كل الأفكار الأخرى المنبثقة من الأفكار الرئيسة التى سبق تحقيقها.

وبناءً على التركيب المفتوح لخريطة العقل، يمكن دمج كل مكون فردى، على أن يتم إكمال خريطة المفاهيم عن طريق كل تلميذ، بأسلوبه الخاص. وتبين الخبرة الصفية أن تلك الطريقة من الطرق الجيدة، حيث يتم مناقشة التلميذ من خلال

طرق دمج المفاهيم واستخراج المصطلحات الفرعية. أحيانًا يقوم التلميذ بعمل أو اكتساب خبرات من خريطة المفاهيم. وكمصطلح رياضى، يمكن أن يرتبط بطرق عديدة، تنبثق من طريقة تعليم واحدة أساسية.

* تساعد خريطة العقل فى ربط المعلومات الجديدة بالمعلومات المكتسبة فيما سبق بشكل واضح:

يمكن دمج المعلومات الجديدة من خلال خريطة بالمفاهيم التى سبق تعلمها، حيث يستطيع المعلم مساعدة التلاميذ عن طريق توضيح فكرة خريطة العقل وكيفية دمج المفاهيم الجديدة، وإضافتها للموضوعات القديمة. بالطبع، هذا يمكن حدوثه فقط مع المعلومات الجديدة القليلة، بسبب القيود الكثيرة التى تفرضها عملية التعليم.

* يمكن تقديم المصطلحات الجديدة عن طريق خرائط العقل:

فى هذا الشأن ذكرت إنتريكين (1992) Entrekin أنها استخدمت خرائط العقل لتقديم مصطلحات جديدة فى تعليم الرياضيات، حيث كتبت المصطلحات الجديدة على السبورة أو على الشفافيات، وذلك يحدث فى نهاية الدروس، على أساس أن المعلم من المحتمل أن يصف مكونات وأشكال تقليدية لخريطة العقل. وهذا العرض المرئى يساعد التلاميذ فى ربط المفاهيم غير المعروفة بالمفاهيم المعروفة لديهم.

* توضح خرائط العقل العلاقات بين الرياضيات وباقى المواد الدراسية:

لأن خريطة العقل مفتوحة لأى فكرة، فإن التلميذ يمكنه ربط الموضوعات القديمة بنظيراتها الحديثة، وأيضًا ربط المفاهيم غير الرياضة بنظيراتها الرياضية، وخاصة بعد أن أصبح من الواضح أن الرياضيات كمادة علمية أو دراسية ليست منفصلة عن باقى العلوم، إذ ترتبط بباقى المواد الدراسية المختلفة، سواء أكانت علمية بحتة أم دراسية تربوية.

وهذا الخيار الخاص بخرائط العقل بعامة، لا يتحقق على أعنته بشكل آلى، إذ إن التلاميذ يفكرون ويتناقشون فيما بينهم، عندما يستخدمون خرائط العقل.

من المهم أن يساعد المعلمون التلاميذ من خلال تقديم خرائط العقل خلال عملية التدريس، حتى يمكنهم التعبير عن آرائهم، وحتى لا تقتصر معارفهم على المصطلحات الرياضية التى يحددونها فى خرائط العقل، فهذا وذاك يشعرهم بالرضا عن أنفسهم عندما يحققون ذلك.

[٤-٢] خرائط المفاهيم

تقدم خرائط المفاهيم نفعًا فى تطبيقات عديدة، فى تدريس العلوم المختلفة، وإن تميزت تطبيقاتها بالنسبة للرياضيات فى كل المستويات الدراسية، بدءً من المدرسة الابتدائية إلى المدارس الخاصة بالتعليم العالى، بالشمول والتكامل والمواءمة. إن خرائط المفاهيم يمكنها أن تستخدم كمثال قوى فى المواقف التالية:

* تساعد خرائط المفاهيم فى تنظيم المعلومات فوقيًا:

لكى تكون خرائط المفاهيم مفيدة، يجب أن تكون المعلومات منظمة، فذلك يساعد على تحقيق عملية الفهم والقدرة على حل المسائل بكفاءة عالية، ناهيك عن أن خريطة المفاهيم تسهم فى تنظيم المعارف داخل أشكال محددة، مما يجعلها تبدو للعيان سهلة وبسيطة، فيمكن فهم جميع دقائقها.

وفى الفصول التى تستخدم خرائط المفاهيم، وبعد الرجوع إلى خلفيات التلاميذ ممن يستخدمون خرائط المفاهيم، تشير الحالات التى تطرقت لدراسة هذا الموضوع أن تلك الخرائط ساعدت التلاميذ فى تنظيم المعلومات، خاصة لو قام التلاميذ بأنفسهم برسم تلك الخرائط. وتتوقف درجة صعوبة الخرائط المفاهيمية، على أساس تعريفها عن طريق عدد من المستويات التعليمية التعلمية. وأيضًا فى ضوء بعض الإشارات، يبدو أنها تلعب دورًا نقديًا مهمًا بالنسبة لتعلم التلاميذ.

ولهذا تبدو خرائط المفاهيم ذات فائدة بدرجة كبيرة. أما من حيث رؤيتها كمشكلة ذات درجة من الصعوبة، فذلك يتوقف على قوة تعلم التلاميذ، وعلى إمكانية تحقيق المجموعة التعليمية لأهدافها.

تمكن خريطة المفاهيم التلميذ من حل المسائل التى لم يستطيع حلها من قبل فمن خلال خرائط المفاهيم، يقوم التلاميذ بحل مسائل رياضية متنوعة، وغير معتادة بالنسبة لهم، ويستطيعون أيضًا تنظيم معارفهم وخبراتهم السابقة وربطها بموضوع الخريطة الرئيس. ومما يذكر أن نسبة كبيرة من التلاميذ قد يستخدمون بشكل تقليدى خريطة المفاهيم فى ضوء احتياجاتهم المعرفية. وفى هذه الحالة، يتم تصنيف التلاميذ وفقًا لدرجات إنجازهم.

ومن المتوقع أن التلاميذ الذين يستخدمون خريطة المفاهيم يكونوا أكثر نجاحًا فى حل المسائل المقدمة لهم.

ورغم أن خريطة المفاهيم تساعد بدرجة كبيرة فى زيادة القدرة على الإنجاز، فإن الذين حققوا إنجازًا قليلاً قد يقرون صعوبة خريطة المفاهيم بالنسبة لهم. وقد يذكر بعض التلاميذ أن خرائط المفاهيم يمكن أن تساعدهم فى حل كثير من الأسئلة المفتوحة، وفى هذه الحالة من المهم طرح السؤالين: ما درجة مستوى الإنجاز بالنسبة للتلاميذ؟ وما الفروق التى يمكن ملاحظتها بين التلاميذ الذين يستخدمون خرائط المفاهيم ونظرائهم الذين لا يستخدمونها؟ وأيا كان الأمر، تساعد خرائط المفاهيم المعلم والفصل الدراسى بأكمله، فى تحقيق المقاصد التربوية المأمولة.

* تسهل خرائط المفاهيم التعلم ذو المعنى، إذ إنها تساعد فى فهم وتنظيم وبناء المادة الدراسية، وفق تركيبها المنطقى:

تمثل خرائط المفاهيم أداة قوية تساعد فى البناء المعرفى للتلاميذ، خاصة فيما يتصل بالمصطلحات المحددة أو الخيارية. وهذا يساعد المعلم فى تخطيط موضوع الدرس بكفاءة، لأنه يتمكن من الإلمام بالمستويات المعرفية القديمة للتلاميذ، ولأنه يراعى

أن التلميذ نفسه يجب أن يبدأ بتنظيم معارفه الشخصية. ولأن المفاهيم الخاطئة للتلميذ تكون مرئية وواضحة للمعلم، فإنه يمكن أن يقدم له بعض التلميحات التى تساعده ليقوم بعملية التصحيح أو التعديل بنفسه، بالنسبة للأخطاء التى وقع فيها.

* توضح خرائط المفاهيم للتلاميذ البناء المعرفى لخرائط العقل، من خلال الروابط الكثيرة بينهم، من خلال الإشارة للعلاقات بين خرائط المفاهيم وخرائط العقل عن طريق مجموعة من الكلمات الرابطة. ورغم أن بناء الخبرة لهو شئ صعب جدًا بالنسبة للتلاميذ فى بحثهم عن الكلمات الرابطة، فإن الأمر يكون سهلاً بالنسبة لهم لو أنهم قاموا بعملية الوصف بشكل صحيح، كما أن بعض المناقشات التقليدية من قبل المعلم تساعدهم كثيرًا فى هذا الشأن.

* يمكن لخرائط المفاهيم أن تقوى الذاكرة بدرجة كبيرة:

تعتبر خريطة المفاهيم شكلاً مصممًا وفق نموذج فريد، ولهذا فإنها تساعد فى تقوية ذاكرة الفرد، وتجعله يستدعى المعلومات بشكل أسرع.

* تساعد خرائط المفاهيم فى مراجعة الموضوعات الدراسية:

فى نهاية دراسة الموضوع، تساعد خرائط المفاهيم فى إلقاء نظرة عامة شاملة عن موضوع الدراسة. ومما يذكر أنه فى الفصول التى يتم فيها تقديم خرائط المفاهيم، يمكن لبعض التلاميذ القيام بعمل خرائط مفاهيمية بأنفسهم، وذلك استعدادًا للامتحان فى نهاية الموضوع. ولهذا يمكن الزعم بأن خرائط المفاهيم تقدم مستويات عالية من الإنجاز.

* يمكن أن تستخدم خرائط المفاهيم لتصميم المواد التعليمية:

يمكن أن يجد المعلمون خرائط المفاهيم بمثابة أدوات نافعة لهم لتنظيم المحاضرات، أو المناهج التى يقومون بتدريسها. أيضًا، لا تساعد خرائط المفاهيم فى

بناء وتخطيط الدروس فقط، ولكنها تساعد المدرسين أيضًا فى فهمهم الخاص للمادة الدراسية التى يتحملون مسئولية تعليمها.

[٥] الحدود Limitations

يمكننا استخدام خرائط العقل وخرائط المفاهيم فقط، إذا إمتلكنا الألفة معها. أيضًا، عندما نستخدم خرائط المفاهيم، علينا أن نعرف أن إنشاء خريطة المفاهيم يستغرق وقتًا أكثر من المستخدم فى إنشاء الخريطة العقلية.

وعلى الرغم من البناء الجيد، والتحديد الدقيق لمحتويات خرائط المفاهيم والخرائط العقلية، فمن المحتمل أن يكون لهم تأثيرًا فوضويًا.

فالخرائط العقلية تعتبر بمثابة تمثيلات تصويرية فردية، إذ يمتلك الأفراد المختلفون أفكارًا متباينة للموضوع نفسه، ولهذا فإنهم قد يرسمون خرائط عقلية مختلفة. وحيث أن الفهم الصحيح للعلاقات المقدمة فى الخريطة العقلية يُقدم أفكارًا صحيحة للكلمات المستخدمة، ولهذا فإن استخدام الخرائط العقلية يتأثر بقدرات الأفراد الخاصة.

يرتبط كل فرع رئيس فى الخريطة العقلية بشكل مركب بالفروع الدنيا. إن الارتباطات (العلاقات) بين التراكيب الفردية كقاعدة لا يكون هدفها الرسم، من أجل زيادة وضوح الخريطة. وعليه من المحتمل أن لا تكون العلاقات التى تدور حول موضوع الخريطة مكتملة الجوانب.

ونقيضًا للخرائط العقلية، يشار بخطوط إلى المفاهيم الخاصة بخريطة المفاهيم، كما يتم وصف كل علاقة فردية عن طريق كلمات تكتب على خطوط التوجيه، لتشير إلى مضمون أى علاقة. ولهذا تقدم خريطة المفاهيم معلومات كثيرة عن الموضوع قياسًا لما تقدمه الخريطة العقلية، ولكنها لا تمتلك البناء المفتوح الذى يسمح بسهولة إضافة أى فكرة جديدة قد تظهر وترتبط بموضوع الدراسة.

[٦] الملاحظات النهائية:

لا تُصمم الخرائط العقلية وخرائط المفاهيم كأدوات تعليمية، ولكن يتم تصميمها باعتبارها طرقًا مفيدة، تساعد فى تحقيق وتفعيل التطبيقات المتنوعة الخاصة بالعمليات التعليمية والتدريسية، وبخاصة ما يرتبط ببناء محتوى مناهج الرياضيات.

وعليه، فإن الخرائط العقلية وخرائط المفاهيم تستخدم بالفعل ـ من الآن وصاعدًا ـ فى تدريس الرياضيات، مع مراعاة أهمية أن تحتل خلفية المعلمين جزءً حيويًا فى العملية التعليمية، وذلك فيما يخص موضوع الخرائط العقلية وخرائط المفاهيم فى تعليم وتعلم الرياضيات، وبذلك تكون عملية تدريس الرياضيات مليئة بالحماسة القلبية والأدائية.

وبالطبع، اعتمادًا على الأهداف المتتابعة، يكون لدى المدرسين على التعاقب مع التلاميذ الحرية فى اختيار أى من الطريقتين. بمعنى؛ عندما يكون للتلاميذ حرية الاختيار ما بين الخريطة العقلية وخريطة المفاهيم لتلخيص وتدعيم معارفهم عن موضوع التدريس، فإنهم غالبًا يقومون بعمل خليط أو مزيج بينهما، حيث يقفون عند حد منتصف الموضوع بشكل نموذجى (وهذا مفيد فى حل المسائل الصعبة والطويلة)، فيقومون برسم من ٣ إلى ٥ فروع رئيسة فى نموذج الخرائط العقلية، كما يقومون بالتعرف على الارتباطات بين كل فرع رئيس فى خط الخرائط المفاهيمية، ويصفون العلاقة المقدمة فقط بشكل جزئى عن طريق الكلمات الدالة. وبشكل فاعل، يستخدمون الإمكانيات المتوافرة فى وضع أمثلة كنماذج استرشادية لتقديم حلول المسائل الرياضية.

وبغض النظر عن الحقائق السابقة، من المفيد متابعة قواعد تصميم وبناء خرائط المعلومات، خاصة فى البناء الرياضى. إذًا تعتبر خرائط المعلومات أدوات جيدة لبناء المحتوى الدراسى، إذ إنها تعزز نتائج العملية التعليمية الرياضية بدرجة كبيرة.

خامسًا: نماذج إبداعية فى تدريس الرياضيات

أعتبر "تدريس الرياضيات" فى الأصل أنه "تعليم الرياضيات" الذى يهدف اعطاء واكساب التلاميذ بعض المعلومات والمعارف فى الرياضيات. وقد ترتب على ذلك أن تعليم الرياضيات أصبح هو غاية تدريسها. ونتيجة لهذه النظرة الضيقة، كان يمكن لأى فرد أن يقوم بتدريس الرياضيات دون اعداد سابق لتحمل مسئولية هذا العمل، طالما أنه يتمكن من مادته العلمية. ولعل السبب المباشر لذلك، هو الإيمان بأنه أهداف تدريس الرياضيات لا تتعدى مجرد معلومات تلقى ومعارف تكتسب.

ولكن مع اهتمام التربية الحديثة بالمادة والطريقة معا، أصبح تدريس الرياضيات بالنسبة لمن يقوم بتدريسها لا يعنى فقط قدرته على السيطرة على قوانينها ونظرياتها وتركيباتها، وإنما هو بالإضافة إلى معرفة ما سبق، خبرة من الخبرات التى تكتسب وتنمو وتنضج على أسس ومقومات بعينها، حسب الأصول المقررة للرياضيات ذاتها كمادة عملية ودراسية آنيًا، وأيضا حسب الاستعداد الفنى لكل معلم يقوم بتدريس الرياضيات.

والسؤال الآن: هل تدريس الرياضيات علم أم فن؟

تنقسم المعرفة الإنسانية إلى علوم وفنون، ولكل نوع من المعرفة جانبين، أحدهما نظرى وهو العلم، والأخر تطبيقى وهو الفن. ويتمثل العلم بمفهومه العام بالحقائق التى اهتدى إليها العقل الإنسانى عن طريق التفكير والتجربة فآمن بها، واستخدمها فى شتى جوانب الحياة. ويتمثل الفن فى شتى المهارات والخبرات، التى يحذقها الإنسان عن طريق الاستعداد والممارسة. وحيث أن العلوم مصدرها العقل، بينما الفنون مصدرها الذوق، وحيث أن أحكام العقل واحدة حيال جميع الحقائق، بينما الذوق يختلف فيه الناس. إذن فحقائق العلم تُقبل دون اختلاف، بينما تتباين الأحكام على الفنون.

"وهكذا يتضح أن العلم والفن ليسا منفصلين، وإنما هما متداخلان، أو هما وجهان لشئ واحد: أحدهما نظرى، والآخر تطبيقى".

إذا طبقنا ما سبق على تدريس الرياضيات، عرفنا مكانة تدريس الرياضيات بين العلم والفن. إن معرفة المعلم لنظريات تدريس الرياضيات لن تجعل منه أبدًا مدرسًا ماهرًا، وفنانًا، ولكن إذا استطاع المعلم تطبيق هذه النظريات داخل الفصل أصبح مدرسًا ناجحًا، وبخاصة إذا اكتسب من هذه النظريات مهارات وخبرات تعينه فى عمله.

والواقع أنه فى الموقف التدريسى، يعتمد معلم الرياضيات فى عمله على جانبين متلازمين لا يمكن فصل أحدهما عن الآخر، وهما: التمكن من المادة العلمية، وطريقة تقديم هذه المادة العلمية. وبمعنى آخر، فإن المقومات الأساسية لتدريس الرياضيات، إنما هى، بالإضافة إلى المعلومات الصحيحة، تلك المهارات التى تتمثل فى موقف المدرس وشخصيته وحسن اتصاله بتلاميذه وحديثه إليهم، وحسن استماعه كذلك إليهم، والإجابة عن أسئلتهم، وبراعته فى استهوائهم وتشويقهم، وقدرته على إيصال الحقائق الرياضية الصحيحة إلى عقولهم بسهولة ووضوح.

وباختصار، فإن المعلم الذى يحذق قواعد وأصول الرياضيات، ويعرف حقائقها وقوانينها ونظرياتها، فهو عالم بالرياضيات، وحينما يكون لديه القدرة على تقديم ما يعرفه بطريقة ممتازة وطيبة، فهو عالم وفنان، وبذلك يكون مبدعًا فى تدريس مادة الرياضيات.

من ذلك يتجلى أن إبداعات تدريس الرياضيات تكون فى الغالب بمثابة فن مؤسس على بنيات وتركيبات رياضية، تقوم على حقائق ونظريات وقوانين الرياضيات نفسها. وحتى تكون إبداعات تدريس الرياضيات فنًا رائعًا بالفعل، ينبغى أن يراعى المدرس القواعد التالية داخل الفصل:

١ ـ توجيه أسئلة مسلية وجذابة للتلاميذ:

إن الأسئلة المسلية والجذابة تكون من عوامل شد انتباه التلاميذ لمادة الرياضيات، فيحبونها ويسعدون بدراستها. وكمثال لمثل هذه الأسئلة، نذكر ما يلى:

لنفرض أن موضوع الدرس هو وحده "القياس". يمكن للمدرس فى هذه الحالة توجيه مثل هذا السؤال المثير ليكون نقطة البداية:

أنظر جيدا إلى حجرة الدراسة التى نحن بداخلها، هل بإمكاننا وضع مليون كرة سلة فيها؟ وماذا عن مليون كرة بيسبول؟ ومليون كرة تنس طاولة؟ ومليون قرش؟

إن توقعات التلاميذ ـ بالنسبة لحجرة الدراسة متوسطة الحجم ـ سيكون غالبا على النحو التالى:

تكفى مليون كرة تنس أو مليون عملة من فئة القرش لملأ حجرة الدراسة متوسطة الحجم.

وبعد إنقضاء زمن فى المناقشة بين المدرس والتلاميذ، يستطيع المدرس مساعدة التلاميذ فى تحديد تقدير تقريبى للجواب، وذلك بإحضار صندوق فارغ ثم ملئه لحافته بكرات تنس الطاولة، ثم حساب عدد هذه الكرات. ويتلو ذلك مقارنة حجم الحجرة بحجم الصندوق، وذلك لحساب العدد التقريبى للصناديق التى يمكن وضعها داخل الحجرة.

وبهذه الطريقة يمكن عمل حساب تقريبى لعدد كرات تنس الطاولة التى تملأ الحجرة.

٢ ـ تزويد التلاميذ بما يساعدهم على الاكتشاف:

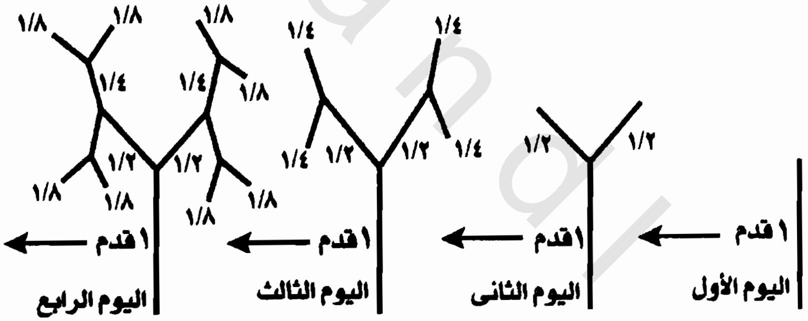
يمكن أن يكون لتكنيك الاكتشاف استعمال فعال فى جعل الرياضيات جذابة عند دراستها، وذلك ما دعا عالم الرياضيات الفرنسى المشهور **رينيه ديكارت** (١٥٩٦ ـ ١٦٥٠) إلى التنبيه إلى أهمية مراعاة مبدأ "لذة الاكتشاف" عند تدريس

الرياضيات. وفى الحقيقة، أن الحقائق التى يكتشفها التلميذ يبقى أثرها طويلا. أيضا، عندما يكتشف التلميذ حقيقة ما، يشعر بالرضا عن نفسه، لأنه أسهم فى صنع واكتشاف بعض جوانب الرياضيات، وذلك يجعله يدرسها بفاعلية.

ومن الأمثلة المفيدة التى ينبغى تقديمها للتلاميذ لاكتشاف حلول لها، نذكر ما يلى:

مثال (١):

يصلح هذا المثال لتلاميذ المرحلة الثانوية الذين يدرسون موضوع المتواليات العددية والهندسية، ويتناول هذا المثال نمو شجرة "اللانهاية"، وهذه الشجرة لا تنمو مثل أى شجرة أخرى، ولكنها تنمو بطريقة مسلية للغاية، يوضحها الشكل التالى:



فى البداية، يسأل المدرس التلاميذ عن العلاقة التى تنمو بها فروع الشجرة، وبعدها يسألهم عن نهاية طول وعرض الشجرة.

وفى الحقيقة، باستخدام أسلوب اكتشافى ابتكارى يستطيع التلاميذ اثبات أن نهاية طول الشجرة = $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$ قدم، ونهاية عرضها = $\frac{3(\sqrt{2}+1)}{2}$ قدم.

مثال (٢):

يصلح هذا المثال أيضا لتلاميذ المرحلة الثانوية، وفيه يكتب المدرس على السبورة المتسلسلة التالية:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \ldots\ldots + \frac{1}{99 \times 100}$$

ثم يطلب من التلاميذ محاولة ايجاد مجموعها.

ويمكن للمدرس أن يوحى للتلاميذ أن أحد الأساليب التى يمكن عن طريقها حل المشكلة السابقة، هو حل المشكلة جزئيا، أى حلها على مراحل، فذلك يقود التلاميذ إلى اتباع الطريقة التالية:

$$\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

عندما يصل التلاميذ إلى الخطوة الأخيرة، يسأل المدرس التلاميذ عن إمكان اكتشاف مجموع الحدود الأربعة الأولى مباشرة دون اتباع العمليات الحسابية السابقة. سوف يجد المدرس مجموعة ليست قليلة من التلاميذ تكتشف أن مجموع الحدود الأربعة الأولى = $\frac{4}{5}$

وبالمثـل، تستطيع مجموعة كبيرة من التلاميذ اكتشاف أن مجموع المتسلسة السابقة = $\frac{99}{100}$

من الواضح أن الطريقة السابقة طريقة بدائية لاكتشاف الحل، ويمكن لبعض التلاميذ اكتشاف حل إبداعى متقدم، مثل الحل التالى الذى يقوم على ملاحظة العلاقة بين حدود المتسلسلة:

$$\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{١}{٣\times٤} = \frac{١}{١٢} = \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}$$

إذن: يمكن كتابة المتسلسلة على الصورة التالية:

$$(١ - \frac{١}{٢}) + (\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}) + (\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}) + \ldots\ldots\ldots + (\frac{١}{٩٨} - \frac{١}{٩٩})$$
$$+ (\frac{١}{٩٩} - \frac{١}{١٠٠}) = ١ - \frac{١}{١٠٠} = \frac{٩٩}{١٠٠}$$

مثال (٣):

ويصلح لتلاميذ المرحلة الإعدادية، وفكرة هذا المثال تقوم على ما يلى:

يطلب المدرس من أى تلميذ كتابة الأرقام المتتالية من ١ إلى عشرة فى عمود، ثم يطلب منه بعد ذلك اختيار أى رقمين (٤، ٩ مثلا) ليكتب الرقم الأول (٤) أمام الرقم (١)، وليكتب الرقم (٩) أمام الرقم (٢)، ثم يطلب منه أن يجمع الرقمين (٤، ٩) ليكتب الناتج أمام الرقم (٣)، ويستمر فى هذه العملية بحيث يجمع العددين الأخيرين فى العمود الثانى ويكتب الناتج أمام الرقم المناظر فى العمود الأول، فتكون النتيجة كما يلى:

العمود الأول	العمود الثانى	
١	٤	
٢	٩	
٣	١٣	
٤	٢٢	
٥	٣٥	
٦	٥٧	
٧	٩٢	$\longrightarrow ١١\times٩٢ = ١٠١٢$
٨	١٤٩	
٩	٢٤١	
١٠	٣٩٠	

ثم يقوم المدرس بضرب ٩٢ (العدد الموجود أمام الرقم ٧) فى ١١ فيكون الناتج = ١٠١٢، ويوضح لهم أن العدد الأخير هو حاصل جمع أعداد العمود الثانى، وذلك يعنى أن المجموع داله للحد السابع.

فى النهاية يطلب المدرس من التلاميذ اكتشاف الطريقة التى اتبعها لحساب المجموع السابق (١٠١٢). ويمكنهم تحقيق ذلك، إذا عمم المدرس ما سبق باستبدال الرقمين السابقين بالرمزين أ ، ب على التوالى لتكون المتتابعة على الصورة التالية:

العمود الأول	العمود الثانى
١	أ
٢	ب
٣	أ + ب
٤	أ + ٢ب
٦	٢أ + ٣ب
٥	٣أ + ٥ب
٧	٥أ + ٨ب
٨	٨أ + ١٣ب
٩	١٣أ + ٢١ب
١٠	٢١أ + ٣٤ب
المجموع	٥٥أ + ٨٨ب = ١١(٥ أ + ٨ ب)
	= ١١ × الحد السابع

(٣) اجعل من الرياضيات مادة حية داخل الفصل:

يعتقد كثير من التلاميذ أن الرياضيات كئيبة جدا، ويتصورون أن من يعمل فيها كمن يقضى حياته يحفر فى جبال من الأرقام. ومن الطرق المسلية الجذابة التى تجعل من الرياضيات مادة حية، استعمال الاستشهادات التاريخية، التى تبين أن الرياضيين شأنهم شأن سائر البشر، لهم جوانب ضعفهم وجوانب قوتهم أيضا. وتمدنا كتب تاريخ الرياضيات بمثل هذه الاستشهادات التى نذكر منها ما يلى:

(أ) تروى كتب تاريخ الرياضيات أن الرياضى الألمانى **كارل جاوس** (١٧٧٧ ـ ١٨٥٥) كان منذ صغره مولعًا ومهتمًا بالرياضيات. وأن ذلك دفع أحد مدرسى الرياضيات فى المرحلة الإبتدائية أن يطلب منه كتابة الأعداد من ١ إلى ١٠٠ ثم يوجد مجموع هذه الأعداد. وتروى القصة أن **جاوس** أجاب فى التو أن الناتج هو ٥٠٥٠. وقد وصل إلى النتيجة السابقة بترتيب الأعداد على النحو التالى:

١ + ١٠٠ = ١٠١

٢ + ٩٩ = ١٠١

٣ + ٩٨ = ١٠١، وهكذا

وعلى ذلك، فإن الأعداد من ١ إلى ١٠٠ تتكون من خمسين زوجًا من الأعداد قيمة كل منها ١٠١، وعليه يكون مجموع الأعداد =٥٠×١٠١=٥٠٥٠. ورغم أن القصة السابقة قد لا تكون صادقة تماما، إلا أنها تفيد فى جذب اهتمام تلاميذ المرحلة الثانوية، وخاصة عند تقديم موضوع المتواليات العددية لهم.

(ب) يمكن للمدرس المبدع استخدام الأنظمة القديمة التى كانت تستخدم فى بعض العمليات الحسابية والجبرية لتوليد اهتمام التلاميذ بالرياضيات. ومن الطرق القديمة، التى يمكن استخدامها حتى يومنا هذا، طريقة قدماء المصريين التى اتبعوها عند حساب حاصل ضرب أى عددين. فمثلا لإيجاد حاصل ضرب ٢٥× ٣٢، كانت تتبع الطريقة التالية:

القسمة على ٢ مع إهمال الباقى	الضرب فى ٢
٢٥	٣٢
١٢	٦٤
٦	١٢٨
٣	٢٥٦
١	٥١٢

حاصل الضرب = مجموع الأعداد المقابلة للأعداد الفردية =٣٢+٢٥٦+٥١٢= ٨٠٠. وإذا اتبعنا الطريقة المألوفة فى ضرب الأعداد نحصل على نفس الجواب السابق. ويمكن إجراء عملية الضرب باتباع الطريقة التالية:

يمكن التعبير عن أى عدد بدلالة اعداد مختارة من المتسلسلة:

١، ٢، ٤، ٨، ١٦، ...

فإذا كان المطلوب ايجاد حاصل ضرب ٢١٤×٣٧ فإننا نوجد قيمة ٣٧ بدلالة أعداد المتسلسلة السابقة، كما يلى:

١+٤+٣٢=٣٧

إذن:

١	٢١٤
٢	٤٢٨
٤	٨٥٦
٨	١٧١٢
١٦	٣٤٢٤
٣٢	٦٨٤٢

إذن ٢١٤×٣٧=٢١٤+٨٥٦+٦٨٤٨=٧٩١٨

(ج) أيضا، يشعر التلاميذ بالسعادة إذا عرفوا الطرق القديمة لحل المعادلات. فمثلا مما يسعد التلاميذ كثيرا معرفتهم "قاعدة الوضع الكاذب المزدوج" التى عرفها قدماء المصريين، والتى انتقلت إلى أوروبا فى العصور الوسطى عن طريق الهند، والتى تعتمد عند حل المعادلة له على التخمين، والتى نوضح خطواتها بالمثال:

إذا كانت المعادلة المطلوب حلها هى:

$$\text{س} + \frac{\text{س}}{\text{٧}} = \text{٢٤}$$

إذا فرضنا أن الحل هو ٧، فإننا نضع ٧ بدلا من س فى المعادلة السابقة لنحصل على:

$$\text{٧} + \frac{\text{٧}}{\text{٧}} = \text{٨}$$

ولكن فى المعادلة المعطاه: الطرف الأيسر = ٢٤=٣(٨) وعلى ذلك، فإن ٧ ليست الحل الصحيح، وإنما ثلاثة أمثال العدد ٧ هو الحل الصحيح، أى ٢١. ورغم أن القاعدة السابقة معقدة للغاية، إلا أنه يمكن استخدامها بفاعلية عند تقديم وحدة "حل أزواج المعادلات الخطية".

وفى هذه الحالة، يبدأ الفرد بتخمين قيمتين افتراضيتين، مثل:

$\text{س}_{\text{١}}$، $\text{س}_{\text{٢}}$، ثم التعويض بهاتين القيمتين فى المعادلة المعطاة، فنحصل على القيمتين $\text{ر}_{\text{١}}$، $\text{ر}_{\text{٢}}$. ولا يجاد قيمة الحل الصحيح، نعوض بالقيمة $\text{س}_{\text{١}}$، $\text{س}_{\text{٢}}$، $\text{ر}_{\text{١}}$، $\text{ر}_{\text{٢}}$ فى الصيغة:

$$\text{س} = \frac{\text{ر}_{\text{١}}\,\text{س}_{\text{٢}} - \text{ر}_{\text{٢}}\,\text{س}_{\text{١}}}{\text{ر}_{\text{١}} - \text{ر}_{\text{٢}}}$$

يوضح المثال التالى خطوات الطريقة السابقة:

نفرض أن المطلوب حل المعادلة ٣س-١٢=٠

نخمن قيمتين هما $\text{س}_1 = 2$، $\text{س}_2 = 5$ ونعوض بهما فى المعادلة السابقة، فنحصل على: $\text{ر}_1 = -6$، $\text{ر}_2 = 3$

نعوض بالقيم السابقة فى الصيغة:

$$\text{س} = \frac{\text{ر}_1\,\text{س}_2 - \text{ر}_2\,\text{س}_1}{\text{ر}_1 - \text{ر}_2}$$

فنحصل على حل المعادلة:

$$\text{س} = \frac{(-6)(5) - (3)(2)}{-6 - 2} = \frac{-36}{-9} = +4$$

(٤) استخدام المعينات التعليمية التى تخاطب حواسًا متعددة استخداما فعالا:

من المفيد جدا استخدم المعينات التعليمية فى تدريس الرياضيات لأنها تسهم فى تقدم العملية التعليمية. ومن الأفضل أن تكون هذه الوسائل رخيصة الثمن، وسهل الحصول عليها، ويمكن تصنيعها من الخامات المحلية.

ولتوضيح أهمية المعينات فى تدريس الرياضيات، نذكر الأمثلة التالية:

(أ) لنفرض أن المدرس يشرح درس "الجو جول" الذى هو عبارة عن $(10)^{100}$.
ان هذا العدد لا يبدو ضخما جدا عند الحديث عنه، ولكن التلميذ يقدر تماما مدى كبر هذا العدد، عندما يستخدم المدرس شريط من الورق مكتوب عليه (الجو جول). فعندما يخرج المدرس هذا الشريط ويفرده أمام التلميذ ليرى المائه صفر واضحة أمامه، يدرك بساطه المليون إذا قورن بالجو جول.

(ب) أيضا، هناك فئة من التلاميذ لا تعتقد فى حقيقة أن الكسر العشرى للنسبة التقريبية ط(٢٢÷٧) لا ينتهى.

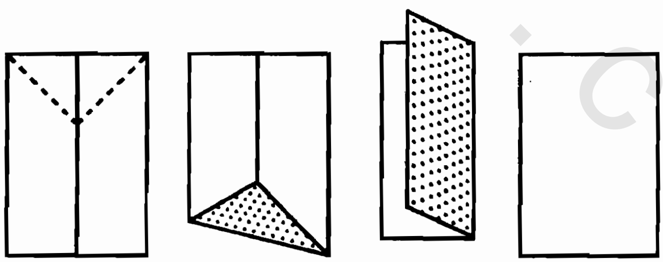
يستطيع المدرس أن يغير اعتقاد التلاميذ الخاطئ نحو الكسر العشرى للنسبة التقريبية، وذلك باستخدم قطعة من الورق ويكتب عليها التالى:

ط=

٣,١٤١٥٩	٢٦٥٣٥	٨٩٧٩٣
٢٣٨٤٦	٢٦٤٣٣	٨٣٢٧٩
٥٠٢٨٨	٤١٩٧١	٦٩٣٩٩
٣٧٥١٠	٥٨٢٠٩	٧٤٩٤٤
٥٩٢٣٠	٧٨١٦٤	٠٦٢٨٦
٢٠٨٩٩	٨٦٢٨٠	٣٤٨٢٥
٣٤٢١١	٧٠٦٧٩	٠٠٠٠٠

ويلى ما سبق، تعقيب من المدرس يبين فيه أن فيليب ج. دافيز استطاع ايجاد الأربعة آلاف الأولى من الكسر العشرى للنسبة التقريبية دون أن ينتهى ذلك الكسر العشرى بعد.

(ج) كذلك، يمكن للمدرس التقديم لدرس المثلثات المتساوية الساقين باستخدام فرخ من الورق، وذلك عن طريق عمل الإجراءات التالية:



٥ ـ ابدأ أو انتهى من الدرس بشئ مثير:

يمكن شد انتباه التلاميذ نحو دراسة الرياضيات، وذلك بتقديم بعض

المغالطات الرياضية أو تقديم بعض النماذج الرياضية للتلاميذ، وفيما يلى بعض النماذج والمغالطات الرياضية التى يمكن عن طريقها تحويل مادة الرياضيات من مادة جافة إلى مادة مثير بالنسبة للتلاميذ:

(أ) يعطى المدرس ظهره للسبورة ثم يطلب من أى تلميذ الذهاب إلى السبورة ويكتب أى عدد يتكون من رقمين بحيث تنحصر قيمته بين ٥٠، ١٠، ثم يطلب منه إضافة العدد ٧٦ إلى العدد الذى كتبه، وبعد ذلك يطلب منه حذف الرقم الموجود فى خانة المئات واضافته إلى العدد الباقى ثم يطرح العدد الناتج من العدد الأصلى. وبعد ذلك يخبر المدرس التلاميذ وظهره للسبورة أن ناتج العملية السابقة = ٢٣

ان الشئ المثير فى هذه الخدعة، أن العدد الأخير يكون دائما ٢٣ مهما كان العدد المختار مادامت قيمته تنحصر بين ٥٠، ١٠٠. وفيما يلى نعطى مثالا يوضح خطوات الإجراء السابق:

العدد الأصلى (المختار) ٨٣

بإضافة: ٧٦

نحصل على: ١٥٩

بحذف رقم المئات وإضافته إلى العدد الباقى نحصل على:

٥٩+١=٦٠

بطرح العدد الناتج من العدد الأصلى نحصل على:

٨٣-٦٠=٢٣

وقد استخدم سويل الطريقة السابقة بفاعلية فى تدريس الرياضيات. فقد كان يكتب الرقم ٢٣ بحبر سرى على ظهر يده. ثم يطلب من أحد التلاميذ أن يخرج

ورقة بيضاء وأن يقوم بتنفيذ خطوات الطريقة السابقة، بعد أن ينتهى التلميذ يطلب أن يحفظ هو وزملائه الرقم الأخير حفظا جيدا، وبعد ذلك يطلب منه طوى الورقة ثم حرقها، ويقوم هو بفرك يده فيظهر الرقم ٢٣ على يده. ان ذلك كان مثار دهشة التلميذ، فقد كانوا يعتقدون أن ما يقوم به **سويل** درب من دروب السحر، إلا أنه كان يقوم ـ بعد انحصار علامات الدهشة من على وجوه التلاميذ ـ بشرح أصول اللعبة.

(ب) أيضا من الوسائل التى يمكن ان يتبعها المدرس لإثارة اهتمام التلاميذ، ما يلى:

يكتب المدرس العدد ١٢.٣٤٥.٦٧٩ على السبورة، ويطلق عليه العدد السحرى، وعندما يسأل التلاميذ عن سبب هذه التسمية، يطلب من تلاميذ الصف الأول فى الفصل أن يضربوا العدد السابق فى٩، ويطلب من تلاميذ الصف الثانى أن يضربوا العدد السابق فى ١٨ (٩×٢)، ويطلب من تلاميذ الصف الثالث أن يضربوا العدد السابق فى ٢٧ (٩×٣)، وهكذا. فيحصل التلاميذ على النتائج المثيرة التالية:

١١١.١١١.١١١=١٢.٣٤٥.٦٧٩×٩

٢٢٢.٢٢٢.٢٢٢=١٢.٣٤٥.٦٧٩×١٨

٣٣٣.٣٣٣.٣٣٣=١٢.٣٤٥.٦٧٩×٢٧

٤٤٤.٤٤٤.٤٤٤=١٢.٣٤٥.٦٧٩×٣٦

٥٥٥.٥٥٥.٥٥٥=١٢.٣٤٥.٦٧٩×٤٥

ويستمر التماثل لمضروبات العدد ٩ حتى العدد ٨١. ولذا يسمى العدد السابق بالعدد السحرى.

ويستطيع المدرس اظهار أهمية ذلك العدد، عند سؤال أى تلميذ عن العدد الذى يتفاءل به، أو عن رقم الحظ له، فإذا حدد التلميذ الرقم ٣ (مثلا)، فإنه يطلب منه ضرب العدد السابق فى ٢١، أما إذا حدد التلميذ الرقم ٥ (مثلا)، فإنه يطلب منه ضرب العدد السابق فى ٤٥. إن ناتج الضرب فى كل حاله سوف يثير بالتأكيد اهتمام التلميذ، وذلك لتماثل الأرقام التى يحصل عليها فى كل حالة.

(ج) كذلك يمكن استخدام المغالطات الرياضيات فى إثاره اهتمام التلاميذ لدراسة الرياضيات، ففى المرحلة الثانوية يمكن باستخدام المغالطات الرياضيات، إثبات أن: ١=٢، وذلك كما يلى:

بفرض أن: أ = ب

إذن: أ × أ= أ × ب

أ^{٢}= أ ب بطرح ب^{٢} من الطرفين

أ^{٢} – ب^{٢}=أ ب – ب^{٢}

(أ + ب) (أ – ب) = ب (أ – ب)

بقسمة الطرفين على: أ – ب

أ + ب = ب

بالتعويض عن: أ = ب نحصل على:

إذن: ب + ب = ب

٢ب = ب

٢ = ١

يقع الخطأ فى قسمة الطرفين على العامل الصفرى (أ–ب=صفر).

المثال السابق يمكن أن يكون مدخلا مناسبا لمناقشة موضوع القسمة على العامل الصفرى، وبخاصة عند تدريس موضوع النهايات فى التفاصيل.

(د) يمكن أيضا لمدرس الرياضيات استخدام بعض الألغاز والمسائل الرياضية التى يمكن عن طريقها فرز التلاميذ النابغين، والذين يمتازون بالقدرة على التخيل، ومن هذه الألغاز نذكر ما يلى:

برميل فيه ثمان كورات، يراد تقسيمه إلى قسمين متساويين باستخدام البرميل نفسه، وإبريقين خاليين سعتهما ٥ كورات، ٣ كورات على الترتيب. يمكن الوصول إلى الحل بعده طرق نذكر منها ما يلى:

الحل الأول

الآنية	مقدار الكورات فى كل آنية فى المراحل
المراحل	٩٨٧٦٥٤٣٢١
برميل ٨ كورات	٤٤٧٧٢٢٥٥٨
إبريق ٥ كورات	٤١١٠٥٣٣٠٠
إبريق ٣ كورات	٠٣٠١١٣٠٣٠

الحل الثانى

الآنية	مقدار الكورات فى كل آنية فى المراحل
المراحل	٨٧٦٥٤٣٢١
برميل ٨ كورات	٤١١٦٦٣٣٨
ابريق ٥ كورات	٤٤٥٠٢٢٥٠
ابريق ٣ كورات	٠٣٢٢٠٣٠٠

أيضا من المسائل الرياضية التى يطلب من التلميذ حلها دون استخدام القلم والورق، نذكر المسألة التالية:

أوجد عددين الفرق بينهما يساوى خارج قسمة أحدهما على الآخر، وكل يساوى ٣

ويمكن للتلميذ النابه حل المسألة السابقة على النحو التالى: خارج قسمة العددين ٣، والفرق بين العددين يساوى ضعف العدد الأصغر، وحيث أن هذا الفرق يساوى ٣، إذن: العدد الأصغر يساوى ١.٥، والعدد الأكبر يساوى ١.٥+٣ =٤.٥

(هـ) فى النهاية، يمكن للمدرس عن طريق التسالى بالرياضيات جعلها تبدو جميلة ومثيرة كأى فن آخر، وليست مقبضة. وفيما يلى بعض الألعاب المسلية التى تساعد التلاميذ على اكتشاف العلاقات عن طريق ممارستها ودون فرض الاستذكار عليهم.

* يمكن للتلميذ عن طريق تداول مجموعة من القضبان ذات الأطوال والألوان المتباينة أن يدرك بطرق مختلفة أن العدد ٦ يمكن أن يتركب بأى من الطرق الآتية:

٥ + ١

٤ + ٢

٣ + ٣

٢ + ٤

١ + ١ + ١ + ١ + ١ + ١

٢ + ٢ + ٢

١ + ١ + ١ + ١ + ٢

* يمكن للتلميذ اكتساب المهارة فى الضرب والجمع والقسمة مما يشعره بالمتعة فى الحساب العقلى السريع، وذلك عن طريق مثل هذه الأمثلة:

اضرب ٧×٦، اطرح ٢، اقسم الناتج على ٤، اضرب فى ٣، أضف ٦، اقسم على ٩، اضرب فى ٤، اطرح ١، اقسم على ٥، اضرب × ٨، اضف ١، اضرب × ٤. كم يكون الناتج (الإجابة ١٠٠).

* تستهوى نسبة كبيرة من التلاميذ الفكاهه والإثارة التى يسببها التفكير المجرد والمسائل الحسابية والألعاب المسلية التى قد تكون على مثل النمط التالى.

يطلب من تلميذين العد من واحد إلى عشرين عل أن يعد أحدهما عددًا واحدًا ويعد الآخر عددين اثنين بالترتيب، كل فى دوره بادئا من حيث انتهى الآخر، والتلميذ الذى يصل العشرين يعتبر الفائز.

بالطبع، يفوز من يصل أولا إلى العدد ١٧، لأنه إذا قام زميله بعد واحد، سيعد هو اثنين ويصل إلى العدد ٢٠، أما إذا عد زميله اثنين، سيعد هو واحد ويصل إلى العدد ٢٠، وفى كلتا الحالتين يكون هو الفائز.

* يمكن كتابة الأعداد فى سلالم عديدة تسير كل منها طبقا لمبدأ، وذلك كما توضحه الأمثلة التالية:

١-٣-٥-٧....

١-٢-٤-١١-...

٥-١٥- ١٠- ٢٠-١٥-...

ثم يطلب المدرس من التلميذ أن يفكر فى العدد التالى، فيكون ذلك بمثابة تمرين عقلى مفيد له.

٦ ـ اثارة التلاميذ للبحث والاستفادة العملية من الدراسة مع تدريبهم على الدقة العلمية:

ويمكن تحقيق ما تقدم عن طريق عمل وسيلة مناسبة باستخدام الخامات: ورق مقوى أو شرائح بلاستيك شفاف ـ مادة لاصقة ـ ألوان ـ خيوط أو سلوك لتعليق الأشكال الهندسية. ويمكن أيضا استخدام الزجاج الشفاف أو المصفر وذلك فى حالة الرغبة فى اضاءة المجسم.

ويمكن تنفيذ الوسيلة كما يلى:

ـ يرسم الشكل كما هو مبين بالرسوم الموضحة بعد.

ـ يقص الشكل وتثنى الزوائد وتلصق بحيث تكون من الداخل.

ـ يلون المجسم حسب الرغبة مع الأخذ فى الاعتبار أن المجسمات التى يمكن تصنيعها ـ كما هو موضح بعد ـ هى:

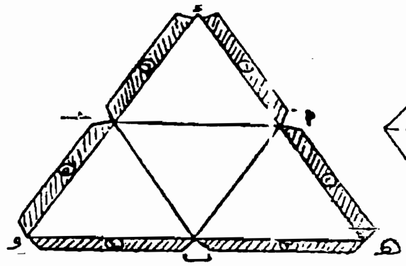
* الهرم المنتظم
* المكعب
* مجسم ذو ثمانية أوجه مثلثه متساوية.
* مجسم ذو إثنى عشر وجها خماسيا متساويا.

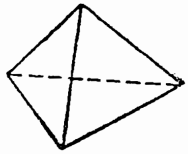
ويمكن توظيف الوسيلة فى مجالات عديدة نذكر منها ما يلى:

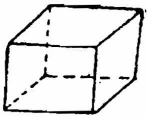
× يعرض المجسم ويشرح عليه الخواص المطلوب دراستها.

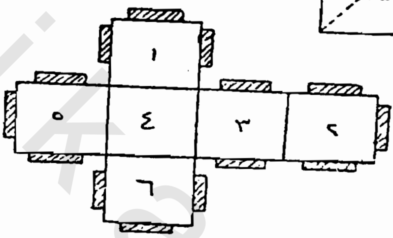
× يعلق للزينة.

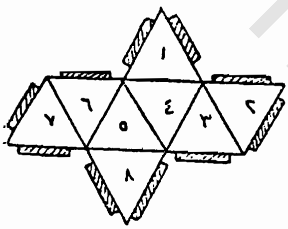
× يمكن أن يستغل كأباجورة.

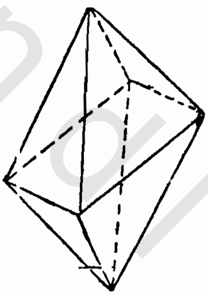


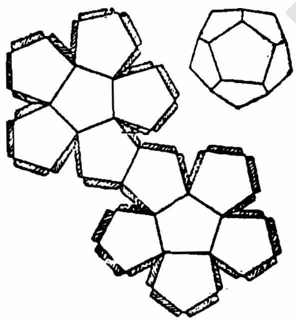


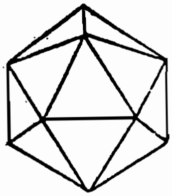


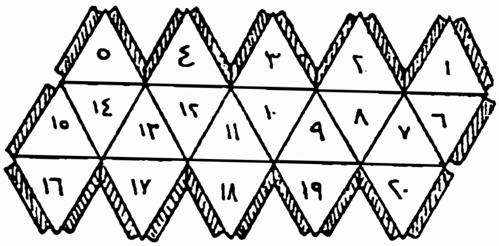

١
٥
٤
٣
٢
٦


١
٧
٦
٥
٤
٣
٢
٨









٧ ـ تنمية حب الابتكار عند المتعلمين وجعلهم يستمتعون بالرياضيات:

يمكن تحقيق ذلك عن طريق:

(أ) اعطاء مسائل تتحدى قليلا مستوى ذكاء الطلاب المتفوقين والموهوبين الذين لهم اهتمامات خاصة بالرياضيات وذلك على النحو التالى:

١ – إذا كان $٢^{م}$ – ١ عددا أوليا حيث م عدد طبيعى فأثبت أن م عدد أولى أيضا.

الحل:

نفرض أن س هى القضية $٢^{م}$ – ١ عدد أولى

، ص هى القضية م عدد أولى

فيكون المطلوب اثبات أن:

س ← ص

وحيث أن س ← ص ≡ سَ ← صَ

فيكون المطلوب إثبات أن صَ ← سَ

أى المطلوب إثبات أن:

م عدد غير أولى ← $٢^{م}$ – ١ عدد غير أولى

نضع م = أ×ب حيث أ، ب عددان صحيحان موجبان وكل منهما أ كبر من الواحد فينتج أن م عدد غير أولى.

فيكون المطلوب إثبات أن:

م = أ× ب ⟵ $٢^{م}-١$ عدد غير أولى

$٢^{م}-١=٢^{أب}-١=(٢^{أ})^{ب}-١$

لكن $\frac{(٢^{أ})ب-١}{ب-١}$ عدد غير صحيح (نظرية).

∴ $(٢^{أ})ب-١$ عدد غير أولى

∴ م عدد غير أولى ⟵ ٢م−١ عدد غير أولى

∴ صَ ⟵ سَ

∴ س ⟵ ص

٢ – أ، ب، ج هى أى ثلاث حدود متتالية فى المتتابعة الآتية:

$(٢+١)$، $(٢^{٢}+٢)$، $(٢^{٣}+٣)$، $(٢^{٤}+٤)$، $(٢^{٥}+٥)$،.... أثبت أن:

٣ب= ٢أ+ج+١ حيث أ > ب > ج

الحل:

تعتبر أ= $(٢^{ن}+ن)$ فتكون ب= $(٢^{ن+١}+ن+١)$، جـ = $(٢^{ن+٢}+ن+٢)$

الطرف الأيسر = $٢(٢^{ن+١})+(٢^{ن+٢}+ن+٢)+١$

$=٢^{ن+١}+٢ن+٢^{ن+٢}+ن+٣$

$=٢^{ن+١}(١+٢)+٣ن=٣×٣(٢^{ن+١}+ن+١)$

=٣ب = الطرف الأيمن

٣-إذا كانت أ + $\frac{١}{ب}$ = جـ (١)

، ب+ $\frac{١}{جـ}$ = د (٢)

، جـ + ١/د = أ (٣)

فأثبت أن ٢ جـ د = ١

الحل:

من (١) ∴ أ − جـ = − ١/ب

من (٣) أ − جـ = ١/د ∴ − ١/ب = ١/د

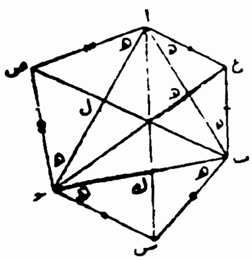
∴ ب = − د وبالتعويض عن ب فى (١)

∴ − د + ١/جـ = د ∴ ٢ د = ١/جـ

∴ ٢جـ د = ١

(ب) يمكن للتلاميذ التفكير فى حلول عديدة للمسألة الواحدة وذلك على النحو التالى:

أولا: تمرين هندسى وحله



أ ب ج مثلث، المثلثات أ ع ب، ب س ج، ج ص أ متشابهة وكل منها متساوى الساقين ومرسوم خارج المثلث أ ب ج، المطلوب إثبات أن أس، ب ص، ج ع تتقاطع فى نقطة واحدة.

الحل:

المثلثان ص أ جـ، ع أ ب متشابهان

قياس < س أ ج = قياس < ع أ ب، ص أ/ع أ = أ جـ/أ ب

∴ قياس < ص أ ب = قياس < ع أ جـ، ص أ × أ ب = ع أ × أ ج

∴ المثلث أ ص ب يكافئ المثلث أ ع جـ (١)

بالمثل المثلث ب ع جـ يكافئ المثلث ب س أ (٢)

، المثلث جـ س أ يكافئ المثلث جـ ص ب (٣)

$$\frac{\text{أ ن}}{\text{ن ب}} = \frac{\Delta\,\text{ع أ ن}}{\Delta\,\text{ع ب ن}} = \frac{\Delta\,\text{جـ أ ن}}{\Delta\,\text{جـ ب ن}}$$

$$\therefore \frac{\text{أ ن}}{\text{ن ب}} = \frac{\Delta\,\text{ع أ ن} + \Delta\,\text{جـ أ ن}}{\Delta\,\text{ع ب ن} + \Delta\,\text{جـ ب ن}} = \frac{\Delta\,\text{أ ع جـ}}{\Delta\,\text{ع جـ ب}}$$

وبالمثل $\frac{\text{ب ك}}{\text{ك جـ}} = \frac{\Delta\,\text{ب س أ}}{\Delta\,\text{جـ س أ}}$ ، $\frac{\text{جـ ل}}{\text{ل أ}} = \frac{\Delta\,\text{جـ ص ب}}{\Delta\,\text{أ ص ب}}$

$$\therefore \frac{\text{أ ن}}{\text{ن ب}} \times \frac{\text{ب ك}}{\text{ك جـ}} \times \frac{\text{جـ ل}}{\text{ل أ}}$$

$$= \frac{\Delta\,\text{أ ع جـ}}{\Delta\,\text{ع جـ ب}} \times \frac{\Delta\,\text{ب س أ}}{\Delta\,\text{جـ س أ}} \times \frac{\Delta\,\text{جـ ص ب}}{\Delta\,\text{أ ص ب}} \qquad (٤)$$

من (١)، (٢)، (٣)، (٤)

$$\therefore \frac{\text{أ ن}}{\text{ن ب}} \times \frac{\text{ب ك}}{\text{ك جـ}} \times \frac{\text{جـ ل}}{\text{ل أ}} = ١$$

∴ المستقيمات أ س، ب ص، ج ع تتقاطع فى نقطة واحدة.

الحل الثانى:

∵ المثلثات أ ع ب، ب س ج، ج ص أ متشابهة ومتساوية الساقين

$<$ع أ ب = $<$ع ب أ = $<$س ب جـ = $<$س جـ ب = $<$ص جـ أ = $<$ص أ ج

= هـ مثلا.

فى المثلث أ ع ن وبتطبيق قاعدة الجيب:

$$\therefore \frac{\text{أ ن}}{\text{جا أ ع ن}} = \frac{\text{ع ن}}{\text{جا ن}} \qquad (1)$$

وبالمثل فى المثلث ب ع ن:

$$\therefore \frac{\text{ن ب}}{\text{جا ب ع ن}} = \frac{\text{ع ن}}{\text{جا هـ}} \qquad (2)$$

من (١)، (٢): ∴ $\frac{\text{أ ن}}{\text{ن ب}} = \frac{\text{جا أ ع ن}}{\text{جا ب ع ن}}$ (٣)

وفى المثلث أ ع ج وبتطبيق قاعدة الجيب:

$$\therefore \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا أ ع جـ}} = \frac{\text{ع جـ}}{\text{جا (هـ + أ)}} \qquad (4)$$

بالمثل فى المثلث ب ع ج:

$$\therefore \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا ب ع جـ}} = \frac{\text{ع جـ}}{\text{جا (هـ + ب)}} \qquad (5)$$

من (٤)، (٥) ∴ $\frac{\text{أ جـ جا (هـ + أ)}}{\text{ب جـ جا (هـ + ب)}} = \frac{\text{جا أ ع جـ}}{\text{جا ب ع جـ}}$ (٦)

من (٣)، (٦) ∴ $\frac{\text{أ ن}}{\text{ن ب}} = \frac{\text{أ جـ جا (هـ + أ)}}{\text{ب جـ جا (هـ + ب)}}$ (٧)

وبالمثل يمكن اثبات أن:

$$\frac{\text{ب ك}}{\text{ك جـ}} = \frac{\text{أ ب جا (هـ + ب)}}{\text{أ جـ جا (هـ + جـ)}} \qquad (8)$$

$$\frac{\text{جـ ل}}{\text{ل أ}} = \frac{\text{ب جـ جا (هـ + جـ)}}{\text{أ ب جا (هـ + أ)}} \qquad (9)$$

من (٧)، (٨)، (٩) ينتج أن:

$$\frac{\text{أ ن}}{\text{ن ب}} \times \frac{\text{ب ك}}{\text{ك جـ}} \times \frac{\text{جـ ل}}{\text{أ ل}}$$

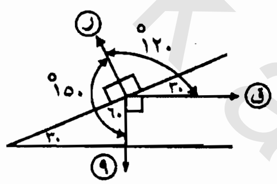
$$= \frac{\text{أ جـ جا (هـ + أ)}}{\text{ب جـ جا (هـ + ب)}} \times \frac{\text{أ ب جا (هـ + ب)}}{\text{أ جـ جا (هـ + جـ)}} \times \frac{\text{ب جـ جا (هـ + جـ)}}{\text{أ ب جا (هـ + أ)}} = ١$$

∴ أ س، ب ص، جـ ع تتقاطع فى نقطة واحدة (عكس نظرية شيفا).

ثانيا مسألة استاتيكا وحلها:

وضع جسم وزنه ٩ ث. جم على مستو أملس يميل على الأفقى بزاوية ٣٠° أوجد أقل قوة أفقية تؤثر على الجسم وتمنعه من الانزلاق، وأوجد كذا رد فعل المستوى على الجسم.

الحل الأول: باستخدام قاعدة لامى:



$$\frac{\text{ق}}{\text{جا } ١٥٠} = \frac{\text{ر}}{\text{جا } ٩٠} = \frac{٩}{\text{جا } ١٢٠}$$

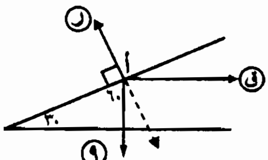
$$\frac{\text{ق}}{\text{جا } ٣٠} = \frac{\text{ر}}{\text{جا } ٩٠} = \frac{٩}{\text{جا } ٦٠}$$

$$\therefore \text{ق} = \frac{\text{٩ جا } ٣٠}{\text{جا } ٦٠}$$

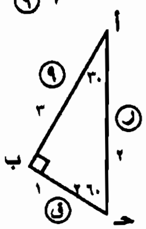
$$= \frac{٩}{\sqrt{٣}} = ٣\sqrt{٣} \text{ ث. جم}$$

$$\text{، ر} = \frac{\text{٩ جا } ٩٠}{\text{جا } ٦٠} = \frac{18}{\sqrt{٣}} = ٦\sqrt{٣} \text{ ث. جم}$$

الحل الثانى: باستخدام قاعدة مثلث القوى:



المثلث أ ب جـ يمثل القوى تمثيلا تاما.



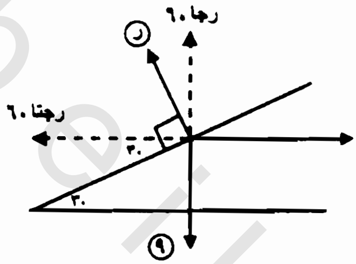
$$\frac{\text{ق}}{١} = \frac{\text{ر}}{٢} = \frac{٩}{\sqrt{٣}}$$

$$\text{ق} = \frac{٩}{\sqrt{٣}} = ٣\sqrt{٣} \text{ ث. جم}$$

، $ر = \frac{٩ \times ٢}{\sqrt{٣}} = ٦\sqrt{٣}$ ث. جم

الحل الثالث: باستخدام التحليل

Q المجموعة متزنة



∴ مجموع المركبات الرأسية = صفر

ر جا ٦٠ = ٩ ← ر × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٩

$ر = \frac{٩ \times ٢}{\sqrt{٣}} = \frac{١٨}{\sqrt{٣}} = ٦\sqrt{٣}$ ث. جم

∴ مجموع المركبات الأفقية = صفر

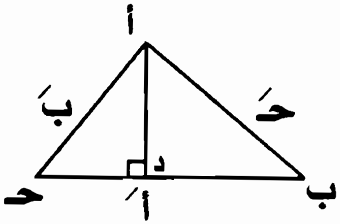
ق = ر جتا ٦٠ = $٦\sqrt{٣} \times \frac{١}{٢} = ٣\sqrt{٣}$ ث جم

(ج) استخدام طرائق مختلفة غير المألوفة أو المعتاد فى برهنة بعض القوانين، واعطاء أمثلة على هذه الطرائق الجديدة، وذلك على النحو التالى:

يمكن حل المثلث بطريقة مختلفة عن الطرق المألوفة التى تعتمد على المبادئ الأولية:

لنفرض أن أَ هو أكبر ضلاع المثلث أ ب جـ، أن جـَ > بَ

من نظرية فيثاغورس نعلم أن:



(١)

$\overline{ب د}^٢ - \overline{د جـ}^٢ = \overline{ب أ}^٢ - \overline{جـ أ}^٢$

لكن ب د + د جـ = أَ

ب د − د جـ = $\frac{جـَ^٢ - بَ^٢}{أَ}$

= $\frac{(جـَ - بَ)(جـَ + بَ)}{أَ}$

∴ لو (ب د − دجـ)= لو (جـَ − بَ) + لو (جـَ + بَ) − لو أ... (٢)

ومن (١)، (٢) يمكن تعيين ب د، د ج. ومن ثم يمكن ايجاد الزاويتين ب، ج من:

جتا ب = ب د / جـ

جتا جـ = جـ د / ب

، أ= ١٨٠° − (بَ + جَ)

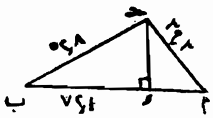
مثال:

حل المثلث الذى أطول أضلاعه ٥٢.٨، ٣٩.٣، ٧٢.١ سم

الحل:

نرسم عمودًا على أكبر الأضلاع من الرأس المقابل:

ب د + د أ= ٧٢،١



ب د² − د أ² = ب جـ² − أ جـ²

= (٥٢،٨ + ٣٩،٣) × (٥٢،٨ − ٣٩،٣)

= (٩٢،١ × ١٣،٥)

∴ لو (ب د − د أ) = لو ٩٢،١ + لو ١٣،٥ − لو ٧٢،١

= ١،٩٦٤٣ + ١،١٣٠٣ − ١،٨٥٧٩

= ١،٢٣٦٧

∴ ب د − د أ = ١٧،٢٥ ، ∴ ب د + د أ = ٧٢،٢١

∴ ٢ب د = ٨٩.٣٥

ولكن جتا ب= $\frac{\text{٢ ب د}}{\text{٢ ب جـ}}$

∴ لو جتا ب = لو ٨٩،٣٥ – لو ١٠٥،٦

= ١،٥٩١ – ٢،٠٢٣٧ = ١،٩٢٧٤

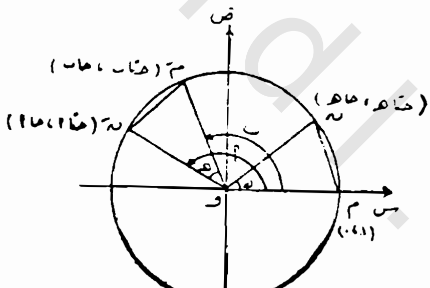
∴ $\hat{\text{ب}}$ = ٢٢° ١٣َ

وبالمثل نوجد الزاوية أ، وبطرح مجموع $\hat{\text{ب}}$، $\hat{\text{أ}}$ من ١٨٠ نحصل على الزاوية جـ.

أيضا يمكن برهان قانون جيب تمام الفرق بين زاويتين بطريقة مختلفة عن الطرائق المتبعة، وذلك على النحو التالى:

يمكننا باستخدام قانون البعد بين نقطتين اثبات أن:

حتا (أ – ب)= حتا أ حتا ب + حا أ حا ب



نفرض أن وهى دائرة الوحدة، وس، وص محوران متعامدان

نفرض أن < أ – <ب= هـ ، < م و ن = هـ

، < م ومَ= <ب، < م و نَ= <أ

م=(١ ، ٠)، ن = (حتا هـ، حا هـ)

، مَ = (حتا ب، حا ب)، هـ = (حتا أ، جـا أ)

الدوران الذى مركزه و، زاوية ب يرسم المثلث و م ن، مَ نَ

∴ م ن = مَ نَ

∴ $\sqrt{(١ - \text{جتا هـ})^{٢} + \text{جا ٢ هـ}}$

= $\sqrt{(\text{جتا ب} - \text{جتا أ})^{٢} + (\text{جا ب} - \text{جا أ})^{٢}}$

وبتربيع الطرفين والاختصار ينتج أن:

جتا هـ = حتا أ حتا ب + حا أ حا ب

∴ حتا (أ – ب) = حتا أ حتا ب + حا أ حا ب

ويمكن استنتاج النسب الباقية مثل جتا (أ + ب)، حا (أ + ب)، حا (أ – ب)

(د) تكليف التلاميذ بعمل بعض الوسائل المعينة التى تحقق هدف الدرس. فمثلا يمكن عمل وسيلة بسيطة باستخدام شريط من الورق، طوله ٣٠ سم وعرضه ٣.٥ سم. ويمكن تقديم الوسيلة على النحو التالى:

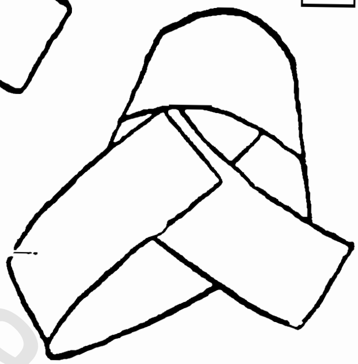
- نعمل عقدة بسيطة كما فى الأشكال ١، ٢، ٣.
- نشد طرفى الورقة برفق حتى تصبح كما فى شكل ٤ فتبدو الحروف وقد كونت الخماسى المنتظم أ ب جـ د هـ.
- نقلب العقدة ونثنى شريط الورق عند هـ د، ونمرره برفق فنحصل على الشكل ٥.
- ننقص الزيادات عند ب ج فنحصل على الشكل ٦

ويمكن للتلميذ أن يستخدمها على النحو التالى:

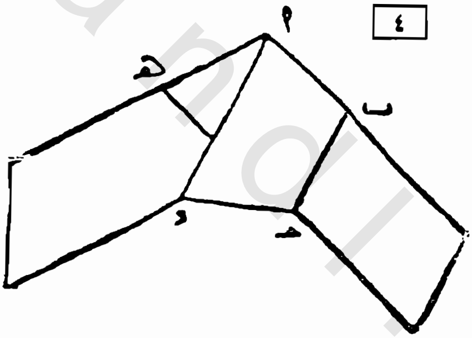
* يقوم بعمل العقدة بنفسه فيجد أنه حصل على شكل المخمس المنتظم.
* إذا نظر إليها فى الضوء سيجد أنه حصل أيضا على النجمة المخمسة.

١

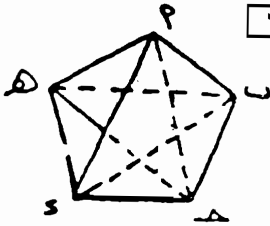
٢



٤

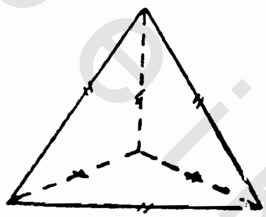


٦



٨ ـ تشجيع المتعلم على البحث والتقصى ليصل إلى المعلومة بنفسه، وذلك من خلال وضعه فى مواقف أو أمام مشكلات تحقق ذلك. ونقدم هنا بعض الأمثلة والألعاب التى يمكن من خلالها حث الطالب على البحث، وعلى استرجاع معلوماته، والتعود على استخدام الأساليب المنطقية فى البراهين:

مثال: ١



كيف يمكن أن تكون من ست عيدان كبريت متساوية الطول أربعة مثلثات متطابقة؟

هنا يربط الطالب بين معلومتين أساسيتين أربعة أوجه مثلثة، ستة أحرف، وهذا يتوفر فى الهرم الثلاثى المنتظم.

مثال: ٢

إناء سعته لتر يصب فيه سائل بحيث نكون كمية السائل الذى يصب فى كل مرة مساوية لنصف الجزء الفارغ حتى يمتلئ الاناء؟

كمية السائل التى تصب فى الإناء = ...

ويمكن أن يتضح من هذا أن الإناء لا يمكن ملؤه.

مثال: ٣

لعبة الوصول إلى الهدف:

يقوم باللعبة شخصان يستخدمان عددا من الفيشات يزيد عددها عن ثلاثة، يتناوب اللاعبان سحب الفيشات على أن يكون الفائز من يسحب آخر فيشة، ومن حق اللاعب أن يسحب فى المرة الواحدة قطعة أو قطعتين أو ثلاثة.

فى مثل هذه اللعبة يتجه تفكير اللاعب إلى السؤال: ما عدد القطع التى تكون موجودة حتى يمكن أن أفوز؟

وبشئ من التفكير يستطيع أن يصل إلى أنه يكفى أن يكون الموجود إما قطعة أو قطعتين أو ثلاثة.

وهذا يمكن الوصول إليه لو استطاع هو أن يصل إلى أن يكون أمام خصمه أربع قطع فقط لأنه فى كل حالة يسحب بها زميله فيكون هو الفائز.

وبتعميق التفكير يمكنه أن يجعل النتيجة فى صالحة مبكرًا بأن يجعل عدد القطع الموجود يقبل القسمة على أربعة.

مثال: ٤

أوجد أصغر عدد صحيح بحيث إذا ضرب فى ٢٢٥ يكون العدد الناتج مكونا فقط من الرقمين ٠ ، ١

هنا يقوم الطالب بتحليل العدد ٢٢٥ فيجد أن ٢٢٥ = ٢٥× ٣٢ أى أن الناتج لابد أن يقبل القسمة على ٢٥، أى يكون رقم أحاده صفر، ورقم عشراته صفر أيضا.

وفى نفس الوقت يقبل القسمة على ٩، أى يكون مجموع أرقامه يقبل القسمة على ٩. وحيث أنه غير مسموح له إلا استخدام الرقمين ٠ ، ١ فلابد أن يتكون العدد من ١ مكرر تسعة مرات ويكون الناتج هو ١١١١١١١١١٠٠ وبإجراء عملية القسمة يصل إلى المطلوب وهو ١٦ ٢٧ ٣٨ ٤٩

ملاحظة ١:

يمكن أن يمهد لمثل هذه المسألة باختيار أعداد بسيطة أولا مثل ١٥، ٤٥، .....

ملاحظة ٢:

يمكن أن يعدل المطلوب إلى:

أوجد أصغر مضاعف للعدد ٢٢٥ ويتكون فقط من الرقمين صفر، ١

مثال: ٥

العدد ٥ يمكن كتابته كمجموع عددين مربعين ٥= ٢١+٢٢ كذلك العدد ٢٩ = ٢٢+٢٥ كل من ٥، ٢٩ عدد أولى هل يمكنك أن تجد أعدادًا أولية أخرى (أصغر من ١٠٠) لها هذه الخاصية؟

الأعداد هى ٥، ١٣، ١٧، ٢٩، ٣٧، ٤١، ٥٣، ٦١، ٧٣، ٨٩، ٩٧).

٩ ـ تحدى ذكاء التلاميذ واثارة حماسهم للبحث والقراءة:

فيما يلى بعض غرائب الأرقام التى عن طريقها يستطيع المدرس إثارة حماس التلاميذ للبحث والقراءة:

مثال (١): الاعداد المربعة: ١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥، ٣٦، ....

لو طرح منها ٠، ١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥، ....

لكان باقى الطرح ١، ٣، ٥، ٧، ٩، ١١، ......

مثال (٢): ١٢٣٤٥٦٧٩

×٤٥

٦١٧٢٨٣٩٥

٤٩٣٨٢٧١٦

٥٥٥٥٥٥٥٥٥

مثال (٣): ١٢٣٤٥٦٧٩

×١٨

٩٨٧٦٥٤٣٢

١٢٣٤٥٦٧٩

٢٢٢٢٢٢٢٢٢

مثال (٤): ١ × ١ = ١

١١ × ١١ = ١٢١

١١١ × ١١١ = ١٢٣٢١

١١١١ × ١١١١ = ١٢٣٤٣٢١

١١١١١ × ١١١١١ = ١٢٣٤٥٤٣٢١

١٠ ـ استخدام بعض الأشكال السحرية فى بعض مواقف تدريس الرياضيات، وبخاصة التى تفيد فى تنمية الذكاء واكتساب القدرة على إجراء عمليات الجمع والطرح وإدراك العلاقات بين الأعداد، إلى جانب الاستمتاع بالحساب وما يتبعه من سرعة ودقة إجراء العمليات الحسابية.

طريقة تنفيذها:

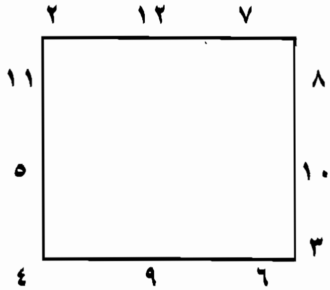
يرسم على الورق المقوى أو الخشب الأبلكاش الشكل السحرى المراد استخدامه ويرسم مربعات صغيرة لتكتب عليها الأعداد.

طريقة استخدامها:

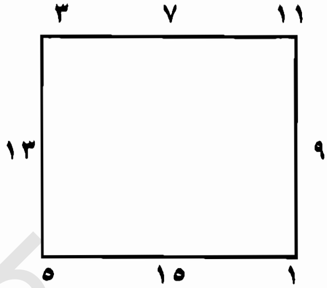
١ ـ يشرح المدرس للتلاميذ الفكرة أو المطلوب وهو أن يكون مجموع الأعداد متساويا فى الصفوف وفى الأعمدة وفى الأقطار حسب الشكل.

٢ ـ تكتب بعض الأعداد ويطلب من التلاميذ تكملتها.

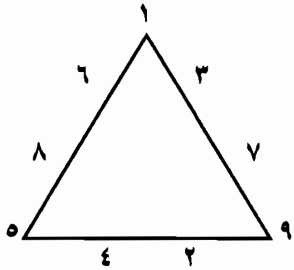
ونعرض هنا بعض هذه الأشكال، وعلى المدرس أن يحذف منها بعض الأعداد كما يرى قبل عرضها على الطلبة:



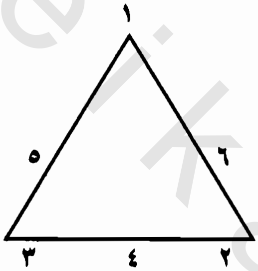
الأعداد من ١ - ١٢
والمجموع = ٢٢



الأعداد الفردية من ١ - ١٥
والمجموع = ٢١



الأعداد من ١ - ٦
والمجموع = ٢٠



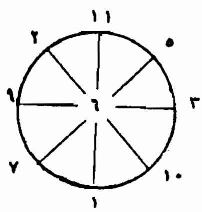
الأعداد من ١ - ٦
والمجموع = ٩

٤	١١	٦
٩	٧	٥
٨	٣	١٠

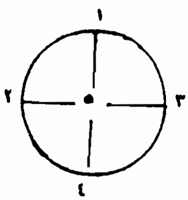
الأعداد من ٣ - ١١
والمجموع = ٢١

٤	٩	٢
٣	٥	٧
٨	١	٦

الأعداد من ١ - ٩
والمجموع = ١٥



الأعداد من ١ - ١١ (عدا ٤، ٨)
والمجموع = ١٨



الأعداد من ١ - ٥
والمجموع = ١٠

١١ ـ تعريف التلاميذ بالدور العظيم الذى قام به الفراعنة والعرب فى مجال الرياضيات، وكنموذج على ذلك نذكر ما يلى:

أن الرجوع عبر التاريخ يكسبنا رؤية جديدة ويشدنا لمحاولة اكتشاف المزيد من أسرار الرياضيات. ولا جدال فى أن الحضارة المصرية القديمة على وجه الخصوص تعتبر من أخصب المراجع فى هذا المجال.

لقد وجدت بردية مكتوبة عام ١٦٥٠ قبل الميلاد بواسطة الفرعون "أحمس" تبين كيف كانت تجرى العمليات على الكسور.

ووجه الغرابة فى الطريقة المتبعة فى هذه البردية هو فى أنه لم تكن تستعمل إلا الكسور التى بسط كل منها الواحد الصحيح. ويمكن أن نتحقق مع تلاميذنا من صحة المتساويات الآتية:

$$\frac{١}{٦} + \frac{١}{٣} = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{١}{١٥} + \frac{١}{١٥} + \frac{١}{٥} = \frac{١}{٣}$$

$$\frac{١}{٢٨} + \frac{١}{١٤} + \frac{١}{٧} = \frac{١}{٤}$$

$$\frac{١}{١٠٤} + \frac{١}{٣٦} + \frac{١}{١٣} = \frac{١}{٨}$$

ثم استخدام هذا فى اثبات أن:

$$٢ \times \frac{١}{٧} = \frac{١}{٢٨} + \frac{١}{٤}$$

الاثبات:

$$٢ \times \frac{١}{٧} = \frac{١}{٧} + \frac{١}{٧} = \left(\frac{١}{١٤} + \frac{١}{١٤} \right) + \frac{١}{٧}$$

$$= \left(\frac{١}{٢٨} + \frac{١}{٢٨}\right) + \frac{١}{١٤} + \frac{١}{٧}$$

$$= \frac{١}{٢٨} + \left(\frac{١}{٢٨} + \frac{١}{١٤} + \frac{١}{٧}\right)$$

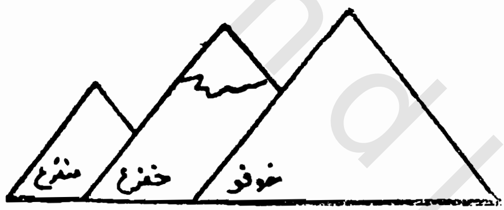
$$= \frac{١}{٢٨} + \frac{١}{٤}$$

ويمكن التحقق بسهولة أيضا من أن:

$$٢ \times \frac{١}{٥} = \frac{١}{١٥} + \frac{١}{٣}$$

$$\text{،}\ ٢ \times \frac{١}{١٣} = \frac{١}{١٠٤} + \frac{١}{٥٢} + \frac{١}{٨}$$

أيضا، يمكن تعريف التلاميذ ببعض انجازات المصريين القدماء عن طريق الموضوعين التاليين:



(١) الأبعاد الحالية لأهرامات الجيزة هى:

* خوفو:

- الارتفاع: ١٣٧ متر

- طول ضلع القاعدة المربعة: ٢٣٠ متر

- الحجم: ٢٤١٥٧٦٦ متر

* خفرع:

- الارتفاع: ١٣٦ متر
- طول ضلع القاعدة المربعة: ١٢٠ متر
- الحجم: ١٩٩٩٢٠٠ متر

* منقرع:

- الارتفاع: ٦٦ متر
- طول ضلع القاعدة المربعة: ١٠٨ متر
- الحجم: ٢٥٦٦٠٨ متر

فإذا افترضنا أنه يراد بناء جدار عرضه متر وارتفاعه متران، وذلك باستخدام الحجارة الموجودة حاليا بهرم خوفو. كم يكون طول هذا الجدار؟

طول الجدار = ٢٤١٥٧٦٦ / ٢ =١٢٠٧٨٨٣ متر.

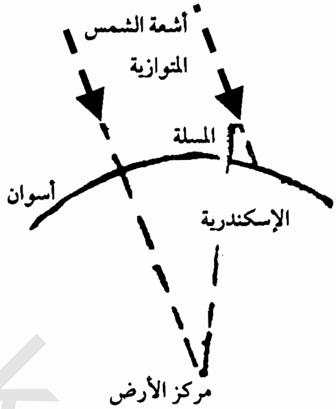
إذا قارنا طول هذا الجدار بطول الطريق بين القاهرة وأسوان، لوجدنا أن الجدار أطول لأن طوله ١٢٠٧.٨٨٣ كيلو متر، بينما طول الطريق بين القاهرة وأسوان ١٠٦٠ كيلو متر.

٢ ـ لاحظ أراتوسين الذى وضع الطريقة المعروفة باسمه لإيجاد الأعداد الأولية من ١ إلى ١٠٠.

انه فى الساعة الثانية عشرة ظهرا من يوم ٢١ يونيه تصل أشعة الشمس إلى قاع بئر فى أسوان، وأن أشعة الشمس تسقط فى نفس اللحظة على مسلة بالإسكندرية فتحدث لها ظلا، و الزاوية بين أشعة الشمس والمسلة هى ١٢َ ٧ْ درجة

كيف أمكن لهذا العالم من خلال هذه الملاحظات أن يحسب محيط الأرض؟ (علمًا بأنه اعتبر المسافة بين الإسكندرية وأسوان ٧٨٧.٥كم)

قد يتمكن التلاميذ من الإجابة وذلك باستخدام الشكل الآتى:



نلاحظ أن ٧°١٢´ × ٥٠ = ٣٦٠

إذن طول محيط الأرض = ٧٨٧.٥ × ٥٠ = ٣٩٣٧٥ كم.