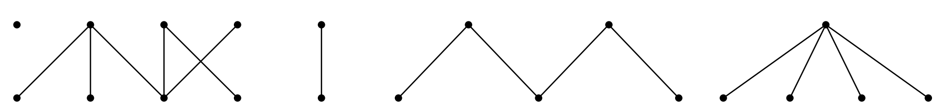
الفصل الثاني

الأشجار والمسافات (Trees and Distance)

1.2. الخصائص الأساسية (Basic Properties)

تعني كلمة شجرة تفرعًا لأغصان من جذر معين لا يمكن من خلاله الحصول على حلقة. وتستعمل هذه الأشجار بوصفها بيانات في العديد من التطبيقات، وخاصة في تخزين المعطيات، وعمليات البحث والاتصالات.

1.1.2. تعريف: تدعى البيانات التي تخلو من الحلقات أنها لا حلقية أو غير حلقية ($acyclic$). في حين تعرَّف الغابة على أنها بيان مترابط لا حلقي. وتعرف الورقة (أو الرأس المتدلي) على أنها رأس درجته 1، أما البيان الجزئي المولد لبيان G فهو بيان جزئي من G رؤوسه $V(G)$، والشجرة المولدة هي بيان جزئي مولد ومع ذلك فهو شجرة.



2.1.2. مثال: تعرف الشجرة على أنها غابة مترابطة، وكل مركبة من مركبات الغابة هي شجرة. لاحظ أن البيان الذي لا توجد فيه حلقات لا يحتوي على حلقات فردية، وعليه فهو بيان ثنائي الفرع. لذا فإن الأشجار والغابات تمثل بيانات ثنائية الفرع.

إن المسارات هي أشجار، وتكون الشجرة مسارًا إذا وفقط إذا كانت أكبر درجة رأس من رؤوسها تساوي 2. تعرف النجمة على أنها شجرة بحيث يجاور أحد رؤوسها رؤوسَها الأخرى جميعها، لاحظ أن **النجمة** التي لها n من الرؤوس هي البيان الثنائي الفرع $K_{1,n-1}$.

إذا كان البيان شجرة، فتوجد له شجرةٍ مولدة واحدة وهي البيان نفسه. لاحظ أنه ليس من الضروري أن يكون البيان الجزئي المولد لبيان G مترابطًا، كما أنه ليس من الضروري أن يكون البيان الجزئي المترابط لبيان G بيانًا جزئيًّا مولدًا للبيان G. فعلى سبيل المثال إذا كان $n(G) > 1$، فإن البيان الجزئي الخالي الذي رؤوسه $V(G)$ ومجموعة أضلاعه Ø يكون مولدًا وغير مترابط، وإذا كانت $n(G)>2$، فإن البيان الجزئي المؤلف من ضلع واحد بالإضافة إلى طرفي هذا الضلع يمثل بيانًا جزئيًّا مترابطًا وغير مولد. ■

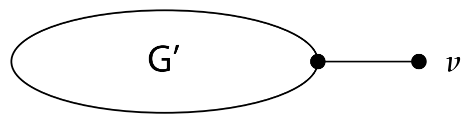
خواص الأشجار (Properties of Trees)

تتميز الأشجار بأن لها عدة توصيفات (صيغ) مُميّزة متكافئة يمكن اعتماد أي منها بصفته تعريفًا لها. وتعدّ هذه التوصيفات مفيدة؛ لأنه يكفي إثبات أنَ البيان يكون شجرة إذا حقق أي صفة من هذه الصفات. ويمكن بعد ذلك استخدام ما تبقى من صفات بحسب حاجتنا. وسنثبت أولًا أن حذف ورقة من الشجرة يعطينا شجرة أصغر.

3.1.2. تمهيدية : كل شجرة لها رأسان على الأقل، وتحتوي على ورقتين على الأقل. إن حذف ورقة واحدة من شجرة لها n من الرؤوس يعطينا شجرة عدد رؤوسها $n - 1$.

الإثبات: إن البيان المترابط الذي له رأسان على الأقل يحتوي على ضلع. في البيان اللاحلقي، لا يوجد للنقاط الطرفية لمسارٍ أعظمي غير تافه جارٌ مختلف عن جاره في المسار. لذا فإن النقاط الطرفية لمثل هذا المسار تكون أوراقًا.

افترض أن v ورقة في شجرة G، وأن $G'= G - v$. إن الرأس الذي درجته 1 لا يمكن أن ينتمي إلى أي مسار يربط بين رأسين آخرين. لذا، نجد أنه إذا كان u و w رأسين في $V(G')$ ، فإن كل مسار من u إلى w في G يكون كذلك مسارًا في G' . واستنادًا إلى ذلك، فإن G' مترابط. وبما أن حذف أي رأس لا يولد حلقة، فإن G' يكون كذلك غير حلقي. لذا فإن G' شجرة لها $n - 1$ من الرؤوس. ■



تشير البديهية 3.1.2. إلى أنه يمكن الحصول على كل شجرة لها أكثر من رأس من شجرة أصغر بإضافة رأس درجته 1 (بياناتنا جميعها منتهية؛ أي أن لها عددًا منتهيًا من الرؤوس ومن الأضلاع). إن هذا يُجَنّبُ بعض البراهين من الوقوع في مصيدة الاستقراء. وأن عملية بناء شجرة لها $n+1$ من الرؤوس من شجرة اختيارية عدد رؤوسها n من خلال إضافة جار جديد إلى رأس اختياري من رؤوسها القديمة تولد الأشجار جميعها التي لها $n+1$ من الرؤوس. تعني كلمة "اختياري" أننا نأخذ في الحسبان الطرق الممكنة جميعها عند اتخاذ الخيار.

تعتمد براهيننا للصفات المتكافئة للأشجار على استخدام طرق متعددة مثل: الاستقراء، والنتائج السابقة، والتعليل الحسابي عن طريق العدّ، والتطرفيّة، والتناقض.

4.1.2. نظرية : إذا كان G بيانًا له n من الرؤوس ($n \geq 1$) فإن العبارات الآتية متكافئة (وتعطي وصفًا مميزًا للأشجار التي لها n من الرؤوس).

A) G مترابط ولا يحتوي على حلقات.
B) G مترابط وله $n - 1$ ضلعًا.
C) G يحوي $n - 1$ ضلعًا ولا يحوي أي حلقة.
D) G لا يحوي عرى، ولكل $u, v \in V(G)$ يوجد مسار واحد فقط من u إلى v.

الإثبات: سنثبت أولاً التكافؤ بين كلّ من A، و B، و C من خلال إثبات أنه إذا تحقق أيّ شرطين من: الترابط، لاحلقي، $n - 1$ من الأضلاع، فإن الشرط الثالث يتحقق بالضرورة.

$A \Rightarrow \{B, C\}$. باستخدام الاستقراء على n؛ إذا كانت $n = 1$، فإن نتيجة ذلك هي بيان له رأس واحد بلا أضلاع. إذن، فالنتيجة متحققة تلقائيًّا. لذا، افترض الآن أن $n > 1$، وافترض كذلك أن النتيجة متحققة للبيانات التي عدد رؤوسها أقل من n جميعها. وافترض الآن أن G بيان مترابط لا حلقي، لذا فإن البديهية 3.1.2 تضمن وجود ورقة v، وتضمن كذلك أن البيان $G'=G-v$ يكون مترابطًا وغير حلقي أيضًا (انظر الشكل أعلاه). لذا

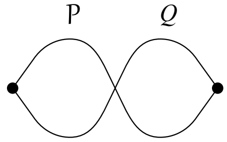
وبتطبيق فرضية الاستقراء على البيان G' ، نجد أن $e(G') = n-2$، وبما أن v يقع على ضلع واحد، فإن $e(G)= n-1$.

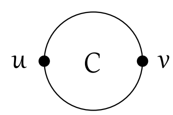
$B \Rightarrow \{A, C\}$ احذف أضلاعًا من G واحدًا تلو الآخر حتى تحصل على بيان G' لاحلقي. وبما أن كل ضلع في أي حلقة لا يمثل ضلع قطع (فصل) (النظرية 14.2.1)، فإنّ G' يكون مترابطا. وكما في الفقرة السابقة، نجد أن $e(G')= n-1$، وعندها لا يمكن أن يكون هناك أضلاع قد حذفت. لذا، فإن $G'=G$، وأن G غير حلقي.

$C \Rightarrow \{A, B\}$ افترض أن $G_1,\ldots,G_k$ هي مركبات G. وبما أن كل رأس يجب أن يظهر في أحد المركبات، لذا فإن $\sum_i n(G_i) = n$، وبسبب عدم وجود حلقات في G، فإنّ الخاصية A تتحقق. لذا فإن $e(G_i) = n(G_i) - 1$ وبالجمع على i نجد أن: $n-1 = e(G) = \sum_i n(G_i) - 1 = n-k$. إذن، $k = 1$ و G مترابط.

$A \Rightarrow D$: بما أنّ G مترابط، إذن يوجد مسار يربط بين أيّ رأسين من رؤوسه. وإذا وُجِدَ رأسان مربوطان بأكثر من مسار، فإننا نختار أقصر مسارين (من حيث الطول الكلي) مختلفين P وَ Q لهما النقاط الطرفية نفسها. لاحظ أن هذا الخيار يضمن أن الرؤوس الداخلية للمسارين P و Q تكون منفصلة (انظر الشكل أدناه). لذا، فإن $P \cup Q$ تمثل حلقة، وهذا يتناقض مع A .

$D \Rightarrow A$: إذا وُجد مسار من u إلى v لكلّ زوج من رؤوس G، فإنّ G يكون مترابطًا. وإذا احتوى G على حلقة C، فهذا يعني وجود مسارين يربطان بين أيّ رأسين u، v موجودين في $V(G)$. لذا فإن G لاحلقي (وهذا يمنع حدوث العرى). ■





5.1.2. نتيجة :

a) يكون كل ضلع في أيّ شجرةٍ ضلعَ قطعٍ (فصل).

b) إن إضافة ضلع واحد لأيّ شجرة يعطي حلقة واحدة فقط.

c) يحوي كل بيان مترابط شجرة مولدة.

الإثبات : (a) بما أنّ الأشجار لا تحوي حلقات. لذا فإنّ النظرية 14.2.1 تضمن لنا أن كل ضلع هو ضلع قطع (فصل).

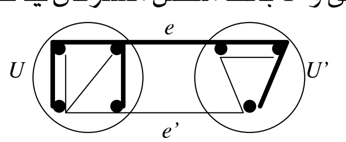
(b) يوجد مسار واحد فقط في الشجرة بين أيّ رأسين (النظرية 4D.2.1). لذا فإن ربط أيّ رأسين بضلع يعطينا حلقة واحدة فقط.

(c) كما في إثبات أن $B \Rightarrow A,C$ في النظرية 4.1.2، فإنّ حذف الأضلاع من الحلقات الموجودة في بيان G بالتتابع يعطينا بيانًا جزئيًّا مولدًا مترابطًا حلقيًّا.

6.1.2. قضية : إذا كانت كلّ من T و T' شجرة مولدة لبيان مترابط G، وكانت $e \in E(T) - E(T')$. إذن، هناك ضلع $e' \in E(T') - E(T)$ بحيث تكون $T - e + e'$ شجرةً مولدةً للبيان G.

الإثبات : من النتيجة 5.1.2a، نعلم أن كل ضلع في T هو ضلع قطع لـ T. لذا، افترض أن U و U' هما مركبتا $T - e$. وبما أن T' مترابطة، فهناك ضلع e' في T' بحيث يكون أحد طرفيه في U، والطرف الآخر في U'. الآن، $T-e+e'$ شجرة مترابطة لها $n(G) - 1$ ضلعًا وهي مولدة للبيان G.

(في الشكل أدناه، المثلثان T بخط غامق و T' بخطّ متصل مشتركان في ضلعين). ■



7.1.2. قضية : إذا كانت كلّ من T وT' شجرة مولدة لبيان مترابط G، وكان $e \in E(T) - E(T')$ إذن، هناك ضلع $e' \in E(T') - E(T)$ بحيث تكون $T' + e - e'$ شجرة مولدة للبيان G.

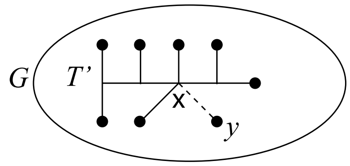
الإثبات : من النتيجة 2.1.5b، نجد أن البيان $T' + e$ يحوي حلقة فريدة C. وبما أن T لاحلقي، إذن هناك ضلع $e' \in E(C) - E(T)$. إن حذف e' يقضي على الحلقة الفريدة في $T'+e$. الآن، $T'+e-e'$ يمثل بياناً مترابطاً حلقيًّا، وهو شجرة مولدة للبيان G. (إن إضافة e إلى T في الشكل أعلاه يعطينا حلقة C طولها 5. والأضلاع الأربعة للبيان $C\text{-}e$ تنتمي إلى $E(T) - E(T')$، ويمكن لأي منها أن يقوم مقام e'). ■

يمكن اختيار الضلع e' ليحقق نتيجتي القضيتين 6.1.2 و 7.1.2 في الوقت نفسه وكما هو موضح في الشكل المرسوم بينهما. والنتيجة الآتية توضّح الإثبات بالاستقراء باستخدام حذف ورقة.

8.1.2. قضية : إذا كانت T شجرة لها k من الأضلاع، وكان G بياناً بسيطاً يحقق أن $\delta(G) \geq k$، فإن **T** تمثل بياناً جزئيًّا من G.

الإثبات : استخدم الاستقراء على k. إذا كانت $k=0$، فإن كل بيان بسيط يحوي k_1، وهي الشجرة الفريدة التي لا يوجد بها أضلاع. افترض أن $k>0$، وأن النتيجة صحيحة للأشجار جميعها التي عدد أضلاعها أقل من k. بما أن $k > 0$، فإن البديهية 3.1.2 تسمح لنا باختيار ورقة v في T. افترض أن u جار v، ثم افترض الشجرة $T' = T\text{-}v$، وحيث إن عدد أضلاعها أقل من k، لذا وباستخدام الإستقراء، نجد أن G يحوي T' بوصفها بياناً جزئيًّا؛ لأن $\delta(G) \geq k > k - 1$.

افترض أن x هي الرأس في هذه النسخة من T' الذي يرتبط بـ u (انظر التوضيح أدناه). بما أن T' تحوي $k - 1$ رأسًا مختلفًا فقط عن u و $d_G(x) \geq k$، لذا يوجد لـ x جار y في G غير موجود في هذه النسخة من T'، وبإضافة الضلع xy، نحصل على تمديد لهذه النسخة من T' إلى نسخة من T في G، حيث يؤدي y دور v. ■



إن المتباينة في الفرضية 8.1.2 حادة؛ حيث إن البيان K_k له درجة صغرى قيمتها $k - 1$، إلا أنه لا يحوي شجرة لها k من الأضلاع. هذه الفرضية تضمن أن أي بيان بسيط G عدد رؤوسه n وعدد أضلاعه يزيد على $n(k - 1)$ يحوي T بوصفها بياناً جزئيًّا (التمرين 34). ومن الجدير بالذكر أن تخمين إردوز (Erdős) وسوز (Sós) يعطي نتيجة أقوى، وهو أنه إذا كانت $e(G) > n(k - 1)/2$ ، فإن T يجب أن تكون بياناً جزئيًّا ([Erdős [1964]) ، لقد بُرهن هذا التخمين للبيانات التي لا تحوي حلقات رباعية (طولها 4) ([Saclé-Woźniak [1997]) . وأثبت كل من اجتاي (Ajtai) وكوملوز Komlós وسيميردي (Szemeré-di) نتيجة قريبة من ذلك، وذلك كما ورد في سوفر ([Soffer [2000]).

المسافات في الأشجار والبيانات (Distance in Trees and Graphs)

عندما نستخدم البيانات لتمثيل شبكات الاتصالات، فإننا نرغب بأن تكون الرؤوس قريبة من بعضها لنتجنب التأخير في الاتصالات. ونقيس المسافات باستخدام أطوال المسارات.

9.1.2. تعريف : إذا وُجدَ في البيان G مسارٌ من u إلى v. فنُعرّف المسافة من u إلى v، ونرمز إليها بالرمز $d_G(u, v)$ أو $d(u, v)$ على أنها طول أقصر مسار من u إلى v. وإذا خلا G من مثل هذا المسار من u إلى v، فإن $d(u, v)$. ونعرّف قطر G (diam G) على أنه $\max_{u,v \in V(G)} d(u, v)$.

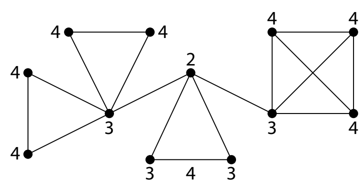
نعرف الاختلاف المركزي للرأس u، ونرمز إليه بالرمز $\epsilon(u)$ على أنه $\max_{v\in V(G)} d(u, v)$. نصف قطر G ($\text{rad } G$) على أنه $\min_{u\in V(G)} \in(u)$، أي أن $\in(u) = \max_{v\in V(G)} d(u, v)$ و $\text{rad } G = \min_{u\in V(G)} \epsilon(u)$.

لاحظ أن قطر G يساوي أكبر قيمة للاختلافات المركزية للرؤوس. وإذا كان البيان غير مترابط، فإن القطر وَنِصْفَهُ (وكل اختلاف مركزي) يكونان ما لانهاية؛ لأن المسافة بين المركبات المختلفة تكون لا نهائية. نستخدم كلمة قطر بمعناها الهندسي في أنها تقيس أكبر مسافة بين عنصرين من عناصر مجموعة معينة.

10.1.2. مثال: يساوي قطر بيان بيترسون 2 بسبب وجود جار مشترك لأي ضلعين غير متجاورين في هذا البيان. أما قطر Q_k، فإنه يساوي k وذلك لأنه يلزمنا k خطوة من أجل تغيير الإحداثيات التي عددها k جميعها. في حين أنّ قطر C_n يساوي $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. لاحظ أن كل رأس في هذه البيانات له الاختلاف المركزي نفسه، وأن $\text{diam } G = \text{rad } G$.

إذا كان $n \geq 3$، فإن الشجرة التي لها n من الرؤوس وقطرها أصغر ما يمكن هي النجمة؛ لأن قطرها يساوي 2، ونصف قطرها يساوي 1. أما الشجرة التي قطرها أكبر ما يمكن فهي المسار؛ حيث قطره يساوي $n - 1$، ونصف قطره $\lceil (n - 1) /2 \rceil$. لاحظ أن كل مسار في شجرة يمثل أقصر (الفريد) مسار بين طرفيه. لذا فإن قطر أي شجرة هو طول أطول مسار فيها.

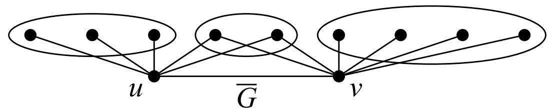
في البيان أدناه، عُلّم كل رأس بقيمة اختلافه المركزي، حيث يساوي نصف القطر 2، في حين يساوي القطر 4، أما طول أطول مسارَ فيساوي 7. ■



لاحظ أنه من أجل أن يكون للبيان قطر كبير، فيجب أن يكون هناك عدد كبير من الأضلاع غير موجود. لذا توقّع أنه إذا كان قطر البيان كبيرًا، فإن قطر متممة هذا البيان يكون صغيرًا. لاحظ أن قطر البيان يساوي 2 على الأكثر إذا وفقط إذا وُجِدَ جارٌ مشترك لكل رأسين غير متجاورين (انظر التمرين 15).

11.1.2. نظرية: إذا كان G بيانًا بسيطًا، بحيث إن $\text{diam } G \geq 3$، فإن $\text{diam } \overline{G} \leq 3$.

الإثبات: عندما $diam\ G > 2$، فيوجد رأسان u, v في $V(G)$ دون جار مشترك. لذا، فإنه لكل $x \in V(G) - \{u,v\}$، إما أن يكون u أو v لا يجاور x، وهذا يجعل x جارًا إما لـ u أو لـ v في $\overline{G}$. وبما أن uv ينتمي إلى $E(\overline{G})$، إذن يوجد لكل زوج من الرؤوس x, y مسار من x إلى y في G طوله يساوي 3 على الأكثر، ويمر خلال $\{u, v\}$. واستنادًا إلى ذلك، فإن $diam\ \overline{G} \leq 3$. ■



12.1.2. تعريف: مركز البيان G هو البيان الجزئي الذي تولده الرؤوس التي اختلافها المركزي أقل ما يمكن.

إن مركز البيان يساوي البيان كاملاً إذا وفقط إذا كان نصف قطر البيان مساوياً لقطره. و سنعطي فيما يأتي وصفاً لمراكز الأشجار. في خطوة الاستقراء، نحذف الأوراق جميعها بدلاً من ورقة واحدة فقط.

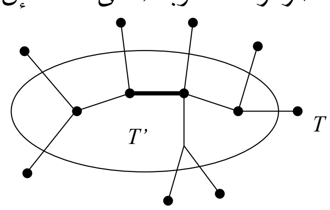
13.1.2. نظرية: (Jordan [1869]) يكون مركز الشجرة رأساً أو ضلعاً.

الإثبات: نستخدم الاستقراء على عدد رؤوس T. إذا كانت $n(T) \le 2$، فإن المركز يكون الشجرة التامة. افترض أن $n(T) > 2$. كوّن الشجرة T' وذلك بحذف كل ورقة من أوراق T. ومن البديهية 3.1.2 نجد أن T' شجرة. وبما أن الرؤوس الداخلية للمسارات بين أوراق T لا تتأثر بالحذف، فإن T' تحوي رأساً واحداً على الأقل.

افترض أن $u \in V(T)$، ولاحظ أن كل رأس في T يكون ورقة بحيث يكون بُعده في T أكبر ما يمكن عن u (بغير ذلك، فإن المسار الواصل إلى هذه الورقة من u يمكن تمديده (تكبيره) أكثر). بما أنه حُذفت الأوراق جميعها، وأنّ أي مسار بين أيّ رأسين آخرين لا يستخدم أيًّا من الأوراق، فإن $\in_{T'}(u) = \in_T(u) - 1$ لكل $u \in V(T')$.

وكذلك فإن الاختلاف المركز لكل ورقة في T أكبر من الاختلاف المركزي لجارها في T، لذا فإن الرؤوس التي تجعل $\in_T(u)$ أقل ما يمكن هي الرؤوس نفسها التي تجعل قيمة $\in_{T'}(u)$ أقل ما يمكن.

وبذلك نكون قد أثبتنا على أن T و T' لهما المركز نفسه. وبناءً على ذلك، فإن مركز T' هو رأس أو ضلع. ■



يكون القطر الكبير مقبولاً في شبكات الاتصال إذا وُصلت الأزواج جميعها من الرؤوس بمسارات قصيرة، ويقودنا إلى دراسة معدل (متوسط) المسافة بدلاً من دراسة أكبر مسافة، وبما أن معدل المسافة يساوي مجموع المسافات مقسومًا على $\binom{n}{2}$ (عدد الأزواج من الرؤوس)، فإن دراسة (معدل) متوسط المسافة يكافئ دراسة $D(G) = \sum_{u,v \in V(G)} d_G(u,v)$.

إن المجموع $D(G)$ يسمى (يرمز إليه أيضًا بالرمز $W(G)$) معامل واينر (**Weiner Index**) للبيان G. لقد استخدم واينر $W(G)$ لدراسة درجة غليان البارفين (مادة دهنية تستخرج من الخشب، والفحم الحجري، والبترول، وتستخدم في صناعة الشموع). يمكن تمثيل الجزيئات بواسطة البيانات؛ حيث تمثل الرؤوس الذرات، أما الأضلاع فتمثل الروابط بين هذه الذرات. إن العديد من الخواص الكيميائية للجزيئات ترتبط بدليل (معامل) واينر للبيانات التي تمثل هذه الجزيئات، وسندرس القيم القصوى لـ $D(G)$.

14.1.2. نظرية: من بين الأشجار التي لها n من الرؤوس، يكون معامل واينر $D(T) = \sum_{u,v} d(u,v)$ أقل ما يمكن إذا كانت الشجرة نجمة، ويكون أكبر ما يمكن إذا كانت الشجرة مسارًا، وفي الحالتين يكون الحلّ وحيدًا.

الإثبات: بما أن أيّ شجرة على n من الرؤوس تحوي $n - 1$ ضلعًا، فإن لها $n - 1$ زوجًا من الرؤوس حيث يساوي البُعد بين الرأسين في أي زوج منها 1، أما البعد بين أي رأسين آخرين فيساوي 2 على الأقل. وبما أن النجمة تحقق ذلك، فإنها تعطي قيمة صغرى لـ $D(T)$. ولإثبات عدم وجود أي شجرة أخرى تحقق ذلك؛ خذ ورقة x في T، واجعل v جارًا لـ x، فإذا كان بُعْدُ أي رأس آخر عن x يساوي 2، فإن كل رأس منها يجب أن يكون جارًا للرأس v. وعليه، فإن T تكون نجمة، ويكون معامل واينر مساويًا:

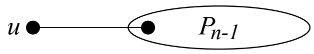
$$D(K_{1,n-1}) = (n-1) + 2\binom{n-1}{2} = (n-1)^2$$

ومن أجل إيجاد الشجرة التي يكون معامل واينر لها أكبر ما يمكن؛ خذ أولاً $D(P_n)$، ولاحظ أن هذه القيمة تساوي مجموع المسافات من نقطة طرفية u للمسار إلى باقي رؤوس هذا المسار إضافة إلى $D(P_{n-1})$. ولذا نجد أن:

$$D(P_n) = D(P_{n-1}) + \binom{n}{2}$$

وذلك لأن: $\sum_{v\in V(P_n)} d(u,v) = \sum_{i=0}^{n-1} i = \binom{n}{2}$

وباستخدام صيغة باسكال (الملحق A): $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$، فإن الاستقراء يعطينا أن: $D(P_n) = \binom{n+1}{3}$



سنثبت باستخدام الاستقراء على n أن P_n تمثّل الشجرة الفريدة من بين الأشجار التي لها n من الرؤوس جميعها والتي تعطينا أكبر قيمة لـ $D(T)$.

إذا كانت $n=1$، فإن الشجرة الفريدة التي لها رأس واحد هي P_1. لذا، افترض أن $n>1$، وأن u يمثل ورقة في الشجرة T التي لها n من الرؤوس، ولاحظ أن: $D(T)=D(T-u)+ \sum_{v\in V(T)} d(u,v)$، من فرضية الاستقراء نعلم أن $D(T-u) \le D(P_{n-1})$، مع تحقق المساواة إذا وفقط إذا كانت $T-u$ تمثل مسارًا. لذا، يكفي أن نثبت أن $\sum_{v\in V(T)} d(u,v)$ يكون أكبر ما يمكن عندما تكون T مسارًا، و u نقطة طرفيه لـ T.

خذ في الحسبان قائمة المسافات من u. نجد في Pn أن هذه القائمة هي: $1, 2, \ldots, n-1$ ، وهذه القيم جميعها مختلفة عن بعضها. إن أقصر مسار من u إلى أبعد رأس عن u يحوي رؤوسًا تقع على الأبعاد جميعها من u. لذا، فإن قائمة المسافات من u إلى الرؤوس الأخرى تخلو من القفزات (الفجوات) بين الأعداد التي تمثل هذه المسافات. ومن هنا، فإن أي تكرار في المسافات يجعل $\Sigma_{v\in V(T)} d(u,v)$ أصغر من المجموع في الحالة التي تكون فيها u ورقة في المسار. لاحظ أنه يجب حصول تكرار في هذه المسافات جميعها في الحالة التي لا تكون فيها T مسارًا. وهذا ينهي الإثبات. ■

من بين البيانات المترابطة جميعها التي لها n من الرؤوس، نجد أن k_n يعطي أقل قيمة لـ $D(G)$. إن مسألة القيمة العظمى (أكبر قيمة) تُختزل عادة للمسألة التي عالجناها سابقًا في حالة الأشجار.

15.1.2. تمهيدية: إذا كان H بيانًا جزئيًّا من البيان G، فإن $d_G(u,v) \le d_H(u,v)$.

الإثبات: إن أي مسار من u إلى v في H هو أيضًا مسار في G. لذا، فإن أقصر مسار من u إلى v في G لا يمكن أن يكون أطول من أقصر مسار من u إلى v في H. ■

16.1.2. نتيجة: إذا كان G بيانًا مترابطًا له n من الرؤوس، فإن $D(G) \le D(P_n)$.

الإثبات: إذا كانت T شجرة مولدة للبيان G، فإن البديهية 15.1.2 تضمن أن $D(G) \le D(T)$ ومن النظرية 14.1.2. نعلم أن $D(G) \le D(P_n)$. ■

الأشجار المولدة المنفصلة (اختياري) (Disjoint Spanning Trees)

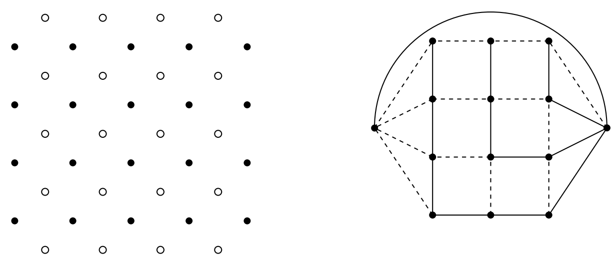
لقد رأينا وجود شجرة مولدة لكل بيان مترابط. إن الأشجار المولدة المنفصلة ضلعيًّا توفر لنا مسالك بديلة عندما يفشل ضلع في الشجرة الأصلية عن توفير هذا المسلك. لقد قام كل من توت (Tutte [1961أ]) وناش وويليامز (Nash-williams [1961]) كل منهما بصورة مستقلة دون اعتماد أي منهم على نتائج الآخر بإعطاء توصيف للبيانات التي يوجد لها k من الأشجار المولدة المنفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا. (انظر التمرين 67).

سنقوم بتوصيف أحد التطبيقات على الأشجار المولدة المنفصلة ضلعيًّا. لقد ابتكر ديفيد غيل (David Gale) لعبة سُوِّقَتْ تحت اسم جَسِّرْها (أي اعملها على صورة جسر 'Bridg-it') (حقوق الطبع لعام 1960 للإخوة هازنفلد، شركة ألعاب هازبرو) (Copyrisht 1960 by Hassenfeld Bros., Inc.-"Hasbro Toys"). في هذه اللعبة، يمتلك كل لاعب شبكة من المواقع في صورة صفوف وأعمدة، ويتحركان بالتناوب؛ حيث يقوم اللاعب في كل حركة بوصل

موقعين من مواقعه بجسر طوله وحدة واحدة. يوضح الشكل أدناه عن اليسار، اللوح الذي عليه مواقع اللاعبين، حيث المواقع الغامقة هي مواقع اللاعب رقم 1، أما المواقع المجوفة فهي مواقع اللاعب رقم 2. ويكون هدف اللاعب رقم واحد إيجاد (بناء) مسار من الجسور من العمود الموجود على اليسار إلى العمود الموجود عن اليمين، في حين يهدف اللاعب رقم 2 إلى إيجاد مسار من الجسور من الصف العلوي إلى الصف السفلي. لاحظ عدم تقاطع هذه الجسور في هذه اللعبة. لذا، فإن كل جسر يبنى من قبل أحد اللاعبين يمنع حركة اللاعب الآخر، وبما أن كل مسار من اليسار إلى اليمين يقطع كل مسار من الأعلى إلى الأسفل، فهذا يشير إلى عدم فوز كلا اللاعبين معًا. ولاحظ أيضًا أن تشكيلة المواقع على لوح اللعب متماثلة بالنسبة إلى اللاعبَيْن.

لاحظ عدم وجود استراتيجية للفوز لدى اللاعب رقم 2، وذلك لأنه إنْ وَجد مثل هذه الاستراتيجية، فإن اللاعب رقم 1 سيبدأ بأي حركة، ومن ثم يتبع استراتيجية اللاعب رقم 2. وإذا كانت استراتيجية اللاعب رقم 2 تتضمن القيام بحركة تعطي جسرًا قد عُمل سابقًا، فإن اللاعب رقم 1 سيقوم بحركة اختيارية. لذا، فإن اللاعب رقم 1 يستطيع أن يفوز قبل اللاعب رقم 2 من خلال تتبع استراتيجيته.

إذا استمرّ اللعب بحيث لم يتبقَ أيّ مجال لأي حركة جديدة، فإن أحد اللاعبَيْن يجب أن يفوز (التمرين 70). وبسبب عدم وجود استراتيجية للفوز لدى اللاعب رقم 2، فإنّ هذا يعني وجود استراتيجية فوز لدى اللاعب رقم 1. وسنعطي استراتيجية واضحة تمكن اللاعب رقم 1 من الفوز. (يتحقق هذا التعليل بوجه عام للماترويدات. انظر النظرية 46.2.8).



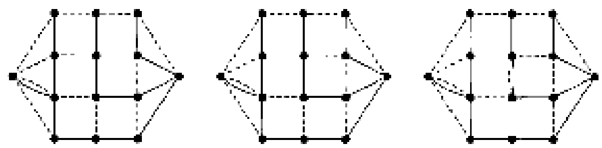
17.1.2. نظرية: توجد استراتيجية فوز لدى اللاعب رقم 1 في لعبة التّجْسير.

الإثبات: نُكوّن بيانًا يمثل التوصيلات الممكنة التي تخصّ اللاعب رقم 1. لاحظ أن المواقع على الطرف نفسه تكون متكافئة. لذا، نجمع المواقع (الغامقة) من العمودين الموجودين في الطرفين، ونمثل مواقع كل طرف برأس واحد فقط، ونضيف ضلعًا مساعدًا يربط بين الطرفين. والبيان الموجود عن اليمين في الرسم أعلاه يمثل هذه الحالة، ويوضّح أن هذا البيان يتكون من اتحاد شجرتين مولدتين ومنفصلتين ضلعيًا، وسنحذف الوصف التقني لهاتين الشجرتين.

لاحظ أن الشجرتين معًا تحتويان على مسارات منفصلة ضلعيًّا تصل بين الرؤوس المستهدفة، وبما أن الضلع المساعد هو ضلع وهمي وغير موجود، فإننا نتظاهر بأن اللاعب رقم 2 بدأ اللعب وأخذ هذا الضلع. إن أي حركة من قبل اللاعب رقم 2 تقطع ضلعًا واحدًا e في البيان، وبذلك يكون هذا الضلع غير موجود، وهذا يفصل إحدى الشجرتين لمركبتين. وباستخدام الفرضية 6.1.2، فإن الضلع e' من الشجرة الثانية يوجد ويعيد ترابط الشجرة الأولى. وعلى اللاعب الأول أن يختار هذا الضلع ويجعله غير قابل للقطع. لذا، نضع e' في كلتا الشجرتين المولدتين (ضلع مكرر). وبعد حذف e، وجعل e' ضلعًا مكررًا بحيث إن كل شجرة تحوي نسخة من e'، نجد أن بياننا ما زال يتكوّن من شجرتين مولدتين منفصلتين ضلعيًّا، وبما أن اللاعب رقم 2 لا يستطيع قطع ضلع مكرر، فإنه لا يستطيع قطع أيّ من الشجرتين، لذا فإن اللاعب رقم 1 يستطيع القيام بالدفاع. والشكل التالي يوضّح هذه الاستراتيجية.

تنتهي العملية أعلاه بفوز اللاعب رقم 1، أو عندما لا يبقى أيّ ضلع غير مكرر يمكن قطعه، وفي الحالة الأخيرة، نجد أن الأضلاع المتبقية أضلاع مكررة (مرتين فقط)، وتشكل شجرة مولدة مكونة من الجسور التي بناها اللاعب رقم

1. لذا، نجد في الحالات جميعها أنّ اللاعب رقم 1 بنى مسارًا يربط بين الرؤوس المستهدفة. ■



اللاعب رقم 1 يعيد الربط   اللاعب رقم 2 يقطع   اللاعب رقم 1 يعيد الربط

تمـــارين (Exercise)

1.1.2. (-). لكل k، عدد صفوف التشاكل للأشجار التي درجتها القصوى تساوي k ولها ستة رؤوس على الأكثر. نفّذ العمل نفسه للأشجار التي قطرها k. (وضّح سبب عدم وجود أشجار غير الأشجار الموجودة في القائمة التي عملتها).

2.1.2. (-). افترض أنّ G بيان:

a) أثبت أن G شجرة إذا وفقط إذا كان مترابطًا، وكل ضلع فيه هو ضلع قطع (فصل).

b) أثبت أن G شجرة إذا وفقط إذا أنتجت حلقة واحدة فقط بسبب إضافة أيّ ضلع جديد يربط بين رأسين من $V(G)$.

3.1.2. (-). أثبت أنّ البيان يكون شجرة إذا وفقط إذا خلا من العرى، وكان له شجرة مولدة واحدة فقط.

4.1.2. (-). أثبت العبارة الآتية أو انقضها. كل بيان عدد أضلاعه أقلّ من عدد رؤوسه يحوي شجرة بوصفها مركبة من مركباته.

5.1.2. (-). افترض أن G بيان. أثبت أن أكبر بيان جزئي لاحلقي من G يتألف من شجرة مولدة من كل مركبة من مركباته.

6.1.2. (-). افترض أن T شجرة، معدل درجة رؤوسها يساوي a. حَدِّدْ $n(T)$ بدلالة a.

7.1.2. (-). أثبت أن البيان الذي له n من الرؤوس، وm من الأضلاع يحوي $m - n + 1$ حلقة على الأقل.

8.1.2. (-). أثبت أن كلّ خاصية من الخواص المعطاة فيما يأتي تعطي توصيفًا مميزًا للغابات:

a) كل بيان جزئي مستحدث يحوي رأسًا درجته 1 على الأكثر.

b) كل بيان جزئي مترابط يكون بيانًا جزئيًّا مُستحدثًا (مُحدَّث).

c) عدد المركبات يساوي عدد الرؤوس ناقصًا عدد الأضلاع.

9.1.2. (-). لكل $2 \leq k \leq n - 1$، أثبت أنه توجد شجرة مولدة قطرها k للبيان الذي له n من الرؤوس الناتج من إضافة رأس واحد مجاور لكل رأس من رؤوس P_{n-1}.

10.1.2. (-). افترض أن u,v رأسان في بيان بسيط مترابط له n من الرؤوس. أثبت أنه إذا كانت $d(u,v)>2$، فإن $d(u)+d(v) \leq n + 1 - d(u,v)$. جد أمثلة تبيّن أن هذه العلاقة تفشل عندما $n \geq 3$ و $d(u,v) \leq 2$.

11.1.2. (-). افترض أن x و y رأسان متجاوران في بيان G، أثبت أن:

$| d_G(x, z) - d_G(y,z) | \leq 1$ لكل $z \in V(G)$.

12.1.2. (-). احسب القطر ونصفه للبيان ثنائي الفرع $K_{m,n}$.

13.1.2. (-). أثبت أنّ لكل بيان قطره d مجموعةً مستقلة عدد رؤوسها يساوي $\lceil \frac{(d+1)}{2} \rceil$ على الأقل.

14.1.2. (-). افترض أنّ معالجات الحاسوب سُمّيت بدلالة مرتبات ثنائية (بمعنى أن كل مدخلة إما 0 أو 1)

عدد إحداثياتها k، وافترض أنه يمكن الربط بين هذه المرتبات إذا كانت أسماؤها متجاورة في المكعب Q_K، وافترض أيضًا أن المعالج u يريد أن يرسل رسالة إلى المعالج v. بيّن كيف يستطيع u إيجاد الخطوة الأولى على أقصر مسار إلى v.

15.1.2. (−). افترض أن G بيان بسيط قطره يساوي 4 على الأقل. أثبت أن قطر $\overline{G}$ يساوي 2 على الأكثر. (مساعدة: استخدم النظرية 11.1.2.)

16.1.2. (−). افترض أن G بيان بسيط. عرف G' ليكون البيان البسيط الذي له رؤوس G نفسها، بحيث إن $xy \in E(G')$ إذا وفقط إذا كان كل من x و y متجاورين في G، أو أن لهما جارًا مشتركًا في G، أثبت أن: $\text{diam}\,(G') = \lceil \text{diam}(G)/2 \rceil$.

• • • • •

17.1.2. (!). في النظرية 4.1.2. أثبت أن: $C \Rightarrow \{A,B\}$ من خلال إضافة أضلاع تربط بين المركبات.

18.1.2. (!). أثبت أن كلّ شجرة درجتها القصوى تساوي $\Delta > 1$، تمتلك Δ من الرؤوس التي درجة كل منها تساوي 1. أثبت أن هذا أفضل ما يمكن من خلال إيجاد شجرة على n من الرؤوس ولها بالضبط Δ من الأوراق لكل n، Δ حيث $n > \Delta \geq 2$.

19.1.2. أثبت العبارة الآتية أو انقضها: إذا كانت n_i ترمز إلى عدد الرؤوس التي درجتها i في شجرة T، عندها تكون Σin_i، معتمدة على عدد رؤوس T فقط.

20.1.2. إن الهيدروكربون المشبع جُزَيء مؤلف من k من ذرات الكربون، و l من ذرّات الهيدروجين، وذلك بإضافة روابط بين الذرّات حيث تكون كل ذرّة كربون موجودة في أربع روابط، وكل ذرّة هيدروجين في رابطة واحدة، وأن أيّ متتالية روابط لا تشكل حلقة من الذرّات. أثبت أن $l = 2k + 2$ (*Bondy – Murty* [1976,827]).

21.1.2. افترض أن G بيان بسيط له n من الرؤوس، بحيث يوجد له تفكيك إلى k شجرة مولدة، وافترض أن $\Delta(G) = \delta(G) + 1$. أثبت استحالة هذا الأمر إذا كانت $2k \geq n$. أما إذا كانت $2k < n$، فحدّد متتالية درجات G بدلالة كلّ من n و k.

22.1.2. افترض أن T شجرة لها n من الرؤوس، وتحوي رأسًا واحدًا درجته i لكل $2 \leq i \leq k$، أما باقي الرؤوس التي عددها $n - k + 1$ فتمثل أوراقًا. حدّد n بدلالة k.

23.1.2. افترض أن T شجرة، درجة كل رأس من رؤوسها إما 1 أو k، حدّد القيم الممكنة لـ $n(T)$.

24.1.2. أثبت أنه توجد لكل شجرة غير تافهة مجموعتان مستقلتان كبيرتان من الرؤوس على الأقل. ويوجد كذلك مجموعتان فقط إذا كانت الشجرة نجمة (لاحظ: قيمة عظمى $\neq$ أكبر ما يمكن بالنسبة إلى الاحتواء).

25.1.2. من بين الأشجار التي عدد رؤوسها n، أثبت أن النجمة تمتلك أكبر عدد من المجموعات المستقلة.

26.1.2 (!). لكل $n \geq 3$، افترض أن G بيان له n من الرؤوس ،بحيث إنه إذا حذفنا أيّ رأس من رؤوس G، فإننا نحصل على شجرة. حدّد $e(G)$، واستخدم ذلك لتحديد G نفسه.

27.1.2 (!). افترض أن $d_1, \ldots\ldots, d_n$ هي أعداد صحيحة حيث $n \geq 2$. أثبت أنه توجد شجرة درجات رؤوسها هي: $d_1, \ldots, d_n$ إذا وفقط إذا كان $\Sigma d_i = 2n\text{-}2$.

28.1.2. افترض أن $d_1 \geq \ldots \geq d_n$ مجموعة أعداد صحيحة غير سالبة. أثبت أنه يوجد (بيان مترابط بحيث يُسْمح للعرى والأضلاع المكررة) متتالية درجات رؤوسه هي $d_1, \ldots, d_n$ إذا وفقط إذا كان Σd_i زوجيًّا، $d_n \geq 1$ و $\Sigma\, d_i \geq 2n\text{-}2$.(مساعدة: خذ في الحسبان بيانًا يحقق الخاصية (تحقيقًا) عدد مركباته أقل ما يمكن). هل النتيجة صحيحة للبيانات البسيطة؟

29.1.2. (!) . كل شجرة تمثل بيانًا ثنائي الفرع. أثبت أنه توجد في كل شجرة ورقة في فرعها الذي عدد رؤوسه أكبر (وفي كلا الفرعين إذا تساوى فيهما عدد الرؤوس) .

30.1.2. افترض أن T شجرة يتحقق فيها أن درجة كل رأس يجاور ورقة تساوي 3 على الأقل. أثبت وجود رأسين في T لهما جار مشترك.

31.1.2. أثبت أنّ البيان البسيط المترابط الذي له رأسان فقط ليسا رأسي قطع (فصل) هو مسار.

32.1.2. أثبت أن الضلع e في البيان المترابط G يكون ضلع قطع (فصل) إذا وفقط إذا كان e ينتمي إلى كل شجرة مولدة. و أثبت أن e يكون أنشوطة إذا وفقط كان لا ينتمي إلى أي شجرة مولدة.

33.1.2. (!) . افترض أن G بيان مترابط له n من الرؤوس. أثبت أنه يمتلك حلقة واحدة إذا وفقط إذا كان عدد أضلاعه يساوي n بالضبط.

34.1.2. (!) . افترض أنّ T شجرة لها k ضلعًا، وأن G بيان بسيط عدد رؤوسه n، وعدد أضلاعه أكبر من $n(k-1)-\binom{k}{2}$. استخدم قضية 8.1.2 لبرهان أن $T \subseteq G$ إذا كان $n > k$.

35.1.2. (!) . افترض أن T شجرة. أثبت أن درجة كل رأس من رؤوسها تكون فردية إذا وفقط إذا تحقق أنه لكل $e \in E(T)$ تكون رتبة كل مركبة من مركبتي $T\text{-}e$ فردية.

36.1.2. (!) . افترض أنّ T شجرة ذات رتبة زوجية. أثبت أنه يوجد لها بيان جزئي مولد واحد فقط، بحيث إن درجة كل رأس من رؤوسه تكون فردية.

37.1.2. (!) . افترض أنّ T و T' شجرتان مولدتان للبيان المترابط G، إذا كان $e \in E(T)-E(T')$، فأثبت أنه يوجد ضلع e' في $E(T')-E(T)$ بحيث إن كلًّا من $T-e+e'$ و $T'+e-e'$ تكون شجرة مولدة للبيان G.

38.1.2. افترض أنّ T و T' شجرتان لهما الرؤوس نفسها، وأن $d_T(v) = d'_T(v)$ لكل رأس v. أثبت أنه يمكن الحصول على T' من T باستخدام مفتاح ثنائي (التعريف 32.3.1) ، وبذلك يكون كل بيان نحصل عليه خلال عملنا هذا هو شجرة أيضًا.

39.1.2. (!) . افترض أنّ G شجرة فيها $2k$ رأسًا درجة كل منها فردية. أثبت أنه يمكن تفكيك (تحليل) G إلى k من المسارات. (مساعدة: أثبت النتيجة الأقوى وهي أن الادعاء أعلاه يتحقق في الغابات جميعها) .

40.1.2. (!) . افترض أن G شجرة لها k من الأوراق. أثبت أنها اتحاد لمسارات $P_1, \ldots, P_{\lceil k/2 \rceil}$ ، بحيث $Pi \cap P_j \neq \emptyset$ لكل $i \neq j$ (Ando – Kaneko – Gervacio [1996]).

41.1.2. لكل $n \geq 4$، افترض أن G بيان بسيط عدد رؤوسه n، وعدد أضلاعه $e(G) \geq 2n-3$. أثبت أنه توجد لـ G حلقتان متساويتان في الطول (لقد أكدّ كلّ من chen و Lehel و Jacbson و shreve هذه النتيجة في العام [1998]) .

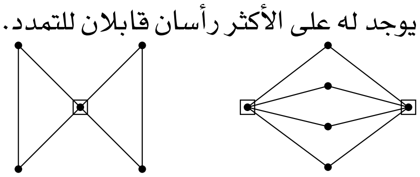
42.1.2. افترض أن G بيان أويلري مترابط له ثلاثة رؤوس على الأقل. نقول: إن الرأس v الموجود في G قابل للتمديد إذا أمكن تمديد كل مسرب يبدأ في G إلى حلقة أويلرية في G. فعلى سبيل المثال في البيانات المعطاة في الشكل أدناه، نجد أن الرؤوس المعلّمة هي الرؤوس القابلة للتمدد فقط. أثبت العبارات الآتية المتعلقة بـ G (مأخوذ من Chartrand – Lesniak [1986,p61]) .

a) الرأس $v \in V(G)$ قابل للتمدّد إذا وفقط إذا كان $G-v$ هو غابة (Ore [1951م]) .

b) إذا كان v قابلًا للتمدّد، فإن $d(v) = \Delta(G)$ (Bäbler [1953م]) .

c) رؤوس G كلّها تكون قابلة للتمدد إذا وفقط إذا كان G حلقة.

d) إذا لم يكن G حلقة فإنه يوجد له على الأكثر رأسان قابلان للتمدد.

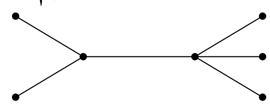


43.1.2. افترض أن a رأس في بيان مترابط G، أثبت أنه يمكن أن نختار أقصر المسارات من u إلى باقي رؤوس G ، بحيث يكوّنُ اتحادُ هذه المسارات شجرةً.

44.1.2. (!). أثبت العبارة الآتية أو انقضها: إذا وُجد لبيان بسيط قطره 2 رأسُ فصل، فيوجد لمتممة هذا البيان رأسٌ معزول.

45.1.2. افترض أن G بيان له أشجار مولدة قطرها 2، وأشجار مولدة أخرى قطرها l. إذا كانت $2 < k < l$ فأثبت أنه يوجد لـ G أيضًا شجرة مولدة قطرها k، (Galvin).

46.1.2. (!). أثبت أن الأشجار التي قطرها 3 هي النجوم الثنائية (نعني بالنجم الثنائي: الشجرة التي لها رأسان مركزيان وباقي رؤوسها أوراق)، احسب صفوف تشاكل النجوم الثنائية التي لها n من الرؤوس.



47.1.2. (!). القطر ونصف القطر:

a) أثبت أن دالة المسافة بين أي رأسين $d(u, v)$ تحقق المتباينة المثلثية $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$

b) استخدم فرع a لإثبات أن $diam\ G \leq 2rad\ G$ لكل بيان G.

c) للأعداد الصحيحة الموجبة r و d جميعها التي تحقق أن $r \leq d \leq 2r$ أوجد بيانًا بسيطًا نصف قطره r وقطره d. (مساعدة: جد بيانًا مناسبًا له حلقة واحدة).

48.1.2. (!). إذا كانت $n \geq 4$، فأثبت أن أقل عدد من الأضلاع لبيان له n من الرؤوس وقطره 2 وأكبر درجة من درجات رؤوسه $n - 2$ هو $2n - 4$.

49.1.2. افترض أن G بيان بسيط. أثبت أنه إذا كان $\text{rad}\ G \geq 3$، فإن $\text{rad}\ \overline{G} \leq 2$.

50.1.2. نصف القطر والاختلاف المركزي.

a) أثبت أن الاختلافات المركزية للرؤوس المتجاورة تختلف عن بعضها بمقدار 1 على الأكثر.

b) بدلالة نصف القطر r، حدد أكبر مسافة ممكنة بين رأس اختلافه المركزي $r + 1$ ومركز G (مساعدة: استخدم بيانًا فيه حلقة واحدة فقط).

51.1.2. افترض أن x و y جاران مختلفان للرأس v في بيان G.

a) أثبت أنه إذا كان G شجرة، فإن $2 \in(v) \leq \in(x) + \in(y)$.

b) حدّد أصغر بيان تفشل فيه هذه المتباينة.

52.1.2. افترض أن x رأس في بيان G، وافترض أن $\in(x) > rad\ G$:

a) أثبت أنه إذا كان G شجرة، فإنه يوجد جار للرأس x اختلافه المركزي $k - 1$.

b) أثبت أن فرع a لا يتحقق للبيانات جميعها وذلك من خلال إيجاد (بناء) بيان نصف قطره r حيث r عدد زوجي يساوي 4 على الأقل، بحيث إن الاختلاف المركزي للرأس x في هذا البيان يساوي $r + 2$، ولا يوجد له جار اختلافه المركزي يساوي $r + 1$. (مساعدة: استخدم بيانًا له حلقة واحدة فقط).

53.1.2. أثبت أن مركز البيان يمكن أن يكون غير مترابط، ويمكن أن يكون له مركبات متباعدة بالقدر الذي نريد من خلال إيجاد (بناء) بيان يتألف مركزه من رأسين المسافة بينهما تساوي k.

54.1.2. مراكز الأشجار. افترض أن T شجرة:

a) أعط برهانًا غير استقرائي تبيّن فيه أنّ مركز T رأس أو ضلع.

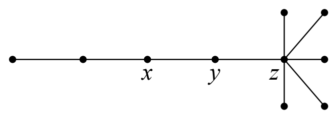
b) أثبت أن مركز T يكون رأسًا واحدًا إذا وفقط إذا كان $\text{diam}T = 2\text{rad}\ T$.

c) استخدم فرع a لتثبت أنه إذا كان $n(T)$ عددًا فرديًا، فإن كلّ تشاكل ذاتي لـ T يثبت أحد رؤوس T (يأخذ رأسًا من الرؤوس لنفسه).

55.1.2. افترض أن $x \in V(G)$، وأن $s(x) = \sum_{v \in V(G)} d(x, v)$ ، نعرف مركز كتلة (barycenter) G على أنه البيان الجزئي المحدث من مجموعة الرؤوس التي تعطي قيمة صغرى لـ $s(x)$ (تسمى هذه المجموعة أيضًا بالوسيط (median)):

a) أثبت أن مركز كتلة أي شجرة هو رأس أو ضلع (مساعدة: ادرس $s(u) - s(v)$ في الحالة التي يكون فيها u و v متجاورين)، (Jordan [1869]).

b) حدّد أكبر مسافة بين مركزي الشجرة التي قطرها d وكتلتها. (**مثال:** في الشجرة المرسومة أدناه، المركز هو الضلع xy، ومركز الكتلة هو Z فقط، والمسافة بينهما تساوي 1).



56.1.2. افترض أن T شجرة. أثبت أنّ لها رأسًا هو v، بحيث إن لمركبة $T\text{-}e$ التي تحوي v $\left\lceil \frac{n(T)}{2} \right\rceil$ رأسًا على الأقل، وذلك لكل $e \in E(T)$، ثمّ أثبت أن الرأس v إما أن يكون وحيدًا، أو أن يكون له رأسان متجاوران يحققان هذه الخاصية.

57.1.2. افترض أن $n_1, \dots, n_k$ أعداد صحيحة موجبة مجموعها يساوي $n - 1$.

a) بحساب عدد الأضلاع في البيانات التامة، أثبت أن $\sum_{i=1}^{k} \binom{n_i}{2} \le \binom{n-1}{2}$.

b) استخدم فرع a لبرهان أن $\sum_{v \in V(T)} d(u, v) \le \binom{n}{2}$ عندما يكون u رأسًا لشجرة T. (مساعدة: استخدم الاستقراء القوي على عدد الرؤوس).

58.1.2. (+) افترض أن S و T شجرتان، أوراقهما $\{x_1, \dots, x_k\}$ و $\{y_1, \dots, y_k\}$ على الترتيب. وافترض أن $d_S(x_i, x_j) = d_T(y_i, y_j)$ لكل زوج i, j، أثبت أن S و T متشاكلتان (Smolenskii [1962]).

59.1.2. (!). افترض أن T شجرة لها n من الرؤوس، و k من الأوراق، ودرجتها القصوى تساوي k.

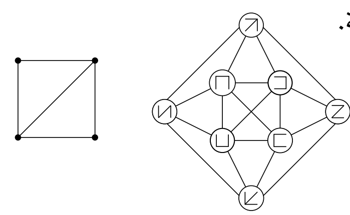
a) أثبت أن G هي اتحاد k من المسارات التي لها نقطة طرفية مشتركة.

b) حدّد أكبر وأصغر قيمة ممكنة لقطر ($\operatorname{diam} G$).

60.1.2. افترض أن G بيان قطره d، ودرجته القصوى k، أثبت أن $n(G) \le 1+[(k-1)^d - 1]\, k/(k-2)$
(تعليق: المساواة تتحقق لبيان بيترسون).

61.1.2. (+) افترض أن G بيان رتبته أصغر ما يمكن من بين البيانات المنتظمة من الدرجة k التي خصرها يساوي g على الأقل (التمرين 16.3.1 يضمن وجود مثل هذه البيانات). أثبت أن قطر G يساوي g على الأكثر. (مساعدة: إذا كانت $d_G(x, y) > g$، فعدّل G لتحصل على بيان أصغر منتظم من الدرجة k خصره يساوي g على الأقل.(Erdős – sachs [1963]).

62.1.2. (!) افترض أن G بيان مترابط له n من الرؤوس، عرّف بيانًا جديدًا G' من G حيث G' يحتوي على رأس واحد من كل شجرة مولدة للبيان G، وبحيث تكون الرؤوس في G' متجاورة إذا وفقط إذا وجد $n(G)$- 2 ضلع مشترك بين الأشجار المرتبطة بهذه الرؤوس، أثبت أن G' يكون مترابطًا، ثم حدّد قطر G'. الشكل أدناه يعطي مثالًا على هذه الحالة.

G  G′

63.1.2. (!): افترض أن G بيان له n من الرؤوس، و $n+1$ من الأضلاع. أثبت أن خصر G أقل من أو يساويه. $\lfloor (2n+2)/3 \rfloor$ ثم جد مثالاً (بيانًا) يحقق هذا الحدّ لـ n جميعها.

64.1.2. (!): أثبت أن $2k+1$ هي أكبر خصر لبيان من البيانات التي قطرها k جميعها، وأنها ليست أشجارًا. (مساعدة: أثبت أنه إذا وُجد في G حلقة طولها $2k+2$ على الأقل، فيوجد في G حلقة أقصر).

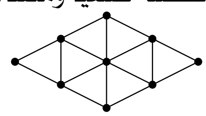
65.1.2. (+): افترض أن G بيان مترابط له n من الرؤوس ودرجته الصغرى تساوي k، حيث $k \ge 2$ و $n\text{-}2 \ge 2(k+1)$. أثبت أن $diam\ G \le 3[(n-2)/(k+1)] - 1$. وفي الحالة التي تكون فيها $k \ge 2$ و $(n-2)/(k+1)$ عددًا صحيحًا أكبر من 1، جد بيانًا يتحقق فيه هذا الحدّ ، ويكون: $\text{diam}\ G = 3[(n\text{-}2)/(k\text{+}1)]\text{-}1$، (Moon [1965b]).

66.1.2. افترض أن $F_1,\ldots,F_m$ غابات اتحادها يساوي G، وأثبت أن $m \ge \max_{H\subseteq G}\left\lceil \frac{e(H)}{n(H)-1} \right\rceil$

(تعليق: لقد أثبت كلّ من ناش وويليامز [1964] وكذلك إدموندز [1965b] إمكانية تحقيق هذا الحدّ دائمًا – النتيجة 57.2.8).

67.1.2. أثبت أنّ العبارة الآتية تمثل الشرط الضروري لوجود k من الأشجار المولدة لبيان G، بحيث تكون هذه الأشجار منفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا: لكل تجزئة لرؤوس G إلى r مجموعة، وجد على الأقل $k\ (r-1)$ ضلعًا في G بحيث تقع النقاط الطرفية لهذه الأضلاع في مجموعات مختلفة من مجموعات التجزئة. (تعليق: النتيجة 59.2.8 توضح أن هذا الشرط كافٍ أيضًا (Edmonds [1965c]، Nash – Williams [1961]،Tutte [1961a]) .

68.1.2. تأمل البيان الموضّح في الشكل أدناه. هل يمكن تفكيك هذا البيان إلى أشجار مولدة منفصلة ضلعيًّا؟ وهل يمكن تفكيكه إلى أشجار مولدة منفصلة ضلعيًّا ومتشاكلة؟



69.1.2. (*) خذ في الحسبان البيان الموجود قبل النظرية 17.1.2 الذي له ، 12 ضلعًا عموديًّا وستة عشر ضلعًا أفقيًّا أو مائلة. افترض أن $g_{i,j}$ هي الضلع رقم i من الأعلى في العمود رقم j من الأضلاع العمودية. وافترض أيضًا أن $h_{i,j}$ تمثل الضلع رقم j من اليسار في الصف رقم i من الأضلاع الأفقية أو القطرية، وافترض كذلك أن اللاعب الأول يتبع الاستراتيجية الموجودة في النظرية 17.1.2 ، وأخذ الموقع $h_{1,1}$ أولًا. عندها، يحذف اللاعب الثاني الموقع $g_{2,2}$، في حين يأخذ اللاعب الأول الموقع $h_{2,3}$. بعد ذلك، يقوم اللاعب الثاني بحذف الموقع $v_{3,2}$، ويأخذ اللاعب الأول الموقع $h_{4,2}$. في هذه المرحلة، ارسم الشجرتين المولدتين. إذا علمت أن اللاعب الثاني يحذف بعد ذلك الموقع $g_{2,1}$، فاعمل قائمة بالحركات المتوافرة للاعب الأول من خلال هذه الاستراتيجية (Pritikin).

70.1.2. (*) أثبت أن لعبة التّجسير لا يمكن أن تنتهي بالتعادل بغض النظر عن الكيفية التي تتم بها الحركات. أي أثبت أنه في الحالة التي يتعذر فيها إجراء المزيد من الحركات، فإنّ أحد اللاعبَيْن يكون قد حصل على مسار يربط بين أهدافه.

71.1.2. (*) افترض أن اللاعبَيْن غيّرا قواعد هذه اللعبة؛ حيث يستطيع اللاعب الخاسر عمل مسار يربط بين طرفين صديقين. في هذه الحالة، يمنع الربط من خلال بناء جسر بين مواقع طرفية، أو من خلال ربط مواقع مرتبطة أصلًا بمسار. أثبت أنه يوجد لدى اللاعب الثاني استراتيجية تمنع اللاعب الأول من الفوز، أي أنها ترغم اللاعب الأول على الخسارة. (مساعدة: استخدم الفرضية 7.1.2. بدلاً من الفرضية 6.1.2. (Pritikin).

72.1.2. (+): أثبت أنه إذا كانت $G_1,\ldots,G_k$ أشجارًا جزئية للشجرة G بحيث تتقاطع هذه الأشجار زوجًا زوجًا، فإنه يوجد لـ G رأس ينتمي إلى كل من $G_1,\ldots,G_k$. (مساعدة: استخدم الاستقراء على k).

(تعليق: تسمى هذه النتيجة خاصية هيلي للأشجار).

73.1.2. (+): أثبت أن البيان البسيط G يكون غابة إذا وفقط إذا تحقق أنه يوجد لكل عائلة من المسارات المتقاطعة زوجًا زوجًا في G رأسٌ مشترك بين هذه المسارات. (مساعدة: لبرهان أن الشرط كافٍ؛ استخدم الاستقراء على حجم عائلة هذه المسارات).

74.1.2. افترض أن G بيان بسيط له n من الرؤوس، و $n - 2$ من الأضلاع. أثبت أنه إما يوجد لـ G رأس معزول، أو أنّه يوجد له مركبتان ليستا أشجارًا خالية من الأضلاع. استخدم هذه النتيجة في إثبات أن G بيان جزئي من $\overline{G}$ عن طريق الاستقراء. (تعليق: الادعاء أعلاه غير صحيح للبيانات جميعها التي لها $n - 1$ من الأضلاع). ([Burns-Schuster [1977]).

75.1.2. (+): أثبت أن كل شجرة على n من الرؤوس (مختلفة عن $k_{1,n-1}$) تكون محتواة في متممتها. (مساعدة: استخدم الاستقراء على n في إثبات النتيجة الأقوى: إذا كانت T شجرة على n من الرؤوس، وبما أن T ليست نجمة، فإن K_n يحوي نسختين منفصلتين ضلعيًّا من T، ويتحقق فيها أن كل نسخة من نسختي أي رأس (حيث هذا الرأس ليس ورقة) من رؤوس T تظهر عند رأس مختلف ومتميز عن الرأس الآخر.

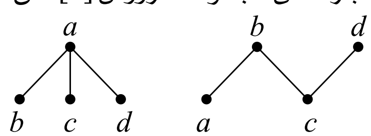
76.1.2. (+) افترض أن S مجموعة فيها n من العناصر. وافترض كذلك أن $\{A_1, ..., A_n\}$ هي n من المجموعات الجزئية (المختلفة) من S، أثبت أنه يوجد في S عنصر x بحيث تكون المجموعات $A_1 \cup \{x\}, ... , A_n \cup \{x\}$ مميزة ومختلفة. (مساعدة: عرف بيانًا رؤوسه $a_1,...,a_n$ بحيث إن $a_i \leftrightarrow a_j$ إذا وفقط إذا أمكن الحصول على إحدى $\{A_i, A_j\}$ من الأخرى بإضافة عنصر واحد y. استخدم y بوصفها علامة دالة على الضلع، وأثبت وجود غابة تتألف من ضلع واحد لكل علامة مستخدمة، استخدم هذا للحصول على العنصر المنشود x)، ([Bondy [1972a]).

2.2. الأشجار المولدة والتعداد (spanning trees and Enumeration)

يوجد $2^{\binom{n}{2}}$ بيانًا بسيطًا رؤوسها المجموعة $\{1,2,...,n\} =[n]$؛ وذلك لأن كل زوج من هذه الرؤوس يمكن أن يشكّل أو لا يشكّل ضلعًا، والسؤال المطروح هو: كم بيانًا من هذه البيانات شجرة؟ في هذا الجزء من الفصل، سنحلّ مسألة التعداد هذه، وسنجدُ كم شجرة مولدة يوجد لبيان معطى، ثمّ سنعطي العديد من التطبيقات.

تعداد الأشجار

في حالة وجود رأس واحد أو رأسين، فيمكن تشكيل شجرة واحدة فقط، وفي الحالة التي يكون لدينا فيها ثلاثة رؤوس، فإنه يوجد صفّ تشاكل واحد فقط لهذه البيانات، إلا أن مصفوفة التجاور تتحدد من خلال معرفة أيّ من هذه الرؤوس هو المركز. لذا، فهناك ثلاث أشجار لها مجموعة رؤوس المجموعة [3]، أما إذا كانت مجموعة الرؤوس هي المجموعة [4]، فيوجد أربع نجمات و 12 مسارًا، وهذا يعطينا 16 شجرة. إضافة إلى أننا نستطيع إثبات وجود 125 شجرة على مجموعة الرؤوس [5] من خلال دراسة متأنية لهذه المجموعة.



يتبيّن لنا من خلال ما سبق وجود n^{n-2} شجرة على $[n]$ من الرؤوس. وتسمى هذه صيغة كيلي (Cayley's farmula). لقد وجد كل من برفر (Prüfer) وكيركوف (Kirch hoff) وبوليا (Pölya) ورينى (Renyi) وآخرين برهانًا لهذه الصيغة. في حين كتب مون J.w. moon عام 1970 كتابًا حول تعداد صفوف الأشجار. وسنعطي إثبات

تناظر من خلال إيجاد ارتباط واحد لواحد بين مجموعة الأشجار على $[n]$ من الرؤوس مع مجموعة حجمها معروف.

إذا أُعطينا مجموعة S من n من الأعداد، فإنه يوجد n^{n-2} طريقة لتشكيل قائمة طولها $n - 2$ مدخلاتها في S، وسنرمز بالرمز S^{n-2} إلى مجموعة هذه القوائم (انظر الملحق A).

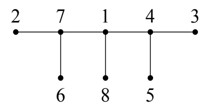
سنستخدم S^{n-2} لتشفير الأشجار التي رؤوسها المجموعة S. وتسمى القائمة التي نحصل عليها من الشجرة شفرة برفر (Prüfer code) لهذه الشجرة.

1.2.2. خوارزمية. (Prüfer code) شفرة برفر إنتاج $f(T) = (a_1, ..., a_{n-2})$.

المدخلات: شجرة T مجموعة رؤوسها هي S، حيث $S \subseteq \mathbb{N}$.

خطوات مرات الحدوث: عند الخطوة رقم i، احذف أقل ورقة باقية، واجعل a_i تمثل جارًا لهذه الورقة. ■

2.2.2. مثال: بعد إجراء $n - 2$ من العمليات، نجد أن ضلعًا واحدًا فقط من الـ $n - 1$ ضلعًا الأصلية يبقى، وبذلك نكون قد حصلنا على قائمة $f(T)$ طولها $n - 2$ ومدخلاتها في S. وفي الشجرة المرسومة في الشكل أدناه، نجد أن أقل ورقة هي الرأس 2. نحذفها ونسجل 7، وبحذف 3 و 5 وتسجيل 4 في كل مرة، نجد أن أقل ورقة في الشجرة المتبقية على الرؤوس الخمسة الباقية هي 4. لذا، فإن الشفرة التامة هي (744171) أما الرأسان المتبقيان أخيرًا فهما 1 و 8. لاحظ أن ما يتبقى بعد الخطوة الأولى من شفرة برفر هي شفرة برفر للشجرة الجزئية T' التي مجموعة رؤوسها $[8]-\{2\}$.



إذا علمنا مجموعة الرؤوس S، فإنه يمكننا استرجاع الشجرة من الشفرة a، حيث إن الفكرة في ذلك هي استرجاع الأضلاع جميعها، وسنبدأ العمل من الرؤوس المعزولة، ونسترجع في كل خطوة ضلعًا واحدًا، ونضع علامة على رأس واحد فقط. وعندما نكون مستعدين لأخذ a_i في الحسبان، فسيتبقى لدينا $n - i+1$ رأسًا بغير علامة و $n - i -1$ مدخلة من a (من ضمنها a_i). وبناءً عليه، فإن رأسين على الأقل من الرؤوس غير المعلّمة لا يظهران بين المدخلات المتبقية من مدخلات a، ولتكن x هي أقلهما، ثمّ نضيف xa_i إلى قائمة الأضلاع، ونضع علامة على الرأس x. وبتكرار هذه العملية $n - 2$ مرة، نجد أنه يتبقى لدينا رأسان فقط دون علامات. لذا، نصلهما معًا للحصول على الضلع الأخير.

في المثال أعلاه، نعلم أن أقل عنصر من عناصر S غير موجود في الشفرة هو 2. لذا، فإن الضلع الأول الذي يجب إضافته هو الضلع الذي يربط بين الرأسين 2 و 7، ونضع علامة على الرأس 2. الآن، سنجد أن أقل رأس دون علامة من الرؤوس المتبقية هو 3. لذا، نصله مع 4 وهذا هو a_2، وبمتابعة هذه العملية، نستطيع إعادة الأضلاع بالترتيب نفسه الذي تم به حذفها للحصول على a من T.

لاحظ أنه يوجد رأس واحد دون علامة في كل مُركبة من مركبات البيان التي حصلنا عليها خلال العملية السابقة، وهذا صحيح. لذا، فإن إضافة أيّ ضلع له طرفان غير معلّمين تنتج ربطًا بين مركبتين لهذا البيان. وبعد وضع علامة على أحد رأسي الضلع الجديد، نجد أيضًا أنه يوجد لكل مركبة رأس واحد دون علامة.

وبعد إجراء $n - 2$ من الخطوات يتبقى لدينا رأسان فقط دون علامات. لذا، فإنه يوجد لدينا مركبتان. وبإضافة الضلع الأخير، نحصل على بيان مترابط. إذن، نكون قد بنينا بيانًا له n من الرؤوس، و $n - 1$ من الأضلاع، ومن النظرية 4B.1.2، نعلم أنّ هذا البيانَ شجرة، لكننا حتى الآن لم نثبت أن a هي شفرة برفر لهذه الشجرة. ■

3.2.2. نظرية: (صيغة كيلي [1889])، (Cayley's formula [1889]).

إذا كانت S مجموعة جزئية من N حجمها n، فإنه يوجد n^{n-2} شجرة رؤوسها هي المجموعة S.

الإثبات: (prüfer [1918]). لاحظ أن النتيجة صحيحة عندما $n=1$. لذا، افترض أن $n \geq 2$، سنثبت أنّ الخوارزمية 1.2.2. تعرف دالة تناظر f من مجموعة الأشجار التي رؤوسها S إلى المجموعة S^{n-2} التي عناصرها هي قوائم من عناصر S طول كل قائمة منها يساوي $n - 2$. يجب أن نثبت أنه لكل $a = (a_1, ..., a_{n-2})$ في S^{n-2} توجد شجرة واحدة فقط T رؤوسها S وتحقق أن $f(T) = a$، وسنثبت ذلك من خلال الاستقراء على n.

الخطوة الأساس: $n = 2$. في هذه الحالة، توجد شجرة واحدة لها رأسان. لذا، فإن شفرة برفر هي قائمة طولها صفر، وهي القائمة الفريدة التي تحقق الخاصية المطلوبة.

خطوة الاستقراء: $n > 2$. إن حساب $f(T)$ يختزل كل رأس إلى رأس درجته تساوي 1، ويمكن أن يُحذف مثل هذا الرأس خلال عملية الحساب هذه. لذا، فإن كل رأس لا يمثل ورقة في T. يجب أن يظهر في $f(T)$. لاحظ عدم ظهور أي ورقة في $f(T)$ لأن تسجيل ورقة بوصفها جارًا لورقة أخرى، يتطلب اختصار الشجرة إلى رأس واحد فقط. لذا، فإن أوراق T هي عناصر S التي لا تظهر في $f(T)$. إذا كانت $f(T) = a$، فإن أول ورقة تحذف هي أقل عنصر في S غير موجود في a (لنقل إن هذا العنصر هو x)، وأن جار x هو a_1.

لقد أعطينا a في S^{n-2}، ونبحث عن حلول $f(T)=a$ جميعها. لقد بيّنا أن كل شجرة من هذه الأشجار لها x بوصفها ورقة ولها الضلع xa_1. وحذف x يبقى الشجرة التي رؤوسها $S' = S - \{x\}$. وأن شفرة برفر لها هي: $a' = (a_2, ..., a_{n-2})$ وهذه مرتبة عدد عناصرها $n - 3$، وشكلت من S'.

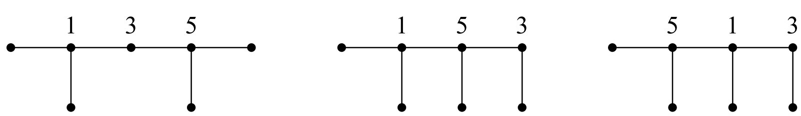
من افتراض الاستقراء، توجد شجرة واحدة فقط T' رؤوسها S'، وشفرة برفر لها هي a'. وبما أنه يمكن الحصول على كل شجرة لها a بوصفها شفرة برفر من خلال إضافة الضلع xa_1 لمثل هذه الشجرة، فإن هناك حلًّا واحدًا للمعادلة $f(T) = a$ على الأكثر. وبالإضافة إلى ذلك، فإننا نعلم أن إضافة xa_1 إلى T' يعطينا شجرة رؤوسها S، ولها a كشفرة برفر. لذا، هناك حل واحد للمعادلة $f(T) = a$ على الأقل. وهذا ينهي الإثبات. ■

لقد حلّ كيلي المسألة جبريًّا، وعدَّ الأشجار من خلال درجات رؤوسها، لاحظ أن دالة التناظر الخاصة ببرفر تُوفّر مثل هذه المعلومات أيضًا.

4.2.2. نتيجة: افترض أن $d_1, ..., d_n$ مجموعة أعداد صحيحة مجموعها يساوي $2n - 2$. ويوجد $\frac{(n-2)!}{\prod(d_i - 1)!}$ بالضبط شجرة رؤوسها المجموعة $[n]$ بحيث إن درجة الرأس i هي d_i لكل i.

الإثبات: عند بناء شفرة برفر لشجرة T، نسجل x في كل مرة نحذف فيها جارًا لـ x حتى نحذف x نفسها أو نبقيها من بين آخر رأسين. لذا، فإن كل رأس x يظهر بمقدار $d_T(x) - 1$ مرة في شفرة برفر. واستنادًا إلى ذلك، فإننا نحسب الأشجار التي لرؤوسها هذه الدرجات من خلال حساب قوائم طول كل منها $n - 2$ والتي لها d_i-1 نسخة من i لكل i. إذا حددنا دليلاً سفليًّا لنسخ i جميعها، وذلك لتمييز هذه النسخ، فإننا نبدل $n - 2$ شيئًا مختلفًا، وهذا يعطينا $(n - 2)!$ قائمة، وبما أنه لا يمكن التمييز بين نسخ i، فإننا نكون قد حسبنا كل ترتيبة منشودة بمقدار $\Pi(d_i\text{-}1)!$ مرة، مرة لكل طريق لترتيب الدليل السفلي على كل نوع من العلامات (label) (يناقش الملحق A جوانب أخرى لمسألة التعداد هذه). ■

5.2.2. مثال: الأشجار ذات الدرجات الثابتة. خذ في الحسبان الأشجار التي رؤوسها [1,2,3,4,5,6,7] حيث درجات هذه الرؤوس هي: (3،1،2،1،3،1،1) على الترتيب. وبالحساب، نجد أن $\frac{(n-2)!}{\prod(d_i - 1)!} = 30$؛ إن هذه الأشجار مقترحة أدناه، لاحظ أن الرؤوس {1,3,5} فقط هي التي لا تمثل أوراقًا. وبحذف الأوراق، نحصل على شجرة جزئية على الرؤوس {1,3,5}. وهناك ثلاث من هذه الأشجار الجزئية يُحَدِّدُ كلٌّ منها بحسب الرأس الموجود في الوسط.



ومن أجل إكمال كل شجرة، نضيف عددًا مناسبًا من جيران الأوراق لكل رأس لا يمثل ورقة لإعطاء هذا الرأس الدرجة المنشودة. هناك ستّ طرق لإكمال الشجرة الأولى (اختر من بين الرؤوس الأربعة المتبقية

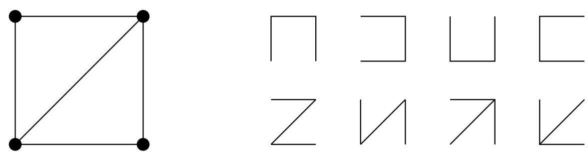
الرأسين المجاورين للرأس 1). وهناك 12 طريقة لإكمال كل شجرة من الأشجار الأخرى (اختر جارَ الرأس 3 من بين الرؤوس الأربعة المتبقية، ثم اختر جارَ الرأس المركزي من الرؤوس الثلاثة المتبقية). ■

الأشجار المولدة في البيانات (Spaning Trees Graphs)

يمكننا توضيح صيغة كيلي بطريقة ثانية، هي: بما أن البيان التام الذي مجموعة رؤوسه $[n]$ يمتلك الأضلاع جميعها التي يمكن أن تُستَخدَم لتشكيل الأشجار التي مجموعة رؤوسها $[n]$، فإن عدد الأشجار التي لها مجموعة رؤوس محددة حجمها n يساوي عدد الأشجار المولدة في بيان تام على n من الرؤوس.

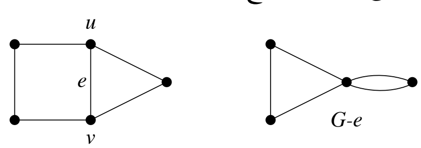
الآن، نأخذ المسألة الأعم المتعلقة بحساب عدد الأشجار المولدة في أي بيان G. عمومًا، لايوجد في G تماثل كالبيان التام. لذا، يستحيل أن نتوقع صيغة بسيطة مثل الصيغة السهلة للبيان k_n، ولكننا نأمل في إيجاد خوارزمية تعطينا طريقًا سهلاً لحساب الجواب لأي بيان G.

6.2.2. مثال: في الشكل أدناه، تجد الطائرة الورقية. لحساب عدد الأشجار المولدة، لاحظ أن أربعًا من هذه الأشجار تمثل المسارات حول الدائرة الخارجية للرسم. إن الأشجار المولدة المتبقية تستخدم الضلع الموجود على القطر، وبما أنه يجب أن تشمل ضلعًا لكل رأس درجته 2، فإننا نحصل على أربع أشجار مولدة إضافية. لذا، فإن العدد الكلي للأشجار المولدة للطائرة الورقية يساوي 8. ■



لقد حسبنا في المثال 6.2.2 الأشجار التي لها ضلع قطري، وكذلك الأشجار التي لا يوجد لها ضلع قطري كل على حدة، وهذا يقترح علينا خطوات مكررة لحساب عدد الأشجار المولدة. ومن الواضح أن الأشجار المولدة للبيان G التي لا تحوي الضلع e هي نفسها الأشجار المولدة للبيان $G - e$. ولكن، كيف يمكن حساب الأشجار المولدة التي تحوي e؟ يستخدم الجواب عملية بسيطة (أولية) على البيانات.

7.2.2. تعريف: افترض أن e ضلع في بيان G بحيث إن u ,v هما رأسا e. نعرّف تقليص e أو انقباضه أو انكماشه على أنه استبدال u و v برأس واحد فقط، حيث إن الأضلاع التي تقع على هذا الرأس هي الأضلاع جميعها ما عدا e الذي كان يقع على u أو على v، لاحظ أن عدد أضلاع البيان الناتج الذي نرمز إليه بالرمز $G.e$ يقل واحدًا عن عدد أضلاع G.



لاحظ أنه عندما نرسم G، فإن الانقباض للضلع e يختزل الضلع إلى نقطة واحدة فقط، إضافة إلى أن عملية انكماش الأضلاع أو انقباضها يمكن أن تولد أضلاعًا مكررة أو عرى. لحساب عدد الأشجار المولدة؛ يجب أن نحافظ على الأضلاع المكررة (انظر المثال 9.2.2). إلا أنه في بعض التطبيقات الأخرى للانكماش يمكن أن تكون الأضلاع المكررة غير ذات صلة، ولكن الحساب بطريقة الخطوات المكررة ينطبق على البيانات جميعها.

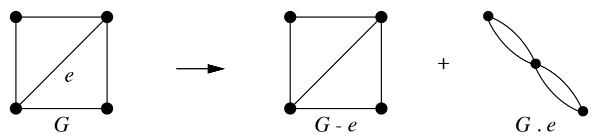
8.2.2. قضية. افترض أن $\tau(G)$ تمثل عدد الأشجار المولدة لبيان G. إذا كان e ضلعًا في $E(G)$ بحيث إنه ليس

أنشوطة، فإن $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G.e)$.

الإثبات: إن الأشجار المولدة للبيان G التي لا تحوي الضلع e هي الأشجار المولدة للبيان $G - e$ تمامًا. ولبرهان أن لـ G $\tau(G.e)$ شجرة مولدة تحوي الضلع e، فإننا سنثبت أن انكماش e يعرف دالة تناظر من مجموعة الأشجار المولدة للبيان G التي تحوي e مع مجموعة الأشجار المولدة للبيان $G.e$.

عندما نعمل انكماشًا للضلع e في شجرة مولدة تحويه، فإننا نحصل على شجرة مولدة للبيان $G.e$؛ لأن البيان الجزئي الناتج هو مولد ومترابط، وله العدد المناسب من الأضلاع. لاحظ أن الأضلاع الأخرى تحافظ على نفسها تحت الانكماش. لذا، لا توجد شجرتان صورتاهما هي صورة الشجرة المولدة نفسها للبيان $G.e$ تحت هذه العملية، وستظهر كل شجرة مولدة لـ $G.e$ بهذه الطريقة أو بهذه الصورة أيضًا؛ لأن إعادة مدّ هذا الرأس إلى الضلع e يعطينا شجرة مولدة للبيان G، وبما أن كل شجرة مولدة للبيان $G.e$ تظهر مرة واحدة فقط، فإن الدالة هي دالة تناظر. ■

9.2.2. مثال: خطوة في عملية الخطوات المكررة. هناك أربع أشجار مولدة لكل بيان من البيانات الموجودة عن اليمين. لذا، فإن الفرضية 8.2.2 تضمن وجود ثماني أشجار مولدة للطائرة الورقية، لاحظ أن الحسابات تفشل في حال عدم وجود الأضلاع المكررة. ■



لاحظ أنه يمكن توفير بعض الوقت والجهد في الحسابات من خلال معرفتنا لعدد الأشجار المولدة $\tau(G)$ لبعض البيانات الخاصة G، وذلك مثل البيانات الموجودة عن اليمين في الشكل أعلاه.

10.2.2. ملاحظة: إذا كان G بيانًا مترابطًا خاليًا من العرى ولا توجد فيه أيّ حلقة طولها 3 على الأقل، فإن $\tau(G)$ تساوي حاصل ضرب عدد تكرارات الأضلاع. لاحظ عدم وجود أي شجرة مولدة للبيان غير المترابط. ولاحظ أيضًا أنه لا يمكن تطبيق عملية الخطوات المكررة الموجودة في الفرضية 8.2.2. عندما يكون الضلع e أنشوطة. فعلى سبيل المثال، توجد شجرة مولدة واحدة للبيان الذي له رأس واحد وأنشوطة واحدة. ولكن حذف الأنشوطة وانقباضها يحسب الشجرة المولدة مرتين، وبما أن وجود العرى لا يؤثر في عدد الأشجار المولدة، فبإمكاننا حذفها أينما ظهرت. ■

تتطلب عملية حساب الأشجار بطريقة الخطوات المكررة وضعَ شرط ابتدائي على البيانات التي تكون أضلاعها جميعها عرًى، وهو وجود شجرة مولدة واحدة لها في حال وجود رأس واحد فقط لها، في حين لا يوجد لها أي أشجار مولدة عندما يكون لها أكثر من رأس، وإذا أتممنا عملية الحساب هذه من خلال الحاسوب عن طريق حذف كلّ ضلع لبيان خالٍ من العرى وانكماشه، فإنه من الممكن أن يحسب $2^{e(G)}$ حدًّا. لاحظ أنه ومع أخذ الملاحظة 10.2.2 في الحسبان من حيث توفيرها للوقت والجهد، إلا أن كمية الحسابات التي يجب عملها تنمو أسِّيًّا مع حجم البيان، وهذا بالطبع غير عملي.

توجد تقنية أخرى تؤدي إلى حسابات أسرع. وهذا معطًى من خلال نظرية مصفوفة الشجرة التي ظهرت من خلال عمل كيركوف في العام (Kirchhoff [1847م])؛ حيث نحسب $\tau(G)$ من خلال حساب المحددة. إن هذه الطريقة أسرع كثيرًا؛ لأن حساب محددة المصفوفة من الحجم $n \times n$ يتم من خلال أقل من n^3 من العمليات. وكذلك نعلم أن صيغة كيلي تتبع من نظرية مصفوفة الشجرة بأخذ $G = k_n$ (تمرين 17). ولكنها لا تتبع بسهولة من الفرضية 8.2.2.

وقبل أن نعطي هذه النظرية، سنوضح الحسابات التي تحدّدها هذه النظرية من خلال المثال الآتي:

11.2.2. مثال: حسابات مصفوفة الشجرة. ترشدنا النظرية 12.2.2 إلى طريق تكوين المصفوفة من خلال وضع درجات الرؤوس على القطر، وطرح مصفوفة التجاور من هذه المصفوفة القطرية، ثُمّ حذف صفّ وعمود، وأخيرًا حساب المحددة. لاحظ أنه عندما تكون G هي الطائرة الورقية الموجودة في المثال 9.2.2، فإنّ درجات الرؤوس هي: 3،3،2،2 وهنا نُكَوِّنُ المصفوفةَ الموجودةَ عن اليسار، ونحسب محددة المصفوفة الموجودة في الوسط، فيكون العدد الناتج هو عدد الأشجار المولدة. ■

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow 8$$

وبما أن العرى لا تؤثر في الأشجار المولدة، فإننا نحذفها قبل بدء عملية الحسابات. ومن الجدير بالذكر أن إثبات النظرية يستخدم خواص المحددة.

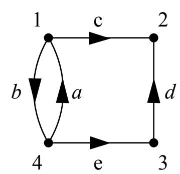
12.2.2. نظرية: (**نظرية مصفوفة الشجرة**). افترض أن G بيان خالٍ من العرى رؤوسه $v_1,\ldots,v_n$. وافترض أيضًا أن $a_{i,j}$ عدد الأضلاع التي طرفاها v_i و v_j. وافترض كذلك أن Q هي المصفوفة التي مدخلتها (i,j) هي $-a_{i,j}$ عندما $i \neq j$ و $d(v_i)$ عندما $i=j$. إذا حصلنا على المصفوفة Q^* من المصفوفة Q بحذف صف s وعمود t فإن:

$$\tau(G) = (-1)^{s+t} \det Q^*$$

الإثبات*: سنثبت الحالة عندما $s = t$، أما الحالة العامة، فإنها تتبع من نتيجة في الجبر الخطي (عندما يكون مجموعُ مدخلات أعمدة مصفوفة مساويًا للمتجه الصفري، فإن مرافقات المعاملات (مُتعامل) (cafactors) تكون ثابتة في كلّ صفّ – التمرين 18.6.8).

أولاً: إذا كان D توجيهًا للبيان G، وكانت M مصفوفةَ وقوع D، فإن $Q = MM^T$. وإذا كانت $e_1,\ldots,e_m$ هي أضلاع D، فإن مدخلات M هي $m_{i,j} = 1$ عندما يكون v_i هو ذيل e_j و $mi,,j = -1$ عندما يكون v_i رأسًا للضلع e_j ، و $m_{i,j}= 0$. بخلاف ذلك، لاحظ أن المدخلة i, j في MM^T هي الجداء النقطي للصف i مع عمود j من المصفوفة M. ولاحظ أيضًا أنه عندما $i \neq j$، فإن الجداء يحسب 1- لكل ضلع من G يربط بين الرأسين، وعندما $i = j$، فإنه يحسب 1 لكل ضلع يقع على الرأس، وعليه فهو يعطي الدرجة لذلك الرأس.

$$M=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



$$Q=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ثانيًا: إذا كانت B مصفوفة جزئية من M، حجمها$(n - 1) \times (n - 1)$، فإن $\det B = \pm 1$ وذلك عندما تشكل الـ $n - 1$ ضلعًا المرتبطة بهذه المصفوفة شجرة مولدة للبيان G، وتكون $\det B = 0$ بخلاف ذلك. في الحالة الأولى، نستخدم الاستقراء على n لبرهان أن $\det B = \pm 1$. إذا كانت $n = 1$، فإننا نتفق على أن محددة المصفوفة من الحجم 0×0 هي 1 اصطلاحًا. لذا، افترض أن $n > 1$، وافترض أن T شجرة مولدة أضلاعها أعمدة B. بما أنه توجد للشجرة T ورقتان على الأقل، وبما أنه حُذف صف واحد فقط، فإنه يوجد للمصفوفة B صف يرتبط بورقة x من T، إضافة إلى أن لهذا الصّفّ مُدخلةً واحدة فقط مختلفة عن الصفر وموجودة في B. وبحساب المحددة بتمديدها حول هذا الصّفّ، نجد أن المصفوَفة الجزئية الفريدة B' التي لها وزن غير صفري في هذا التمديد هي المصفوفة المرتبطة بالشجرة

الجزئية المولدة للبيان $G-x$ ، والتي نحصل عليها بحذف x والأضلاع الواقعة عليها من T، وبما أن حجم B' هو $(n-2)\times(n-2)$ وهي مصفوفة جزئية من مصفوفة الوقوع لتوجيه للبيان G-x، فإن فرضية الاستقراء تضمن لنا أن $\det B'=\pm 1$، وبما أن كل مُدخلة غير صفرية في صف x هي ±1، فإننا سنحصل على النتيجة نفسها للمصفوفة B. أي أن $\det B=\pm1$.

إذا كانت الـ $n-1$ ضلعًا المرتبطة بأعمدة B لا تشكّل شجرة مولدة، فإن النظرية 4c.1.2 تضمن وجود حلقة C ضمن هذه الأضلاع. وفي هذه الحالة، سنكوّن التركيب الخطي للأعمدة على الصورة الآتية: يكون المعامل صفرًا إذا كان الضلع (العمود) غير موجود في C، ويكون $+1$ إذا تم تتبعه إلى الأمام من خلال C في حين يكون -1 إذا تم تتبعه رجوعًا إلى الخلف من خلال C. لذا، نحصل على وزن كلي يساوي صفرًا على كل رأس. إذن، تكون الأعمدة غير مستقلة خطيًّا، وهذا يعطينا أن $\det B=0$.

ثالثًا. حساب $\det\ Q^*$. افترض أن M^* هي ما نحصل عليه بحذف الصف t من M. لذا، فإن $Q^*=M^*(M^*)^T$. إذا كانت $m<n-1$، فإن المحددة تساوي صفرًا، ولا توجد أشجار مولدة. لذلك، افترض أن $m\geq n-1$، في هذه الحالة استخدم صيغة بنيت وكوشي (Binet-Cauchy formula) (التمرين 19.6.8) التي تحسب محددة حاصل ضرب مصفوفات غير مربعة باستخدام محددات مصفوفات جزئية مربعة مكونة من المعاملات، والتي تتضمن على أنه عندما $m\geq p$، وعندما تكون A من الرتبة $p\times m$ و B من الرتبة $m\times p$، فإن $\det AB=\sum_S \det A_s \det B_s$؛ حيث إن المجموع مأخوذ على المجموعات S جميعها التي تحوي p من العناصر الموجودة في $[m]$، و As هي المصفوفة الجزئية من A المؤلفة من أعمدة دليلها S، أما B_s فهي المصفوفة الجزئية من B المؤلفة من صفوف دليلها S. وعندما نطبق هذه الصيغة على $Q^*=M^*(M^*)^T$، فإن المصفوفة الجزئية A_s هي $(n-1)\times(n-1)$ مصفوفة جزئية من M كما هي الحال في ثانيًا أعلاه. وكذلك فإن $B_s=A_s{}^T$. إذن، فالمجموع يحسب $1=(\pm1)^2$ لكل مجموعة مؤلفة من $(n-1)$ ضلعًا مرتبطة بشجرة مولدة، ويحسب صفرًا للمجموعات الأخرى جميعها التي بها $n-1$ ضلعًا. ■

التفكيك ووضع العلامات الدالة الجميلة (Decomposition and greceful labelings)

سنأخذ في الحسبان مسألة أخرى متعلقة بتفكيك البيانات (التعريف 32.1.1). لاحظ أنه بإمكاننا أن نفكك G دائمًا إلى أضلاع منفردة. والسؤال المطروح هو: هل بإمكاننا تفكيك G لنسخ من شجرة أكبر T؟ إن هذا يتطلب أن تكون $e(T)$ قاسمًا من قواسم $e(G)$ و $\Delta(G)\geq\Delta(T)$. ولكن، هل هذا الشرط كافٍ؟ لاحظ أنه حتى عندما يكون G منتظمًا من الدرجة $e(T)$، فإن هذا يفشل (التمرين 20). فعلى سبيل المثال، نجد أن بيان بيترسون لا يتفكك إلى مخالب.

وضع هاجكفست (Häggkvist) المخمنة الآتية: إذا كان G بيانًا منتظمًا من الدرجة $2m$، وكانت T شجرة لها m من الأضلاع، فإن $E(G)$ تتفكك إلى $n(G)$ نسخة من T. إلا أنه وحتى الحالة البسيطة التي يكون فيها G بيانًا تامًا ما زالت مسألة دون حلٍّ.

13.2.2. مخمنة (تخمين). ([Ringel [1964])، إذا كانت T شجرة معلومة وثابتة ولها m من الأضلاع، فإن K_{2m+1} يتفكك إلى $2m+1$ نسخة من T. ■

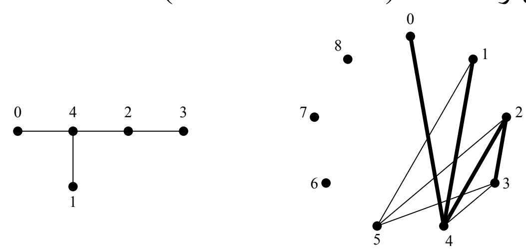
ركزت المحاولات لبرهان مخمنة رينجل (Ringel) على المخمنة الأقوى المتعلقة بالشجرة الجميلة (ذات الصفات الحلوة). إن مخمنة الشجرة الجميلة تعطينا مخمنة رينجل، بالإضافة إلى بعض النتائج المتعلقة بتفكيك البيانات التامة ذات الرتبة الزوجية (التمرين 23).

14.2.2. تعريف: العلامات الدالة الجميلة لبيان G له m من الأضلاع هي دالة $f:V(G)\longrightarrow\{0,...,m\}$ بحيث يُحَدِّدُ للرؤوس المختلفة قيمٌ عدديةٌ مختلفةٌ وبحيث إن: $\{|f(u)-f(v)|: uv\in E(G)\}=\{1,2,...,m\}$ ونقول: إن البيان **جميل** إذا وُجِدَت له علامات دالة جميلة.

15.2.2. مخمنة (**مخمنة الشجرة الجميلة**). (Kotzig, Ringle, [1964]) يوجد لكل شجرة علامات دالة جميلة. ■

16.2.2. نظرية: (Rosa [1967]) إذا كانت T شجرة لها m من الأضلاع، ولها علامات دالة جميلة، فيوجد تفكيك للبيان K_{2m+1} إلى $2m+1$ نسخة من T.

الإثبات: تخيل رؤوس K_{2m+1} بوصفها صفوف تطابق بمقياس $2m+1$ مرتبة بصورة دائرية (حلقية). إن الفرق بين أي صفي تطابق يساوي 1 إذا كانا متتابعين، ويساوي 2 إذا وُجِدَ بينهما صَف آخر وهكذا، حيث يساوي هذا الفرق m إذا وُجد بينهما m من الصفوف. نضع أضلاع K_{2m+1} بزمر بحسب الفرق بين أطراف هذه الأضلاع. لاحظ أنه لكل $1 \leq j \leq m$، يوجد $2m+1$ ضلعًا الفرق بين طرفي كل منها يساوي j، وهذا يضع الأضلاع ضمن صفوف تسمى صفوفَ الفرق أو الاختلاف (difference classes).

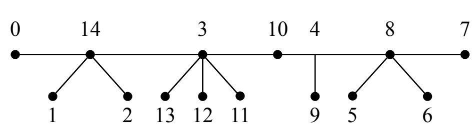


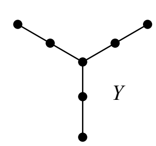
من العلامات الدالة الجميلة الموجودة على T، نعرّف نسخًا من T في K_{2m+1}. ولتكن هذه النسخ هي: $T_0, \ldots, T_{2m}$. إن رؤوس T_k هي: $K, \ldots, K+m \ (mod\ 2m+1)$، حيث إن $k+i$ يجاور $k+j$ إذا وفقط إذا كان i يجاور j في العلامات الدالة الجميلة الموجودة على T. تظهر النسخة T_0 تمامًا كصورة العلاقات الدالة الجميلة ولها ضلع مشترك مع كل فرق. وأن الانتقال إلى النسخة الثانية ينقل كل ضلع إلى ضلع آخر له الفرق نفسه من خلال إضافة واحد إلى كل اسم (علامة) لكل نقطة طرفية. إن لكل صَفٍّ فرقًا من الأضلاع ضلعًا موجودًا في T_k. وبناءً عليه، فإن $T_0, \ldots, T_{2m}$ تفكك K_{2m+1} ■

من المعلوم أن العلامات الدالة الجميلة موجودة لبعض الأنواع من الأشجار، ولبعض العائلات الأخرى من البيانات (انظر [1998] Gallian). ومن السهل جدًا إيجاد علامات دالة جميلة للنجوم والمسارات. ونعرّف فيما يأتي عائلة من الأشجار يُعَدّ تعميمًا لكل من النجوم والمسارات من خلال السماح بإضافة أضلاع تقع على مسار.

17.2.2. تعريف: تعرّف الجرارة (Gaterpillar) على أنها شجرة فيها مسار واحد (العمود الفقري أو الرئيس) يقع على (أو يحوي) كل ضلع.

18.2.2. مثال: إن رؤوس الجرارة التي لا تقع على العمود الفقري هي أوراق (وتسمّى أيضًا أقدامًا). في الشكل أدناه، تجد جرارة لها علامات دالة جميلة. وفي الحقيقة، فإنّ كلّ جرارة بيان جميل (التمرين 31). الشجرة Y في الرسم أدناه ليست جرارة. ■





19.2.2. نظرية: تكون أي شجرة جرارة إذا وفقط إذا كانت غير محتوية على الشجرة Y المبينة أعلاه.

الإثبات: افترض أن G' هي الشجرة التي نحصل عليها من الشجرة G من خلال حذف كل ورقة من G. بما أن الرؤوس التي تبقى في G ليست أوراقًا فيها، فيوجد في G' رأس درجته 3 على الأقل إذا وفقط إذا ظهر الشكل Y في G. لذا، فإن G لا تحوي نسخة من Y إذا وفقط إذا كانت $\Delta\ (G') \leq 2$، وهذا يكافئ أن تكون G مسارًا، وهذا يكافئ أن تكون G جرارة أيضًا. ■

التفريع والبيانات الموجهة الأويلرية (اختياري)(Branching and Eulerian Diagraphs)

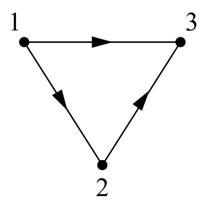
لقد عَمّمَ توت (Tutte) نظرية مصفوفة الشجرة إلى البيانات الموجهة. لاحظ أنه في الحالة التي يكون فيها البيان الموجه متماثلاً، فإن نظرية توت تكون نظرية الشجرة نفسها. (يكون البيان الموجه متماثلاً إذا كانت مصفوفة تجاوره متماثلة. وفي هذه، الحالة يكون البيان الموجه نموذجًا لبيان). ومن الجدير بالذكر وجود ربط مدهش بين هذه النظرية من جهة والحلقات الأويلرية من جهة أخرى.

20.2.2. تعريف: نُعرّف التفريع أو الشجرة الخارجة على أنه توجيه لشجرة لها جذر درجة دخوله صفر، ودرجة دخول أي رأس آخر من رؤوسها تساوي 1. في حين نعرف الشجرة الداخلة على أنها شجرة خارجة تم عكس (قلب) أضلاعها.

إن التفريع الذي جذره v اتحاد لمسارات تبدأ من v (التمرين 33). لاحظ أنه يمكن الوصول إلى كل رأس من رؤوس هذا التفريع من خلال مسار واحد فقط. وهناك نتيجة مماثلة تتحقق للأشجار الداخلة، وهي أن الشجرة الداخلة اتحاد لمسارات إلى الجذر؛ مسارٍ واحدٍ من كل رأس. وفيما يأتي نعطي نصًّا دون إثبات لنظرية توت من أجل إيجاد عدد التفريعات.

21.2.2. نظرية: مصفوفة الشجرة الموجهة. ([Tutte [1948) افترض أن G بيان موجه خالٍ من العرى، اجعل $Q^- = D^- - A'$ و $Q^+ = D^+ - A'$، حيث D^+ و D^- هي المصفوفات القطرية لدرجات كل من الدخول والخروج في G، وأن المدخلة (i,j) في A' هي عدد الأضلاع من الرأس V_j إلى الرأس V_i. في هذه الحالة، يكون عدد الأشجار الخارجة (الأشجار الداخلة) لـ G التي جذرها V_i هو قيمة كل متعامل (مرافق معامل) في الصف i للمصفوفة Q^- (عمود i للمصفوفة Q^+). ■

$$Q^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$Q^+ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

22.2.2. مثال: يوجد للبيان الموجه أعلاه شجرتان خارجتان مولدتان جذر كل منهما الرأس رقم 1. وشجرتان داخلتان مولدتان جذر كل منهما الرأس رقم 3. لاحظ أن كل متعامل في الصف الأول للمصفوفة Q^- هو 2، وكل متعامل في العمود الثالث للمصفوفة Q^+ هو 2. ■

نعلم أن الرؤوس المعزولة لا تؤثر في الحلقات الأويلرية، وبإهمال هذه الرؤوس، نقول: إن البيان الموجه يكون أويلريًا إذا وفقط إذا كانت درجة الدخول = درجة الخروج لكل رأس، وكان البيان المتضمن مترابطًا (النظرية 24.4.1). إن مثل هذه البيانات الموجهة تكون مترابطة بقوة ممّا يسمح لنا بإيجاد الشجرة الداخلة المولدة. وسنصف أيضًا الحلقات الأويلرية بدلالة الشجرة الداخلة المولدة.

23.2.2. تمهيدية: في البيان الموجه القوي، يكون كل رأس جذرًا لشجرة خارجة (ولشجرة داخلة).

الإثبات: خذ رأسًا v، وابدأ بإضافة الأضلاع للحصول على تفريع منه. اجعل S_i تمثل مجموعة الرؤوس التي تصلها بإضافة i من الأضلاع، اجعل $S_0=\{v\}$. بما أنّ البيان الموجّه مترابط بقوة، إذن، يوجد ضلع يخرج من S_i (التمرين 10.4.1). أضف هذا الضلع للتفريع الموجود لديك، ثمّ أضف رأس هذا الضلع إلى المجموعة S_i لتحصل على S_{i+1}. كَرِّرْ هذه العملية لتصل إلى الرؤوس جميعها.

للحصول على شجرة داخلة من المسارات إلى v، اعكس الأضلاع جميعها وطبق الخطوات السابقة نفسها؛ علمًا بأن البيان الموجه الذي نحصل عليه من عكس أضلاع بيان موجه قوي يكون أيضًا قويًّا. ■

تعطينا البديهية السابقة طريقًا للبحث عن شجرة لمسارات من جذر معين. وفي الجزء التالي، سنناقش البحث عن أشجار بشمول أكثر.

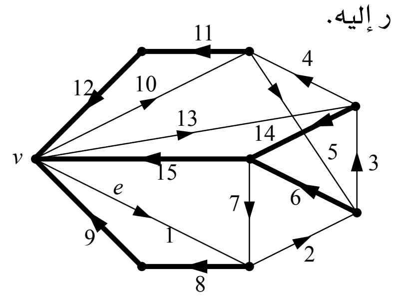
24.2.2. خوارزمية: (حلقة أويلرية في بيان موجه)

المدخلات: بيان موجه أويلري G ليس له رؤوس معزولة، وشجرة داخلة مولدة T مؤلفة من مسارات إلى الرأس v.

أولاً: لكل $u \in V(G)$، حدّد ترتيبًا للأضلاع المغادرة إلى u بحيث إنه إذا كانت $u \neq v$، فإن الضلع المغادر إلى u في T يأتي في آخر الترتيب. ■

ثانيًا: مبتدئًا من v، كوّن حلقة أويلرية، وذلك بخروجك الدائم من الرأس الحالي u عن طريق الضلع التالي غير المستخدم سابقًا، والموجود ضمن الترتيب المحدد عند u.

25.2.2. مثال: في البيان الموجه أدناه، نجد أن الأضلاع الغامقة تشكل شجرة داخلة T من المسارات إلى V. أما الأضلاع المعلّمة بالترتيب بدءًا من 1 فتشكل حلقة أويلرية، وتغادر هذه الأضلاع رأسًا من خلال ضلع من T عندما لا تجد بديلاً آخر للمغادرة. إذا قام الترتيب عند V بوضع 1 قبل 10 قبل 13، فإن الخوارزمية تتبع الأضلاع بحسب الترتيب المشار إليه. ■



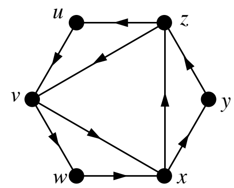
26.2.2. نظرية: الخوارزمية 24.2.2 تنتج دائمًا حلقة أويلرية.

الإثبات: باستخدام تمهيدية 23.2.2، نُكَوِّنُ شجرة داخلة T إلى رأس v، وبعد ذلك نطبق الخوارزمية 24.2.2 لبناء مسرب. لاحظ أنه يكفينا إثباتَ أن هذا المسرب يجب أن ينتهي عند v فقط بعد أن يكون قد مرّ على الأضلاع جميعها.

عندما ندخل إلى رأس $v \neq u$، فإن الضلع المغادر إلى u في T يكون غير مستخدم بعد؛ لأن $d^+(u) = d^-(u)$. لذا، عندما ندخل إلى u، فإن هناك طريقًا دائمًا للخروج منه. إذن، فالمسرب لا ينتهي إلا عند v فقط.

وننهي فقط في الحالة التي لا نستطيع بعدها الاستمرار، وهذا يعني أننا استخدمنا الأضلاع الخارجة جميعها عند v، وبما أن $d^-(v)=d^+(v)$، فيجب أن نكون قد استخدمنا الأضلاع الداخلة إلى v جميعها، وبما أنه لا يمكننا استخدام ضلع من T إلا إذا كان هو الضلع الوحيد المتبقي والمغادر لذيله، فإنه لا يمكننا استخدام الأضلاع الداخلة إلى v جميعها إلا بعد مرورنا على الرؤوس كلّها؛ لأن v تحوي مسارًا من كل رأس إلى v. ■

27.2.2. مثال: في البيان الموجه أدناه، كل شجرة داخلة إلى الرأس v تحوي كلًّا من uv, yz, wx وضلعًا واحدًا بالضبط من $\{zu, zv\}$ وضلعًا واحدًا بالضبط من $\{xy, xz\}$. يوجد أربع أشجار داخلة إلى v. لكل شجرة داخلة نفترض $\Pi(d_i - 1)! = (0!)^3 (1!)^3 = 1$ ترتيبًا للأضلاع المغادرة من الرؤوس. لذا، نستطيع الحصول على حلقة أويلرية واحدة من كل شجرة داخلة عندما نبدأ من v في اتجاه الضلع $e = vw$. وفي الشكل أدناه، تجد الأشجار الأربعة الداخلة والحلقات المرتبطة بها.



الحلقات	الأشجار الداخلة التي تحوي
$(v, w, x, z, v, x, y, z, u)$	xy و zu
$(v, w, x, y, z, v, x, z, u)$	xz و zu
$(v, w, x, z, u, v, x, y, z)$	xy و zv
$(v, w, x, y, z, u, v, x, z)$	xz و zv

نقول: إن حلقتين أويلريتين هما الحلقة نفسها، إذا كانت أزواج الأضلاع المتتابعة في كل منهما هي الأزواج نفسها، ولكل شجرة داخلة إلى v، لاحظ أن الخوارزمية 24.2.2 تولد $\Pi_{u \in V(G)}(d^+(u) - 1)!$ حلقة أويلرية مختلفة. ولاحظ أيضًا أن آخر ضلع خارج يُثبّت من قبل الأشجار التي نحصل عليها من الرؤوس المختلفة عن v. وبما أننا نهتم بالترتيب الحلقي للأضلاع فقط، فبإمكاننا اختيار ضلع محدد e لبدء ترتيب الأضلاع المغادرة إلى الرأس v. إن أيّ تغيير في ترتيب الأضلاع الخارجة عند الرؤوس يحدد عند نقطة معينة الخيارات المختلفة للضلع التالي. لذا، فإن الحلقات تكون مختلفة. وبالمثل، فإن الحلقات التي نحصل عليها من الأشجار الداخلة تكون مختلفة. وهنا، نكون قد ولدنا $c\Pi_{u \in V(G)}(d^+(u) - 1)!$ حلقة أويلرية مختلفة، حيث c هي عدد الأشجار الداخلة إلى v.

وفي الحقيقة، فإن هذه الحلقات هي الحلقات الأويلرية جميعها، وهذا يعطينا برهانًا تركيبيًّا (حسابيًّا) لحقيقة أن عدد الأشجار الداخلة إلى كل رأس في بيان موجه أويلري يكون العدد نفسه. إن البيان الذي نحصل عليه عن طريق عكس الأضلاع جميعها له عدد الحلقات الأويلرية نفسه. لذا، فإن عدد الأشجار الخارجة من كل رأس يكون له القيمة c نفسها. تعطينا النظرية 21.2.2 طريقًا لاحتساب C.

28.2.2. نظرية: (Van Aardenne-Ehrenfest and de Burijn [1951]). في البيان الأويلري الذي فيه $d_i = d^+(vi)=d^-(vi)$، يكون عدد الحلقات الأويلرية يساوي $c\,\Pi_i (d_i - 1)!$، وحيث $\mathbf{c}$ تمثل عدد الأشجار الداخلة إلى أيّ رأس أو الخارجة منه.

الإثبات: لقد بينّا أن الخوارزمية 24.2.2 تولد هذا العدد المختلف من الحلقات الأويلرية من خلال استخدام الأشجار الداخلة إلى الرأس v (بدءًا من v في اتجاه ضلع e). لذا، نحتاج فقط إلى إثبات أن هذا يولد الحلقات الأويلرية جميعها.

لإيجاد الشجرة والترتيب الذي يولد الحلقة الأويلرية C، تتبع C من e، وسجل ترتيب الأضلاع المغادرة من كل رأس. اجعل T تمثل البيان الموجه الجزئي المؤلف من آخر ضلع على C يغادر كل رأس مختلف عن v. بما أن آخر ضلع يغادر رأسًا يكون موجودًا في C بعدما تدخل الأضلاع جميعها هذا الرأس، فإن كل ضلع في T قابل للتمدّد لمسار في T يصل إلى v، بوجود $n - 1$ ضلعًا في T، فإن T تشكل شجرة داخلة إلى v. وأكثر من ذلك، فإن C هي الحلقة التي حصلنا عليها باستخدام الخوارزمية 24.2.2 من T ومن ترتيب الأضلاع الخارجة التي سجّلناها سابقًا. ■

تمارين (Exercises)

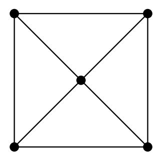
1.2.2. (−) حَدِّدْ أيّ الأشجار لها شفرة برفر التي:

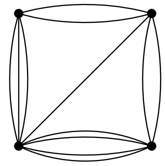
a) تحوي قيمة واحدة فقط.

b) تحوي قيمتين بالضبط.

c) لها قيم مختلفة في المواقع جميعها.

2.2.2. (−). احسب عدد الأشجار المولدة للبيان الموجود على اليسار في الشكل أدناه (لاحظ أن الفرضية 8.2.2 تعطي طريقًا منظمًا لعمل هذا. وبعد ذلك، يمكن استخدام الملاحظة 10.2.2 والمثال 6.2.2 من أجل اختصار الحسابات).

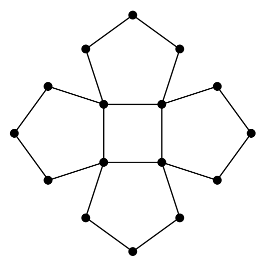


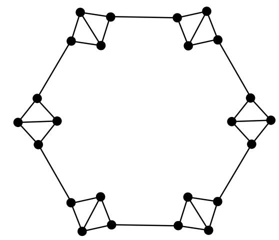


3.2.2. (−). لتكن G البيانَ الموجودَ على اليمين في الشكل أعلاه. استخدم نظرية مصفوفة الشجرة لإيجاد مصفوفة محددتها تساوي $\tau(G)$ واحسب $\tau(G)$.

4.2.2. (−). افترض أن G بيان بسيط له m من الأضلاع. أثبت أنه إذا وجد لـ G علامات دالة جميلة، فإن K_{2m+1} يتفكك إلى نسخ من G. (مساعدة: تتبع إثبات النظرية 16.2.2).

5.2.2. يمثل البيان الموجود على اليسار في الشكل أدناه سجلًا لكلمات المتحدثين في المؤتمر الدولي التاسع لنظرية البيانات الذي يُعْقَدُ بصورة دورية كل أربع سنوات، والذي عُقِدَ في العام 2000 م في كالمازو (Kalamazoo) احسب عدد أشجاره المولدة.





6.2.2. (!) افترض أن G بيان ثلاثي منتظم من الدرجة 3 له $4m$ من الرؤوس، بحيث شُكِّلَ من m من الطائرات الورقية المنفصلة زوجًا زوجًا، بإضافة m من الأضلاع لكي تربط بين هذه الطائرات الورقية، لتشكل طوقًا، كما يظهر في الجانب الأيمن من الشكل أعلاه الذي يمثل الحالة التي تكون فيها $m = 6$. أثبت أن $\tau(G)=2m\ 8^m$.

7.2.2. (!) استخدم صيغة كيلي لبرهنة أنه يوجد $(n-2)\ n^{n-3}$ شجرة مولدة للبيان الذي نحصل عليه من k_n بحذف أحد الأضلاع.

8.2.2. احسب عدد الأشجار التي مجموعة رؤوسها $[n]$ في كل مجموعة من المجموعات الآتية؛ وذلك بإعطاء

برهانين لكل مجموعة؛ أحدهما باستخدام ارتباط برفر، والآخر باستخدام طريقة عَدٍّ مباشرة:

a) الأشجار التي لها ورقتان.

b) الأشجار التي لها $n - 2$ ورقة.

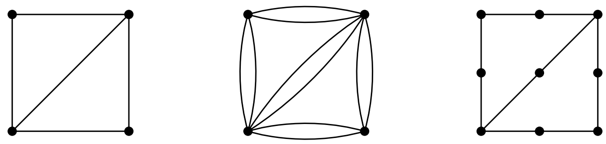
9.2.2. لتكن $S(m,r)$ تمثل عدد التجزئات لمجموعة فيها m من العناصر إلى r من المجموعات غير الخالية. بدلالة هذه الأعداد، احسب عدد الأشجار التي رؤوسها $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ولها بالضبط k ورقة. (Re'nyi [1959]).

10.2.2. جد $\tau(k_{2,m})$، واحسب عدد صفوف تشاكل الأشجار المولدة للبيان $k_{2,m}$.

11.2.2. (+) احسب $\tau(k_{3,m})$.

12.2.2. نعرف من البيان G بيانين جديدين كالآتي: لتكن G' تمثل البيان الذي نحصل عليه من البيان G باستبدال كل ضلع من أضلاع G بـ k نسخة من هذا الضلع، ولتكن G'' هي البيان الذي نحصل عليه من G بأن يحل محل كل ضلع $uv \in E(G)$ مسارٌ من u إلى v طوله k يمر بـ $k - 1$ رأسًا جديدًا. جد $\tau(G')$ و$\tau(G')$ بدلالة $\tau(G)$ و k.

$k = 2$

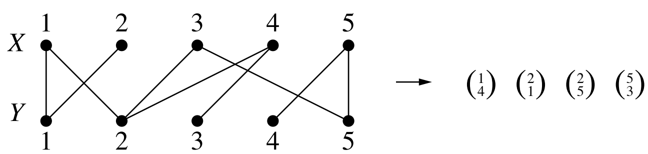


G G' G''

13.2.2. افترض أن X و Y تجزئتان ثنائيتان للبيان $k_{n,n}$، حيث $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$ و $Y = \{y_1,\ldots,y_n\}$ لكل شجرة مولدة T نكوّن قائمة $f(T)$ من الأزواج المرتبة (تكتب عموديًا). بعد توليد جزء من هذه القائمة، اجعل u تمثل الورقة ذات الدليل الأقل في X في الشجرة الجزئية المتبقية. وبالمثل، اجعل v تمثل الورقة ذات الدليل الأقل في Y. ألحق الزوج $\binom{a}{b}$ بالقائمة، حيث a دليل E جار u، أما b فدليل جار v. احذف $\{u,v\}$، كرر العملية حتى تحصل على $n - 1$ زوجًا لتشكيل $f(T)$ (يبقى ضلع واحد فقط). يوضح فرع (a) أن f معرّفة:

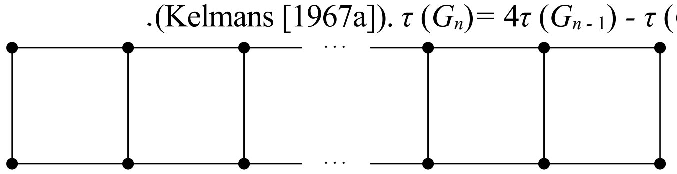
a) أثبت أنه يوجد لكل شجرة مولدة للبيان $k_{n,n}$ ورقةٌ في كلّ من مجموعتي التجزئة.

b) أثبت أن f دالة تناظر من مجموعة الأشجار المولدة للبيّان $k_{n,n}$ إلى $([n]\times[n])^{n-1}$. لذا، فإنه يوجد n^{2n-2} شجرة مولدة للبيان $k_{n,n}$. (Re'nyi[1966], Kelmans [1992], Pritikin [1995])

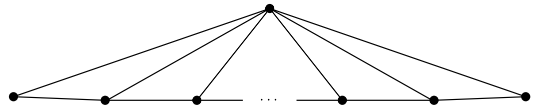


14.2.2. (+) اجعل $f(r, s)$ تمثل عدد الأشجار التي رؤوسها المجموعة $[n]$، والتي حجم مجموعاتها الجزئية r و s (حيث $r + s = n$). أثبت أنه إذا كانت $r \neq s$، فإن $f(r, s) = \binom{r+s}{s} s^{r-1} r^{s-1}$. ما قيمة $f(r, s)$ إذا كانت $r = s$؟ (مساعدة: بَيّنْ أن متتالية برفر لمثل هذه الشجرة تحوي $r - 1$ حدًّا من المجموعة الجزئية التي حجمها s، و $s - 1$ حدًّا من المجموعة الجزئية التي حجمها r، (Scoins [1962], Glicksman [1963]).

15.2.2. ليكن G_n البيان المرسوم أدناه الذي له $2n$ رأسًا، و $3n-2$ ضلعًا، حيث $n \geq 1$. أثبت أنه إذا كانت $n > 2$، فإن $\tau(G_n) = 4\tau(G_{n-1}) - \tau(G_{n-2})$.(Kelmans [1967a]).



16.2.2. لكل $n \geq 1$، اجعل a_n تمثل عدد الأشجار المولدة للبيان المكوّن من P_n بإضافة رأس يجاور كلّ رأس من رؤوس P_n. فعلى سبيل المثال $a_1=1$. و $a_2=3$ و $a_3=8$ إذا كانت $n > 1$ فأثبت أن $a_n = a_{n-1} + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i$. استخدم هذه النتيجة إثبات أنه إذا كانت $n > 2$، فإن $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$. (تعليق: من الممكن استخدام تعليل مباشر لبيان أن $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$).



17.2.2. استخدم نظرية مصفوفة الشجرة لإثبات صيغة كيلي.

18.2.2. استخدم نظرية مصفوفة الشجرة لحساب $\tau(k_{r,s})$. (Loväs [1979,P223]) ثم انظر (Kelmans [1965]) من أجل التعميم.

19.2.2. (+) افترض أن t_n هي عدد الأشجار التي رؤوسها المجموعة $[n]$. أثبت أن t_n تحقق العلاقة مرات الحدوثية $t_n = \sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n-2}{k-1} t_k t_{n-k}$. (تعليق: بما أن $t_n = n^{n-2}$، فإن هذا يثبت المتطابقة $n^{n-2} = \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1} k^{k-1}(n-k)^{n-k-2}$، (Dziobek[1917] انظر Lova'sz [1979, p219]).

20.2.2. افترض أن G بيان بسيط منتظم من الدرجة d. أثبت أنه يوجد للبيان G تفكيك نسخ من $k_{1,d}$ إذا وفقط إذا كان G بيانًا ثنائي الفرع.

21.2.2. (+) أثبت أنه يمكن تفكيك $k_{2m-1,2m}$ إلى m من المسارات المولدة.

22.2.2. افترض أن G بيان بسيط له n من الرؤوس بحيث يمكن تفكيكه إلى k شجرة مولدة. إذا علمت أن $\Delta(G) = \delta(G)+1$، فحدّدْ متتالية درجات رؤوس G بدلالة n و k.

23.2.2. (!) إذا كانت مَخمنةُ الشجرة الجميلة صحيحةً، وكانت T شجرة لها m من الأضلاع، فأثبت أن k_{2m} قابل للتفكيك إلى $2m - 1$ نسخة من T (مساعدة: طبّق التفكيك اللامتغير الحلقي للبيان k_{2m-1} على الأشجار التي لها $m - 1$ ضلعًا والموجود في إثبات النظرية 16.2.2).

24.2.2. من البيانات التي رؤوسها $\{0,1,\ldots,n-1\}$ والتي لها $n - 1$ ضلعًا، جد كم بيانًا منها يمكن أن نضع عليه علامات دالة جميلة مستخدمًا أسماء رؤوسها.

25.2.2. (!) إذا كان G بيانًا جميلاً أويلريًّا، فأثبت أن $e(G)$ تكافئ 0 أو3 $(\mathrm{mod}\ 4)$ (أي أنه إذا قسمنا $e(G)$ على 4، فإن باقي القسمة يساوي 0 أو 3)، (مساعدة: اجمع مطلق فرق الضلع (mod2) بطريقتين مختلفتين).

26.2.2. (+) أثبت أن C_n يكون جميلاً إذا وفقط إذا كان 4 يقسم n، أو $n + 1$. (Rosa [1967]).

27.2.2. (+) افترض أن G بيان مؤلف من k من الحلقات الرباعية التي لها رأس مشترك واحد. أثبت أن G بيان جميل (مساعدة: ضع 0 على الرأس الذي درجته $2k$).

28.2.2. لتكن $d_1,\ldots,d_n$ أعدادًا صحيحة موجبة، أثبت مباشرة وجود جرارة رؤوسها $d_1,\ldots,d_n$ إذا وفقط إذا تحقق أن $\Sigma d_i = 2n - 2$.

29.2.2. أثبت أنه يمكن تحويل كل شجرة إلى جرارة لها متتالية درجات الرؤوس نفسها باستخدام التبديل الثنائي (التعريف 32.3.1) بحيث يكون كل بيان وسطي (واقع في الوسط) شجرة.

30.2.2. يمكن رسم البيان الثنائي الفرع على قناة، إذا أمكن وضع رؤوس إحدى مجموعتي رؤوسه على خط معين في المستوى (بترتيب معين)، ووضع رؤوس المجموعة الأخرى على خط موازٍ لخط المجموعة الأولى، وتم رسم الأضلاع بوصفها قطعًا مستقيمة تصل بين هذه الرؤوس. إذا كان G بيانًا مترابطًا، فأثبت أنه يمكن رسم G على قناة دون تقاطع بين الأضلاع إذا وفقط إذا كان G جرارة.

31.2.2. (!) نعرف العلامات الدالة من أعلى إلى أسفل على أنها علامات دالة جميلة لها قيمة حرجة α، بحيث يربط كل ضلع بين رؤوس لها علامات دالة أعلى α وأسفلها. أثبت أنه يوجد لكل جرارة علامات دالة

من أعلى إلى أسفل، وأثبت أيضًا أنه لا توجد علامات دالة من أعلى إلى أسفل لأيّ شجرة على سبعة رؤوس بحيث إن هذه الشجرة ليست جرارة.

32.2.2. (+) أثبت أن عدد صفوف تشاكل أيّ جرارة على n من الرؤوس يساوي، $2^{\lfloor n/2 \rfloor -2} + 2^{n-4}$ إذا كانت $n \geq 3$. (Harrary –Schwenk [19873], Kimble – Schwenk [1981])

33.2.2. (!) افترض أن T توجيه لشجرة بحيث إن رؤوس الأضلاع جميعها مختلفة؛ إن الرأس الوحيد الذي لا يمثل رأسًا لضلع هو الجذر. أثبت أن T هي اتحاد لمسارات من الجذر. وأثبت أيضًا أنه يوجد لكل رأس من رؤوس T مسارٌ واحدٌ فقط يصل من الجذر إلى هذا الرأس.

34.2.2. (*) استخدم النظرية 2.2.26 لبرهان أنّ الخوارزمية أدناه تولد حلقة ديبروجن الثنائية بطول 2^n (الحلقة في التطبيق 25.4.1 تظهر بهذه الطريقة). ابدأ بـ n منزلة من القيمة 0، ثمّ ألحق القيمة 1 إذا كان عمل ذلك لا يكرر صفًّا سابقًا عدد منازله n، وبخلاف ذلك ألحق القيمة 0.

35.2.2. (*) خوارزمية تاري (Tarry's Algarithm) (كما عُرض من قبل د. ق. هوفمان (D.G. Hoffman)). افترض أن لدينا قلعة فيها عدد محدود من الغرف والدهاليز، ولكل دهليز طرفان، وفي كل طرف باب لغرفة، ولكل غرفة باب أو أبواب تفتح على دهليز، ويمكن الوصول إلى كل غرفة بالانتقال عبر الدهاليز والغرف. إبتداءً، لا توجد إشارات دالة على الأبواب. افترض أن لديك إنسانًا آليًّا يرغب في اكتشاف القلعة مبتدئًا من غرفة مُعينة بحسب الشروط الآتية:

1) بعد دخوله دهليزًا، يمشي في هذا الدهليز حتى يدخل الغرفة الموجودة على الطرف الثاني لهذا الدهليز.

2) بعد دخول غرفة لا يوجد على أبوابها إشارات، ضع الإشارة 1 على باب الدخول.

3) إذا كُنْتَ في غرفة لها باب غير مؤشر عليه، فضع 0 على هذا الباب واستخدمه للخروج.

4) إذا كُنْتَ في غرفة أشّر على أبوابها جميعًا، فاخرج من خلال باب غير مؤشّر عليه بالإشارة 0.

5) إذا كنت في غرفة مؤَشّر على أبوابها جميعها بالإشارة 0، فتوقف.

أثبت أن الروبوت سيمرّ في كل دهليز مرتين بالضبط؛ مرة واحدة في كل اتجاه، ثمّ سيتوقف. (مساعدة: أثبت أن هذا يتحقق لكل دهليز عند كل رأس تمّ الوصول إليه، وأثبت أنه تمّ الوصول إلى كل رأس. تعليق: القرارات جميعها موضعية؛ لأن الإنسان لا يرى أي شيء غير الغرفة أو الدهليز الذي يكون موجودًا فيه. خوارزمية تاري [1985] وبعض الخوارزميات الأخرى وُصفت من قبل كونج (König [1936, P35-36]) وُصفت أيضًا من قبل فلشنر (Fleishner [1983,1991]).

3.2 الأمثلية والأشجار (optimization and Trees)

من الممكن جدًّا أن يكون هناك معانٍ مختلفة للعبارة "أفضل شجرة مولدة"، حيث يعتمد هذا على المسألة التي لدينا. ويُعرّف البيان الموزون على أنه بيان زُوِّدت أضلاعه بعلامات دالة عددية. عندما نبني وصلات لتربط بين المواقع المختلفة، فإن التكلفة المحتملة لهذه الوصلات تعطينا بيانًا موزونًا. إن أقل تكلفة لربط النظام هي أقل وزن كلي لأشجاره المولدة.

لاحظ أن الأوزان يمكن أن تكون مسافات، وفي هذه الحالة نعرّف طول المسار على أنه مجموع أوزان أضلاعه. وربّما نبحث عن شجرة مولدة بأقل المسافات، وعند الحديث عن البيانات الموزونة فإننا نهتم فقط بالأوزان غير السالبة للأضلاع. وكذلك سندرس مسألة متعلقة بإيجاد أشجار جيدة لتشفير الرسائل.

أدنى شجرة مولدة (Minimum spanning tree)

تحتوي الأشجار المولدة جميعها لبيان موزون مترابط ممثل لوسائل ربط الاتصالات الممكنة على n - 1 ضلعًا. نبحث عن شجرة واحدة تُكبّر أو تُصغِّر مجموع أوزان الأضلاع. ولهذه المسائل، فإن أبسط مُوجه أو مساعد

على الكشف يعطينا حلًّا أمثل بسرعة.

1.3.2. خوارزمية : (خوارزمية كروسكال [Kruskal] لإيجاد أصغر شجرة مولدة)

المدخلات : بيان مترابط موزون.

الفكرة : حافظ على بيان جزئي مولد لاحلقي H، وسّع H بواسطة أضلاع وزنها قليل لتكوين شجرة مولدة، افترض أن الأضلاع مرتبة بحسب أوزانها ترتيبًا غير متناقص من خلال كسر الروابط اختياريًّا.

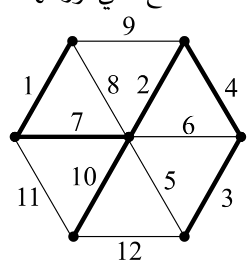
البداية : ضع $E(H) = \emptyset$

خطوات مرات الحدوث : إذا كان أقل ضلع وزنًا يربط بين مركبتين من مركبات H، فإننا نضيف هذا الضلع إلى الشجرة. وبخلاف ذلك، نحذف هذا الضلع، وننهي هذه العملية عندما يصبح H مترابطًا. ■

توضّح النظرية 3.3.2. أن خوارزمية كروسكال تنتج شجرة مثلى. تسمى الموجّهات (المساعدات على الكشف) المثلى البسيطة موضعيًّا بالخوارزميات الجشعة التي لا تضمن حلولاً مُثلى عادة، إلا أن هذه الخوارزمية تعطي حلًّا أمثل.

في الحاسوب، تظهر الأوزان على صورة مصفوفة حيث يكون الوزن كبيرًا جدًا للضلع غير المتوافر للإستخدام، علمًا بأنه يمكن اختبار الأضلاع التي لها الوزن نفسه بأي ترتيب، إن الأشجار الناتجة لها الوزن نفسه. لاحظ أن خوارزمية كروسكال تبدأ من غابة مؤلفة من n رأسًا معزولاً، وكل ضلع يتم اختياره يربط بين مركبتين.

2.3.2. مثال : تعتمد الخيارات في خوارزمية كروسكال تعتمد على ترتيب الأوزان فقط وليس على قيمها، واستخدمنا في البيان أدناه، أعدادًا صحيحة موجبة بوصفها أوزانًا للتأكيد على ترتيب اختبار الأضلاع، حيث نختار أقل أربعة أضلاع وزنًا، وبناءً على ذلك لا نستطيع اختيار الأضلاع التي أوزانها 5 أو 6. ونستطيع أخذ الضلع الذي وزنه 7، وعندها لا نستطيع أخذ الأضلاع التي أوزانها 8 أو 9. ■



3.3.2. نظرية : ([1956] Kruskal). في البيان الموزون المترابط G، تبني خوارزمية كروسكال شجرة مولدة لها أصغر وزن ممكن.

الإثبات : سنُبين أولاً أن الخوارزمية تنتج شجرة. لاحظ أن هذه الخوارزمية لا تختار أي ضلع يُتَمّمُ حلقة. إذا وُجدَ للبيان النهائي أكثر من مركبة، فهذا يعني أننا لم نأخذ في الحسبان أي ضلع يربط بين مركبتين؛ لأن مثل هذا الضلع يكون مقبولاً، وبما أن G مترابط، فإنه يوجد مثل هذا الضلع الذي يجب أن نكون قد أخذناه في الحسبان. لذا، فإن البيان النهائي الذي نحصل عليه يكون مترابطًا ولا حلقيًّا، وهذا يجعل هذا البيان شجرة.

افترض أن T هي الشجرة التي نحصل عليها، وافترض أيضًا أن T^* هي شجرة مولدة لها أصغر وزن، فإذا كانت $T = T^*$؛ فإننا نحصل على النتيجة المطلوبة، وإذا كانت $T \neq T^*$، فاجعل e يمثل أول ضلع تختاره في T بحيث لا يكون موجودًا في T^*. إن إضافة e إلى T^* يولد حلقة واحدة C، وبما أن T تخلو من الحلقات، فإن C تحوي ضلعًا e' بحيث إن $e' \notin E(T)$. الآن، خذ في الحسبان الشجرة المولدة $T^* + e - e'$. بما أن T^* تحوي e' وتحوي أضلاع T كلها التي اختيرت قبل e، فإن كلًّا من e و e' يكون متوافرًا للخيار عندما تختار

الخوارزمية e. لذا فإن $w(e) \le w(e')$ (أي أن وزن e يساوي وزن e' أو أقل منه). لذا، فإن $T^* + e - e'$ هي شجرة مولدة بوزن يساوي وزن T^* أو أقل منها، وتتفق مع T أكثر من T^* على قائمة أطول من الأضلاع.

إن تكرار التعليل السابق سيعطينا أخيرًا شجرة مولدة ذات أصغر وزن، وتتفق تمامًا مع T. وبذا، نكون قد أثبتنا أن أصغر شجرة مولدة تتفق مع T هي T نفسها. ■

4.3.2*. ملاحظة: لتنفيذ خوارزمية كروسكال؛ نفرز m بحسب أوزان أضلاعها، وبعد ذلك نحتفظ لكل رأس بالعلامة الدالة للمركّبة التي تحوي هذا الرأس، ونقبل الضلع الأقل وزنًا التالي إذا وُجِدَتْ على طرفيه علامات دالة مختلفة، ومن ثمّ ندخل كلًّا من المركبتين بتغيير العلامة الدالة لكل رأس في المركبة الصغرى بالعلامة الدالة للمركبة القصوى. وبما أن حجم المركبة يتضاعف عند تغيير العلامات الدالة، فإن كل علامة دالة تتغير بمقدار $lg\ n$ مرة على الأكثر، وأن العدد الكلي لهذه التغييرات هو $n\ lg\ n$ (نستخدم lg للتدليل على اللوغاريتم للأساس 2).

من خلال هذه الطريقة لوضع العلامات الدالة، يتبين لنا أن الزمن اللازم لتنفيذ هذه العملية للبيانات الكبيرة يعتمد على الزمن اللازم لفرز (تصنيف) m من الأعداد. مع أخذ هذا الثمن في الحسبان، قد نجد أن بعض الخوارزميات أسرع من خوارزمية كروسكال. في خوارزمية برم (prim's Algorithm) (التمرين 10)، والتي تعود أيضًا إلى جارنك (Jarnik)، يمكن تنمية الشجرة المولدة بدءًا من رأس واحد بإضافة الضلع ذي الوزن الأقل الذي يُدخل رأسًا جديدًا. ومن الجدير بالذكر أن كلًّا من خوارزميتي برم وكروسكال تحتاجان إلى الوقت نفسه للتنفيذ في الحالة التي تُفرَز فيها الأضلاع مسبقًا بحسب أوزانها.

لقد وضع كل من بورفكا (Borùvka) في العام 1926م وجارنك في عام 1930م مسألة أصغر شجرة مولدة وحلًا ما، حيث تعتمد خوارزمية بورفكا على التقاط الضلع التالي من خلال الأخذ في الحسبان أقل ضلع وزنًا يغادر كلّ مركبة من الغابة الموجودة في تلك اللحظة. تستخدم التحسينات الحديثة معطيات بنائية ذكية لدمج المركبات بطريقة أسرع. لقد ظهرت النسخ السريعة في ترجان [Tarjan] في العام 1984م وذلك فيما يخص الحالة التي يتمّ فيها الفرز المسبق للأضلاع. وكذلك ظهرت في جابو وجاليل سبنسر وترجان [Gabow-Galil-Spencer-Tarjan] في العام 1986م عندما لا يكون هناك فرز مسبق للأضلاع. لمزيد من النتائج حول الموضوع؛ يمكن الرجوع إلى (Ahuja-Magnanti-Orlin,[1993],ch.13) وإلى المرجع الأحدث وهو ([Karger-Klein-Tarjan [1995). ■

أقصر المسارات (Shortest paths)

كيف يمكننا إيجاد أقصر مسلك من موقع إلى آخر؟ كيف نستطيع إيجاد أقصر مسلك من بيتنا إلى كل مكان في البلدة؟ إن هذا يتطلب إيجاد أقصر المسارات من رأس معين إلى باقي الرؤوس في بيان موزون. و تُشَكِّل هذه المسارات مجتمعة شجرةً مولدة.

إن خوارزمية كلّ من ديجكسترا ([Dijkstra [1959) و وايتنج وهيلير ([Whiting-Hillier[1960) تحلُّ هذه المسألة بسرعة. وملاحظة أنّ الجزء من u إلى v من المسار الأقصر من u إلى z يكون مسارًا أصغر من u إلى v، تساعد على إيجاد المسلك الأمثل من u إلى أي رأس آخر مثل z مرتبًا تصاعديًّا بحسب $d(u, z)$. وأن المسافة $d(u, z)$ في بيان موزون تساوي حاصل جمع الأوزان الموجودة على أضلاع المسار من u إلى z (حيث نأخذ في الحسبان الأوزان غير السالبة فقط).

5.3.2. خوارزمية: (خوارزمية ديجكسترا – المسافات من رأس واحد).

المدخلات: بيان (أو بيان موجه) موزون ضلعيًّا بأوزان غير سالبة، ورأس u نبدأ منه، ونرمز بالرمز $w(xy)$ إلى

وزن الضلع xy، ويكون $w(xy) = \infty$ إذا لم يكن xy ضلعًا.

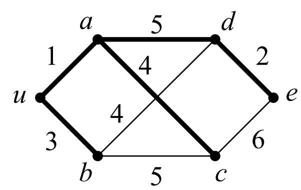
الفكرة: خزّن مجموعة رؤوس S بحيث إن أقصر مسافة من u إلى كل رأس في S تكون معلومة. وسّع S لتشمل الرؤوس جميعها من خلال تخزين المسافة المؤقتة $t(z)$ من u إلى كل رأس $z \notin S$، ولاحظ أن $t(z)$ هي طول أصغر مسار مغلق من u إلى z حتى هذه اللحظة.

البداية: ضع $S=\{u\}$، $t(u)=0$ ، $t(z)=w(uz)$ لكل $z \neq u$

خطوات مرات الحدوث: اختر رأسًا v خارج S بحيث إن $t(v) = min_{z\notin S}\, t(z)$. أضف v إلى S، ثمّ ارصد الأضلاع الخارجة من v لتحديث المسافات المؤقتة (التجريبية): لكل ضلع vz حيث $z \notin s$ حدّث $t(z)$ لتصبح $min\{t(z), t(v)+w(vz)\}$. استمر في تكرار الخطوات السابقة حتى تحصل على $S=V(G)$، أو حتى تحصل على أن $t(z) = \infty$ لكل $z \notin S$. وأخيرًا ، ضع $d(u,v) = t(v)$ لكل v. ■

6.3.2. مثال: في البيان الموزون أدناه، تمّ إيجاد أقصر المسارات من u إلى الرؤوس الأخرى بحسب الترتيب a, b, c, d, e حيث المسافات هي: 1,3,5,6,8 على الترتيب. لإعادة بناء المسارات؛ نحتاج فقط إلى الضلع الذي حصلنا عنده على أقصر مسار من u إلى مبتغانا؛ لأن الجزء الأول من أقصر مسار من u إلى z والذي يصل z عبر الضلع uz يكون أقصر مسار من u إلى v.

تستطيع الخوارزمية المحافظة على هذه المعلومات من خلال تسجيل ماهية أو هوية "الرأس الذي اختير"، وذلك كلما تمّ تحديث المسافة إلى z. عندما يُختارُ z ، فإن الرأس الذي سُجّلَ عند آخر تحديث للمسافة $t(z)$ هو الرأس الذي يسبق z على المسار من u إلى z والذي يساوي طوله $d(u, z)$. في هذا المثال، نجد أن الأضلاع النهائية على المسارات إلى a و b, c, d, e والتي تولدها الخوارزمية هي: ua و ub, ac, ad, de على الترتيب، وهذه هي أضلاع الشجرة المولدة الناتجة من u. ■



أسلوب الصياغة المستخدم في الخوارزمية 5.3.2. يضمن لنا أن خوارزمية ديجكسترا تتعامل مع البيانات الموجهة أيضًا، حيث إنها تولد شجرة خارجة جذرها u إذا أمكن الوصول إلى كل رأس من u. إن الإثبات صحيح لكل من البيانات والبيانات الموجهة، وتُسمّى التقنيةُ المستخدمةُ لبرهان عبارة أقوى من أجل جعل إثبات استقرائي قابلاً للعمل أو التطبيق "تحميلَ فرضيات الاستقراء".

7.3.2. نظرية: إذا كان G بيانًا موجهًا، وكان $u \in V(G)$، فإن خوارزمية ديجكسترا تحسب $d(u, z)$ لكل $z \in V(G)$.

الإثبات: سنثبت النتيجة الأقوى التي تنصُّ على ما يأتي عند كل خطوة مكررة:

1) لكل $z \in S$ ، $t(z)=d(u,z)$.

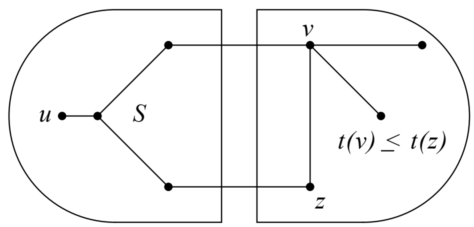
2) لكل $z \notin S$ ، $t(z)$ تكون أقل طول لمسار من u إلى z يصل إلى z مباشرة من S.

نستخدم الاستقراء على $k = |S|$. إذا كانت $k = 1$، ولأنّ $S = \{u\}$؛ نجد أن $d(u,u) = t(u) = 0$. وبهذا يكون أقل طول لمسار من u إلى z يصل إلى z مباشرة من S يساوي $t(z) = w(uz)$، والذي يساوي مالانهاية في الحالة التي لا يكون فيها uz ضلعًا.

الآن، افترض أن (1) و (2) يتحققان عندما $|S| = k$. وافترض أيضًا أن v رأس من بين الرؤوس z حيث z لا ينتمي إلى المجموعة S، بحيث $t(z)$ أقلّ ما يمكن. تختار الخوارزمية في هذه الحالة v. لذا، اجعل

$S' = S \cup \{v\}$. سنثبت أولاً أن $d(u, v) = t(v)$. لاحظ أن أقصر مسار من u إلى v يخرج من S قبل الوصول إلى v. تنصُّ خطوة الاستقراء على أن طول أقصر مسار مباشر إلى v من S يساوي $t(v)$. وأن فرضية الاستقراء واختيار v يضمنان لنا أن طول أيّ مسار يصل إلى أيّ رأس خارج S، ثمّ إلى v يكون مساويًا للمقدار $t(v)$ على الأقل. لذا، فإن $d(u,v) = t(v)$ وهذا يعني أن (1) يتحقق لـ S'.

ولبرهان أن (2) يتحقق لـ S'، افترض أن z رأس خارج S ،حيث $z \neq v$. من الافتراض، نعلم أن طول أصغر مسار من u إلى z يصل مباشرة من S إلى z يساوي $t(z)$ (أو ∞ إذا لم يوجد مثل هذا المسار). وعندما نضيف v إلى S، فيجب أن نأخذ في الحسبان المسارات التي تصل إلى z من v. وبما أننا حسبنا الآن $d(u,v) = t(v)$، فإن طول أقصر مسار من هذه المسارات هو في $t(v) + w(vz)$. وسنقارن هذا الطول بالقيمة السابقة لـ $t(z)$ من أجل إيجاد أقصر مسار يصل إلى z مباشرةً من S'، لقد أثبتنا أنّ (1) و (2) تتحققان للمجموعة الجديدة S' التي حجمها يساوي $k + 1$، وهذا يكمل الإثبات. ■



لاحظ أنّ الخوارزمية تحافظ على الشرط $d(u, x) \le t(z)$ لكل $x \in S$ ولكل $z \notin S$؛ لذا فإنّ هذه الخوارزمية تختار الرؤوس مرتبةً ترتيبًا غير متناقص بحسب بعدها عن u. وتفترض أن $d(u, v) = \infty$ إذا كان من غير الممكن الوصول إلى v من u. ونعالج الحالة الخاصة للبيانات غير الموزونة عن طريق البحث الأفقي أولاً بدءًا من الرأس u، (Breadth-first search from u) . في هذه الحالة نجد أن للخوارزمية وبرهانها (التمرين 17) وصفًا أسهل.

8.3.2. خوارزمية: البحث الأفقي أولاً (BFS)

المدخلات: بيان (أو بيان موجه) غير موزون، ورأس u نبدأ منه.

الفكرة: حافظ على مجموعة رؤوس R التي تمّ الوصول إليها إلا أنها لم تُبحث بعد، ومجموعة S التي تمّ بحثها. تتم المحافظة على المجموعة R كصفّ أو طابور من الرؤوس على أساس أن الرأس الذي يدخلها أولاً يخرج منها أولاً. لذا، فإن الرؤوس التي نجدها أولاً هي الرؤوس التي نتحرّى عنها أولاً.

البداية: $d(u, u) = 0, S = \varnothing, R = \{u\}$

خطوات مرات الحدوث: إذا كانت $R \neq \varnothing$ ، فإننا نبدأ البحث من عند أول رأس v في R. نضيف جيران v التي لا تنتمي إلى $S \cup R$ إلى مؤخرة R، ونحدّد لها البعد $d(u, v) + 1$ ، وبعد ذلك نزيح v من مقدمة R ونضعها في S. ■

نعرّف الاختلاف المركزي $\in(u)$ على أنه أكبر مسافة من الرأس u إلى رأس آخر. لذا، نستطيع حساب قطر أيّ بيان من خلال تشغيل خوارزمية (BFS) من أي رأس.

تمامًا كما في خوارزمية ديجكسترا، فإن الـ BFS من u يعطينا شجرة T يتحقق فيها أن المسار من u إلى v هو أصغر مسار وذلك لكل رأس v. لذا، لا يوجد للبيان أضلاع إضافية تربط بين رؤوس مسار من u إلى v في الشجرة T.

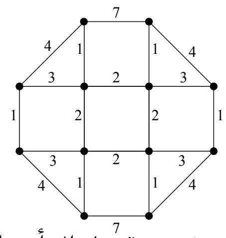
تنويه: تظهر خوارزمية ديجكسترا بصورة واضحة في حلّ مسألة أمثلية أخرى معروفة مَعرِفة تامة.

9.3.2. تطبيق. من المعلوم أن ساعي البريد يجب أن يسلك الأضلاع الممثلة لشبكة طرق بدءًا من مكتب البريد وانتهاء عنده. وأن الأوزان الموجودة على الأضلاع تمثل المسافات أو الزمن اللازم لقطع هذه المسافات، نبحث عن

ممر مغلق طوله أقصر ما يمكن ويمر على الأضلاع جميعها. وتسمى هذه المسألة مسألة ساعي البريد الصيني؛ تخليدًا لذكرى العالِم الصيني ميوجان (Meigu Guan) الذي وضع هذه المسألة في العام 1962م.

إذا كان كل رأس زوجيًا (درجته زوجية)، فإن البيان يكون بيانًا أويلريًّا، ويكون الجواب هو حاصل جمع أوزان الأضلاع. وبخلاف ذلك، يجب أن نكرر أضلاعًا. وأن كلّ عُبور (اجتياز) يمثل حلقة أويلرية لبيان نحصل عليه بمضاعفة بعض الأضلاع. إن إيجاد أقصر اجتياز يكافئ إيجاد أصغر وزن كلي للأضلاع التي بمضاعفتها نجعل درجة كل رأس زوجية. ونقول مضاعفة؛ لأننا لا نحتاج إلى استخدام أي ضلع أكثر من مرتين. وإذا استعملنا ضلعًا ثلاث مرات أو أكثر من أجل جعل درجة الرؤوس زوجية، فإن حذف نسختين من هذه الأضلاع يبقي درجة الرؤوس زوجية، ومن الممكن أن يكون هناك عدة طرق لاختيار الأضلاع التي تمّ مضاعفتها. ■

10.3.2. مثال: في المثال أدناه، تجد أن درجة كل رأس من الرؤوس الثمانية الخارجية هي درجة فردية، فإذا واءمنا هذه الرؤوس حول الخارج لتصبح درجاتها زوجية، فإن التكلفة الإضافية هي: $4+4+4+4 = 16$ أو $1+7+7+1=16$. ولكن يمكننا أن نعمل أفضل من ذلك من خلال استخدام الأضلاع العمودية التي مجموع أوزانها الكلي يساوي 10. ■



إن إضافة ضلع من رأس فردي إلى آخر زوجي تجعل الرأس الزوجي فرديًّا. يجب أن نستمر في إضافة الأضلاع حتى نحصل على مسرب يصل إلى رأس فردي.

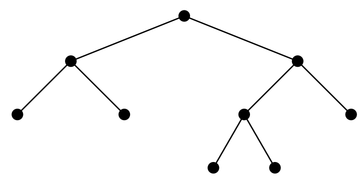
يجب أن تتألف الأضلاع المضاعفة من مجموعة مسارب تُزاوج بين الرؤوس الفردية، وقد نحصر اهتمامنا بالمسارات التي تُزاوج بين الرؤوس الفردية (التمرين 24). وفي هذه الحالة، يمكن أن يكون هناك تقاطع بين هذه المسارات.

لقد أعطى كل من إدموندز (Edmonds) وجونسون (Johnson) طريقة لحلّ مسألة ساعي البريد الصيني. إذا وُجِد رأسان فقط درجةُ كل منهما فردية فإننا نستخدم خوارزمية ديجكسترا لإيجاد أقصر مسار بينهما. وبذا نحلُّ المسألة. وإذا وُجد $2k$ رأسًا فرديًّا، فإننا نستطيع أيضًا استخدام خورازمية ديجكسترا لإيجاد أقصر المسارات التي تربط بين كل زوج من الرؤوس الفردية، وهذه المسارات هي التي تكون مرشحة للاستخدام في حل المسألة. نستخدم هذه الأطوال بوصفها أوزانًا على أضلاع K_{2k}، وبذلك فإن مسألتنا تصبح كيفية إيجاد أقل وزن كلي لـ k من الأضلاع التي تزاوج بين الـ $2k$ رأسًا. تمثّل هذه المسألة نسخة موزونة من مسألة أعظم (أكبر) مواءمة التي سَتُناقَش في الجزء 3.3. شرحت هذه المسألة في كتاب جيبونز (Gibbons [1985, p163-165]).

الأشجار في علم الحاسوب (اختياري) (Trees in Computer science (optional))

تستخدم معظم تطبيقات الأشجار في علم الحاسوب أشجارًا مجذرة (لها جذر).

11.3.2. نعرّف الشجرة المجذّرة على أنها الشجرة التي تم اختيار أحد رؤوسها r ليكون جذرًا لها. لكل رأس v اجعل $P(v)$ تمثل المسار الوحيد من r إلى v. نعرف **والد** v على أنه جار v في $P(v)$، ونسمي الجيران الأخرى للرأس v بأبناء (**أولاد**) v. ونطلق على رؤوس v - $P(v)$ سلف v، أما سلالة v (خلف v) فهي الرؤوس u، بحيث إن $p(u)$ يحوي v. تمثّل الأوراقُ الرؤوسَ التي ليس لها أبناء. ونعرّف الشجرة المستوية المجذّرة أو الشجرة المزروعة على أنها شجرة مجذرة حُدِّدَ لأبناء كل رأس من رؤوسها ترتيبٌ من اليسار إلى اليمين.



بعد تطبيق خوارزمية BFS من u، تُعَدُّ الشجرة الناتجة T شجرةً مجذرة عند u.

12.3.2. تعريف: تعرّف **الشجرة الثنائية** على أنها شجرة مستوية مجذرة لها على الأكثر ولدان، ويُسَمّى كلُّ مولد لرأس **الطفلَ الأيسرَ** أو **الطفلَ الأيمنَ**. في حين تُسمّى الأشجارُ الجزئيةُ المجذرةُ عند أبناء الجذر **الشجرةَ الجزئيةَ اليسرى** أو **الشجرةَ الجزئيةَ اليمنى** للشجرة. أمّا الشجرة ذات المتعدد k (k-ary tree)فهي الشجرة التي تسمح بأن يكون لكل رأس k من الأولاد على الأكثر.

في الكثير من تطبيقات الأشجار الثنائية، يكون للرؤوس (غير الأوراق) ولدان بالضبط (التمرين 26). إن الأشجار الثنائية تسمح بتخزين المعطيات بطريقة تُسرّع الوصول إلى هذه المعلومات؛ حيث نُخزّن كل مفردة على ورقة، ونصل إليها عن طريق تتبع مسار يبدأ من الجذر وينتهي عند هذه الورقة. ونُشفّر المسار بوضع صفر عندما نتحرك في اتجاه طفل أيسر، في حين نضع 1 عندما نتحرك في اتجاه طفل أيمن. إن زمن البحث هو طول الشفرة حتى نصل إلى الورقة. فإذا أعطينا احتمالات وصول من بين n من البنود، فإننا نرغب في وضع هذه البنود على أوراق شجرة ثنائية مجذرَة من أجل تقليل الزمن المتوقع للبحث.

وبالمثل، إذا كان لدينا ملفات حاسوبية كبيرة وسعة تخزين محدودة، فإننا نرغب في تشفير الحروف بوصفها قوائم ثنائية لتقليل الطول الكلي. إن قسمة مرات الحدوث على الطول الكلي للملف تزودّنا بالاحتمالات. وبناءً عليه، فإن مسألة التشفير هذه تُختزَل للمسألة الموجودة أعلاه.

إن طول كلمات الشفرة عادة ما يكون مختلفًا. لذا فإننا بحاجة إلى طريقة نعرف من خلالها متى تنتهي الكلمة الحالية. وإذا كانت كل كلمة شفرة ليست جزءًا أوليًّا من كلمة أخرى، فإن الكلمة الحالية تنتهي عندما تنتهي الأرقام الثنائية؛ لأن نهاية الكلمة السابقة تشكل كلمة شفرة. بهذا الشرط الخالي من المقدمات (أي أن كلمة الشفرة ليست جزءًا أوليًّا من كلمة أخرى)، فإنّ كلمات التشفير الثنائية ترتبط بالأوراق لشجرة ثنائية باستخدام التشفير من اليسار إلى اليمين الذي وُصِفَ أعلاه.

إن الطول المتوقع لرسالة هو $\Sigma\, p_i l_i$؛ حيث إنّ $\boldsymbol{P_i}$ هي احتمالية الكلمة رقم i التي طول شفرتها يساوي l_i. وممّا يجدر ذكره أنّ سهولة الحصول على الشفرة المثالية مدهشة.

13.3.2. خوارزمية: (خوارزمية هفمان [Huffman 1952] – التشفير الخالي من المقدمات [prefix-free coding])

المدخلات: أوزان (مثل: ترددات، أو تكرارات، أو احتمالات) $P_1,...,P_n$.

المخرجات: تشفير خالٍ من المقدمات (يكافئ شجرة ثنائية).

الفكرة: يوجد للمفرداتِ النادرة (غير المتكررة بصورة دورية) شفرات أطول، ضع البنود (الرؤوس) غير المتكررة كثيرًا بمكان أعمق وذلك بربطها مع الرؤوس الممثلة للوالدين.

البداية: عندما $n = 2$، فإن الطول الأمثل يساوي 1 حيث يختار 0 و 1 بوصفها شفرة على المفردتين أو الرأسين. (يوجد للشجرة جذر وورقتان، فضلًا عن أنه يمكن استخدام $n = 1$ بوصفها بداية).

خطوات مرات الحدوث: عندما n>2، استبدل المفردتين P', P، ذاتي الاحتمال الأقل بمفردة واحدة q وزنها $p + p'$. تعامل مع المجموعة الأصغر الناتجة بوصفها مسألة فيها n - 1 من البنود. بعد حلّ المسألة، أعط الورقة الناتجة التي وزنها q أولادًا بوزن p و p'. مكافئًا لذلك، استبدل الشفرة التي احتسبت للمفردة $\acute{q}$

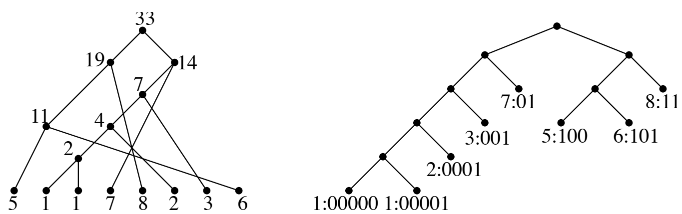
(الناتجة عن ربط p و p') بامتداداتها بـ 1 و 0 التي عينت للمفردات المستبدلة. ■

14.3.2. مثال: تشفير هفمان. افترض مفردات ثمانية لها مرات الحدوث: .5,1,1,7,8,2,3,6 إن خوارزمية 13.3.2. تربط بين البنود بحسب الشجرة الموجودة على اليسار في الشكل أدناه، حيث يتم العمل من أسفل إلى أعلى. بداية، يربط الرأسان اللذان وزن كل منهما 1 للحصول على مفردة جديدة وزنها = 2، ثمّ نربط هذه المفردة بالمفردة الأصلية التي وزنها = 2 للحصول على مفردة وزنها = 4، بعد ذلك نربط بين المفردة التي وزنها 3 بالمفردة التي وزنها 4 لنحصل على مفردة وزنها 7، ثمّ نربط بين المفردتين الأقل احتمالاً، وهما المفردتان اللتان وزنهما 5 و 6 في القائمة الأصلية. إن ربط الرؤوس المتبقية يعطينا رؤوسًا بأوزان مرتبة تصاعديًّا على الصورة التالية

$11 = 5 + 6$ ، $14 = 7 + 7$ ، $19 = 11 + 8$ و $33 = 19 + 14$.

من رسم هذه الشجرة عن اليمين في الشكل أدناه، نحصل على كلمات الشفرة (الكلمات السِّرِّيّة). لاحظ أنه بحسب الترتيب الأصلي للمفردات، نجد أن الكلمات السرية هي:

100،0000 ،00001 ،01 ،11 ،0001 ،001 ،101. وأن الطول المتوقع لطول الشفرة هو $\Sigma p_i L_i = 90 / 33$، وهذا أقل من 3، وذلك من خلال استخدام ثماني كلمات طول كل منها = 3. ■



15.3.2. نظرية: إذا أعطينا توزيعًا احتماليًّا $\{pi\}$ على n من البنود، فإن خوارزمية هفمان تنتج الشفرة الخالية من المقدمات التي لها أصغر طول متوقع.

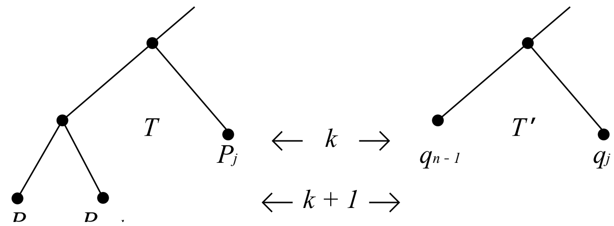
الإثبات: باستخدام الاستقراء على n، إذا كانت $n = 2$، نرسل أحد العددين 0 أو 1 لإرسال رسالة، وتُشفّر الخوارزمية كل مفردة بوصفها أحد هذين العددين. لذا فإنّ الطول الأمثل المتوقع يساوي 1. افترض أن $n > 2$، وأن الخوارزمية تحسب الشيفرة المثلى عندما يكون لدينا توزيع احتمالي على $n - 1$ من البنود. تُعيِّن كل شفرة مفردات لأوراق شجرة ثنائية. إذا أعطينا شجرة لها n من الأوراق، فإننا نستطيع تصغير الطول المتوقع من خلال التعيين الجشع للرسائل التي احتمالاتها: $p_1 \geq .... \geq p_n$ على الأوراق بترتيب متزايد بحسب العمق (البُعد).

لذا، يوجد لكل شفرة مثالية رسائل قليلة الاحتمالية تم تعيينها للأوراق التي لها أكبر عمق (بُعد). بما أنه توجد لكل ورقة تقع على أكبر عمق ورقةٌ أخرى تمثل أختًا لهذه الورقة، وبما أن تبديل البنود التي تقع على عمق معين لا يغيّر الطول المتوقع، فإننا نستطيع الافتراض أنّ الرسالتين الأقل احتمالاً تظهران بوصفهما أختين عند أكبر عمق.

إفرض أن T شجرة مثالية لـ $p_1,...,p_n$ بحيث إن p_n و p_{n-1} المفردتان الأقل احتمالاً وتقعان بوصفهما ورقتين أختين عند أكبر عمق. ولتكن T' الشجرةَ التي نحصل عليها من الشجرة T من خلال حذف هذه الأوراق. وافترض أيضا أن $q_1,...,q_{n-1}$ التوزيعُ الاحتماليُّ الذي نحصل عليه بتبديل $\{p_{n-1}, p_n\}$ عن طريق وضع $q_{n-1} = p_{n-1} + p_n$. لاحظ أن الشجرة T' تعطينا شفرة لـ $\{q_i\}$. إن الطول المتوقع للشجرة T هو الطول المتوقع نفسه للشجرة T' مضافًا إليه q_{n-1}؛ لأنه إذا كان k هو العمق المحدد للورقة التي عينت بـ q_{n-1}، فإننا نخسر Kq_{n-1}، ونربح $(p_{n-1}+p_n)$ $(k+1)$ عندما نتحرك من T' إلى T.

وهذا يتحقق لكل خيار للشجرة T'. لذا، فمن الأفضل استخدام الشجرة T' التي تكون الشجرة المثلى

لـ $\{q_i\}$. ومن فرضية الاستقراء، نجد أن أفضل خيار لـ T' هو الذي نحصل عليه من تطبيق خوارزمية هفمان على $\{q_i\}$. بما أنه تمّ استبدال مكان q_{n-1} $\{p_{n-1},p_n\}$ في الخطوة الأولى من خوارزمية هفمان لـ $\{P_i\}$، فإننا نستنتج أن هذه الخوارزمية تولد الشجرة الأمثل T لـ $\{P_i\}$. ■



نعلم أن خوارزمية هفمان تحسب أفضل شفرة تخلو من المقدمات (أي ألا تأتي كلمة شفرة في بداية كلمة شفرة أخرى). وأن طولها المتوقع يكون قريبًا من الطول الأمثل من بين الأطوال جميعها التي تحددها الشفرات الثنائية. لقد أثبت شانون (Shannon) في العام 1984م أن الطول المتوقع لكل شفرة ثنائية (مؤلفة من عددين) يساوي على الأقل إنتروبي (entropy) التوزيع الاحتمالي المتقطع $\{pi\}$ والمعرّف على أنه $-\sum p_i \, lg \, p_i$ (التمرين 31). لاحظ أنه إذا كانت كل P_i أسًّا للعدد $1/2$، فإن شفرة هفمان تحقق هذا الحدّ تمامًا (التمرين 30).

تمــارين (Exercises)

1.3.2. (−) عيّن أعدادًا صحيحة بوصفها أوزانًا لأضلاع K_n. أثبت أن الوزن الكلي على كل حلقة يكون زوجيًّا إذا وفقط إذا كان الوزن الكلي زوجيًّا على كل مثلث.

2.3.2. (−) أثبت العبارة الآتية أو انقضها: إذا كانت T شجرة لها أصغر وزن ومولدة لبيان موزون G، فإن كل مسار من u إلى v في T يكون مسارًا في G من u إلى v، وله أصغر وزن.

3.3.2. (−) افترض أن لديك خمس مدن، وتريد بناء شبكة طرق بينها، مع العلم أن تكلفة بناء طريق من i إلى j هي المدخلة $a_{i,j}$ في المصفوفة أدناه، وأنّ المدخلة ∞ في المصفوفة تشير إلى وجود جبل كبير بين المدينتين ولا يمكن بناء طريق بينهما. جِدْ أقل تكلفة تمكّن الانتقال من أيّ مدينة إلى أخرى.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 11 & 9 \\ 3 & 0 & 3 & 9 & 8 \\ 5 & 3 & 0 & \infty & 10 \\ 11 & 9 & \infty & 0 & 7 \\ 9 & 8 & 10 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3.2. (−) للبيان الذي تحصل عليه من K_5 بحذف ضلعين غير متجاورين، عيّن الأوزان $(1,1,2,2,3,3,4,4)$ للأضلاع بطريقتين؛ بحيث يكون في إحداهما وزن أصغر شجرة مولدة وحيدًا. وفي الأخرى لا يكون كذلك.

5.3.2. (−) افترض أنّ لديك شبكة تحوي خمس مدن، وأنّ المدخلة $a_{i,j}$ في المصفوفة أدناه تمثّل زمن الانتقال المباشر من i إلى j. لاحظ أنّ المصفوفة غير متماثلة (استخدم البيانات الموجهة) وإذا كانت $a_{i,j} = \infty$، فإن هذا يعني عدم وجود مسلك مباشر من i إلى j. جِدْ أقل زمن ممكن، وأسرع مسلك من i إلى j لكل زوج i و j.

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 & \infty & 17 \\ 7 & 0 & 5 & 22 & 33 \\ 14 & 13 & 0 & 15 & 27 \\ 30 & \infty & 17 & 0 & 10 \\ \infty & 15 & 12 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

• • • • •

6.3.2. (!) عيّن أوزانًا صحيحة لأضلاع K_n، وليكن وزنُ الحلقة مجموعَ أوزان أضلاعها، أثبت أن للحلقات جميعها

وزنًا زوجيًّا إذا وفقط إذا كان البيانُ الجزئي المكوّن من الأضلاع التي وزنها فردي عصبةً ثنائية مولدة. (مساعدة: أثبت أن كل مركبة من مركبات البيان الجزئي المؤلف من الأضلاع ذات الوزن الزوجي بيان تام).

7.3.2. افترض أن G بيان مترابط موزون، حيث إن أوزان أضلاعه مختلفة بعضها عن بعض. أثبت دون استخدام خوارزمية كروسكال أنه يوجد للبيان G شجرة مولدة واحدة فقط وزنها أقل ما يمكن (مساعدة: استخدم التمرين 34.1.2).

8.3.2. افترض أن G بيان مترابط موزون. أثبت أنه - بغض النظر عن كيفية تكسير الروابط لاختيار الضلع التالي في خوارزمية كروسكال- أن قائمة الأوزان لشجرة مولدة ذات أصغر وزن (مرتبة ترتيبًا غير متناقص) تكون فريدة.

9.3.2. افترض أن F غابة مولدة لبيان موزون G، وافترض أيضًا أن e ضلع بأصغر وزن من بين أضلاع G التي يقع طرفاها في مركبتين مختلفتين من مركبات F. أثبت أنه من بين الأشجار المولدة للبيان G التي تحوي F، توجد واحدة وزنها أصغر ما يمكن وتحوي e. استخدم هذا لإعطاء إثبات آخر على أن خوارزمية كروسكال تعمل بصورة صحيحة.

10.3.2. (!). خوارزمية برم (prim's Algorithm). تعمل هذه الخوارزمية على إنبات شجرة مولدة لبيان مترابط موزون G بدءًا من رأس معين من خلال تكرار إضافة أقل ضلع وزنًا من رأس تم الوصول إليه مسبقًا إلى رأس لم يتم الوصول إليه بعد. وينتهي عمل الخوارزمية بالوصول إلى الرؤوس جميعها (تُكسر الروابط اختياريًّا). أثبت أن خوارزمية برم تنتج شجرة مولدة لـ G وزنها أقل ما يمكن (Jarnik [1930], prim [1957], Dijkstra [1959])

11.3.2. لتكن T شجرة مولدة لبيان موزون، اجعل $m(T)$ تمثل أكبر وزن من أوزان أضلاع T. اجعل x أقلّ قيمة لـ $m(T)$ من بين قيم $m(T)$ على الأشجار المولدة جميعها لبيان موزون G. أثبت أنه إذا كانت T شجرة مولدة للبيان G حيث وزنها الكلي أصغر ما يمكن، فإن $m(T) = x$ (بكلمات أُخرى، T تصغر أكبر وزن). جد مثالاً تبيّن فيه أن العكس غير صحيح. (تعليق: تسمّى الشجرةُ التي تصغر أكبر وزن عنقَ الزجاجة أو أصغر أكبر شجرة مولدة).

12.3.2. في بيانٍ تام موزون، تمّ بتكرار خطوة اختيارُ ضلع أقلّ وزنًا، بحيث تُشكّل الأضلاع التي اختيرت إلى الآن اتحادًا منفصلاً من المسارات. بعد إجراء $n - 1$ خطوة، فإنك تحصل على مسار مولد. أثبت أن هذه الخوارزمية دائمًا تعطينا مسارًا مولدًا أقلّ وزنًا. أو هات عائلة غير منتهية من الأمثلة التي تفشل فيها الخوارزمية.

13.3.2. (!) افترض أنّ T شجرة وزنها أقلّ ما يمكن مولدة للبيان G، وافترض أيضًا أنّ T' شجرة مولدة أُخرى في G. أثبت أنه يمكن تحويل T' إلى T من خلال إجراء عدّة عمليات تبديل ضلع من T' مع ضلع من T، بحيث نحافظ على بقاء مجموعة الأضلاع هذه بوصفها شجرة مولدة، وألا تتمّ أيّ زيادة على الوزن الكلي.

14.3.2. (!). افترض أنّ C حلقة في بيان مترابط موزون. وافترض أيضًا أن e ضلع ذو أكبر وزن على C، أثبت أنه توجد شجرة مولدة ذات أقلّ وزن ولا تحوي e. استخدم هذا لبرهان أن تكرار حذف أثقل (ذو الوزن الأكبر) ضلع لا يمثل ضلع قطع لنحصل على بيان لا حلقي ينتج شجرة مولدة ذات أقل وزن.

15.3.2. افترض أن T شجرة مولدة ذات أقل وزن في بيان مترابط موزون G. أثبت أن T تحذف بعض الأضلاع ذات الوزن الثقيل من كل حلقة في G.

16.3.2. افترض أنّ لديك أربعة أشخاص يريدون أن يعبروا واديًا سحيقًا في الليل من خلال جسر متداع، علمًا بأنه لا يمكن أن يوجد أكثر من شخصين على الجسر في الوقت نفسه، وأن العبور يتطلب من كلّ عابر أن يكون لديه مصباح، ويوجد لديهم مصباح واحد فقط (يجب حمل المصباح مع كل من يعبر الجسر)، إذا قطع كل منهم الجسر وحده، لزمهم الزمن التالي للعبور: 10 دقائق للأول، و5 دقائق للثاني، ودقيقتان للثالث، ودقيقة واحدة للرابع. ولكن عندما يقطع اثنان معًا، فإنهما يمشيان بسرعة الأبطأ منهما، افترض أنه بعد 18 دقيقة سيأتي فيضان في الوادي يدمر الجسر، فهل يستطيع الأشخاص الأربعة العبور في الوقت المناسب؟ أثبت أن جوابك صحيح دون استخدام نظرية البيانات، وصفْ كيف يمكن الحصول على الجواب من خلال نظرية البيانات.

17.3.2. إذا أُعطيت رأسًا للبدء u في بَيان (بيان موجه) غير موزون G، فأثبت مباشرة (دون استخدام

خوارزمية ديجكسترا) أن الخوارزمية 8.3.2 تحسب $d(u, z)$ لكل $z \in V(G)$.

18.3.2. وضّح كيفية استخدام البحث أفقيًّا أولاً (BFS) لإيجاد خصر البيان G.

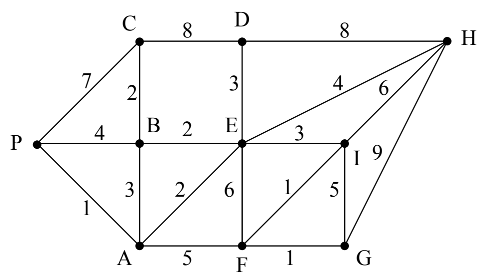
19.3.2. (+) أثبت صحّة قيام الخوارزمية التالية بإيجاد القطر لشجرة.
أولاً، شغل BFS من أيّ رأس تختاره w لإيجاد رأس u، بحيث يكون بُعْدُهُ عن w أكبرَ ما يمكن. بعد ذلك شغّل BFS من u لتصل إلى رأس v بُعْدُهُ عن u أكبرُ ما يمكن، سَجِّل $\text{diam } T = d(u, v)$.
(Cormen-Leiserson-Rivest [1990,P476])

20.3.2. الشجرة المولدة ذات القطر الأصغر. نعرف الـ MDST (Minimum diameter spanning tree) على أنها شجرة مولدة يكون فيها أكبر طول لمسار صغيرًا قدر الإمكان. إن الحدس يقترح أن تشغيل خوارزمية ديجكسترا بدءًا من رأس ذي اختلاف مركزي أصغر (مركز) ينتج لنا MDST، إلا أنّ هذا قد يكون فاشلاً:
a) أعط مثالاً لبيان غير موزون له خمسة رؤوس (وزن كل ضلع يساوي 1) بحيث يمكن تشغيل خوارزمية ديجكسترا من رأس ذي اختلاف مركزي أصغر، وينتج عن ذلك شجرة مولدة ليس لها قطر أصغر.
b) أعط مثالاً لبيان موزون له أربعة رؤوس بحيث إنّ خوارزمية ديجكسترا لا تنتج MDST عند تشغيلها من أيّ رأس.

21.3.2. طوّر خوارزمية سريعة لاختيار ما إذا كان البيان الموجود لديك ثنائي الفرع، على افتراض أن البيان معطى بدلالة مصفوفة تجاوره، أو في صورة قائمة من الرؤوس وجيرانها، وأن الخوارزمية ليست بحاجة إلى افتراض أيّ ضلع أكثر من مرتين.

22.3.2. (−) جد حلًّا لمسألة ساعي البريد الصيني في البيان Q_k على افتراض أن وزن كل ضلع يساوي 1.

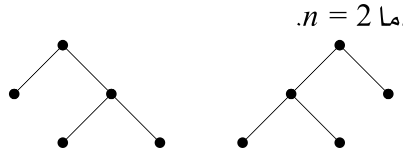
23.3.2. يركب ساعي البريد الكسول الحافلة في كلّ صباح للوصول إلى مكتب البريد، ومن هناك يختار مسلكًا للوصول إلى بيته بأسرع ما يمكن (لا ينهي جولته عند مكتب البريد). في البيان أدناه، تجد خارطة تمثل الشوارع التي يسير عليها من أجل تسليم الرسائل لأصحابها، ومعطى عليها الدقائق التي يستغرقها في السير سواء سلّم الرسالة أو لم يقم بذلك. فضلاً عن أن P ترمز إلى مكتب البريد وH ترمز إلى منزله. ماذا يجب أن تحقق الأضلاع التي قُطعت أكثر من مرة؟ جد كم مرة يجب أن يمر على كل ضلع في حال اتباعه لمسلك مثالي.



24.3.2. (−) فسّر لماذا يمكن افتراض أنّ المسارب المثلى التي تزاوج بين الرؤوس الفردية لحلّ أمثل لمسألة ساعي البريد الصيني هي مسارات. جد بيانًا موزونًا له أربعة رؤوس فردية يتحقق فيه أنّ الحلّ الأمثل لمسألة ساعي البريد الصيني يتطلب مضاعفة الأضلاع الموجودة في مسارين لهما رأس مشترك.

25.3.2. افترض أنّ G شجرة مجذرة بحيث يوجد لكلّ رأس فيها إما 0 أو k من الأبناء. إذا أُعطينا k، فما قيم $n(G)$ التي تجعل هذا ممكنًا؟

26.3.2. جد علاقة تكرارية لحساب عدد الأشجار الثنائية التي لها $n + 1$ ورقة (هنا يوجد ولدان بالضبط لكلّ رأس لا يمثل ورقة، فضلاً عن أن هناك أهمّية وتأثيرًا لترتيب الأبناء من اليسار إلى اليمين). الشجرتان أدناه تمثلان الحالات الممكنة عندما $n = 2$.



27.3.2. جدد علاقة تكرارية تعطي عدد الأشجار المستوية المجذرة التي لها n من الرؤوس. (كما في حالة الشجرة الثنائية المجذّرة. إن الأشجار الجزئية التي نحصل عليها بحذف الجذر من شجرة مستوية مجذّرة تُميّز من خلال ترتيبها من اليسار إلى اليمين).

28.3.2. (−) جد شفرة طولها المتوقع أصغر ما يمكن لمجموعة مؤلفة من عشر رسائل تردداتها النسبية هي: 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 9 ، ما الطول المتوقع لرسالة في هذه الشفرة المثالية؟

29.3.2. يوجد في لعبة للكلمات المتقاطعة 100 حرف مكرّر بحسب القائمة أدناه، لاحظ أنّ هذا لا يتفق مع اللغة الإنجليزية. إن تكرار الحرف "S" قليل. فعلى سبيل المثال، لتحسين اللعبة؛ تظاهر أن هذه تكرارات نسبية في اللغة الإنجليزية، وجد شفرة تخلو من المقدمة بأقصر طول متوقع لنقل الرسائل. أعطِ جوابًا من خلال إعطاء قائمة بمرات الحدوث النسبية لكلّ طول لكلمة شفرة (كلمة سريّة). احسب الطَول المتوقع للشفرة (لكل حرف مستخدم) (تعليق: إن تشفر ASCII يستخدم خمسة أرقام لكلّ حرف، وتعدّ هذه الشفرة أفضل من الشفرة السابقة. بالطبع، يعاني تشفر ASCII عدم وجود شفرات لعلامات الترقيم فيه).

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*	*M*	*N*	*O*	*P*	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*	*W*	*X*	*Y*	*Z*	*Ø*
9	2	2	4	12	2	3	2	9	1	1	4	2	6	8	2	1	6	4	6	4	2	2	1	2	1	2

30.3.2. افترض أنّ لديك n من الرسائل التي احتمالات حدوثها هي: $p_1,\ldots,p_n$؛ حيث p_i هي أُسّ للعدد 1/2 (كل $p_i \geq 0$ و $\sum p_i = 1$):

a) أثبت أن احتمالية الرسالتين الأقل احتمالاً تكون متساوية.

b) أثبت أنّ طول الرسالة المتوقع لشفرة هفمان لهذا التوزيع هي: $-\sum p_i \, lg \, p_i$

31.3.2. (+). افترض أن n من الرسائل تحدث باحتمالات $p_1,\ldots,p_n$، وأنه تم تحديد كلمات شفرة ثنائية مختلفة للكلمات. أثبت أنه لكل شفرة يكون الطول المتوقع لكلمة سرية (شفرة) بالنسبة إلى هذا التوزيع مساوية $-\sum p_i \, lg \, p_i$ على الأقل (مساعدة: استخدم الاستقراء على n) ([Shannon [1948]).