الفصل الثالث

التفكير الرياضى المتقدم

* تمهيد.
* تعقدات عقلية (نشاطات عقلية).
* تعريف المفهوم وصورة المفهوم.
* الأصول الرياضية والأصول المعرفية:
  - مفهوم الدالة.
  - مفهوم النهاية.
  - التفكير فى اللانهائية.
  - البرهان الرياضى.

تمهيد:

إن التفكير الرياضى المتقدم - كما أثبتت الأبحاث المنشورة - له مكونين أساسيين هما دقة التعريفات الرياضية (مثل: الحقائق فى النظريات)، والاستنتاجات المنطقية المبنية على النظريات. ولكن الكلمة المطبوعة تمثل قمة جبل الثلج فقط، وتسجيل آخر مرحلة فى التفكير يختلف إلى حد ما عن تسجيل المراحل الإبداعية فى التفكير الرياضى، والتى يلعب فيها الالهام والاستنتاجات الخاصة دوراً بارزاً ومهمًا.

ومن الأشياء المهمة فى تعليم الرياضيات فى المراحل العليا، أن يدخل المتعلم فى عالم الرياضيات من حيث استخدام تعبيرات دقيقة، كذلك من حيث توفير الخبرة التى يعتمد عليها لبناء المفاهيم. وتقليديًا كان ذلك يحدث من خلال مقدمة بسيطة عن المفاهيم الرياضية والبرهان الرياضى فى المدرسة قبل تقديم الرياضيات بطريقة أكثر رسمية وتنظيميًا، وفى إطار أكثر منطقية فى الجامعة والكلية.

إن الانتقال إلى تفكير رياضى أكثر تقدمًا يمثل صعوبة لأننا ننتقل من مرحلة المفاهيم التى لها أساس بديهى مبنى على الخبرة إلى مرحلة تحديد المفاهيم بتعريفات رسمية يُعاد بناء مكوناتها من خلال الاستنتاجات المنطقية. وخلال مرحلة الانتقال وما بعدها يمتلئ العقل بالخبرات السابقة بالإضافة إلى المعرفة الاستنتاجية النامية. وقد أظهرت البحوث التجريبية أن هذا الانتقال، قد يتسبب فى خلاف معرفى يمثل عائقًا فى التعلم. وهنا يتم إلقاء نظرة على نتائج البحوث لوضع تصورات عن عدة مفاهيم متقدمة، مثل: الدوال، والنهايات، واللانهائية، والبرهان الرياضى، خاصة فى مرحلة الانتقال من المدرسة إلى الجامعة. ولكن علينا أولاً أن نتمهل قليلاً ونمعن النظر فى طبيعة إدراكنا للمفاهيم الرياضية، فحتى بالنسبة لعلماء الرياضيات يعتمد فهمهم للمفاهيم الرياضية على الخبرة الشخصية.

أولاً: تعقدات عقلية (نشاطات عقلية):

إن عقل الإنسان - كما كتب **أنطوان لافوسير** الكميائى الفرنسى الذى أعدم خلال الثورة الفرنسية - يتعقد عند رؤية الأشياء. ونضيف أن نشأة عقل جماعى قد يتسبب فى معاناة الأجيال، لأن إدراك الأشياء يتحقق بالتلقين من جيل لآخر.

وإذا نظرنا إلى التطور التاريخى للرياضيات، يمكننا أن نرى أن الأجيال المتتابعة طورت إدراكًا جماعيًا خاصًا بالأفكار الرياضية يعتمد على الاتفاق على المفاهيم المهمة. وقد اعتقد العلماء اليونانيون قبل **فيثاغورث** أن كل الأرقام منطقية، حتى أظهرت نظرية فيثاغورث أن الجذر التربيعى للعدد ٢ ليس كذلك.

واقترحت النظرية الديناميكية لأرسطو أن سرعة جسم متحرك تتناسب مع القوة المفروضة عليه. وجاءت قوانين **نيوتن** لتعارض ذلك، حيث اقترحت أن العجلة هى التى تتناسب مع القوة وليس السرعة. ولألفى عام كانت نظريات **إقليدس** الهندسية تمثل قمة الاستنتاج، حتى أدرك علماء الرياضيات فى القرن التاسع عشر أن هناك نظريات تقوم على افتراضات ضمنية (مثل: حقيقة أن قطرى المعين يقعان داخل الشكل) لم تكن استنتاجات منطقية يتم اشتقاقها من الحقائق.

ويكون من الخطأ أن نفترض أننا أخيراً فهمنا كل شئ بصورة صحيحة، وأن هذا الجيل لا يعانى من صراعات داخلية واضطرابات من الماضى. فعلى العكس، لدينا حصتنا أو نصيبنا من تعقيد العقل المتحد.

إن كثير من التعقدات العقلية التى نراها عند الطلاب قائمة فى الواقع لدينا، وقد انتقلت بصور عديدة من جيل إلى آخر.

على سبيل المثال: فكرة أن الدالة د (س)= ص تمثل قيمة فردية أصبحت جزءً من ثقافتنا الرياضية. وربما نرى من الغريب أن يؤكد الطلاب أن الدائرة س^{٢}+ ص^{٢}=١ يمكن أن تمثل دالة. ومع هذا فإن مصطلح الدالة الضمنية مازلنا نستخدمه فى الكتب لوصف هذا المقدار الجبرى. وقد وجد (للأسف) أنه تم نشر برنامج كمبيوتر إسمه (رسم بيانى للدالة الضمنية)، وهو يضم - ضمن أشياء عديدة - الرسم البيانى لـ س^{٢}+ ص^{٢}= ١ . وعليه يجب التفكير فى وضع تخطيط تمهيدى لمنهج جديد للطلاب من ١٦:١٩ سنة تمثل فيه المعادلة السابقة كدالة، مع أن ص ليست دالة س لأنه لا يوجد قيمة لـ ص لكل قيمة لـ س، ولكن يجب التفكير فيها على أنها دالة مزدوجة القيمة من س إلى ص.

ثانياً: تعريف المفهوم وصورة المفهوم:

ما هو التعريف الجيد؟ بالنسبة للفلاسفة أو العلماء، فإن التعريف الجيد يعبر عن كل ما يجب تعريفه، وينطبق فقط على تلك الأشياء المعرفة ويتفق مع القوانين المنطقية. ويختلف ذلك عن تعريف المفهوم من الناحية التربوية. فمن وجهة النظر التربوية، التعريف الجيد هو الذى يفهمه الطلاب.

إن الرياضيات الحديثة فى الستينيات كانت محاولة جريئة لخلق مدخل يعتمد على تعريفات واضحة للمفاهيم الرياضية تقدم بطريقة يفهمها الطلاب. ولكن هذه الحركة فشلت فى تحقيق كل آمالها، لأن الطرق الفردية فى التفكير آنذاك، اعتمدت على أكثر من الكلمات المستخدمة فى تعريف المفاهيم الرياضية.

فى نشاط رياضى بعينة، قد لا تستخدم الأفكار الرياضية على حسب تعريفها الرسمى فقط، ولكن أيضًا من خلال التمثيلات العقلية، والتى تختلف باختلاف الناس. وهذه النماذج الفردية تتطور من خلال النماذج التلقائية (النماذج القبلية السابقة على تعلم المفهوم، وتنشأمن الخبرة اليومية) وتتداخل مع التعريف الرياضى. ونلاحظ أن مفهوم النهاية يشير غالبًا إلى حدود لايمكن تخطيها، وقد يمكن أو لا يمكن الاقتراب منها. وأحياناً ننظر إليها على أنها فى متناول اليد وأحيانًا أخرى أنها بعيدة.

وبالتالى فإن خبرة الطلاب السابقة على التعريفات الرسمية لها تأثير كبير على طريقة تكوينهم لـلتمثيلات العقلية. وفى نهاية السبعينيات وبداية الثمانينيات من القرن الماضى، لاحظ كثير من الكتاب عدم تطابق المفاهيم، من حيث فهم علماء الرياضة لها مع فهم الطلاب لها. على سبيل المثال، لوحظ أن هناك صعوبات فى فهم عملية تحديد النهاية حيث تميل القواطع إلى التماس، ومعنى الأرقام العشرية اللامتناهية، والمفاهيم الهندسية، ومفهوم الدالة والنهايات والاتصال، ومعنى التفاضل، وتقارب وتباعد المتتاليات، ونهايات الدوال، والمماس، التتابعات اللانهائية، المقادير الجبرية اللانهائية ...إلخ.

ولإبراز دور التركيب المفاهيمى للفرد، قدم **فيزوهير تشيكوتز** مفهوم الصورة ومفهوم التعريف، ووصفاهما على النحو التالى:

«نستخدم مصطلح صورة المفهوم لوصف التركيب المعرفى الكلى المرتبط بالمفهوم، وهو يتضمن كل الصور العقلية والخصائص والعمليات المرتبطة به. ولا يحتاج تطور صورة المفهوم إلى الارتباط المنطقى. ونطلق على جزء من صورة المفهوم النشط فى وقت معين بأنه صورة المفهوم المستدعاة (المثارة). وفى بعض الأحيان، ربما نستدعى صوراً تبدو متعارضة، ولا نشعر بذلك التعارض إلا حينما نستدعى صوراً مختلفة فى وقت واحد.

وعلى الجانب الآخر، يمكن تعريف المفهوم بأنه عدة كلمات تستخدم لتحديد المفهوم. وقد تناولت الأدبيات باستفاضة التعارض فى التفكير بالنسبة لهذا الأمر، وذلك ما يوضحه الحديث التالى:

غالبًا تتعارض المعرفة الجديدة مع القديمة، والتعليم الفعال يتعامل مع هذا التعارض من خلال عدة استراتيجيات. وأحيانًا يمكن التوفيق بين المعارف المتعارضة، وأحيانًا أخرى لابد من اعتناق أو إقرار أحدهما فقط، وفى أحيان أخرى يمكن الاحتفاظ بكليهما شرط أن يكون كل واحد منهما فى جزء عقلى منفصل.

وبعامة إن تعلم فكرة جديدة لا يعنى إلغاء الأفكار القديمة. وعندما يواجه الطالب سؤالاً أو مهمة تتكون لديه فكرتان، وربما يستدعى الفكرة الجديدة أو القديمة. والخطر لا يكمن هنا فى امتلاك أو عدم امتلاك الفكرة الجديدة، بل اختيار (غالبًا دون وعى) أيهما يستدعى. ويمكننا أن نمزج الفكرتين أيضًا، ولكن النتائج غالبًا تكون تافهة.

وبتطبيق ذلك على الانتقال إلى التفكير الرياضى المتقدم، نجد أن الصورة العقلية للمفاهيم المبنية على الخبرات السابقة تتفاعل مع الأفكار الجديدة المبنية على التعريفات والبراهين. إن فكرة تعريف مفهوم بجملة - على نقيض وصفه - تبدو فى البداية صعبة الفهم، خاصة عندما تكون الكلمات فى التعريف غير معرفة فى حد ذاتها. ومن المستحيل أن نتعلم مفهومًا دون الاعتماد على صورة المفهوم لدى الفرد، وأيضا دون الاعتماد على أى تعريف منطقى.

ثالثا: الأصول الرياضية والأصول المعرفية:

يقول (**روبرت براوننج** ١٨١٢-١٨٨٩): نقب فى الكتب، واعتمد على أصول الأشياء.

فى ضوء المقولة السابقة، من الضرورى عند بناء منهج أن نبدأ بالأفكار البسيطة ثم نتحرك إلى الأفكار الأكثر تعقيداً، كلما زادت خبرة الطالب. ولكن: هل هناك أصول نبنى عليها المنهج أفضل من التعريفات التى تتطورت عبر الأجيال؟ المشكلة هنا تتلخص فى أن هذه التعريفات ثابتة ومتولدة، فى حين أن خبرات الطالب تعتمد على الدليل وأنها شخصية، وبالتالى تحجب صورة المفهوم لدى الطالب جودة التعريفات. مثلاً: يمكن تعريف الدالة على أنها عملية تخصيص عنصر فى مجموعة (المجال) لكل عنصر فى مجموعة أخرى (النطاق).

ومن غير المحتمل أن يعطى التعريف كل احتمالات النطاق، فالمجموعات ربما تكون مجموعة أعداد، أو فراغات، أو أشكال هندسية، أو مصفوفات،...إلخ، وأيضًا يكون التخصيص من خلال صيغة، أو تحويل هندسى، أو قائمة قيم.. إلخ.

إن ما يواجهه الطلاب من صعوبات ومشكلات، عندما يتعرفون على التعريفات الرياضية لأول مرة، هو أمر حتمى؛ لأن نطاق الاحتمالات فى التعريف محدود ويصبغ صورة المفهوم لديهم بصورة تتسبب فى الصراع المعرفى المستقبلى.

وبدلاً من التعامل مع تعريفات رسمية تضم عناصر غير مألوفة للمتعلم، من الأفضل أن نحاول إيجاد مدخل يُبنى على المفاهيم - لها دور مزدوج - المألوفة للطلاب، وتوفر أساسًا للتطور الر ياضى اللاحق. وقد أطلقت على هذا المفهوم «الأصل المعرفى». ويصعب إيجاد تلك المفاهيم، كما أنها تتطلب مزيجًا من أبحاث تجريبية (لمعرفة المناسب للطلاب فى مرحلة دراسية معينة) ومعرفة رياضية (لضمان أن هذه المفاهيم ذات علاقة طويلة المدى بالمفاهيم اللاحقة). وجدير بالذكر أن الأصل الرياضى يختلف عن الأصل المعرفى. ففى حين أن الأصل الرياضى يعتبر نقطة بداية مناسبة للتطور المنطقى للموضوع، فإن الأصل المعرفى يختص أكثر بتطور منهج الرياضيات نفسه.

على سبيل المثال، مفهوم النهايات كأصل رياضى قد تطور عبر القرون بفضل جهود مجموعة عظيمة من العلماء الر ياضيين. ولكن ثبت بالدليل أنه يصعب على الطلاب استخدامه كأساس فى تفكيرهم، وقد لا يكون أصل معرفى فى المراحل الأولى من التفاضل والتكامل. ومن ناحية أخرى، ففكرة أن رسومات بيانية معينة تبدو أقل تقوسًا عند تكبيرها، تعتبر بديهية يمكن أن يكتشفها أى طالب. والحقيقة أن هذه الفكرة يمكن أن تتطور إلى النظرية الرسمية لتضاعف التفاضل. كما يمكن استخدام الاستقامة الموضعية كأصل معرفى مناسب فى التفاضل والتكامل. إن قضية الاستقامة الموضعية تتطور عندما ندرك أن حل معادلة تفاضل من الدرجة الأولى يمكن أن ينتج من إيجاد دالة (متصلة موضعية) من المنحنى الذى يمثلها.

ومن الممكن استخدام البرمجيات لتكوين حل تقريبى من خلال رسم خط منقط يمتد بين طرفى المنحنى.

(١) مفهوم الدالة:

يعتبر مفهوم الدالة من الحقائق الأساسية فى الثقافة الغربية، وهى فكرة لم توجد فى ثقافة سابقة. وهذا المفهوم لا يمثل امتدادًا لأى مفاهيم ر ياضية سابقة، بل إنه منفصل تمامًا عنها.

ووفقًا لـ **كلينير** ١٩٨٩، فإن هذا المفهوم يعود إلى ٤٠٠٠ سنة مضت، وأدى ظهوره إلى وجود شبكة معقدة من المفاهيم مثل: الصورة الهندسية للرسم البيانى، والمقدار الجبرى كصيغة، والعلاقة بين العوامل المستقلة والتابعة، والمدخلات والمخرجات والعلاقة بينهما. وقد أدى ذلك إلى ظهور مجموعة جديدة من التعريفات النظرية.

وفى كتاب «الرياضة الحديثة» الذى وضعه **برتراند رسل**، أجريت محاولة جريئة لاعطاء الدالة تعريفًا رسميًا باستخدام نتيجة **ديكارت** من مجموعات أ، ب حيث: أ،ب مجموعتان، أ × ب هو ناتج **ديكارت** لـ أ، ب. وتكون المجموعة الفرعية(د)لـ أ × ب هى دالة عندما يكون (س$_١$ ،ص$_١$):

د (س) ← د (س) + ك، د (س) ← د (س + ك) وامتداد د (س) ← ك د (س)، د (س) ← د (ك س) بتمثيلاته البيانية. وقد ثبت أن التحويلات فى المجال د (س) ← د (ك + س)، د (س) ← د (ك س) هى الأصعب.

وقد أجرت **إيفن** دراسة (١٩٨٨) عن مفهوم الدالة لدى معلمى الرياضيات المستقبليين. ووجدت صعوبات مشابهة لدى الطلاب المعلمين فى السنة النهائية من دراسة الرياضيات، وقد تجاهل الكثيرون منهم طبيعة العلاقة بين المجموعتين التى عُرفت الدالة على أساسها. والبعض توقع أنه يمكن تمثيل الدوال دائمًا بمقادير جبرية. والبعض توقع أن تكون كل الدوال متصلة. وتقبل البعض الرسوم البيانية (المعقولة).. إلخ، والسؤال:

هل نتوقع أن يكون المعلمون قادرين على تدريس مفهوم الدالة وفقًا للتعريف الحديث، فى حين أن فهمهم للدالة محدود وبدائى؟ إن الفهم الناقص لمفهوم الدالة يمثل مشكلة، إذ يسهم فى وضع حدود فاصلة بين التعريف وصورة مفهوم الدالة لدى الطلاب، مما يجعل صورة مفهوم الدالة لدى الطلاب مشابهًا لصورتها فى القرن الثامن عشر.

وبرؤية التعقدات العقلية لدى معلمى المستقبل، فهل يكون من المستغرب أن تثبت الصعوبة المستمرة التى يعانى منها الطلاب عند مواجهة المشكلات العميقة الخاصة بمفهوم الدالة؟

وفى السنوات الأخيرة استخدام الكمبيوتر لتقديم مفهوم الدالة. وركزت عدداً من المبادرات لاستخدام الكمبيوتر فى التمثيل البيانى للدوال.

وهذه الوسائل غيرت من فهم الدالة، من عملية ربط بين النقاط إلى تصور عالمى عن السلوك الكلى للدالة. وعلى سبيل المثال: هناك مداخل جديدة ترى الشكل النوعى للرسوم البيانية وتقترح العلاقات الجبرية، وذلك يتسبب فى زيادة احتمالية إساءة فهم التمثيل البيانى. على سبيل المثال: قد يبدو الشكل مختلفًا تمامًا إذا رسم على نطاق مختلفة، وقد يكون هناك خداعًا بصريًا ينتج عن تغير نسب مقاييس

الرسم فى كل محور من الرسم البيانى. حقيقة، التكنولوجيا تعتبر قوة كبيرة فى أيدى الطلاب، ولكن لابد من الأبحاث الجادة للوقوف على ما تستطيع التكنولوجيا تقديمه لزيادة فهم الطلاب لموضوع الدالة، ورسوماتها البيانية.

على سبيل المثال: معظم برمجيات الرسوم البيانية المتاحة على الكمبيوتر تقبل الدوال المعطاة من خلال صيغة محددة، وذلك يعزز ضمنيًا تقييد الطالب بصورة مفهوم الدالة على أنها تتمثل فى تلك الصيغة. وتعتبر بعض برنامج الرسم البيانى و(س$_٢$، ص$_٢$) عناصر (د)، س$_١$ = س$_٢$ ومن ثم ص$_١$ = ص$_٢$.

ولكن هناك أدلة مستقاة من تجارب تظهر أنه بالرغم من أن هذا التعريف يعتبر أساسًا ر ياضيًا ممتازًا، فإنه قد لا يكون أصلاً معرفيًا جيدًا. إن اقتراح **ستشاف** الذى قدمه من أكثر من ٦٠ سنة بالتحرر من المفاهيم السابقة يعد اقتراحًا وجيهًا، إذا نظرنا إليه فى ضوء رغبتنا فى إعادة تكوين البناء المعرفى الكلى باستخدام مجموعة التعريفات النظرية الحديثة، عوضًا عن الأفكار السابقة. وتمثل إعادة البناء صعوبة كبيرة للطلاب.

وقد قرر **ماليك** ١٩٨٠ أن هذا التعريف يمثل إطارًا من الأفكار تختلف عن الأفكار التقليدية فى التفاضل والتكامل، كما أكد العلاقة المعتمدة على القوانين بين المتغيرات المستقلة والتابعة.

وقد ركز **سيربن سكا** على الآتى:

أهم معنى للدالة يتمثل فى العلاقة بين المتغيرات. فإذا أغفلنا ذلك، تفقد التمثيلات، مثل: المعادلات والرسوم البيانية معانيها، وتصبح مستقلة عن بعضها البعض. وتقديم الدوال للطلاب من خلال التعريف الحديث المستفيض يمثل خطأ تعليميًا، ويخالف طريقة التعليم.

وقد أظهرت الأبحاث التجريبية أننا حتى عندما نعطى الطلاب هذه التعريفات الرسمية، فإن خبرات الطلاب فى التعامل مع الدوال تتداخل مع الخصائص الشائعة الضمنية، وتكون صورة عقلية لمفهوم الدالة يحتوى ضمنيًا على تلك الخصائص.

مثلاً: إذا أعطينا الدالة فى صورة دالة، سيجعل ذلك كثير من الطلاب يدركون أن وجود صيغة رياضية ضرورى للدالة.

وقد طرح **فينرو دريفوس** عدداً من الأسئلة عن الدوال على ٢٧١ طالبًا فى الجامعة و٣٦ معلمًا، وكانت الإجابة على سؤال عن مفهوم الدالة: التعريف القياسى للدالة (كل قيمة لـ س تماثل قيمة لـ ص)، وكذلك حصلوا على استجابات، مثل:

- التوافق بين متغيرين.
- قاعدة التوافق.
- العملية الحسابية (للحصول على قيمة من قيمة أخرى).
- الصيغة الر ياضية، والمصطلحات الجبرية أو المعادلة.
- الشكل البيانى للدالة: ص= د (س).. إلخ.

وتزيد نسبة الإجابات الصحيحة لدى الطلاب الذين يتمتعون بخبرة وقدرة رياضية، وأيضا زادت نسبة الإجابات الخاطئة لدى الطلاب غير المتخصصين فى الرياضيات.

بمعنى؛ شملت الإجابة عن السؤال الذى تمحور حل مفهوم الدالة: التعريف القياسى والاستجا بات السابقة، كما أن السؤال استدعى الصور العقلية للمفهوم، مثل:

- الشكل متصل أو تغيرت خصائصه (خطين مستقيمين مختلفين).
- مجال الدالة (منفصل).
- هناك نقطة استثنائية.

وقد استنتج **ماركوفتس** وآخرون (١٩٨٦ - ١٩٨٨) أن تعقيدات التعريف الحديث للدالة يتسبب فى مشكلات، بسبب أنه يضم عدداً من المكونات المختلفة (المجال، والنطاق، والقانون).

ويقل التركيز على المجال والنطاق فى مرحلة المدرسة، ويزداد التركيز على القاعدة

أو العلاقة (والتى تعطى غالبًا فى شكل صيغة). والتأكيد على الرسوم البيانية ذات الخطوط المستقيمة يجعل الطلاب يستدعون صور الأشكال البيانية الخطية، عندما يُطلب منهم التفكير فى الدوال المحتملة لنقاط محددة على شكل بيانى.

غالبًا يستدعى الشكل الأول صورة خط مستقيم يربط بين النقطتين، وبذلك تكون هناك دالة واحدة فقط محتملة، لأن النقطتين لا يمكن ربطهما إلا بخط واحد فقط. أما الشكل الثانى فيثير عدة مشكلات، ربما لأن ترتيب النقاط يجعلهما يبدوان كخطين مختلفين. (إذا رُسم شكل يضم كل النقاط، فلكل قيمة لـ س، يكون لها قيمتان لـ ص، وبذلك لا تكون دالة).

ومما يذكر، أنه بالنسبة لهذه المسألة، يمكن ملاحظ الآتى:

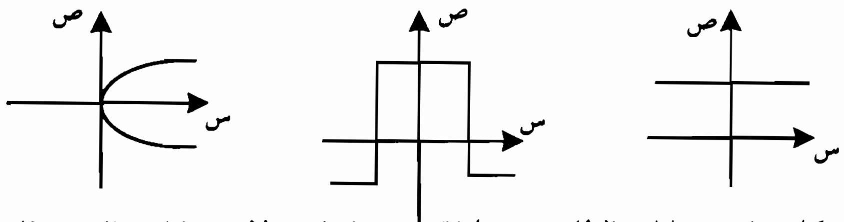
إن تصور الطلاب للدالة على أنها خطية يتأثر بدراستهم للهندسة (يتعلموها مع الجبر فى نفس الوقت)، وكذلك يتأثر بالوقت المحدد لدراسة الدالة الخطية فى المنهج.

وقد طرح **برنس** (١٩٨٨) عدة أسئلة على مجموعة من طلاب الصف الحادى عشر، ومن طلاب الجامعات عن التمثيلات المختلفة للدوال، مثل: هل تعرف ص بأنها دالة س فى التعبيرات التالية:

- ص = ٤
- $س^{٢} + ص^{٢} = ١$
- ص =
  - صفر إذا س ≥ صفر
  - س إذا صفر < س ≥ ١
  - ٢ − س إذا س > ١

قررت غالبية الطلاب أن التعبير الأول لا يمثل ذلك؛ لأن قيمة ص لا تعتمد على س، كما أن كثير من الطلاب قرروا أن التعبير الثانى يمثل دالة (لأنها دائرة كما أنها مألوفة بالنسبة لهم)، بينما مثلّ التعبير الثالث صعوبة للطلاب، لأنه بدا وكأنه لا يمثل دالة واحدة، بل عدة دوال.

وعندما تم سؤال الطلاب عن أى رسم بيانى يمثل ص كدالة س من الأشكال التالية:



كانت استجابات الطلاب مختلفة، حيث كانت الاستجابات بالنسبة للشكل الأول: س دالة ص، أنها دالة دائرية أو ص = س^{٢} وبالتالى تصبح دالة. وبالنسبة للشكل الثانى نُظر إليه على أنه ليس دالة، وذلك ليس بسبب الخطوط الرأسية، بل لأنه يبدو غريبًا أو لأنه لا يبدو مستقيمًا، وبذلك يصعب تعريف هذه الدالة. أما الاستجابات الخاصة بالشكل الأخير عند مقارنته بـ ص = ٤ أصبح يمثل دالة بالنسبة لكل طلاب الجامعة، ولكن بعض طلاب المدرسة تحيروا بسبب أن قيمة ص دائمًا ثابتة. وبعض طلاب الجامعة الذين رأوا أن الخط الأفقى يمثل دالة، وكانوا قد أكدوا سابقًا أن ص = ٤ ليست دالة، أدركوا بعد ذلك أن هناك تعارضًا بين الإجابتين. وعليه أراد بعض الطلاب - وليس الكل - أن يستعرضوا الأسئلة مرة أخرى ليعدلوا إجاباتهم.

وفى هذه المرحلة، يصبح من المفيد استعراض بعض تلك الأسئلة لرؤية التعقيدات التى تحدث فى العقل التى نتشارك فيها. على سبيل المثال: الأسئلة المرتبطة بالشكل الأول افترضت أن ص هى دالة محتملة لـ س. الرسم البيانى الأول يمثل ما نعتبره غالبا رسم بيانى برامترى Parametric Graph. والرسم الثانى يعبر عن عدم الاتصال. وفى الحقيقة إن الرسم البيانى هو فقط تمثيل للدالة، مع وجود صعوبة فى إدراك معناه. فمثلاً: الأطفال الصغار يرون الرسم البيانى كمنحنى وليس كمجموعة نقاط متصلة.

ولكن: هل يمثل الرسم الثالث دالة؟ لا يبدو ذلك، وربما تكون دالة إذا الخطوط الرأسية شديدة الانحدار، وليست رأسية، لنقل:

ص = -١   إذا كان اس ا > (١ + ك).

،ص = $\frac{١ - |ك|_{١}}{ك}$ إذا كان (١ - ك) > | س | > (١ + ك).

،ص = ١ إذا كان | س | ≥ (١ - ك) حيث ك صغيرة جداً (مثل: ك = $\frac{١}{١٠٠٠}$)

وعدد قليل من الطلاب على دراية بتلك الاحتمالات.

وحتى الصعوبات الكبيرة مع مفهوم الدالة يمكن مواجهتها باستخدام تمثيلات مختلفة (شكل بيانى، أو صيغة، أو جدول، أو وصف لفظى).

على سبيل المثال، وجد **دريفس وإيسنبرج** أن الطلاب يعانون من صعوبات فى ربط التحويل الجبرى، مثل: التغييرات المقدمة من الجامعة القومية فى استراليا استثناء، حيث تقبل تلك البرامج الدوال المعرفة بصيغ مختلفة فى مجالات عدة.

وحديثًا فقط ظهرت برامج للرسم البيانى تسمح بكتابة الدالة د (س). على سبيل المثال ؛ إن مشروع الرياضيات (تحليل الدوال) فى بريطانيا يقبل دوالاً مكتوبة فى شكل مقادير جبرية، مثل: ق (أ) = أ + حا أ، ف (ن) = هـ ن.

وفى المقابل يمكن استخدام هذه المقادير لرسم شكل بيانى يمثل: ص = د(س +١)، ص = د (س) + ١، ص = د [ق (أ)].

ولكن ما زال مقصوراً على الدوال المعطاة فى صورة صيغ رياضية.

ويقدم (نموذج التمثيل الثلاثى) تسهيلات لرسم الأشكال البيانية للدوال، وحساب وتعيين القيم الرياضية للدالة، والبحث لإيجاد نقط تثبت الاستواء من عدمه. والدوال هنا يُمكن أن تكون مجموعات، أو قيم مطلقة، أو جذر تربيعى، أو دوال الأعداد الصحيحة معرفة على مجالات متصلة أو منفصلة. ويمكن استخدام البرمجيات فى أنشطة حل المشكلات للكشف عن - على سبيل المثال - كيفية استخدام الطلاب طرق التمثيل المختلفة لمعرفة التساوى أو عدم التساوى، عن طريق تكبير نقاط الرسوم البيانية أو استخدام مزيجًا من استراتيجيات التقدير والبحث الرقمى. وقد ذكر **ستشورز** وآخرون (١٩٨٨):

إن البرمجيات تمكن الطلاب من الوصول إلى مستويات معرفية عليا فى فهم الدوال. على سبيل المثال: إن زيادة الخبرات فى الرسوم البيانية يقلل بصورة كبيرة

استجابة «الرسم البيانى الخطى» عن أسئلة تتطلب رسم دوال من خلال إعطاء مجموعة من النقاط. ويؤدى استخدام البرمجيات إلى استخدام استراتيجيات أكثر تعقيداً لحل المعادلات.

وهناك تزايد فى استخدام برمجيات الرسوم البيانية والحسابات البيانية لرسم الأشكال البيانية للدوال. وقد ظهرت بعض هذه البرمجيات فى بحث أجراه **لين هاردت** وآخرون (١٩٩٠) عن العلاقة بين الرسوم البيانية والدوال. وفى الواقع، تعتبر هذه العلاقة مصدراً ممتازاً للمعلومات، ومرجعًا لمزيد من الأبحاث التجريبية عن مفهوم الدالة بصورة عامة.

وبتأكيدنا على التمثيلات العديدة لمفهوم الدالة: صيغة، ورسم بيانى، والعلاقة بين المتغيرات، غالبًا ما نتجاهل فكرة أن الدالة تعتبر عملية. على سبيل المثال: على الرغم من أن الرسوم البيانية غالبًا هى طريقة ممتازة للتفكير فى الدالة، فإن عدداً قليلاً من الطلاب يربطون بين الرسم البيانى والعمليات الضمنية للدالة [حدد نقطة على المحور س وتتبع الخط الرأسى ثم إرسم خطًا أفقيًا يتقاطع مع المحور ص لإيجاد قيمة ص = د (س)] وعوضًا عن رؤية ذلك يرى الطلاب الرسم البيانى كشئ: منحنى ثابت.

وللتفكير فى الدالة كعملية، قدم **دونبسكى** ومساعدوه مفهوم الدالة بواسطة برنامج آيرز وآخرون (١٩٨٨). وقد أعد برنامج يونكس عدداً من الأوامر لاستخدام الطلاب، بعضها خاص بالأعداد، وبعضها خاص بالنص. وكان المقصود مساعدة الطلاب على التفكير فى الدالة من الناحية الديناميكية على أنها عملية، واستاتيكيًا على أنها هدف عقلى لإجراء عمليات لتركيب دالة. وعلى الرغم من أن عدد الطلاب المشاركين كان قليلاً، فإن الدلائل أشارت إلى أن طلاب المجموعة التجريبية الذين استخدموا الكمبيوتر كانوا أكثر فاعلية من طلاب المجموعة الضابطة الذين استخدموا الطرق التقليدية (الورقة والقلم).

ومن خلال التجربة، طور **دونبسكى** فكرة برمجة المفاهيم العامة للدالة باستخدام لغة ISETL. وتتيح هذه اللغة للطلاب التعامل مع الدوال على أنها مجموعات من

الأوامر مثل: التعامل مع الاجراءات، وإجراء عمليات حسابية مثل: تركيب الدالة بطريقة رياضية. والاستخدامات الحديثة لـ ISETL تتيح للمستخدم رسم الشكل البيانى للدوال.

وقد أظهرت الأبحاث التجريبية أن الطلاب يمكنهم أن يتعلموا التفكير فى الدالة كعملية من خلال برمجة الكمبيوتر على تنفيذ العملية. وفى مرحلة لاحقة، فإن دالة معرفة بتلك الصورة يمكن استخدامها مدخلاً لعملية أخرى، وبالتالى اعتبار العملية كهدف. وهذا يقودنا إلى إقتراح، مفادة: إجراءات (عمليات) الدالة يمكن أن توفر أساسًا معرفيًا يمكن أن ينبثق عنه المفهوم الر سمى. وتوفر لغة ISETL بيئة برمجية تساعد الطلاب فى الانتقال الصعب من فهم الدالة كعملية إلى الدالة كهدف.

ووجود مداخل متعددة لمفهوم الدالة، يُساعد على تحسين فهم أجزاء معينة من مفهوم الدالة، وأيضا يساعد على التمكن من قدرات حل المشكلة. ولكن لا يوجد دواء لمعالجة كل الأمراض، إذ إن فكرة الدالة كعملية يمكن أن تكون أساسًا معرفيًا، وهذا الأساس المعرفى يصطدم بعوائق عديدة، منها أن العملية مفهوم فردى، وامكانية ربط الدالة بالتمثيلات البديلة العديدة.

(٢) مفهوم النهاية:

يقول (**هوراس** ٦٥-٨ قبل الميلاد): «لكل شئ حد مناسب، وهناك حدود ثابتة فى النهاية، دونها يكون هناك خطأ».

ويعتبر مفهوم الدالة مفهومًا أساسيًا فى الرياضة الحديثة، أما مفهوم النهاية فهو يشير إلى الانتقال إلى مرحلة أعلى فى التفكير الرياضى. ومثلما لاحظ **كورنو** (١٩٨٣) فإن هذا المفهوم يعتبر أول مفهوم رياضى لا يحصل الطلاب على نتيجة له من خلال حسابات رياضية مباشرة، بل إنه محاط بالغموض، حيث يصل المرء لوجهته من خلال طرق ملتوية.

ونجد النهايات فى سياقات رياضية مختلفة، مثل: نهاية سلسلة أو تتابع، والدالة د(س) حيث س ⟵ أ أو س ⟵ ∞ . أيضًا، قد تتحقق النهايات فى الاتصال، وفى التفاضل، وفى التكامل. يكون من المناسب التميز بين هذه الأنواع

المختلفة للنهايات، مثل: النهاية المنفصلة للتتابع أ ن حيث ن ←∞، والنهاية المتصلة للدالة د (س) حيث س ←أ. وقد أظهرت الأبحاث التجريبية وجود صعوبات شائعة بين المبتدئين فى فهم الأنواع المختلفة للنهايات.

على سبيل المثال، إن كلمة «نهاية» فى حد ذاتها لها معانى عديدة فى الحياة اليومية تتعارض مع الفكرة الرياضية. ففى الحياة اليومية تعنى النهاية غالبًا شئ لا يمكن أو لا يجب تجاوزه، مثل حدود السرعة. والمصطلح الرياضى يضم عبارات، مثل: يميل إلى، أو يقترب من. ولهذه العبارات أيضًا معانى فى الحياة اليومية تختلف عن معانيها الرياضية. على سبيل المثال، عندما نستخدم هذه التعبيرات للتعبير عن تتابع يقترب من نهاية، فإن هذه التعبيرات تحمل بشكل ثابت المعنى المقصود، وهو: إن أطراف التتابع لا يمكن أن تساوى النهاية.

وتتفاقم مشكلة التعامل مع النهايات بسبب الصورة المفاهيمية المحدودة للتتابع والدوال، مثلاً غالبًا يتعرف الطلاب على مفهوم التتابع حيث تُعطى حدوده فى صورة صيغة. وإذا أراد المرء أن يظهر أن بعض حدود التتابع تساوى النهاية، عليه أن يفكر فى التتابع ١، ٠، $\frac{١}{٢}$ ، ٠، $\frac{١}{٣}$ ، ٠ والطلاب الذين ينظرون إلى حدود التتابع كصيغ استنباطية ربما يصرون على أن هذا ليس تتابعًا واحدًا وإنما اثنان، وأن الحدود الفردية يمكن أن تكون فى تتابع متوافق هو: ١، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ وتتجه إلى الصفر، وأن الحدود المتكافئة ثابتة وهى الصفر.

واقترح **دافيس وفينر** أن هناك كما يبدو مراحل لسوء الفهم لا يمكن تجنبها مع مفهوم النهاية. أولها يرجع لتأثير اللغة، حيث يذكرنا المصطلح بأفكار دخيلة على الرياضيات. كما أن هناك أفكارًا تستحضرها تلك الكلمات ولها أصول فى الخبرات السابقة. وعلى الرغم من محاولات الكُتاب تدريس مقرر لايستخدم فيه كلمة «نهاية» فى المراحل الأولية، فقد استنتجوا فى النهاية: أن تجنب اللجوء إلى مثل تلك التمثيلات العقلية قبل الرياضيات لا طائل أو فائدة منه.

ومصدر آخر لسوء الفهم هو التعقيد المحض للأفكار التى لا تظهر فى شكل تام وكامل، ولذلك فإن بعض أجزاء الفكرة لها تمثيلات عقلية، وأجزاء أخرى من الفكرة

ليس لها تمثيلات عقلية. ومن المحتمل أن تسود أمثلة فى عملية التعلم، حيث وجد أن التتابع (١، ٢، ٣) يسود الأمثلة الأولية، ولذلك فمن غير المستغرب أن تسيطر هذه الصورة للتتابع على الصورة المفاهيمية للطالب. ويمكن أن يؤدى ذلك إلى سوء تفسير خبرة الفرد الشخصية، فمثلاً: إذا تعامل الطلاب مع أمثلة كثيرة على تتابعات معطاة بصيغ، سيفرضون افتراضًا خاطئًا، وهو: توجد صيغة جبرية بسيطة لكل ن للمتتابعة أ ن، وهى تمثل جزءً أساسيًا من نظرية التتابع.

ومعظم الأفكار غير الرسمية للنهاية تحمل فى طياتها شعوراً بديناميكية شئ يقترب من القيمة الحدية. على سبيل المثال: بتزايد ن، فإن المجموع $١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \cdots + \frac{١}{٢^{ن}}$ يقترب من النهاية ٢، ولهذا نتيجة معرفية حتمية أطلق عليها «خاصية النهاية العامة»، وهى: الاعتقاد بأن أى خاصية تجمع بين كل أطراف التتابع تسيطر أيضًا على الحد. وهذا الاعتقاد له خلفية تاريخية مهمة، فى مبدأ الاتصال الذى استنتجه **ليبنز**.

ومن خطاب **بايلى**، نذكر: فى أى إنتقال افتراضى، للوصول لأى نهاية، مسموح بتكوين منطق عام، ربما يضم أيضًا النهاية.

ونجد ذلك فى تاريخ الرياضيات، على سبيل المثال: فى رأى **كوتشى** أن نهاية دالة متصلة لابد أن يكون متصلاً. وتظل فكرة أن نهاية تتابع لابد أن تقل عن الواحد لأن كل أطرافه أقل من الواحد تمثل عبئًا عقليًا. وقد درس **كورنو** هذا الموضوع باستفاضة وأرسى مجموعة قوانين، مثل: ٩ ,، ٩٩ ,،.. تميل إلى ٩ , ولكن بنهاية ١؛ لأنها تميل إلى الصفة المميزة ٩٩٩٩ , . ولكنها لا يمكن أن تتعدى النهاية ١ .

ومن غير الغريب أن نجد أن محاولة جعل مفهوم النهاية بسيط باستخدام اللغة اليومية، يؤدى إلى مشاكل مفاهيمية حادة. وقد أجرى «**أورتون**» ١٩٨٠ بحثًا عن مفاهيم الطلاب للنهاية باستخدام سلم ذا درجات أفقية وأضاف نصف درجة على كل درجة، وكرر نفس العملية مع أنصاف الدرجات.

وفى مقابلة طرح الأسئلة التالية:

أ - إذا كررنا هذه العملية بشكل غير محدود، ما النتيجة النهائية؟

ب - كم مرة سنكرر هذه العملية لنصل لنتيجة نهائية؟

جـ - ما مساحة الشكل النهائى (ما حجم أصغر درجة فى السلم النهائى)؟

د إذا أعطى التلميذ معادلة كإجابة عن السؤال الأخير، فهل يمكن استخدامها للحصول على الطرف النهائى أو نهاية التتابع؟

وبرر استخدام مصطلح «الطرف النهائى» بقوله أنه استخدمه كمحاولة لمساعدة الطلاب على فهم معنى النهايات.

وبالتأكيد فإن **أورتون** ليس العالم الوحيد الذى حاول مساعدة الطلاب باستخدام تمثيل غير رسمى. ولكن عبارة «السلم النهائى» من المحتمل أن تخلق مفهومًا عامًا للنهاية، حيث يتخيل الطلاب السلم بعدد لانهائى من الدرجات، وهذا التحديد يمثل الاستجابة التى يحصلون عليها.

إن مواجهة تلك الصعوبات فى المفهوم الديناميكى للنهاية، يجعلنا لا نتعجب من كون التعريف الرسمى محفوفًا بالمشاكل المعرفية. فحتى مع عبارة «بإعطاء إبسلون» قيمة أكبر من الصفر قليلاً، يمكن تفسيرها بأن الإبسلون عدد صغير جداً، وهذا يؤدى بالتالى أن يمثل الرمز لنا عدداً صغيراً.

يوحى كل شئ بوجود أرقام صغيرة، أقل من الأعداد الحقيقية، ولكنها ليست صفراً . ويمثل الرمز ε لكثير من الطلاب عدداً أقل من كل الأرقام الحقيقية، ولكنه لا يساوى صفراً.

وبنفس الطريقة، فى التفاضل والتكامل، فإن تقديم رموز $\delta\chi$ (تستخدم فى المملكة المتحدة للتعبير عن كمية محدودة صغيرة لـ χ)، $d\,\chi$ (جزء من الرموز $dy/d\chi$) يؤدى إلى تكوين فكرة عامة أن هناك أرقامًا متناهية الصغر أو صغيرة.

إن تقديم المفهوم العام للنهاية لا يلغى الأفكار الديناميكية البدائية، التى درسنا بها المفهوم، إذ غالبا ما نستمر فى اعتناق تلك الصورة الديناميكية.

وفى دراسة عن مفهوم نهاية تتابع، ضمت ١٣٨٠ طالبًا فى مختلف المراحل الدراسية. وقد طرح على الطلاب سؤالاً عن كيفية تفسير التتابع التجميعى لطالب

فى سن ١٤ أو ١٥ من عمره (سؤال من المحتمل أن يستدعى صورة التعريف الرسمى للمفهوم). وصنفت الإجابات إلى ٤ أقسام رئيسة، هى:

١- ديناميكية التماثل ١٢٪

التتابع الجميعى هو زيادة الحدود أو إنقاصها، أو هو زيادة أو إنقاص التتابع للوصول لنهاية.

٢ - ديناميكى ٣٥٪

un تميل إلى L، un ε تقترب من L ، المسافة من un إلى L تصبح صغيرة.

القيم تقترب من رقم أكثر فأكثر.

٣ - استاتيكى (ثابت) ١٣٪

un فى مسافة قريبة من L، un مجموعة حول L

un قريبة من L.

٤ - مختلط ١٤٪

خليط من السابق.

بالإضافة إلى أن ٤٪ من التلاميذ قد أعطو التعريف الرسمى، ٥٪ لم يحاولوا الإجابة عن السؤال، والباقى أعطى عبارات خاطئة أو ناقصة. والحقيقة أن استدعاء الطالب صورة عقلية معينة لا يعنى غياب الصور الأخرى.

إن عرض الطالب لفكرة قديمة (وخاطئة)، لا يمثل دليلاً على أن الطالب لا يعرف الفكرة الصحيحة. ففى حالات كثيرة يمتلك الطالب كلاهما، ولكنه يستدعى الفكرة القديمة. تقديم تفسير يناسب طالباً فى سن ١٤ أو ١٥ من عمره يستبعد استخدام التعريف الرسمى نظرًا لصعوبته. وهذه الصعوبة أكدها **طول وفيز** ١٩٨١ عندما طلبا من ٧٠ طالبًا فى السنة الجامعية الأولى من ذوى التأهيل الرياضى العالى أن يكتبوا تعريفًا لنهاية الدالة: $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نها}}$ د (س) = ك حيث ك مقدار ثابت.

كان من المتوقع أن يعطى الطلاب تعريفًا ديناميكيًا على أساس أن الدالة د (س) تقترب من (ك) عندما (س) تقترب من (أ)، وبعضهم أعطى تعريفًا رسميًا.

وكان معدل الإجابة كالتالى:

رسمى	صحيح ٤	خطأ ١٤
ديناميكى	٢٧	٤

وكما نرى، فغالبية الذين ذكروا التعريف الديناميكى (الأسهل) استطاعوا تذكره بصورة صحيحة، بينما غالبية الذين اختاروا إعطاء التعريف الرسمى لم يستطيعوا تذكره بصورة صحيحة.

وقد أخفقت فكرة تدريس «النهاية» باستخدام الكمبيوتر بشكل كبير. فلغة الحساب العادية مثل البيسك والباسكال وسى، تحتفظ بالأرقام فى أماكن ثابتة فى الذاكرة الرقمية، وهذا يؤدى إلى مشاكل خطيرة فى الدقة عند حساب نهاية، مثل:

$$\text{نها}_{أ \to ٠} \frac{\text{جا}(س+أ) - \text{جا}\, س}{أ}$$

عندما تكون (أ) صغيرة، فإن البسط والمقام يحتويان على أرقام صغيرة، وحاصل قسمتهما من المحتمل أن يكون غير دقيق لحد بعيد.

وفى هذا السياق يجب مناقشة دقة الحساب بالكمبيوتر. والمعالجة الرمزية للنهايات لا تصيب دائمًا. فالمقدار الجبرى $\frac{(س+أ)^{ن} - س^{ن}}{أ}$ يمكن تبسيطه إلى (٢س+أ) دون وجود تحذير بأن أ = الصفر. وأيضا المقدار الجبرى $\frac{(س+أ)^{ن} - س^{ن}}{أ}$ يمكن وضعه فى الصورة.

$$\frac{(س+أ)^{ن}}{أ} - \frac{س^{ن}}{أ}$$

واختيار نهاية لهذا المقدار، حيث (أ) لا تؤول إلى الصفر لا يعطى ن $س^{ن-١}$ بعامة يواجه التلميذ صعوبة بالغة، عندما يحاول برمجة الرموز، حيث يكون من

الصعب عليه، تحويل المقدار الجبرى لشكل مرغوب فيه. ومرة أخرى تشير كل الدلائل أنه - على الرغم من أن مفهوم النهاية (من منطلق رسمى) يعتبر أساسًا رياضيًا جيدًا - فإنه ليس أصلاً معرفيًا مناسبًا. فإذا كان من الصعب أن نبدأ «بالنهاية» فى موضوع مثل التفاضل والتكامل، فما هى البدائل المتاحة؟ وبدلاً من إعطاء مفهوم النهاية بشكل مباشر فى التفاضل، يمكن أن تكون البداية تكبير الرسوم البيانية، إعتمادا فى ذلك على فكرة أن الأصل المعرفى للتفاضل والتكامل هى فكرة تكبير الرسم البيانى لدالة التفاضل. وتساعد البرمجيات على إعطاء صور غنية للمفاهيم من خلال عرضها للدوال المعيارية، وأيضًا الدوال المنحنية.

وعلى ذلك، يمكننا فى أول درس للتفاضل والتكامل استكشاف الدوال المستقيمة والمنحنية بتكبير الرسوم البيانية. وهذا يتيح للطلاب بناء صور مفاهيمية أغنى، بحيث تضم أمثلة على دوال التفاضل، ودوال غير تفاضلية، كما يوفر أساسًا معرفيًا للنظريات فيما بعد.

وهذه ليست طريقة سهلة، ولكن هكذا الحياة، لا يوجد بها طريق ملكى لحل المشكلات. إن رؤية صعوبة مفهوم النهاية، يعطينا فكرة على أن الطريق أمام الطلاب لن يكون سهلاً.

وبالتأكيد لن نحاول تسهيل الطريق بتجنب الصعوبات أو بالافراط فى التبسيط؛ لأن ذلك سيمثل صعوبة لهم فيما بعد. وأفضل طريق هو توفير خبرة غنية تمكن الطلاب من مواجهة الصعويات، والتوصل إلى مفهوم أكثر ثباتًا، مع الانتباه إلى الشراك المحتملة.

(٣) التفكير فى اللانهائية:

يقول **ويليام بلايك** (١٧٥٧ - ١٨٢٧) فى دلالات البراءة:

لرؤية العالم فى حبة رمل.

والجنة فى زهرة برية.

امسك اللانهائية فى راحة يدك.

والأبد فى ساعة.

إن التفكير فى اللانهائية ينتابنا جميعًا فى وقت ما، عندما ندرك وجودنا الفانى فى هذا الكون الواسع. والأبحاث التى تناولت طبيعة مفاهيم اللانهائية لدى الطلاب يسيطر عليها تعقدات عقل الباحث أكثر من أى أبحاث أخرى. ولكن ماذا نعنى باللانهائية؟ سيكون من المفيد أن نتوقف لدقيقة، ونفكر فى معنى اللانهائية قبل متابعة القراءة.

تاريخيًا، ميز الفلاسفة بين اللانهائية الحقيقية (هناك عدد لا نهائى من الأرقام) ولا نهائية محتملة (هناك عدد أكبر من كل عدد). وحديثًا فسرت اللانهائية الحقيقية باستخدام نظرية **كانتور** للأرقام ،والخاصة بالتشابه بين المجموعات. والمجموعة اللانهائية هى المجموعة التى تتوافق مع مجموعة فرعية صحيحة. فالأعداد {١، ٢، ٣، .. ن ..} تعتبر مجموعة لا نهائية لأنه يمكن وضعها فى توافق مع الأعداد {٢، ٤، ٦،..، ٢ ن} حيث تقابل ن مع ٢ن. وهذا الشكل من اللانهائية شائع فى الرياضة الحديثة.

ولكن هناك خصائص للأعداد اللانهائية، يجد الكثيرون صعوبة فى فهمها. فمثلاً: أن مجموعة ما تضم أى عدد من العناصر مثلها مثل مجموعة أعداد صحيحة فرعية. وهناك عدد كبير من النقاط على خط ما، تتشابه مع عدد النقاط على خط ضعف الطول.

وأجريت عدد من الدراسات عن عدم الاتساق بين اللانهائية الحقيقية لـ **كانتور** وحقائقنا. وهنا تتولد تعقدات فى عقولنا نتيجة خبراتنا فى مقارنة المجموعات اللانهائية. ومن المحتمل أن تتناول هذه الدراسات طبيعة فهمنا، وكذلك الصراع الذى يحدث داخل عقول الأطفال. ولهذا من الضرورى أن نحدد باختصار طبيعة مفاهيم اللانهائية العديدة قبل أن نتابع.

فى بحث أجرته **طول** (١٩٨١) إقترحت أن خبرات اللانهائية التى يتعرض لها الطلاب نادرًا ما ترتبط بمقارنة مجموعات، مما يعنى أنهم نادرًا ما يضعون الأساس المعرفى للمفاهيم الأساسية للانهائية. على سبيل المثال، عندما يفكر طفل فى «نقطة على خط»، ربما يفكر فيها على أنها علامة بالقلم الرصاص، والعلامة لها حجم.

والطفل الذى يرى أن حجم النقطة صغير جداً، من المحتمل أن ينمى مفهوماً عاماً للنقطة بأنها صغيرة جداً.

فإذا ما صنعنا خطاً من هذه النقاط، يكون هناك عدداً محدوداً، مثلاً مائة نقطة تصنع الخط. ويتطلب خطاً بضعف الطول ضعف عدد النقاط، مثلاً مائتين نقطة. والطريقة الوحيدة التى تجعل عدد النقاط فى الخطين واحدة أن نضاعف حجم النقطة. وبتطبيق هذه الاستنتاجات على موضوع اللانهائية؛ يكون من الطبيعى أن نحصل على عدد لا نهائى من النقاط الصغيرة أو متناهية الصغر فى خط وضعف العدد فى خط بضعف الطول. إذا اقترحت هذه الفكرة على متخصص فى الرياضيات، فإنه قد يضحك من سذاجة الاقتراح، وقد يقول: نعم سيكون هناك ضعف عدد النقط على الخط الأكبر - فأحدهما ذا ^{ن}صفر عنصراً عليه، والآخر به ^{٢ن}صفر عنصراً، وتكون ^{ن}صفر = ^{٢ن}صفر إن ذلك الرياضى قد يظن أنه من السذاجة أن نظن خلاف ذلك.

دعنا نتخيل أن خطاً عدد نقاطه (ن) يحتوى على نقط بطول $\frac{١}{ن}$. إذا كانت ن كبيرة جداً يكون $\frac{١}{ن}$ صغير جداً. وخط بضعف الطول عدد نقاطه (٢ن) من نفس الحجم، حيث (٢ن) أكبر، وبالتأكيد لا تساوى (ن). و يتيح التحليل غير المعيارى أن نجعل (ن) عنصراً فى حقل منظم أكبر من الأعداد الحقيقية بحيث (ن) أكبر حجماً فى الترتيب المعطى من أى عدد حقيقى. ومن هذا المنظور تكون (ن) لا نهائية.

وبالتالى $\frac{١}{ن}$ أصغر من أى عدد حقيقى إيجابى، وبالتالى تكون متناهية الصغر. وهكذا فإن التحليل غير المعيارى يرى أنه يمكن صنع خط من عدد لا نهائى من النقاط متناهية الصغر. وخط بضعف الطول سيحتاج ضعف عدد النقاط من نفس الحجم. وعلى عكس اللانهائية الحقيقية، فإن الأعداد اللانهائية غير المعيارية (ن)، (٢ن) غير متساويين. فأحدهما أكبر من الآخر.

وبالتالى فعلى الرغم من اختلاف مفهوم اللانهائية عن اللانهائية الحقيقية، فإن هناك خصائص تتشابه بين مفهوم اللانهائية واللانهائية غير المعيارية.

وحيث أننا نتعامل مع مفهوم اللانهائية خلال الانتقال إلى التفكير الر ياضى المتقدم، فإننا الآن على دراية بالاحتمالات. وهناك أكثر من مفهوم للانهائية.

والرمز ∞ المستخدم فى عبارات (مثل: الحد ن يميل إلى∞) يمثل فكرة اللانهائية المحتملة. وعادة يطلب من الطلاب عدم التفكير فيه على أنه عدد حقيقى، ومع هذا ربما يرتبكون عندما يجدون أن سياقات كثيرة تتعامل مع الرمز∞ ، على أنه عدد حقيقى.

وهناك ثلاثة مفاهيم للاتهائية الحقيقية: (١) اللانهائية الحقيقية (وتعنى توسيع مفهوم الحساب بواسطة مقارنة المجموعات، وهو الشكل الذى يفضله علماء الرياضة)، (٢) اللانهائية الترتيبية (مفهوم قدمه كانتور لمقارنة المجموعات المرتبة)، (٣)مفهوم اللانهائية غير المعيارية (تعميم مفهوم التناسب من الأعداد الحقيقية إلى حقول أكبر مرتبة)، وللتسهيل يمكن تسميتها لا نهائية متناسبة. وكل هذه الأنواع هى كيانات مناسبة للدارسة فى الرياضيات المتقدمة. وللحكم على التفكير لا يجب أن نفكر فى نوع واحد فقط من اللانهائية الحقيقية، على أنه المفهوم الرياضى الصحيح الوحيد.

على سبيل المثال، الإجابة عن سؤال «السلم اللانهائية» تعتبر إجابة غير معيارية، ولكنها معقولة تمامًا، على الرغم من رفض التحليل المعيارى لها. وبالمثل فكرة أن ٩٩٩٠٠٠ , تضم عدداً عدد لا نهائى من الأرقام حيث (ن) صغيرة جداً وأقل من ١

وإذا كان المطلوب حساب نهايات متعددة، مثل نهاية:

$$نهـــا \frac{ن^{٢}}{ن^{٢}+١} \quad ، \quad نهـــا \frac{ن^{٥}}{(١,١)^{ن}}$$

حيث (ن) تميل للانهائية، فإن الطالب الذى يكتب $\frac{ن^{٢}}{ن^{٢}+١} \longrightarrow \frac{\infty}{\infty} = ١$ يرى أنه بالمثل: $\frac{ن^{٥}}{(١,١)^{ن}} \longrightarrow \frac{\infty}{\infty} = ١$

ولكن إذا أجاب بشكل حازم: لا، لن تعطى هذه النتيجة، الحل الصحيح لأنه فى هذه الحالة خارج الكسر هى لا نهائية أكبر والنتائج سيكون صفراً.

وهذا الإحساس باللانهائية للأحجام المختلفة لا يمثل مفهومًا حقيقيًا، بل هو استنتاج مبنى على خبرات فى الحساب، ويقترب من مفهوم اللانهائية المتناسبة.

وكمثال آخر على اللانهائية المتناسبة، حيث:

$$١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + ...$$

ويقال أن المجموع = ٢ − $\frac{١}{\infty}$، حيث لا يوجد نهاية لمجموع الأجزاء.

وهنا تؤدى اللانهائية المحتملة إلى مفهوم عام عن اللانهائية المتناسبة. والنهاية المقترحة أقل من ٢ . يتفق الحساب مع التحليل غير المعيارى، ولكنه لا يتفق مع الأعداد الحقيقية حيث لا يمكن قسمة اللانهائية.

معظم خبرات التعامل مع النهايات تربط الأشياء التى تكبر أو تصغر أو تقترب، بعضها البعض. وكل هذه الخبرات مستنتجة من الحساب وليس من المقارنات بين المجموعات، ومن المحتمل استحضار اللانهائية المتناسبة، دون استحضار اللانهائية الحقيقية. وتتيح فكرة أن النهايات واللانهايات - غالبًا ما يعتبران معًا - ينتميان إلى شيئين مختلفين ونماذج متعارضة.

وللوقوف على إمكانية أن يمتلك الطلاب أفكاراً كثيرة مختلفة عن اللانهائية، عليهم القيام بتحليل صور مفهوم اللانهائية لعديد من المتخصصين فى الرياضة والفيزياء، وذلك قبل دراستهم التفاضل والتكامل. لقد كانت أعمارهم ١٦ سنة، وقسموا فى مجموعات، فكانت استجاباتهم بالنسبة لهذا الموضوع، على النحو التالى:

إعتناق اللانهائية دون وعى (على الأقل فى البداية)، حيث يقولون (لا نهائى)، على أساس أنها تعبر عن عدد أو شئ (كبير جداً)، أو (صغير جداً)، وعليه فإن النهاية لابد أنها القيمة الأخيرة، وقد تكون إما عدد موجب (عدد إيجابى كبير جداً) أو سالب لا نهائى. وقد يختلف الأمر عما تقدم، حيث تكون النهاية أكثر تقبلاً للتغيرات المستمرة فى قيم الحدود، والقيمة الأخيرة ليست دائمًا تميل للانهائية، فربما تميل إلى صغير ومعروف.

ويجب اعتناق اللانهائية بوعى. وفى هذه الحالة، تعتبر اللانهائية شيئًا ميتا فيزيقيا، يصعب فهمه بدقة. فإذا كانت الرياضيات علم دقيق، فعلى المرء أن يتجنب التحدث

عن اللانهائية، ويتحدث عن الأعداد المحدودة فقط. ولتكوين قوانين عامة، يمكن للمرء استخدام حروف تمثل أعداد محدودة. ولوصف تسلسل تتابعى، يكون الشئ المهم هو تحديد (ن) بكتابة صيغة عامة. وبإعطاء (ن) يمكن أن نحسب القيمة المحددة للنهاية أو إعطاء قيمة تقريبية.

والدينامية اللانهائية، حيث ترتبط فكرة اللانهائية بفكرة الوقت، مع القبول المؤمن بفكرة الاحتمالات. وللتفكير فى كل مجموعة أو تتابع، على المرء أن يفكر بسرعة فى كل عناصرها. وبتلك الطريقة من المحتمل أن نفكر فى عدد لا نهائى من العناصر. إن بناء مجموعة أو تتابع لا نهائى لا يمكن إنجازه أبدًا. فاللانهائية شئ محتمل فقط. ويسبب الإيمان بالحقائق بالحقائق المحتملة، فمن المحتمل «القفز فى التفكير فى اللانهائية»، وهنا يحتمل أن تمثل اللانهائية بصورة واقعية. ولكلاهما شيئًا مهمًا، وهو رؤية كيفية تغير حدود التتابع، إذا كان هناك ميل للاقتراب من قيمة ثابتة. وحتى إذا كانت حدود التتابع تقترب من أن تقل عن قيمة معطاة، فإنها لن تصل لها أبدًا. ونظريًا، يمكن أن تصل الحدود لذلك فى اللانهائية.

وقد فحص **فستشبين** وآخرون (١٩٧٨ - ١٩٧٩ - ١٩٨١) عددًا من التناقضات المتلازمة بين المفاهيم المختلفة للانهائية، مثل: التناقض بين اللانهائية المحتملة المفردة واللانهائية المتعددة لنظرية العدد الحقيقى، أو التناقض بين العدد المحدود للنقاط على خط مقارنة بالعدد اللانهائى للنقاط المحتمل نظريًا.

وقد ميز بين «الحدس الأولى» الذى يمثل الميراث العام و«الحدس الثانوى» الذى يأتى من الخبرات الأكثر تخصصًا. وبالتالى فإن فكرة اللانهائية المحتملة هى حدس أولى، ولكنها تأخذ خبرة من اللانهائية الحقيقية لتطور الحدس الثانوى المناسب، حيث أن هذه التناقضات ذات قناعات قوية (مثل: الكل أكبر من الجزء).

وقد أكمل **تيروش** (١٩٨٥) عمل **فستشبين** وزملائه، حيث صمم برنامجًا لتدريس (المجموعات اللانهائية والمحددة) لطلاب الصف العاشر، مع الاهتمام

بالخبرات الحدسية لديهم (مثل: حقيقة أنهم ربما يلجئون إلى مبدأ «الجزء - الكل» لتقرير أن مجموعة كانت أكبر من مجموعة فرعية). وأعطى الطلاب مجموعة من المقتطفات من أقوال علماء الرياضة عن الجوانب المحيرة فى المجموعات اللانهائية لتشجيعهم على الشعور بأنه من الممكن أن نواجه مثل تلك التناقصات. ووجد أنه يمكن زيادة فهمهم لنظرية **كانتور** باستخدام طرق تدريس حيوية، مثل المناقشة المفتوحة عن التناقضات البديهية.

وناقشت أبحاث أخرى النماذج البديلة للتحليل غير المعيارى. ودرس **سوليفن** (١٩٧٦) مدى فاعلية تدريس التفاضل والتكامل فى المرحلة الجامعية من وجهة نظر غير معيارية تمزج الحقائق عن الأعداد الحقيقية ومجموعة الأعداد غير الحقيقية التى تضم العناصر اللانهائية والمتناهية الصغر. وأعطى المدخل صفة هندسية حيث استخدم تفسيراً تصويرياً لهذه العناصر. ووجد أن الطلاب فى المقرر التجريبى حصلوا على نتائج جيدة مثل المجموعة الضابطة فى مشاكل التحليل المعتادة (مثل: تعريفات المجموع اللانهائى والحد الصغير جداً، وحساب النهايات، والبراهين، والتطبيقات)، ولكنهم كانوا أفضل فى نواحى المقرر الذى استخدم فى تفسيرها بدائل، مثل: المناقشات المحددة. وهذه المناقشات أسهل جزئياً، لأنها لا تضم عناصر كثيرة، وأيضاً أسهل لأنها توسع الخبرات الحدسية (التصغير) فى عملية النهاية.

ورغم الدليل التجريبى على نجاح استخدام مدخل التصغير، فإن مدخل التفاضل والتكامل فى التعليم العالى نادراً ما يتغير. ويرجع ذلك إلى التعقيد الداخلى للأفكار غير المعيارية التى تعتمد على منطق يعمق حقائق الاختيار، وأيضاً هناك انتقادات مطروحة من التحليل الرياضى التقليدى عن صلة المدخل بنظرية كانتور، على أساس أن التعقدات العقلية تزداد.

والدراسات التى تناولت الصعوبات التى يواجهها الطلاب ومصادر الصعوبة المحتملة كما يراها المعلمون، قد أظهرت الأدلة المستقاة من معلمى المدارس الابتدائية الذين يدرسون مقرر القسمة المطولة فى جامعة كبيرة، عدم الاتساق بشكل كبير بين

ما يراه المعلم صعوبة وما يراه الطالب صعوبة. والأسئلة التى تطلب شرحًا للرمز∞ والنقاط الثلاثة الأخيرة فى المتتالية (١، ٥، ٢٥، ١٢٥،...) أظهرت أن أكثر من نصف المفحوصين لم يألفوا الرموز. وكانت الإجابات عن السؤال: «ماهية اللانهائية؟»: تشير لعملية ليس لا نهائية، أو تستمر الأرقام دون نهاية، أو عملية متكررة، أو مهما ذكرت من أرقام هناك دائمًا رقم أكبر (ببساطة أضف واحد إليه)، وفى الحالتين كان مفهوم اللانهائية السائد هو مفهوم اللانهائية الاحتمالية.

والسؤال الذى تم توجيهه للطلاب:

كل خط يحتوى على عدد لا نهائى من النقاط: أهو إجابة صحيحة أم خاطئة؟، يوجد كسر صغير أكبر من الصفر: أهو إجابة صحيحة أم خاطئة؟

وعند مقارنة إجابات الطلاب بنموذج الإجابة؛ ظهر أن الغالبية العظمى من الطلاب يملكون مفاهيم عن اللانهائية ناقصة وغير مكتملة وغير متسقة. والإجابات المكتوبة أظهرت تعدد الصور المفاهيمية المستدعاة مما يفسر التناقضات وعدم الاتساق. ولكن من المثير أن نسأل: هل اللانهائية المستدعاة فى سؤال ماهية اللانهائية (محتملة) هى نفس اللانهائية المستدعاة فى السؤال عن عدد النقاط فى خط (لا نهائية حقيقية)؟

ولكى نفحص معتقدات الطلاب ونرتبها، من المهم أولاً أن نحلل المفاهيم ونوع الصور المفاهيمية المتولدة من الخبرات المختلفة.

(٤) البرهان الرياضى:

يقول (**تيتيسون** ١٨٠٩-١٨٩٢من الحكم القديمة):

لأن لا شئ يستحق الإثبات يمكن إثباته أو دحضه : فكن حكيمًا ودعك من الجانب المظلم للشك.

تقليديًا كان البرهان يقدم فى المدارس من خلال القوانين الهندسية لإقليدس. ولكن اختفى ذلك من المنهج، وخاصة بعد استخدام الرياضةالحديثة، واقترحت معايير NCTM تغييرًا فى المنهج الأمر يكى، ونُصح بزيادة الترَكيز على:

- تطوير نتائج النظريات.
- المناقشة الاستنتاجية الشفوية والكتابية.

ونُصح بتقليل الاهتمام بـالآتى:

- القوانين الهندسية لإقليدس كنظام محورى كامل.
- البراهين ثنائية الموضوع.

والسبب من وراء ذلك ليس من الصعب إيجـاده. فقد أظهر **سنيك** (١٩٨٥) أن ٣٠٪ من الطلاب فى المقررات التـخصصيـة فى الهندسة أتقنوا ٧٥٪ من براهين ٦ مشاكل هندسية.

ولا يرجع السبب فقط إلى صعـوبات برهان إقليدس، ولكن أيضًا لأنه فشل فى تحقيق المقاييس الرياضية الحديثة؛ لأنه يعتمد على أفكار بديهية ثابتة عن المسافة.

وكمـا قال **هيلبرت** : على المرء أن يكون قـادرًا دائمًا أن يقول، بـدلاً من نقاط وخطوط مستقيمة، أن يقول كراسى ، وطاولات، وأكواب شاى.

ولكن البرهان فى حـالة الطاولات، والكراسى وأكواب الشـاى يتطلب إطلاعًا وثقافـة كبيرة غـير متـوافرة لدى الطلاب الصغار فى الـسن. ولا يتطلب البرهان الرياضى كنشاط إنسانى فهمًا فقط لتعريفات المفهوم والعمليات المنطقية، بل يتطلب أيضًا بصيرة وسـبب عمل ذلك النشاط. وقد طلب **طول** (١٩٧٩) من طلاب السنة الأولى الجامعية، أن يعلقوا على خيارهم على برهان المعيار $\sqrt{٢}$ بأنه غير منطقى لأنه مناقض للواقع، أو على برهان أن مـربع العـدد الكلى دائمًا يكون مـساويًا لعـدد العوامل الأولية، وعلـى ذلك فإن الجذر التربيعى لأى كـسر لا يمكن أن يكون $\frac{٢}{١}$ لأن ٢ عدد أولى يبدو كعدد فردى.

واختار الطلاب البرهان الثانى لأنه يعطى بعض التفسـير عن سبب صحة النتيجة (حتى مع استخدام مصطلحات رياضية غير دقيقة). وعند الانتقال إلى مرحلة متقدمة فى التفكير الرياضى، تصبح البصيرة الرياضية فى البرهان أهم من الدقة الرياضية.

ومع هذا فإن التعقدات العقلية لا تستغرق وقتًا حتى تبدأ فى التشكل. وقد أعطى **فينر** (١٩٨٨) للطلاب برهانيين لنظرية المتوسط (إذا كـانت الدالة د قابلة للتفاضل بين أ، ب، ومتصلة عند النقطتين أ وب، فيكون هناك نقطة ع بين أ وب.

يكون فيها دَ (ع) = د (ب) – د (أ) / (ب–أ)

١ – البرهان المعيارى الجبرى (بتطبيق نظرية **رول** Roll)

$$د\,(س) - \frac{د\,(ب) - د\,(أ)}{ب - أ}\,(س - أ)$$

٢ – برهان بصرى بتحريك القاطع الموازى لنفسه حتى يصبح مماسًا.

ومما يذكر أن الطلاب الـذين إنتقدوا البـرهان الهندسى، إنتقـدوه على أساس صحيح. مـثلاً، إنه لأنه فشل فى حساب قيـمة ع بدقة. أما البرهان البـصرى، فإنه واضح وبسيط.. إلخ. والبرهان الرياضى يؤكد بأن هناك شئ خطأ وغير قانونى، ولا يتفق مع الطريقة البصرية.

ويرى **فينر** أن سبب اختيار الطلاب للبـرهان الرياضى يعود إلى وجود عادات روتينية، وأفكار ما وراء معرفية وقناعات، وكلها أمـور بيئية وليست معرفية. ويجدر التنويه إلى أن الطريقة الحالية فى الهندسة تبـذر بذوراً تؤكد أن الدليل البصرى غير مرضى.

وفى التحليل الرياضى، تظهر الحاجة إلى برهان رسمى، وغالبًا بسبب الخوف من أن يحدث خطأ، وليس بسبب الثـقة فى صحته. وحتى يكون لدى الفـرد إحساسًا جيـدًا بالصواب، فإنه يحـتاج إلى خبـرات مناسبة لإعطاء نـطاق كلى عن الصور المفاهيميـة المحتملة، والتى غالبًا ما تكون مفقـودة لدى الطلاب قبل التخرج. ومن ناحية أخرى، فإن الطلاب الذين لديهم خبرات فى تكبير الرسم البيانى، ربما يدركون أن الرسم البيانى قد يكون فيه إنحناءات دقيقة.

– والبرهان: لا يعتبر ببساطة تمثيلاً رسميًا للمناقشة، ولكنه يمثل وصول الطلاب للاقتناع بالوصول للإثبات، وبإقناع الآخرين بالنتائج.

وفى العقد الأخير، حدثت تغيرات فى التدريس ، حيث تم الإنتقال من تدريس شكل البرهان إلى تشجيع العمليات، مثل المراحل الأولى لبناء المعرفة، والتخصيص، والتعميم، ووضع واختبار الافتراضات. وقد طور **ماسون** وآخرون (١٩٨٢) مدخلاً لحل المشكلة يبنى فيه الطلاب الثقة فى أنفسهم، عن طريق نمو مراحل الاقناع بالافتراضات التى صاغوها:

اقنع نفسك.

اقنع صديقًا.

اقنع عدواً.

المرحلة الأولى تتطلب أن يذكر الطالب الافتراض بطريقة تبدو له صحيحة، والمرحلة الثانية تتطلب أن ينطق بطريقة ذات معنى للآخرين، والمرحلة الثالثة تتطلب مناقشة واضحة ومنظمة بطريقة ترد الانتقادات. ولكن هذا الترتيب فى الأحداث يتوقف قليلاً عند معنى البرهان عند معظم علماء الرياضة.

وقد قام **ألبرت** وزملائه فى جامعة جريينبول (١٩٨٧ - ١٩٨٨ - ١٩٨٩) بتطوير مقرر فى التحليل يضم هذه الخطوة النهائية من خلال مناظرة علمية فى الفصل الدراسى، حيث اعتمد على فكرة أن الطلاب يبنون معارفهم من خلال: التفاعلات والتعارضات وإعادة الموازنات، وأن الحاجة إلى دليل تتأكد من وضوح التناقضات.

وعوضًا عن تقديم مجموعة محاضرات بترتيب منطقى، متبوعة بتدريبات، يجب تشجيع الطلاب على عمل افتراضات، من خلال مناقشات قد تكون مقبولة أو غير مقبولة، أو قد تكون منظمة أو غير منظمة. ورغم ذلك تكون المناقشات مفيدة، خاصة عند تقديم أفكار جديدة، على يقوم المعلم بإنهاء المناقشة بعد تلخيص المعرفة المكتسبة.

وهكذا تتطور طرق ناجحة فى تدريس الرياضيات لز يادة مشاركة الطلاب فى

عمليات التفكير الر ياضى. ولكن هذه الطرق تعتمد على مداخل مختلفة كليًا، من حيث دور المعلم. والوقت وحده كفيل بإطلاعنا على مدى تطبيق هذه الطرق على نطاق واسع.

وبالنظر للدليل المجتمع، نجد أن لدينا بيانات كثيرة تدعم وجود صراع معرفى حقيقى فى عملية تعلم العمليات الرياضية المتقدمة والمفاهيم، مثل: الدوال، النهايات، اللانهائية والبرهان.

ويبدو واضحًا أيضًا أن التعريفات الرسمية الرياضية والتى تمثل أساسًا فعالاً للتسلسل المنطقى للموضوع، هى أقل مناسبة كأساس معرفى فى المنهج. فثباتهم وعموميتهم أكبر من فهم العقول لتلك التعريفات مما يضعنا على حافة الخطر، بالنسبة لتحقيق تعارض ناتج عن التجاهل غير المقصود لتنظيمات الخبرات. وتصبح هناك تعقدات كثيرة فى العقل لدى المعلم، وعلماء الرياضة، والتربويين وكذلك الطلاب. وعلى أ ساس رؤية كل تلك الصعوبات، هل هناك أمل؟ لا يجب أن نكتئب، فالثقافة الرياضية التى نتحدث عنها هى نتائج ثلاثة آلاف سنة من الأفكار الإنسانية المتراكمة. ومن الصعب دمج هذه الخبرات المتعارضة الثرية فى عشر سنين ليدرسها الطالب فى المدرسة. والمؤكد هو أننا إذا حاولنا تدريس تلك الأفكار دون حساب التطور المعرفى للطالب، قد نفشل بالتأكيد مع كل الطلاب، ما عدا النابغين. وحتى هؤلاء سيعانون من تعقدات عقلية نتيجة خبراتهم المحدودة. مقارنة بالحجم الكبير للخبرات المعرفية المتراكمة عبر مئات السنين. ومن الضروى أن يكون الخبراء مستعدين لإعادة اختبار معتقداتهم عن طبيعة المفاهيم الرياضية، ويكونون كذلك مستعدين لرؤيتها من وجهة نظر المتعلم.

وكثير من الأبحاث تعتمد على افتراضات ضمنية غير منطوقة عن طبيعة المفاهيم. وأول خطوة فى هذا الشأن، يجب أن تكون: مساعدة الطلاب على الانتقال إلى تفكير ر ياضى متقدم، وبالتالى علينا إيضاح هذه الافتراضات غير المنطوقة وجعل الباحثين والمعلمين على دراية بوجودهم. وأحد المصادر التى تؤكد وجود تلك

الافتراضات يظهر فى المقابلات الاكلينيكية مع الطلاب والتـفكير العميق فيما يقال، وليس وفق رؤية كيفية تعارض ما يقال عن الريـاضيات الرسمية فقط، ولكن أيضًا لوضع الرياضيـات الرسمية فى منظورها كنشـاط إنسانى يحاول تنظيم تعـقيدات التفكير الإنسانى فى نظام منطقى. إن و ضع نظرية عن تطور التفكير الرياضى - من البدايات وصولاً إلى مرحلة التجريد - يتطلب فهم التجديدات الرسمية.

والمرحلة الثانية تضم جـمع ملاحظات إكلينيكية عن عمليـة الانتقال عند بداية عملية إعادة البناء المعرفى. وتضم هذه المرحلة عدداً من التغيرات المعرفية الصعبة:

- من المفهوم كعملية.

(الدالة كعملية، تميل إلى حد محتمل أن تكون لا نهائية).

- إلى المفهوم كموضوع له اسم.

(الدالة كموضوع، ومفهوم النهاية، واللانهائية الحقيقية).

- إعطاء تعريف يضم خصائص المفهوم.

(الدالة مجموعة من أزواج مرتبة - نهاية إبسلون - دلتا).

- العلاقة بين التمثيلات المختلفة للمفهوم.

(لفظية - إجرائية - رمزية - رقمية - رسم بيانى).

وهذه التغييرات لاتمثل ترتيبًا هرميًا، وخـاصة فى العلاقة بين التمثيلات المتعددة التى تتخلل النظام كله بشكل أفـقى بينما تتعقد المفاهيم. وتقليـديا أثبتت الأبحاث التجريبية أنه من الضرورى أن تكون العمليـة مألوفة للطالب قبل تقديمها فى شكل موضوع. والكمبيوتر قادر على القيام بأعـمال روتينية، مثل: رسم الرسوم البيانية مما يمهد لاحتمال توفير ا ستراتيـجيات تعلم جديدة تركز على الموضوعات قبل دراسة الحسابات الرياضية الداخلية.

والمرحلة الثالثة تضم تصميم واختبار التـسلسل التعليمى بهدف مساعدة الطلاب على إعادة تشكيل البناء المعرفى عند الانتقال إلى تفكير رياضى متقدم.

والأبحاث التى تهدف اليوم تحسين التعليم - على خلاف الأبحاث التى ترصد ما يحدث حاليًا - تتميز بطابع عام. والتقدم الحقيقى الذى يحدث عند الانتقال لتفكير رياضى متقدم يمكن تحقيقه من خلال مساعدة الطلاب على تأمل عمليات التفكير الخاصة بهم، ومواجهة التعارضات التى تظهر عند الانتقال إلى سياقات أغنى، ليس للمعتقدات القديمة مكان فيها. وهذا التطور المعرفى يشجعه وجود بيئة مرنة تزود بالأصول المعرفية المناسبة، وتساعد الطالب على بناء صورة أعمق للمفهوم.

والبيئات المبسطة بشكل مبالغ فيه والمصممة لحماية الطالب من الارتباك (عند تعارض الأفكار) توفر فقط تنظيمات ضمنية يعتبرها الطلاب حقائق، وتسبب لهم صراعات حادة فى المراحل اللاحقة.

وعند نقل الطلاب إلى تفكير ر ياضى متقدم، علينا أن ندرك أن تنظيم وتكوين الرياضيات هى المرحلة الأخيرة فى التفكير الر ياضى، وليست النشاط كله. وكما ذكر **سكيمب** فى كتابة «سيكولوجية تعلم الرياضيات» (١٩٧٠):

لقد حاول بعض الاصلاحيين تقديم الر ياضيات كتطور منطقى. وهذا المدخل جدير بالثناء؛ لأنه يظهر أن الر ياضيات ليست شيئًا قهريًا، ولكنها تعتمد على العقل. ولكن هذا المدخل أخطأ فى شيئين: أولهما أنه خلط بين المدخل النفسى والعقلى. فالمدخل العقلى يهدف إقناع المتشككين، أما المدخل النفسى فيهدف تحقيق الفهم. وثانيهما أنه يعطى المنتج النهائى فقط للاكتشاف الرياضى «وما على التلميذ إلا تعلمه»، وفشل فى إفهام المتعلم العمليات التى تقوم عليها الاكتشافات الر ياضية، فهو يدرس الأفكار الر ياضية وليس التفكير الرياضى.

وبالمثل فى المرحلة المتقدمة، تدريس التعريفات والنظريات بتطور منطقى فقط يُعلم نتاج الفكرة الرياضية المتقدمة، ولا يعلم عملية التفكير الرياضى المتقدم.