« برهان » نصير الدين الطوسي
على مصادرة أقليدس الخامسة

بقلم عبد الحميد صبره

(١) مقدمة ؛ (٢) برهان الطوسي : (٢ ا) برهان الطوسي كما ورد في « النسخة المطولة » المطبوعة في روما سنة ١٥٩٤ ؛ (٢ ب) برهان الطوسي كما ورد في « النسخة المختصرة » ؛ (٣) تحليل ومقارنة ؛ (٤) خاتمة .

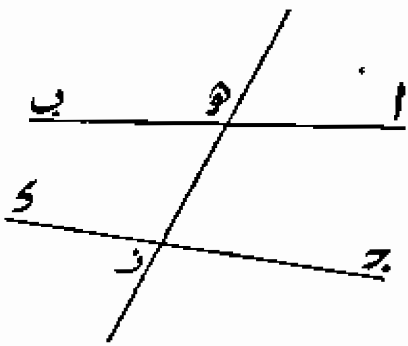
(١)
مقدمة

من المعلوم أن أقليدس ، في كتابه الموسوم بـ "الأصول" ، يبني براهينه على ثلاث فئات من القضايا ، هي الحدود (horoi) والعلوم المتعارفة (koinai ennoiai) والمصادرات (aitēmata) . فالحدود مثالها قوله " إن النقطة ما لا جزء له " أو إن " الخط طول بلا عرض " أو إن " السطح ما له طول وعرض فقط " . ومثال العلوم المتعارفة قوله إن "الأشياء المساوية لشيء بعينه متساوية" أو " إن زيد على المتساوية متساوية ، نتجت متساوية " أو إن "الكل أعظم من الجزء" . أما المصادرات التي يضعها أقليدس فهي الخمس الآتية : (١) لنا أن نخط خطاً مستقيماً بين أي نقطتين ؛ (٢) وأن نخرج خطاً مستقيماً محدوداً على استقامته ؛ (٣) وأن نرسم دائرة على أي نقطة وبأي بعد . (٤) الزوايا القائمة كلها متساوية . (٥) إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين فصير الزاويتين الداخلتين على جهة بعينها أنقص من قائمتين ، فإن المستقيمين إن أخرجا إلى غير حد (ep' apeiron) يلتقيان في تلك الجهة .[(١)]

---

(١) هيث [١] ، الجزء الأول ، ص ١٥٥ ، ١٥٨ ، ١٦٩ ، ١٩٥ ، ١٩٦ ، ١٩٩ ، ٢٠٠ ، ٢٠٢ ، ٢٢٢ ، ٢٢٣ ، ٢٣٢ . (أنظر ثبت المراجع في آخر المقال .)

ويلاحظ أن المصادرات الثلاث الأولى تطلب التسليم بإمكان عمل بعض الأشكال الهندسية (إن فى الواقع أو فى المخيلة) ؛ فى حين أن المصادرتين الأخيرتين تقرر كل منهما حقيقة معينة . فالمصادرة الرابعة تقرر تساوى الزوايا القائمة جميعاً ؛ وبذلك تجعل من الزاوية القائمة مقداراً متعيناً يقاس به غيرها من الزوايا . وهذا الأمر – بالإضافة إلى ما يبدو من وضوح هذه المصادرة – هو الذى دعا بعض الشراح القدماء إلى إخراجها من جملة المصادرات ووضعها فى عداد العلوم المتعارفة .[1] والمصادرة الخامسة تقرر التقاء الخطين المستقيمين المرسومين فى سطح واحد مستو ، إن تحقق



شرط معين : وليكن ا ب ، جـ د هما الخطين المستقيمين المرسومين وليكن هـ ز قاطعا لهما بحيث أن مجموع الزاويتين ب هـ ز ، هـ ز د أقل من قائمتين ، فالمصادرة تقرر أن الخطين لا بد من أن يلتقيا إن أخرجا باستمرار فى جهة ب ، د .

ولكن من البين أن هذه المصادرة الأخيرة ليس لها ما للمصادرة السابقة عليها من وضوح . والحق أنها كانت هدفاً لنقد الرياضيين منذ اللحظة التى أعلنها فيها أقليدس . وقد أوضح أبروقلوس (Proclos) (٤١٠ – ٤٨٥ م) فى شرحه على المقالة الأولى من كتاب "الأصول" نوع الاعتراضات التى وجهت إليها . ويمكن تلخيص هذه الاعتراضات الأولية فيما يلى :

ليست المصادرة الخامسة مصادرة بمعنى الكلمة ، أى أنها ليست من القضايا التى يجوز التسليم بها دون برهان ، وإنما هى فى الحقيقة قضية تنطوى على صعوبات كثيرة . (وهنا يستشهد أبروقلوس بمحاولة لبطليموس

(١) هيث [١] ، الجزء الأول ، ص ٢٠٢ .

الفلكي في البرهنة على هذه القضية لم يكن يعتبرها أبروقلوس محاولة موفقة). فقد يسلم المرء بأن في إنقاص الزاويتين الداخلتين عن قائمتين ما يستلزم بالضرورة تقارب الخطين من جهة هاتين الزاويتين . ولكن هذا وحده لا يكفي للجزم بأن الخطين لا بد ملتقيان في نقطة ما . إذ من المعلوم أن هناك خطوطاً هندسية يقترب الواحد منها نحو الآخر باستمرار دون أن يلتقيا أبداً [1] . وإذن فلا بد من البرهنة على أن الخطوط المستقيمة ليست من ذلك النوع . وعلى ذلك فالمصادرة الخامسة هي مجرد فرض راجح الصدق ؛ ولكن لما كان رجحان الصدق لا يكفي للإقناع في علم الهندسة فلا مفر من البرهنة عليها [2] .

وبالفعل صاغ أبروقلوس برهاناً جديداً في شرحه المذكور بعد أن بين وجوه النقص التي رآها في برهان بطليموس . ولكن محاولة أبروقلوس هذه لم تكن الأخيرة من نوعها . فقد أدرك الرياضيون اللاحقون من العيوب في برهان أبروقلوس مثل ما أدركه هو في براهين السابقين ، وكان لا بد لهم أن يحاولو من جديد ما حاوله هو من قبل . واستمرت المحاولات على هذا النحو في العالم القديم ، ثم انتقلت إلى العالم الاسلامى بعد ترجمة كتاب " الأصول " إلى العربية في نهاية القرن الثاني الهجري (أى في نهاية القرن الثامن الميلادى) ، ومنه انتقلت إلى العالم الأوروبي حيث استؤنفت في القرن السابع عشر الميلادى ، وكان كتاب " الأصول " قد ترجم إلى اللاتينية أول مرة (من العربية) في القرن الثاني عشر . وفي أوروبا تتابعت محاولات البرهنة على المصادرة الخامسة وتكاثرت تكاثراً سريعاً عجيباً ، بخاصة في القرنين الماضيين .

ولكي نفهم طبيعة هذه المحاولات والنتيجة التي أفضت إليها ، ينبغي لنا أولاً أن نكون فكرة واضحة ، ولو مختصرة ، عن وضع هذه المصادرة في هندسة أقليدس .

---

(۱) الإشارة هنا الى مثل القطع الزائد hyperbola والخط (المستقيم) المقارب له asymptote .

(۲) هيث [۱] ، الجزء الأول ، ص ۲۰۲–۳ .

يستخدم أقليدس المصادرة الخامسة أول مرة عند البرهنة على القضية التاسعة والعشرين من المقالة الأولى فى كتاب "الأصول". وهذه القضية مؤداها أن الخط المستقيم إذا وقع على خطين متوازيين، صارت الزاويتان المتبادلتان متساويتين، والزاوية الخارجة مساوية للداخلة المقابلة لها، ومجموع الزاويتين الداخلتين مساويا لقائمتين. وبالطبع يستخدم أقليدس فى البرهنة على هذه القضية أيضاً تعريفه للخطين المتوازيين بأنهما الخطان المستقيمان المشتركان فى سطح واحد ولايلتقيان مهما أخرجا فى أى من جهتيهما. وبناء على القضية ٢٩ يبرهن أقليدس على القضايا التى يتألف من مجموعها مايعرف باسم «نظرية التوازى» theory of parallels وعلى غيرها من القضايا الهامة، بما فى ذلك القضية القائلة بأن مجموع زوايا المثلث يساوى قائمتين. ومن هنا أطلق على المصادرة الخامسة اسم «مصادرة التوازى» parallel-postulate وإن كان منطوقها لايتعلق بالخطوط المتوازية.

من هذه الملاحظات نستطيع أن نتبين الاتجاهات التى كان من الطبيعى أن يسير فيها أولئك الذين حاولوا التغلب على الصعوبات التى واجهتهم بها المصادرة الخامسة. فمن الطبيعى، مثلاً، أن تتجه المحاولات إلى البرهنة عليها بواسطة القضايا الثمانى والعشرين الأول، من حيث إن مثل هذا البرهان لاينطوى على دور منطقى. وفى هذه الحالة تصير المصادرة الخامسة قضية كسائر القضايا التى يستنبطها أقليدس فى أوائل كتابه، ويقل مجموع المصادرات واحدة. ومن الطبيعى أيضا أن تتجه المحاولات إلى وضع تعريف جديد للتوازى غير التعريف الذى أخذ به أقليدس. وإذا لم يكن السلوك فى أى من هذين الطريقين موفقا، أو ممكنا، فلا بأس من ابتكار مصادرة جديدة لايرد عليها مثل ماورد على مصادرة أقليدس من اعتراضات، ثم تستخدم المصادرة الجديدة فى البرهنة على المصادرة الأقليدية، وبعد ذلك نمضى فى البراهين الهندسية التالية كما يمضى أقليدس.

وتلك هى بالفعل الاتجاهات التى سار فيها أكثر الرياضيين واحدا بعد الآخر، حتى مطلع القرن الثامن عشر. وفى ذلك الحين ظهرت محاولة جديدة لها أهمية خاصة فى تاريخ هذه المسألة، لما كان لها من نتائج غريبة غير متوقعة. وصاحب هذه المحاولة هو الأب اليسوعى جيرولامو ساكيرى

Gerolamo Saccheri (١٦٦٧ — ١٧٣٣) الذى كان أستاذا للرياضيات فى جامعة بافيا بإيطاليا . وقد تميزت محاولة ساكيرى عما سبقها من محاولات بشيئين : استقصاء البحث واستخدام برهان الخلف . كان ساكيرى يؤمن كغيره بصدق المصادرة الخامسة ، ولكنه كان أيضا مثل الكثيرين غيره يشعر بضرورة البرهنة عليها . ونحن نعلم أن البرهنة على قضية ما بواسطة برهان الخلف تبدأ بافتراض كذب هذه القضية ، أو بعبارة أخرى ، تبدأ بافتراض صدق نقيض هذه القضية . فإذا أدى هذا الافتراض إلى قضية متناقضة (أو كاذبة) كان هذا دليلا على كذب الفرض . وبذلك نتوصل إلى إثبات صدق القضية الأولى التى أردنا البرهنة عليها . وهذا هو ماحاوله ساكيرى مع فارق واحد غير جوهرى من الناحية الصورية ، هو أنه بدأ بافتراض كذب قضية مكافئة للمصادرة الخامسة ، بدلا من أن يبدأ بافتراض كذب المصادرة نفسها (١).

وكان فى انتظار ساكيرى مفاجأة لم يكن يتوقعها . ذلك أنه لم يتوصل إلى التناقض الذى كان يأمل فيه إلا بعد أن برهن على عدد كبير من القضايا المخالفة لما يناظرها فى أقليدس . بل سرعان ما أظهر البحث فيما بعد أن ذلك التناقض الظاهرى لم يكن فى الحقيقة إلا نتيجة لخطأ صورى فى الاستنباط ، وأن النسق الذى بناه ساكيرى على القضية التى اعتقد بكذبها كان فيما يبدو خاليا من كل تناقض . ومعنى ذلك أننا مالم نكشف عن تناقض فى هذا النسق ، فلا بد من أن نسلم بإمكان قيامه باعتباره نظرية هندسية تخالف قضاياها قضايا الهندسة الأقليدية ، إلا أن هذه النظرية الجديدة لها من الناحية الصورية على الأقل مثل ما لهندسة أقليدس من حق الوجود . وهكذا كان اكتشاف أول الهندسات اللا أقليدية على يد ساكيرى ، ولكن بالرغم منه .

ومن ذلك الحين اتجهت الأبحاث فى المصادرة الخامسة وجهة جديدة . فقد كان من آثار محاولة ساكيرى هذه أن بدأ الشك يتسرب إلى نفوس

---

(١) أنظر القسمين الثانى والثالث من هذا البحث .

الرياضيين فى إمكان البرهنة عليها . كما أن النتائج التى توصل اليها ساكيرى بعثت رغبة جديدة فى استكشاف الإمكانيات التى كان قد فتح الطريق إليها . وبالفعل استطاع الرياضى السويسرى يوهان هينرخ لامبرت Johann Heinrich Lambert (١٧٢٨ — ١٧٧٧) أن يضيف عددا كبيرا من القضايا إلى ماسبق أن استنبطه ساكيرى من افتراضه كذب المصادرة الأقليدية . وبين الرياضى الفرنسى أدريان مارى لجاندر Adrien Marie Legendre (١٧٥٢—١٨٣٣) فى بحوث عديدة ما كان قد أدركه ساكيرى من أن هناك صلة جوهرية بين نظرية التوازى الأقليدية والقضية القائلة بتساوى مجموع زوايا المثلث لقائمتين(١).

وشيئاً فشيئاً أخذ البحث ينأى عن محاولة البرهنة على مصادرة أقليدس ، أو على قضية مكافئة لها ، وسار فى طريق مستقلة عن هذه المصادرة . فكانت بحوث شفايكارت Schweikart (١٧٨٠ — ١٨٥٧) وتوريتوس Taurinus (١٧٩٤ — ١٨٧٤) وجاوس Gauss (١٧٧٧ — ١٨٥٥) ولوباتشيفسكى Lobachevskii (١٧٩٣ — ١٨٥٠) وبولياى Bólyai (١٨٠٢ — ١٨٦٠) وريمان Riemann (١٨٢٦ — ١٨٦٦) ، وكلها أبحاث فى الهندسات اللاأقليدية بمعنى الكلمة . وينبغى أن نلاحظ أخيراً أن جاوس كان أول من أعلن الاعتقاد باستحالة البرهنة على مصادرة أقليدس . ولكن هذه الاستحالة لم تثبت بالبرهان إلا على يد بلترامى Beltrami (١٨٦٨) وهويل Hoüel فى مقال له نشر عام ١٨٧٠ (٢) .

ذلك هو باختصار ملخص تاريخ المحاولات التى كانت تهدف إلى حل الصعوبات المتصلة بالمصادرة الأقليدية ، وتلك هى النتيجة التى انتهت إليها .

---

(١) يقول نوردن ([١] ، ص ١٣) إن نصير الدين الطوسى كان أول من لاحظ أن المصادرة الخامسة مكافئة للقضية القائلة بمساواة مجموع زوايا المثلث لقائمتين . ويحيل نوردن إلى البحث الآتى :

B.A. Rosenfeld, "Über die mathematischen Arbeiten Nasir Eddins," *Historisch-mathematische Forschungen*, Heft IV, 1951 [بالروسية] .

(٢) هيث [١] ، الجزء الأول ، ص ٢١٩ ؛ سارتون [٢] ، ص ٢٥ — ٢٨ .

وهى نتيجة سلبية إن اعتبرنا مقاصد الذين نشأت على أيديهم هذه المحاولات ، ولكنها إيجابية فى ذاتها إذ تقرر استقلال مصادرة التوازى عن غيرها من المقدمات التى وضعها أقليدس ، بمعنى أنه يمكن للمرء منطقيا أن يأخذ بهذه المقدمات الأخرى دون أن يضطره ذلك إلى التصديق بمصادرة التوازى الأقليدية . وقد كان تبين هذه الحقيقة ، أو تبين إمكانها ، هو الذى شجع على اكتشاف الهندسات اللاأقليدية .

ولكن أين برهان الطوسى من كل ذلك ؟ هذا ما نود الإجابة عنه الآن. الحق أن برهان الطوسى لم يكن مجرد محاولة من المحاولات الكثيرة التى توالت عبر القرون ، وإنما ينبغى أن نعرف له أهمية تاريخية خاصة . ذلك أن هذا البرهان مهد الطريق لبحوث ساكيرى ، وقد رأينا أن هذه البحوث كان لها دور هام فى تاريخ المسألة . وليست هذه أول مرة ينبه فيها إلى وجود صلة بين بحث الطوسى وبحوث ساكيرى . فإن اطلاع ساكيرى على محاولة الطوسى حقيقة عرفها مؤرخو الرياضيات من أقوال ساكيرى نفسه . ولكن الصلة بين بحوث كل منهما لم توضح للآن بالقدر الكافى ، بل قد أسيء فهمها فى بعض الأحيان . وهذا المقال بدء محاولة لإعادة النظر فى كل ذلك حتى ينجلى الوضع التاريخى لبحوث الطوسى على حقيقته . ولن تتم فائدة هذا البحث ، وما نرجو أن نلحقه به من بحوث ، إلا إذا عرضنا أولاً لبراهين الطوسى بشيء من التفصيل .

(٢)

برهان الطوسى

ولنبدأ القصة من أولها :

استحضر الخليفة المنصور مخطوطا لكتاب "الأصول" مع المخطوطات التى أرسل فى طلبها من الإمبراطور البيزنطى . وكذلك فعل من بعده المأمون.

وكان أول من عنى بترجمة الكتاب إلى العربية هو الحجاج بن يوسف بن مطر . نقله نقلين ؛ الأول فى عهد هارون الرشيد (٧٨٦/١٧٠ —

٨٠٩/١٩٣) ويعرف بالهاروني ، والثاني للمأمون (٨١٣/١٩٨ — ٢١٨ /٨٣٣) ويعرف بالمأموني . ولم يخلص إلينا من ترجمتي الحجاج إلا تسع مقالات من النسخة الثانية . ثم ترجم الكتاب مرة أخرى بيد أبي يعقوب إسحق بن حنين . وقد اندثرت هذه الترجمة نفسها ، ولكنها وصلتنا في صورة منقحة من عمل ثابت بن قرة الحراني (توفي ٢٨٨ / ٩٠١) . (١) والذي لاشك فيه أن ثابت اعتمد في إصلاحه لترجمة إسحق على أصول يونانية كانت تفضل مانقل عنه المترجمون السابقون . وكان ثابت رياضياً قديراً ، وعالماً باللغة اليونانية ، فبلغت ترجمته من الدقة والأمانة في التعبير مادعا بعض المؤرخين المحدثين إلى نعتها بأنها مثال يحتذى في ترجمة النصوص الرياضية . (٢) أما النسخة التالية التي وصلتنا عن كتاب أقليدس في العربية فهي من عمل نصير الدين الطوسي (٥٩٧/١٢٠١—٦٧٢/١٢٧٤) . لم يعمد الطوسي إلى ترجمة الكتاب من جديد ، بل اعتمد على الترجمات السابقة وبخاصة ترجمتي الحجاج وثابت ، فأداه النظر فيهما إلى الخروج بنسخة جديدة تناول فيها النص بالإيجاز أحيانا والإضافة والاستقصاء أحيانا أخرى ، مستعيناً تارة بما أفاده من كتب أهل العلم (كما يقول) ، ومهتدياً تارة أخرى بما انتهى إليه رأيه هو . ومن هنا كانت أهمية كتاب الطوسي : إذ يدلنا على بعض المشكلات التي أدركها كتّاب العربية في هندسة أقليدس والحلول التي تراءت لهم ؛ وفي هذا الكتاب مثال واضح على أنهم لم يكتفوا في هذا المجال بمجرد النقل والشرح الإيضاحي .

عرف كتاب الطوسي بعنوان "تحرير « أصول الهندسة والحساب » المنسوب إلى أقليدس". وقد أخرج منه صاحبه نسختين ، الواحدة مطولة والأخرى مختصرة . أما النسخة المطولة فقد قيل إنها لايوجد منها إلا مخطوط واحد تام وآخر ناقص في فلورنسا (٣). وتحتوي هذه النسخة على الثلاث

(١) ابن النديم [١] ، ص ٣٨٥ . هيث [١] ، الجزء الأول ، ص ٧٥—٧٨ ؛ [٢] ، ص ٢٦—٢٧ ؛ [٣] ، الجزء الأول ، ص ٣٦١—٤ . بلوى [١] ، ص ٣ .

(٢) هيث [٣] ، الجزء الأول ، ص ٣٦٢ .

(٣) هيث [١] ، الجزء الأول ، ص ٧٧—٧٨ . ويحيل هيث إلى Suter ، كتابه Die Mathematiker und Astronomen der Araber (Leipzig 1900) ، ص ١٥٦ .

عشرة مقالة التى يتألف من مجموعها كتاب أقليدس . وقد طبعت هذه النسخة بنصها العربى فى روما سنة ١٥٩٤ ، (١) واطلع على محتوياتها ساكرى فيما بعد . وأما النسخة المختصرة فيوجد منها مخطوطات كثيرة ذكرها بروكلمان(٢).

وتحتوى هذه النسخة (فى أكثر المخطوطات) على خمس عشرة مقالة ، بإضافة مقالتين أخيرتين منسوبتين إلى أبسقلاوس (Hypsicles) ، وهو من رياضيى القرن الثانى قبل الميلاد . وقد عرض الطوسى « برهانا » على مصادرة أقليدس الخامسة فى كل من النسختين — ولكن أحداً لم ينبه للآن (فيما أعلم) إلى أن البرهان الذى عرضه فى النسخة المختصرة مختلف كل الاختلاف عن برهان النسخة المطولة . وفى كل ما اطلعت عليه من دراسات لمحاولة الطوسى ومقارنات بينها وبين ماحاوله ساكرى ، لم أجد إشارة إلى برهان النسخة المختصرة . ولكن يبدو لى أن دراسة البرهان فى هذه النسخة تدعونا إلى إعادة النظر فى تقدير الوضع التاريخى لمحاولة الطوسى ، كما توحى لنا (على الأقل) بصياغة بعض الأسئلة التاريخية الجديدة الهامة فيما يتصل بالعلاقة بين هذه المحاولة وبين محاولة ساكرى . ولابد لبيان كل ذلك من النظر أولاً فى برهان النسختين . لذلك أوردتهما هنا بنصهما . أما برهان النسخة المطولة فهو مأخوذ عن طبعة روما سنة ١٥٩٤ . وأما برهان النسخة المختصرة فقد حققت نصه على المخطوطات الموجودة بالإقليم المصرى ، وهى خمس ، منها أربع بدار الكتب المصرية بالقاهرة ، والخامسة بمكتبة بلدية الإسكندرية . (٣)

فلننتقل الآن إلى النظر فى محاولة الطوسى . ولنرمز إلى النسختين المطولة والمختصرة بالحرفين ا ، ب على الترتيب .

---

(١) الطوسى [١] .

(٢) بروكلمان [١] ، الجزء الأول ، ص ٥١٠ ؛ ملحق الجزء الأول ، ص ٩٢٩ . طبعت هذه النسخة فى القسطنطينية سنة ١٨٠١ ، وطبعت المقالات الست الأول منها فى كلكتا سنة ١٨٢٤ .

(٣) أنظر بيان هذه المخطوطات ورموزها فى ثبت المراجع .

يصوغ الطوسى (فى ا) مصادرة أقليدس الخامسة على النحو الآتى : "كل خطين مستقيمين وقع عليهما خط مستقيم ، وصير الزاويتين الداخلتين فى جهة واحدة من الخط أقل من قائمتين ، فإن الخطين إذا أخرجا فى تلك الجهة إلى غير النهاية فهما يتلاقيان." ثم يعترض عليها قائلا (فى ا) إن "... هذه القضية ليست من العلوم المتعارفة ، بل هى من القضايا التى تحتاج إلى إقامة البرهان على صحتها ببعض مسائل الكتاب من غير دور."(١) ويقول (فى ب) "إن هذه القضية ... ليست من العلوم المتعارفة ولا مما يتضح فى غير علم الهندسة . فإذن الأولى بها أن ترتب فى المسائل دون المصادرات."(٢) أى أنها لما كانت لاتعتبر من القضايا المشتركة بين العلوم جميعا ، ولايختص بالنظر فيها علم غير الهندسة ، فهى ليست مما يجوز أن يطلب التسليم به فى الهندسة ، وإنما ينبغى إدراجها فى عداد القضايا التى يطلب عليها البرهان الهندسى .

ولكى يبرهن الطوسى على المصادرة الأقليدية ، يطلب منا التسليم بقضية أخرى يضعها بدلا منها ويصوغها (فى ب) هكذا : "... الخطوط المستقيمة الكائنة فى سطح مستو ، إن كانت موضوعة على التباعد فى جهة فهى لاتكون موضوعة على التقارب فى تلك الجهة بعينها ، وبالعكس ، إلا أن يتقاطعا ." (٣) ولنا أن نتساءل عما إذا كانت هذه القضية الجديدة لا يرد عليها نفس الاعتراض الذى أورده الطوسى على المصادرة الأقليدية . فما لاشك فيه أنها ليست من القضايا التى "تتضح فى غير علم الهندسة" ؛ فهل معنى ذلك أنه اعتبرها من العلوم المتعارفة ؟ لايجيب الطوسى صراحة على هذا السؤال ؛ وكل ما نستطيع افتراضه أنه اعتبرها أكثر وضوحا من مصادرة أقليدس .

(١) الطوسى [١] ، ص ٨ .

(٢) الطوسى [٢] : كا ، ص ٣-٤ ؛ كب ، ص ٤ ؛ كج ، ص ٤ ؛ كد ، ص ٥ ؛ با ، ص ٤ .

(٣) الطوسى [٢] : كا ، ص ٤ ؛ كب ، ص ٤ ؛ كج ، ص ٤ ؛ كد ، ص ٥-٦ ؛ با ، ص ٤ . أنظر صيغة هذه القضية (فى ب) فى النص الآتى المأخوذ عنها («المقدمة الأولى») .

وبالطبع يجيز الطوسى لنفسه فى برهانه أن يستخدم ما يشاء من القضايا الأقليدية السابقة على القضية ٢٩ من المقالة الأولى فى كتاب "الأصول"، وهى القضية التى يفترض فيها أقليدس المصادرة الخامسة للمرة الأولى فى كتابه . ولكن الطوسى لم يكن باستطاعته أن يتم برهانه معتمدا على تلك القضايا وحدها ، وإنما اضطر إلى التسليم بقضية أخرى — قد استعملها أقليدس ، كما يقول — ويصوغها الطوسى (ق ١) هكذا : "كل مقدارين محدودين مختلفين بالعظم والصغر ، فالصغير يصير أعظم من العظيم بالتضعيف مرة بعد أخرى ." (١) ويصوغها فى ب على النحو الآتى : "كل مقدارين محدودين من جنس واحد فإن الأصغر منهما يصير بالتضعيف مرة بعد أخرى أعظم من الأعظم ." (٢)

تعرف هذه القضية الأخيرة بـ " مصادرة أرخيدس " ، وإن لم يكن أرخيدس أول من استعملها . فالمعلوم (نقلا عن أرخيدس نفسه) أن أودكسوس Eudoxos (نبغ حوالى ٣٦٧ ق. م.) قد استعان بها فى البرهنة على بعض القضايا التى ظهرت فيما بعد فى كتاب " الأصول " .(٣) وكذلك استعملها أقليدس فى برهانه على القضية الأولى من المقالة العاشرة ، مستندا فى تبريره لها إلى تعريفه للمقادير ذوات النسبة كما ذكره فى المقالة الخامسة : " يقال عن المقادير إنها ذات نسبة إلى بعضها البعض ، إذا كان يزيد بعضها على البعض بالتضعيف ." (٤) ونحن سنحتفظ هنا باسم "مصادرة أرخيدس" للدلالة على تلك القضية التى استعملها الطوسى فى برهنته على المصادرة الأقليدية ، والتى يقول بحق إن أقليدس افترضها فى المقالة العاشرة من كتاب " الأصول " .

---

(١) الطوسى [١] ، ص ٨ .

(٢) الطوسى [٢] : كا ، ص ٤ ؛ كب ، ص ٤ ؛ كج ، ص ٤ ؛ كد ، ص ٦ ؛ يا ، ص ٤—٥ .

(٣) هيث [١] ، الجزء الأول ، ص ٢٣٤ ؛ الجزء الثالث ، ص ١٥—١٦ ؛ [٤] ، ص xlviii .

(٤) هيث [١] ، الجزء الثانى ، ص ١١٤ ، ص ١٢٠ .

وضح لنا الآن الهدف الذى رمى إليه الطوسى من محاولته ؛ والوسائل التى يقصد الاستعانة بها للبلوغ إلى هدفه . أما الهدف فهو البرهنة على مصادرة أقليدس الخامسة . وأما الوسائل فيمكن تصنيفها فى ثلاث فئات : (أولا) المصادرة الجديدة التى ابتكرها الطوسى نفسه (ويمكن أن نطلق عليها "مصادرة الطوسى ") ؛ (ثانيا) القضايا الأقليدية المفروضة والمبرهنة إلى ما قبل القضية ٢٩ من المقالة الأولى فى كتاب "الأصول" ، فيما عدا المصادرة الخامسة طبعا ؛ (ثالثا) "مصادرة أرخيدس " التى يسلم بها أقليدس فى المقالة العاشرة .

وفيما يلى نص برهانى الطوسى :

(٢ ا) برهان الطوسى كما ورد فى "النسخة المطولة" (١) المطبوعة فى روما سنة ١٥٩٤ (١)

[يبنى الطوسى برهانه فى هذه النسخة على « ثلاث مقدمات » و « ثلاثة أشكال » – هى هذه :]

اقول وههنا ذكر موضع البرهان لان الموعود ببيانه في اول المقالة وهو مبني علي ثلث مقدمات وثلثة اشكال المقدمة الاولي كل خطين مستقيمين موضوعين في سطح مستو كخطي اب جد ووقع عليهما خطوط مستقيمة كخطوط هز حط كل مف سع كل واحد منها عمود علي خط جد وقاطع خط اب علي زاويتي حادة ومنفرجة ويكون الزوايا الحواد كلها في جهة بد والمنفرجات في جهة

اج فاقول ان خطي اب جد موضوعان علي التقارب في جهة بد ما دام لم يتقاطعا وعلي التباعد في جهة اج وتكون الاعمدة متصاغره في جهة بد الي التقاطع ومتعاظمه في جهة اج ويكون عمود هز اعظم من عمود حط وهو من عمود كل وهو من عمود مف وهو من عمود سع ويكون عمود سع اصغر من عمود مف وهو من عمود كل الي اخره وايضا فان كان كل واحد من الخطوط المستقيمة الواقعة علي الخطين المستقيمين اعمدة علي احدهما وكانت متعاظمه ان اخذنا نعتبر بعضها الى بعض في احدي جهتي

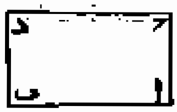
28

---

(١) الطوسى [١] ، ص ٢٨–٣٤ .

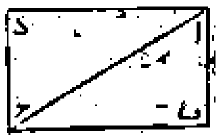
يسرنى أن أعبر هنا عن امتنانى للمستشرق الدكتور س. أ. بونيباكر بجامعة ليدن لما تكبد من مشقة فى الحصول على صور فوتوغرافية لهذه الصفحات وإرسالها إلى .

بجهتي الخطين ومصاغرة ان اخذنا نعتمر في الجهة الاخري من جهتي الخطين فان الخطين المستقيمين موضوعان علي التباعد في جهة تعاظم الاعمدة وعلي التقارب في الجهة الاخري وهي جهة تصاغر الاعمدة الي ان يتقاطع الخطان المارّان كل واحد من الخطوط المستقيمة التي هي اعمدة علي احد الخطين قاطعا لذلك الخط علي زوايا قايمة لا يكون لذلك الخط ميل الي الاعمدة ولا عنها فيكون كل واحد من الاعمدة قاطعا للخط الآخر من الخطين المستقيمين علي زاويتين احديهما حادة والاخري منفرجة ويكون جميع زوايا الحادة الي جهة تقارب الخطين وجميع زوايا المنفرجة الي جهة تباعدهما ويكون لذلك الخط ميل الي كل واحد من الاعمدة في جهة التقارب وميل عن كل واحد منها في جهة التباعد وهاتان القضيتان بديهيتان استعملهما بعض المهندسين من المتقدمين والمتاخرين علي انهما بديهيتان ٥ والمقدمة الثانية كل خطين مستقيمين خارجا من طرفي خط مستقيم في جهة واحدة عمودين عليه وكانا متساويين ووصل بين طرفيهما بخط مستقيم فكل واحدة من الزاويتين الحادثتين من العمودين والخط المستقيم الواصل بين طرفيهما قايمة فليكن الخط المستقيم اب والعمودان المتساويان اج بد ووصل بين نقطتي ج د طرفيهما بخط مستقيم فاقول ان كل واحدة من زاويتي اجد بدج قايمة برهانه فلانه

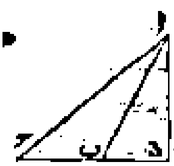


لو لم يكن زاوية اجد قايمة لكانت اما حادة او منفرجة فان كانت حادة كان خطا اب جد موضوعين علي التقارب في جهة د فيكون عمود اج اعظم من عمود بد بالمقدمة الاولي وهما متساويان هذا خلف وان كانت منفرجة كان خطا اب جد موضوعين علي التباعد في جهة د فيكون عمود اج اصغر من عمود بد بالمقدمة الاولي وهما متساويان هذا خلف فزاوية اجد قايمة وبمثله تبين ان زاوية بدج قايمـــــــــــة ٥ واقول ايضا ان خط جد يساوي خط اب برهانه فلان جد لو لم يكن كاب لكان اصغر منه او اعظم فان كان اصغر يلزم ان يكون خطا اب جد موضوعين علي التقارب في جهة ج وعلي التباعد في جهة ب فيكون زاوية ابد او باج حادة وزاوية جدب او زاوية اجد منفرجة بالقضية الثانية من المقدمة الاولي وهما قايمتان هذا خلف وان كان جد اعظم من اب كان خطا اج بد موضوعين علي التقارب في جهة ب وعلي التباعد في جهة ج فيكون زاوية جدب حادة او اجد حادة وزاوية ابد او باج منفرجة بالقضية الثانية من المقدمة الاولي وهما قايمتان هذا خلف المقدمة الثالثة كل مثلث مستقيم الاضلاع فان زواياه الثلث كقايمتين ولتكن زاوية ابج من مثلث اجب قايمة فاقول ان باج بجا كقايمة برهانه نخرج من نقطة ج عمود جد علي ضلع بج

ولتبيانه الشكل الحادي عشر ونفصل منه جد يساوي اب بالشكل الثالث ونصل بين نقطتي ا د بخط مستقيم فخط اد كخط بج وزاوية



ادج قايمة بالمقدمة الثانية فلان ضلعي اب بج وزاوية ابج من مثلث ابج مساوية لضلعي اد دج وزاوية ادج كل لنظيره فبالشكل الرابع زاوية اجد كزاوية باج وزاوية بجد المساوية لزاويتي بجا دجا قايمة فزاويتا باج بجا كقايمة فالحكم ثابت وذلك ما اردنا ان نبين ثم ليكن زاوية منفرجة فاقول ان الزوايا الثلث من مثلث ابج كقايمتين برهانه فلان زاوية ابج منفرجة وزاويتي كل مثلث اقل من قايمتين بالشكل السابع عشر فزاوية اجب حادة واذا وقع خط مستقيم فالزاويتان الحادثتان كقايمتين بالشكل الثالث عشر وزاوية اجب حادة فالزاوية المجاورة لها منفرجة فاذا اخرجنا من نقطة ا عمود اد علي ضلع بج بالشكل الثاني عشر فلا يمكن ان يقع علي احدي نقطتي ب ج والا لكانت زاوية ابج او زاوية اجب قايمة وليست ولا يمكن ان يقع بين نقطتي ب ج او علي ضلع بج بعد اخراجه في جهة ج والا يلزم ان يكون زاويتا مثلث وهما زاويتا ابد ادب او زاويتان احديهما اجد المجاورة لزاوية اجب والثانية زاوية ادج اعظم من قايمتين وهما اصغر منهما بالشكل السابع عشر فيقع علي ضلع بج بعد اخراجه في جهة ب فيكون كل واحد من مجموع زاويتي داب

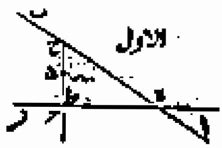


ابد و داج اجد كقايمة فاذا القينا زاوية داب المشتركة تبقي زاوية ابد متساوية لزاويتي باج اجد لكن زاويتي ابد ابج كقايمتين بالشكل الثالث عشر فزاوية ابج مع زاويتي باج اجب كقايمتين وذلك ما اردنا ان نبين ثم ليكن زوايا مثلث ابج كلها حادة فاقول ان زوايا المثلث كقايمتين برهانه نخرج من نقطة ا عمود اد علي ضلع بج بالشكل الثاني عشر فلا يقع علي احد نقطتي ب ج والا لكانت القايمة حادة ولا علي بج بعد اخراجه في احدي جهتيه والا لكانت زاويتا مثلث اعظم من قايمتين وهما اما زاويتا ابد ادب او زاويتا اجد ادج وهي اصغر من قايمتين بالشكل السابع عشر فيقع بين نقطتي ب ج فيكون زاويتا ابد باد كقايمة وزاويتا اجد جاد كقايمة ايضا بالشكل الاول من هذه المقدمة

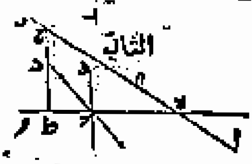
فيكون جميع زوايا مثلث ابج كقايمتين وذلك ما اردنا ان نبين واذا تقررت هذه المقدمات فنقول ليكن الخطان المستقيمان اللذان وقع عليهما خط مستقيم خطي اب جد والخط الواقع عليهما خط هز قاطعا اياهما علي نقطتي ه ح ولتصير

زاويتي

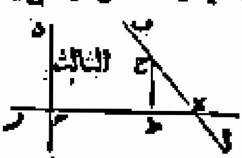
زاويتي ب ه ز ه د ح ه اقل من قايمتين فلا يخلو اما ان يكون احديهما قايمة والاخري حادة او يكونا حادتين او احدهما منفرجة والاخري حادة



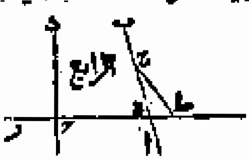
فان الخطين علي التقادير الثلثة اذا اخرجا علي استقامتهما في جهة ب د الي غير النهاية فانهما يتلاقيان برهانه اما الاول فليكن زاوية ب ه ح حادة وزاوية د ح ه قايمة ونرسم علي خط ب ه نقطة ح كيف ما وقعت ونخرج منها خط ح ط عمودا علي خط ه ز بالشكل الثاني عشر فهو اما ان ينطبق علي خط



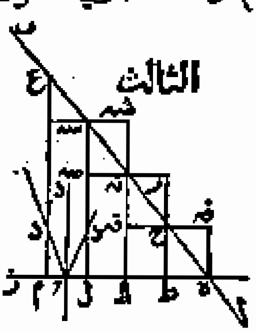
د ح او يقع علي نقطة بين نقطتي ح ز او فيما بين نقطتي ه ح او علي نقطة خارجة عنهما في جهة ه والتقدير الرابع محال والا لزم ان يكون زاويتا ح ط ه ح ه ط من مثلث ح ط ه اعظم من قايمتين لان زاوية ح ه ط



منفرجة بالشكل الثالث هذا خلف ثم خط ح د اذا اخرج في جهة د علي استقامته يلقي خط ا ب علي التقدير الاول وذلك ظاهر وعلي التقدير الثاني لا يمكن ان يلقي خط ح د عمود ح ط والا فليلقه علي نقطة د فيكون زاويتان من المثلث الحادث

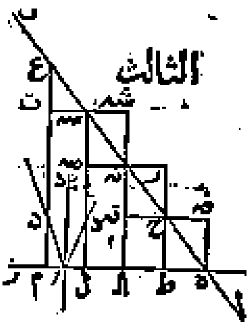


هما د ح ط د ط ح كقايمتين وهما اقل منهما بالشكل السابع عشر هذا خلف ولا يمكن ان يلقي خط د ح والا يلزم احاطة خطين مستقيمين بسطح فهو يلقي خط ا ب وعلي التقدير الثالث نضعف ه ط مرة بعد اخري الي ان تصير اعظم من خط ه ح وهي خطوط



ه ط ط ك ك ل ل م ونفصل من خط ب ح خطوطا كل واحد منها يساوي خط ه ح بالشكل الثالث وهي خطوط ح ن ن س س ع ويكون عدتها مع خط ه ح لعدة اقسام خط ه م ونخرج من نقطة ه عمود ه ف بالشكل الحادي عشر ونفصل منه ف ه مثل ح ط بالشكل الثالث ونصل بين نقطتي ف ح بخط مستقيم فيكون كل من زاويتي ه ف ح ف ح ط قايمة وضلع ف ح كضلع ه ط بالمقدمة الثانية ونخرج من نقطة ن عمود ن ك علي ه ز بالشكل الثاني عشر ولان خطي ه ب ه ز موضوعان علي التباعد في جهة ب يكون عمود ن ك اعظم من عمود ح ط بالمقدمة الاولي فنفصل منه خط ك ق كعمود ح ط بالشكل الثالث ونصل بين نقطتي ح ق بخط مستقيم وكل من زاويتي ط ح ق ك ق ح قايمة وضلع ط ك كضلع ح ق بالمقدمة

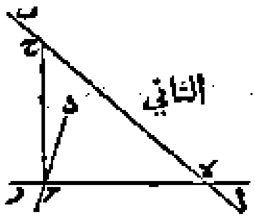
الثانية وكانت زاوية ط ح ق قائمة فخط قح على سمت خط ج ق بل خط ق ح جط واحد بالشكل الرابع عشر ولما كانت زاوية ج ق ا قائمة تكون زاوية ج ق ن قائمة بالشكل الثالث عشر وزاويتا ق ح ء ق ح ن المتقابلتان متساويتان بالشكل الخامس عشر وضلع ء ح من مثلث ح ء ق كضلع ح ن من مثلث ح ق ن فبالشكل السادس والعشرين ضلع ق ح كضلع ح ق وكان ضلع ط ا كضلع ح ق فضلع ط ا كضلع ق ح وكان ضلع ء ط كضلع ق ح فضلع ء ط كضلع ط ا فعمود ن ا وقع على نقطة ا من



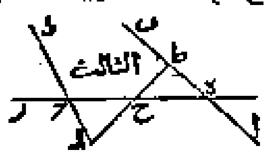
خط ء ز ونخرج من نقطة س عمود س ل على ضلع ء ز بالشكل الثاني عشر ونفصل خط ص ل كخط ن ا بالشكل الثالث لان خط س ل اعظم من ن ا بالمقدمة الاول ونصل بين نقطتي ن ص بخط مستقيم فكل واحد من زاويتي ا ن ص ل ص ن قائمة وضلع ا ل كضلع ن ص بالمقدمة الثانية ونخرج عمود ح ط في جهة ح على استقامته الى غير النهاية ونفصل منه ط ر مثل ن ا بالشكل الثالث ونصل بين نقطتي ر ن بخط مستقيم فكل من زاويتي ط ر ن ا ن ر قائمة وضلع ط ا كضلع ر ن بالمقدمة الثانية فلان زاوية ل ص ن قائمة تكون زاوية ن ص س قائمة بالشكل الثالث عشر فكل واحد من زاويتي ح ر ن ن ص س قائمة وزاويتا ح ن ر ص ن س متساويتان بالشكل الخامس عشر وضلعا ن ح ن س متساويان فبالشكل السادس والعشرون ضلع ن ص من مثلث ن ص س كضلع ن ر من مثلث ن ر ح فط ا مثل ن ص وكان ا ل مثل ن ص فط ا مثل ا ل فعمود س ل واقع على نقطة ل من خط ء ز ونخرج ا ن في جهة ن على استقامته الى غير النهاية ونفصل منه ا ش مثل ل س بالشكل الثالث ونصل بين نقطتي ش س بخط مستقيم فكل واحدة من زاويتي ا ش س ل س ش قائمة وضلع ا ل كضلع ش س بالمقدمة الثانية ونخرج من نقطة ع عمود ع م على خط ء ز بالشكل الثاني عشر ولان ع م اعظم من ل س بالمقدمة الاولى فنفصل منه ت م كضلع ل س بالشكل الثالث ونصل س ت بخط مستقيم فكل واحد من زاويتي ل س ت م ت س قائمة فخط ش ت خط مستقيم بالشكل الرابع عشر وضلع ل م كضلع س ت بالمقدمة الثانية وزاوية م ت س قائمة فزاوية س ت ع قائمة وزاويتا ش س ن ع س ت متساويتان بالشكل الخامس عشر وضلعا ن س س ع متساويان فبالشكل السادس والعشرين ضلع س ت كضلع س ش فضلع ا ل كضلع ل م بمثل ما تقدم فعمود ع م واقع على نقطة م من خط ء ز لخط ح ز اعظم من عمودي س ل ع م فاذا اخرجنا في

جهة

جهة د على استقامته لا يمكن ان يلقى احد عمودي سل عم والا فليكن على نقطة د فيكون في مثلث دحم او دحل زاويتان كقايمتين وهما زاويتا دلح دحل او دحم دمح وكل زاويتي مثلث اقل منهما بالشكل السابع عشر هذا خلف فخط حد يلقى خط اب واما الثاني وهو ان يكون كل واحدة من زاويتي بهح دهه حادة فلان زاوية دهه حادة يكون زاوية دهر منفرجة بالشكل الثالث عشر ونخرج من نقطة ح عمود حح على خط هر في جهة د باستبانة الشكل الحادي عشر فيقع بين ضلعي دح حر فاذا اخرجناه في جهة ح على استقامته يلقى خط اب بالشكل المتقدم فليلقه على نقطة ح فاذا اخرجنا خط دح في جهة د على استقامته يلقى خط اب بين نقطتي ه ح وذلك ظاهر لامتناع احاطة خطين مستقيمين بسطح



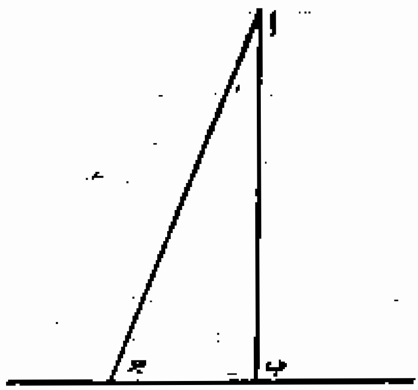
واما الثالث وهو ان يكون زاوية بهح حادة وزاوية دهه منفرجة فلان زاويتي بهح دهه اقل من قايمتين وزاويتا دهه والمجاورة لها معا كقايمتين بالشكل الثالث عشر فزاوية ح المجاورة لزاوية دهه اعظم من زاوية بهح ونرسم على خط هح نقطة ح كيف ما وقعت ونخرج منها عمود حط الى خط هب بالشكل الثاني عشر فلا يقع على نقطة ه وذلك ظاهر ولا على خط اه والا لكانت زاويتا مثلث اعظم من قايمتين وقد بين في الشكل السابع عشر انهما اقل منهما هذا خلف فليقع على نقطة ط ونخرج خط طح على استقامته في



جهة ح الى ا فلان زاوية حطه القايمة مع زاوية هحط اقل من قايمتين بالشكل السابع عشر وزاوية هحط الحادة كزاوية حح ا بالشكل الخامس عشر وزاوية ح المجاورة لزاوية دهه اقل من قايمة فكل واحدة من زاويتي حح ا و ح المجاورة لزاوية دهه حادة فخطا ح ا دح اذا اخرجا في جهة ا يتلاقيان بالشكل الثاني من الشكل المتقدمين فليتلاقيا على نقطة ا ولان زوايا كل مثلث مستقيم الاضلاع كقايمتين فزاويتي هحط حح ا المتساويتان بالشكل الخامس عشر وزاوية ح ه ا اعظم من زاوية ح هط فزاوية هطح القايمة اعظم من زاوية ح اح لان الزوايا الثالث كل مثلث مستقيم الاضلاع كقايمتين بالمقدمة الثالثة فهي حادة وزاوية بط ا قايمة بالشكل الثالث عشر فاذا اخرجنا خطا اب حد في جهة ب د فهما يتلاقيان بالشكل الاول من الشكلين في جهة واحدة من الخط الواقع لقايمتين وذلك ما اردنا ان نبين ۞ ونعود الى تقرير مسايل الكتاب ۞

(٢ ب) برهان الطوسي كما ورد في «النسخة المختصرة»(ب)(*)

[يبني الطوسي برهانه في هذه النسخة على سبعة «أشكال» هي هذه :]



الأولى : أقصر الخطوط الخارجة من نقطة مفروضة إلى خط غير محدود ليست هي عليه ، وهو المسمى بعدها عنه ، هو الذي يكون عموداً عليه .

فليكن النقطة ا والخط ب ج (١) ، والعمود الخارج (٢) منها إليه ا ب .

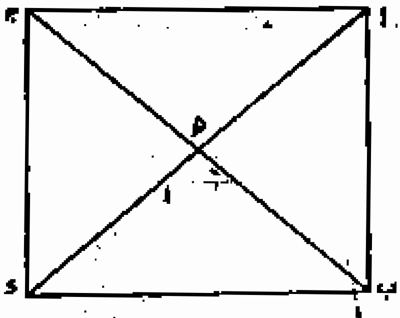
وذلك لأنا إذا أخرجنا منها إليه خطاً آخر كـ ا ج (٣) ، كانت زاوية ا ج ب الحادة (٤) أصغر من زاوية ا ب ج القائمة (٥) [أقليدس ، ق ١٧] ؛ فيكون ا ب أقصر من ا ج [أقليدس ، ق ١٩] ؛ وكذلك في غيره .(**)

(١) كد والخط د (٢) كج الخارجة (٣) كج سقط : كـ اج (٤) كد يلي ذلك : ضرورة أن كل زاويتين من مثلث أصغر من زاوية ابـج القائمة (٥) كد سقط : أصغر الخ .

(*) الطوسي [٢] : كا ، ص ٢٠–٢٧ ؛ كب ، ص ٢١–٢٧ ؛ كج ، ص ١٩–٢٦ ؛ كد ، ص ٢٨–٣٨ ؛ با ، ص ٢٢–٢٩ .
وضعت بين حاصرتين معقوفتين أرقام القضايا الأقليدية التي يعتمد عليها الطوسي في خطوات برهانه ، وكل هذه القضايا من المقالة الأولى من كتاب «الأصول» ؛ وقد أوردتها في آخر المقال .

(**) وبالإضافة إلى القضيتين ١٧ و١٩ من المقالة الأولى من كتاب «الأصول» يعلم الطوسي في هذا «الشكل» بالقضية ١٢ من المقالة نفسها ، وهي عمل يختص بإخراج عمود إلى خط غير محدود من نقطة ليست فيه (أنظر القضايا الأقليدية المثبتة في آخر المقال) .

الثاني : إذا قام عمودان متساويان على خط ، ووصل طرفاهما بخط آخر ، كانت[1] الزاويتان الحادثتان بينهما متساويتين .



مثلا قام[2] عمودا ا ب ، ج د المتساويان[3] على ب د[4] ، ووصل ا ج فحدثت بينهما زاويتا ب ا ج ، د ج ا —

أقول فهما متساويتان[5] .

ونصل ا د[6] ، ب ج متقاطعين على هـ .

فيكون في مثلثي ا ب د ، ج د ب ضلعا ا ب ، ب د وزاوية ا ب د[7] القائمة مساوية[8] لضلعي ج د ، ج ب وزاوية ج د ب القائمة ، كل لنظيره ؛

ويقتضي[9] ذلك تساوي باقي[10] الزوايا والأضلاع النظائر [أقليدس ، ق ٤].

ولتساوي زاويتي ا د ب ، ج ب د يكون ب هـ ، د هـ[11] متساويين [أقليدس ، ق ٦] ؛

ويبقى ا هـ ، ج هـ[12] متساويين ؛

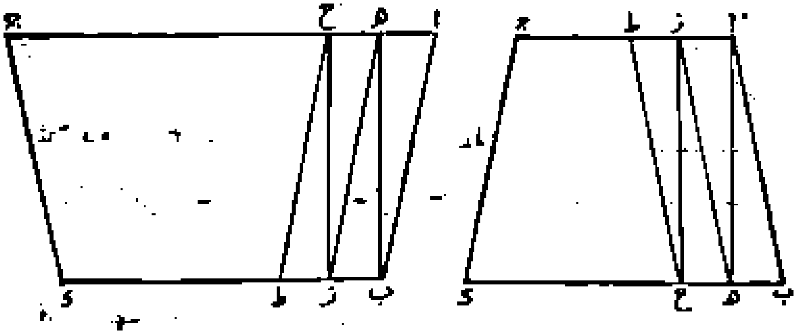
فيكون زاويتا هـ ا ج ، هـ ج ا متساويتين [أقليدس ، ق ٥] ؛

وكانت زاويتا د ا ب ، ب ج د[13] متساويتين[14] ؛

فيكون جميع زاوية ب ا ج مساوية لجميع زاوية د ج ا .

(١) كا كان (٢) با اذا قام (٣) كب المتساويتان (٤) كا دب
(٥) كا متساويان (٦) كد دا (٧) با اب (٨) با متساوية (٩) كد ويقتضي (١٠) كب ، كج ، با باقية (١١) كا هد (١٢) كا ، كد هج ؛ با دم (١٣) كد دد (١٤) كب متساويين .

الثالث : إذا قام عمودان متساويان على خط ووصل طرفاهما بخط كانت الزاويتان الحادثتان بينهما(١) قائمتين(*) .



ولنعد عمودي ا ب ، جـ د على خط ب د ونصل اجـ فأقول : إن زاويتي ب ا جـ ، جـ د ا(٢) المتساويتين(٣) [« الشكل » الثاني] قائمتان .

وإلا لكانتا إما منفرجتين أو حادتين (**) .

فليكونا أولا منفرجتين :

(١) كد بينهما متساويتين كانتا أيضا (٢) كد دجـ (٣) كج المساويتين

(*) هذا الشكل الرباعي القائم الزوايا كان له دور هام في تاريخ مسألة التوازي . ويبدو أن الشاعر ، الفيلسوف ، الرياضي عمر الخيام (توفي ٥١٧/١١٢٣) كان أول من نظر فيه (أنظر نوردن [١] ، ص ٧٦) . أنظر أيضا ، فيما يتصل برسالة الخيام « في شرح ما أشكل من مصادرات أقليدس » ، بروكلمان [١] ، الجزء الأول ، ص ٤٧١ ؛ ملحق الجزء الأول ، ص ٨٥٥ .

(**) هذان هما الفرضان اللذان أطلق عليهما ساكيري فيما بعد اسمي « فرض الزاوية المنفرجة » و « فرض الزاوية الحادة » على الترتيب . والفرض الأول (فرض الزاوية المنفرجة) محقق في هندسة ريمان ، ويلزم عنه أن مجموع زوايا المثلث أكبر من قائمتين . والفرض الثاني (فرض الزاوية الحادة) محقق في هندسة لوباتشيفسكي ، ويلزم عنه أن مجموع زوايا المثلث أنقص من قائمتين . أما هندسة أقليدس فتأخذ بما سماه ساكيري « فرض الزاوية القائمة » ، وهو الفرض الذي يحاول الطوسي هنا أن يبرهن على صدقه . ويلزم عن « فرض الزاوية القائمة » أن يكون مجموع زوايا المثلث مساويا لقائمتين .

ونخرج من ا عمود ا هـ على خط ا جـ [أقليدس ، ق ١٢] ثم فيقع لا محالة فيما بين خطى ا ب ، جـ د ، ويكون[4] زاوية ا هـ د الخارجة من مثلث ا ب هـ [5] أعظم من زاوية ا ب هـ القائمة [أقليدس ، ق ١٦] فيكون[6] أيضاً منفرجة ؛

ثم نخرج[7] من نقطة هـ عمود هـ ز على خط هـ د ، ويقع فيما بين خطى ا هـ ، جـ د ، ويكون زاوية هـ ز جـ أيضاً منفرجة[8] ؛

ثم نخرج[9] من ز عمود ز ح على ز جـ ، ومن ح عمود ح ط على ح د ، وهكذا إلى غير النهاية[10] ، فيكون[11] الأعمدة الخارجة من نقط[12] ا ، ز ، ط من خط ا جـ على خط ب د — أعني أعمدة ا ب ، ز هـ ، ط ح — متزايدة الأطوال على الولاء[13] ؛

وأقصرها عمود ا ب : لأنه يوتر زاوية ا هـ ب الحادة ، فهو أقصر من ا هـ[14] الموتر للقائمة [أقليدس ، ق ١٩] ، و

ا هـ الموتر لزاوية[15] ا ز هـ الحادة أقصر من ز هـ الموتر للقائمة ؛ فـ

ا ب أقصر من ا هـ[16] ، و

ا هـ من ز هـ[17] ، وكذلك ز هـ من ط ح ، وعلى هذا الترتيب[18] .

ويظهر من ذلك أن أبعاد النقط ، التي هي مخارج[19] الأعمدة الخارجة من خط ا جـ على خط[20] ب د ، عن[21] خط ب د[22]

(٤) كد فيكون (٥) كج اهب (٦) كج ، با فتكون (٧) با يخرج
(٨) كد منفرجة أيضا (٩) با يخرج (١٠) كب ، با نهاية (١١) كد ويكون ؛
با فتكون (١٢) كا ، كب ، با نقطة (١٣) كد الولا (١٤) كد دهـ
(١٥) كد الزاوية (١٦) كب ، كج ، با فـ اب أقصر من زهـ (١٧) سقط :
و اهـ إلخ (١٨) كد فـ اب أقصر من زح الموتر للقائمة و زح الموتر لـ زطح الحادة أقصر
من طح ، وعلى هذا الترتيب (١٩) كد مجاز (٢٠) كج ساقطة (٢١) كب ،
با من (٢٢) كد سقط : عن خط بد

متزايدة الأطوال في[٢٣] جهة جـ [الشكل الأول] (فإذن[٢٤] خط ا جـ موضوع على التباعد عن خط ب د في جهة جـ[٢٥]) ، وعلى التقارب[٢٦] في جهة ا .

ولكون زاوية[٢٧] د جـ ا أيضا منفرجة تبين[٢٨] بمثل هذا التدبير أن خط ا جـ بعينه موضوع على التباعد من[٢٩] خط ب د بعينه في جهة ا التي كان فيها بعينها موضوعا على التقارب منه .

فإذن[٣٠] هو متباعد متقارب[٣١] معاً[٣٢] من[٣٣] خط واحد في جهة واحدة من غير تلاق — هذا خلف[٣٤] [مصادرة الطوسي] .

ثم ليكونا حادتين :

ونقيم[٣٥] الأعمدة المتوالية ، إلا أنا نبتدىء[٣٦] بإخراج العمود من نقطة ب على خط ا جـ ، فيقع فيما بين خطي ا ب ، جـ د[٣٧] ، لكون زاوية ا حادة[٣٨] — إذ لو وقع خارجا عنهما[٣٩] لاجتمع في مثلث قائمة ومنفرجة .

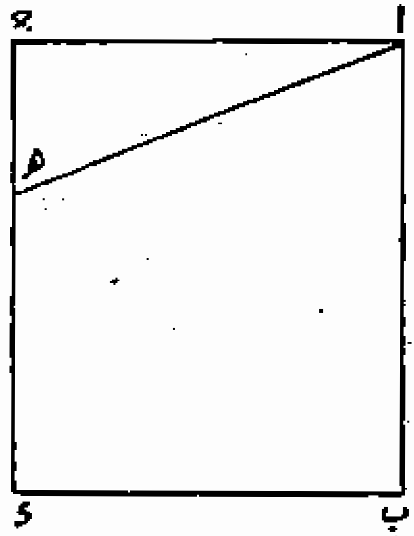
وهكذا إلى أن[٤٠] تخرج[٤١] أعمدة ا ب ، هـ ز ، ح ط المتناقصة الأطوال على الولاء[٤٢] .

ثم تبين بمثل ما مر أن خط ا جـ موضوع على التقارب من خط ب د في جهة جـ ، وعلى التباعد عنه في جهة ا ؛

وتبين باستئناف العمل والتدبير أنه موضوع على التباعد عنه[٤٣] في الجهة التي كان موضوعا فيها على التقارب منه بعينه — هذا خلف[٤٤] [مصادرة الطوسي] .

فإذن ثبت أن زاويتي ب ا جـ ، د جـ ا قائمتان .

(٢٣) كج من (٢٤) كا وإذن (٢٥) سقط : وإذن إلخ (٢٦) كج ، كد التقارب منه (٢٧) كب زاوابة (٢٨) كا ، ب يتبين (٢٩) كج ، كد ، با عن (٣٠) كا وإذن (٣١) كب متقارب متباعد (٣٢) كج ساقطة (٣٣) كا عن (٣٤) كا ، كد « هذا خلف » مختصرة هكذا « هف » (٣٥) كب ولنقم (٣٦) كج فنبتدىء نبين (٣٧) با اجـ (٣٨) با ساقطة (٣٩) كد عها (٤٠) كا ساقطة (٤١) با يخرج (٤٢) كا كد ، با الولا (٤٣) كج ساقطة ؛ كد سقط : في جهة ا إلخ (٤٤) كا ، كد « هذا خلف » مختصرة هكذا « هف » .



الرابع : كل ضلعين متقابلين من (١) سطح ذى أربعة أضلاع قائم الزوايا متساويان .

كضلعى ا ب ، جـ د من سطح ا ب جـ د القائم الزوايا (٢) .

وإلا فليكن جـ د أطول :
ونفصل د هـ مثل ا ب [أقليدس ، ق ٣] ؛ ونصل ا هـ ؛

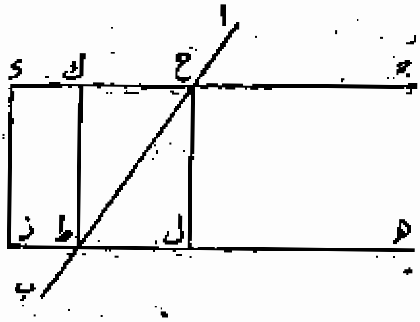
فيكون زاويتا ب ا هـ ، د هـ ا ، قائمتين لحدوثهما بين عمودى ا ب ، هـ د المتساويين (٣) القائمين (٤) على ب د [الشكل الثالث] ؛
وقد كانت زاويتا ب ا جـ ، د جـ ا قائمتين ؛
فالكل (٥) كالجزء ، والخارجة كالداخلة ، وكلاهما خلف (٦) [أقليدس ، ق ١٦] ، فإذن الحكم ثابت (٧) .

(١) كج ف (٢) كد سقط : متساويان إلخ ؛ با كل ضلعين متقابلين من سطح ذى أربعة أضلاع قائم الزوايا ، كضلعى اب ، جد من سطح ابجد القائم الزوايا ، متساويان .
(٣) كا المتساويين (٤) كج القائمين (٥) كج والكل (٦) كب وكلاهما باطلان ؛ با كلاهما خلف (٧) كا فالحكم ثابت ؛ كج فإذن ثبت الحكم .

الخامس : كل خط يقع (١) على عمودين قائمين (٢) على خط فإنه يصير المتبادلتين متساويتين ، والخارجة مساوية لمقابلتها الداخلة ، والداخلتين (٣) فى جهة معادلتين (٤) لقائمتين (*) .

(١) با ساقطة (٢) كج على من قائمتين (٣) كد الداخلتين (٤) با متعادلتين

(*) تقوم هذه القضية هنا مقام القضية ٢٩ من المقالة الأولى فى كتاب أقليدس . والقضية الأقليدية منطوقها كما يلى : اذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين متوازيين فانه يصير =



ﺟ مثلا وقع ا ب على عمودى ﺟ د ، ﻫ ز القائمين(٥) على د ز ، وقطعهما على ح ، ط —

فأقول(٦) إن متبادلتى د ح ط (٧) ، ﻫ ط ح متساويتان ؛

وكذلك خارجة ا ح ﺟ وداخلة ا ط ﻫ ؛

وإن داخلتى ﺟ ح ط ، ﻫ ط ح معادلتان لقائمتين .

— وذلك لأن ط ز إن كان مساويا ل ح د كانت جميع الزوايا المحيطة بنقطتى ح ، ط قوائم ؛ وثبت الحكم [الشكل الثالث ؛ أقليدس ، ق ١٣].

وإلا فليكن ح د أطول :

ونفصل د ك مثل ز ط [أقليدس ، ق ٣] ، ونصل ط ك (٨) ؛

ونفصل ط ل أيضا مثل ح ك ، ونصل ح ل ؛

فيكون سطح ح ل ط ك قائم الزوايا .

ويكون فى مثلثى ح ل ط ، ح ط ك ضلعا ح ل ، ل ط وزاوية ل مساوية لضلعى ط ك ، ك ح وزاوية ك [الشكل الرابع] ؛

(٥) كج ، كد القائمتين (٦) كب ، كج أقول (٧) با ز ح ط (٨) كب ، كد ك ط

= الزاويتين المتبادلتين متساويتين ، والخارجة مساوية لمقابلتها الداخلة ، والداخلتين فى جهة بعينها معادلتين لقائمتين .

وهنا يفترض أقليدس توازى الخطين المستقيمين ، بمعنى أنهما المستقيمان الواقعان فى سطح واحد مستو ، ولا يلتقيان مهما أخرجا فى جهة من جهتيهما . وكذلك يستند أقليدس فى برهانه على القضية ٢٩ إلى المصادرة الخامسة كما أشرنا قبلا . أما الطوسى فلم يكن له بالطبع أن يسلم بشىء من هذا . وهو ، بدلا من افتراض توازى الخطين المستقيمين ، يفترض أنهما عمودان على خط آخر ، حتى يتوصل إلى هدفه من غير دور .

فيكون زاويتا ك ح ط ، ح ط ل النظيرتان(٩) متساويتين(١٠) [أقليدس ، ق ٤] ، وهما المتبادلتان .

ولكون(١١) زاوية ط ح ك مساوية لزاوية ا ح ج [أقليدس ، ق ١٥] ، يكون(١٢) زاويتا ا ح ج(١٣) ، ح ط هـ(١٤) متساويتين(١٥) ، وهما الخارجة والداخلة .

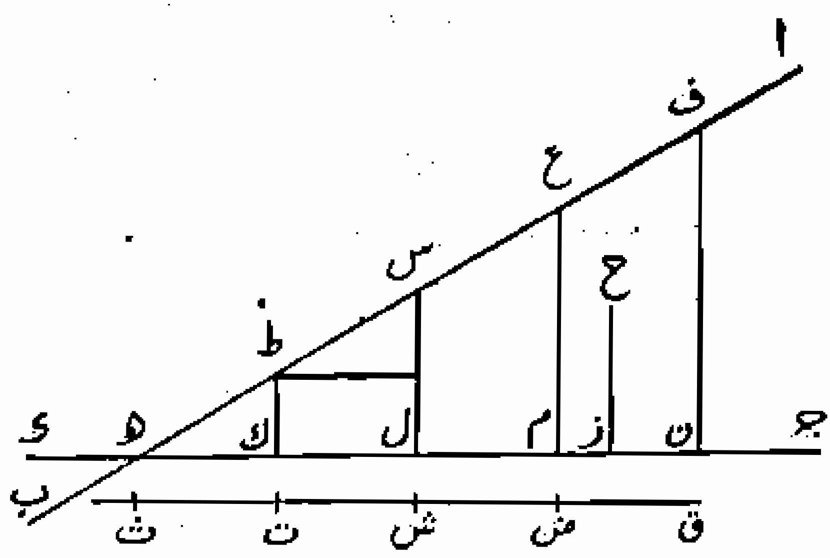
ولكون زاوية ج ح ط مع زاوية ا ح ج معادلة لقائمتين [أقليدس ، ق ١٣] ، فهي مع زاوية ح ط هـ أيضا معادلة لقائمتين ؛ وهما الداخلتان .

وذلك ما أردناه .

وهنالك(١٦) استبان أن كل خط يقع عموداً على أحد هذين العمودين فهو عمود على الآخر .

(٩) كد النظريان (١٠) با متساويتان (١١) كج ويكون (١٢) با ساقطة
(١٣) با اجح (١٤) با طه (١٥) كب ، كج متساويتان ؛ با مساويتان .

السادس : إذا(١) تقاطع خطان غير محدودين على غير قوائم ، وقام على أحدهما عمود ، فإنه إن أخرج قاطع الآخر(٢) في جهة الحادة .



(١) با إن (٢) با للآخر

فليتقاطع (٣) ا ب ، جـ د على هـ ؛ وليكن زاوية ا هـ جـ التي تلي (٤) ا حادة ، وجارتها التي تلي (٥) ب منفرجة ؛ وليقم (٦) على جـ د عمود ز ح —

أقول (٧) إنه (٨) إن أخرج ، قاطعَ ا ب في جهة ا .

فلنعين على ا هـ نقطة ط ، ونخرج عمود ك ط (٩) على جـ د [أقليدس ، ق ١٢] ؛ فلا يخلو (١٠) إما أن يقع فيما بين نقطتي هـ ، ز (١١) ، أو على نقطة ز منطبقا على ح ز ، أو خارجاً عن هـ ز .

فإن وقع فيما بين ز ، هـ (١٢) ، فلنفرض خطاً ونأخذ (١٣) منه أمثالا لـ هـ ك على الولاء (١٤) يزيد (١٥) جميعها (١٦) على هـ ز [مصادرة أرخميدس] — وهي ق ض ، ض ش ، ش ت (١٧) ، ت ث ؛

ونفصل من هـ ا أمثالا (١٨) لـ هـ ط (١٩) بتلك العدة — وهي هـ ط ، ط س ، س ع ، ع ف ؛

ونخرج من نقط (٢٠) س ، ع ، ف أعمدة س ل ، ع م (٢١) ، ف ن على جـ د ؛ ومن ط عمود ط ي على س ل .

فيكون (٢٢) في مثلثي هـ ط ك ، ط ي س : زاويتا هـ ط ك ، هـ س ي (٢٣) الداخلة والخارجة متساويتين (٢٤) ؛

وكذلك زاويتا هـ ك ط ، ط ي س القائمتان ؛ وضلعا هـ ط ، ط س ؛

(٣) با فلتتقاطع (٤) كب ، كد يلي (٥) كد يا [؟] ؛ با ساقطة
(٦) كب ولنقم (٧) كب ، كج ، كد فأقول (٨) كد اه (٩) كج ، كد طك (١٠) كا فلانخ ؛ كج فلا يخلوا ؛ كد فلا د (١١) كج ، كد ، با ز ، هـ (١٢) كج فيما بين نقطتي هـ ، ز ؛ كد فيما بين هـ ، ز (١٣) كج ويأخذ
(١٤) با الولا (١٥) كد ، با نزيد (١٦) باجمعها (١٧) كا س ث ؛ با ش ث (١٨) كد مثالا (١٩) كب سقط : لـ هط (٢٠) كب ، كج ؛ كد ، با نقطة
(٢١) كج غم ؛ كد ع ا (٢٢) كب فتكون (٢٣) كد طس ى (٢٤) كد متساويين

فيكون ى ط المساوى لـ ل ك (٢٥) (لكونهما متقابلين فى سطح ط ى ل ك القائم الزوايا [الشكل الرابع]) مساويا لـ هـ ك (٢٦) ؛ [أقليدس ، ق ٢٦] وبمثل (٢٧) ذلك نبين أن كل واحد من ل م ، م ن أيضا مساو لـ هـ ك ؛

فجميع أقسام هـ ن متساوية ، ومساوية لأقسام ق ث ، وبتلك العدة ؛

فـ هـ ن ، ق ث متساويان .

ق ث أطول من هـ ز ؛ فـ هـ ن أطول من هـ ز ؛

فعمود ف ن قد وقع خارجاً عما بين (٢٨) نقطتى هـ ، ز (٢٩) ؛ وصار ح ز داخل مثلث ف ن هـ ؛

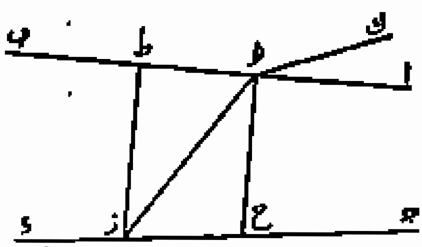
فإذن (٣٠) إذا أخرج عمود ح ز الموازى لعمود ف ن إلى أن يخرج (٣١) من (٣٢) المثلث ، قاطع ا ب لا محالة (٣٣) فى جهة ح — وهى التى تلى الحادة .

وأما إن وقع (٣٤) عمود ط ك على نقطة ز منطبقاً على عمود ح ز ، أو خارجاً عما بين ز ، هـ ، كان ثبوت الحكم أظهر .

فإذن الحكم ثابت .

(٢٥) كد المساوى لـ الك (٢٦) كد لـ هـ ك هـ (٢٧) كد وبمثل (٢٨) با من ما بين (٢٩) كج ، با ز ، هـ (٣٠) با فإذاً (٣١) با خرج (٣٢) كج عن (٣٣) كد لا مخالفة (٣٤) كد يقع .

السابع : كل خطين وقع عليهما خط ، وكانت الداخلتان فى جهة أصغر من قائمتين ؛ فإنهما إن أخرجا فى تلك الجهة تلاقيا .



فليكن ا ب ، جـ د خطين وقع عليهما خط [١] هـ ز ، وكانت داخلتا ا هـ ز ، جـ ز هـ معاً أصغر من قائمتين .

أقول فإنهما يتلاقيان فى جهة ا ، جـ إن أخرجا .

وذلك لأنه إما أن يكون إحدى هاتين الزاويتين قائمة أو منفرجة ، أو لا يكون [٢] ، بل يكونان حادتين .

فإن كانت إحداهما قائمة ، كانت الأخرى حادة ويلتقيان فى جهة الحادة كما مرّ [الشكل السادس] .

وإن كانت إحداهما منفرجة ، وليكن [٣] هى [٤] زاوية ا هـ ز ، فلنخرج [٥] من هـ [٦] عمود هـ ح على ا ب [أقليدس ، ق ١١] ، ومن ز عمود ز ط أيضا على ا ب [أقليدس ، ق ١٢] :

فيكون (لوقوع هـ ز على عمودى هـ ح ، ط ز) متبادلتا [٧] ح هـ ز ، هـ ز ط [٨] متساويتين [الشكل الخامس] ؛

ولما كانت زاويتا ا هـ ز ، هـ ز ح [٩] أصغر من قائمتين ، وكانت زاوية ا هـ ح قائمة ،

يبقى زاويتا [١٠] ح هـ ز ، هـ ز ح معاً — أعنى زاويتى هـ ز ط ، هـ ز ح ، بل زاوية ط ز ح [١١] أقل من قائمة ؛

وكانت زاوية ا ط ز قائمة ؛

فإذن [١٢] الخطان يتلاقيان فى جهة [١٣] ا ، جـ [١٤] .

(١) كج ساقطة (٢) با يكونان (٣) كا ساقطة (٤) كج ساقطة (٥) كج ولنخرج ؛ كد ، با فليخرج (٦) با ساقط : من هـ (٧) كب مبادلتا ؛ كج متبادلتا ؛ با متساويا (٨) كد يلى ذلك تكرار : أيضا على اب ... متبادلتا [ح] هـ ز ، هـ ز ط (٩) كد هـ ز ج معا ؛ با هـ ز ح معا (١٠) كب ، كج ، كد ، با يبقى جميع زاويتى (١١) كد بل زاوية خارج (١٢) ك فإذاً (١٣) كا ، كد جهتى (١٤) كب ا ، جـ ح

وإن كانتا حادتين :

فلنخرج من ه عمود ه ح (١٥) على جـ د ، ومن ز عمود ز ط أيضا على جـ د —

وإذا (١٦) ألقينا زاويتي جـ ز ه ، ز ه ح معا — أعني (١٧) زاويتي جـ ز ه ، ه ز ط معا المساويتين لزاوية جـ ز ط القائمة — من زاويتي ا ه ز ، جـ ز ه ، بقيت زاوية ا ه ح (١٨) أصغر من قائمة ؛

وكانت جـ ح ه قائمة ؛

وإذن (١٩) هما يتلاقيان (٢٠) في جهة ا ، جـ (٢١) .

ولهذا [الشكل] الأخير وجه آخر :

وهو أن نخرج (٢٢) من ه عمود ه ك على خط ه ز :

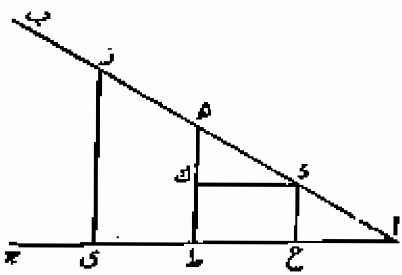
فيكون (٢٣) زاوية ك ه ز قائمة ، وزاوية ه ز جـ (٢٤) حادة ؛

فيتلاقى (٢٥) خطا ه ك ، ز جـ ، ويتلاقى (٢٦) ه ا ، ز جـ لا محالة إن أخرج (٢٧) في (٢٨) جهة جـ .

(١٥) كد دهح (١٦) كج فإذا (١٧) با سقط : زاويتي إلخ
(١٨) كب احه (١٩) كب فإذن (٢٠) با متلاقيان (٢١) كد في جهة آخر
(٢٢) كد ، با يخرج (٢٣) با فتكون (٢٤) كد هزح (٢٥) كا ، كج فيتلاقيا ؛ با فيلاقي (٢٦) كب ، كج ، كد وتلاقي ؛ با ويلاقي (٢٧) كد أخرجا
(٢٨) با من .

ولبيان هذه (١) القضية وجه آخر يتم بثمانية أشكال خمسة منها (٢) هي هذه التي مرت (٣) من الأول (٤) إلى الخامس وثلاثة هي هذه (٥) :

(١) كد هذا (٢) كا ساقطة (٣) كد مررت (٤) كد الأول (٥) كد ، با « ويليه هي هذه » بدل « وثلاثة هي هذه »



السادس [ب] : كل زاوية حادة فصل من أحد ضلعيها خطوط متساوية على الولاء(٦) وأخرج من تلك المفاصل أعمدة على الضلع الآخر فالخطوط(٧) التي تفصلها مواقع الاعمدة من ذلك(٨) الضلع متساوية(٩) أيضا .

فليكن الزاوية ب ا ج وقد فصل من ا ب خطوط ا د ، د ه ، ه ز (١٠) متساوية ، وأخرج(١١) من د ، ه ، ز أعمدة د ح ، ه ط ، ز ى على خط ا جـ .

فأقول إن خطوط ا ح ، ح ط ، ط ى المفصولة بها(١٢) أيضا متساوية .

فلنعمل (١٣) على د من خط ه د زاوية ه د ك مثل زاوية ا [أقليدس ، ق ٢٣] ونخرجه إلى ك .

فيكون في مثلثي ا ح د ، د ك ه زاويتا ح ا د ، ك د ه متساويتين(١٤) ؛

وكذلك زاويتا ا د ح ، د ه ك الخارجة والداخلة [الشكل الخامس] ؛

وكذلك ضلعا ا د ، د ه ؛

ف ا ح مساو لـ د ك ، وزاوية ا ح د القائمة لزاوية(١٥) د ك ه [أقليدس ، ق ٢٦] ؛

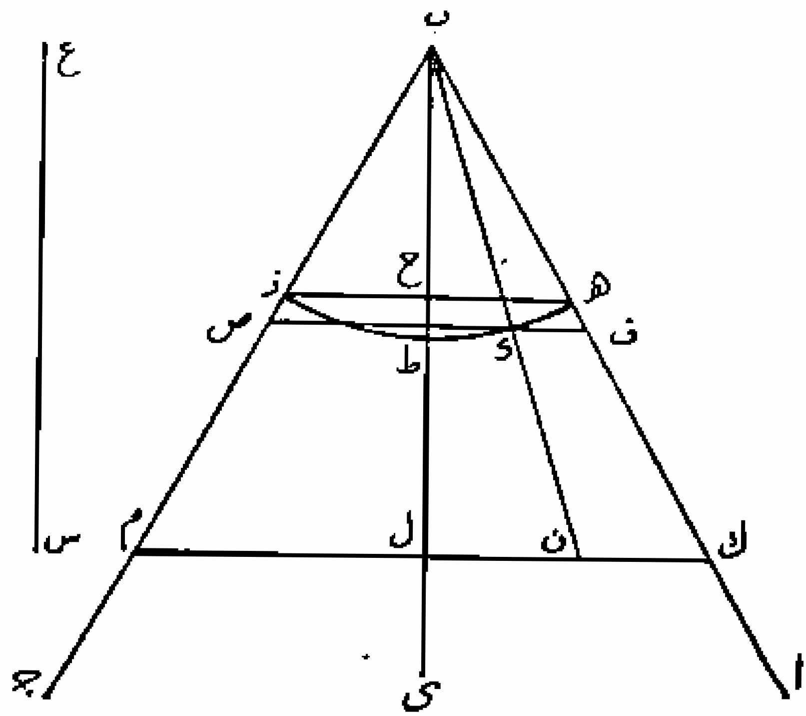
فيكون سطح د ك ط ح(١٦) قائم الزوايا [الشكل الخامس] ؛ و

(٦) كد ، با الولا (٧) با بالخطوط (٨) كد تلك (٩) كب مساوية
(١٠) كب زه (١١) كب ولنخرج (١٢) با الفصول منها (١٣) كج ولنعمل ؛ كد فنعمل (١٤) كج ، با متساويتان (١٥) كج كزاوية (١٦) كب دلطه ؛ با دلطح

د ك منه يساوى ح ط [الشكل الرابع] ، أعنى ا ح .
وبمثل ذلك نبين أن ط ى أيضا مساو(١٧) ز ا ح .

(١٧) كب يساوى

السابع [ب] : كل زاوية فرضت نقطة فيما بين خطيها ، فإنه يمكن أن يوصل (١) بينهما بخط مستقيم يمر (٢) بتلك النقطة .



فلنفرض نقطة د بين خطى ا ب ، ب جـ (٣) المحيطين بزاوية ا ب جـ (٤) ؛

وندير (٥) على مركز ب وببعد (٦) ب د قوس ه د ز (٧) المارة (٨) بنقطة د ؛

ونصل وتر ه ز ؛

وننصف زاوية ه ب ز بخط ب ح إلى حادثتين [أقليدس ، ق ٩] .

(١) كا توصل (٢) كب تمر ؛ كد ساقطة (٣) كد خطى ابد (٤) كد بزاوية اد (٥) كد ونريد (٦) كا ، كد ، با ببعد (٧) كا هد ؛ كج هطز (٨) كا المار

فيكون فى مثلثى ه ب ح ، ز ب ح ضلعا ه ب ، ب ح وزاوية [9] ه ب ح [10] مساوية لضلعى ز ب ، ب ح [11] وزاوية ز ب ح ؛

فيكون زاويتا ب ح ه ، ب ح ز متساويتين [أقليدس ، ق ٤] ، بل قائمتين [أقليدس ، ق ١٣].

ونخرج ب ح الى ى ، فيقطع قوس ه د ز على ط ؛

ونأخذ لـ ب ح أضعافا يزيد مجموعها على ب ط [مصادرة أرخيدس] ، وليكن تلك الأضعاف خط ع س ؛

ونفصل من ضلع ب ا أمثالا لـ ب ه يكون عدتها [12] عدة تلك الأضعاف ، وهى ب ه ، ه ك ؛

ونخرج من أطراف تلك الخطوط — وهى ه ، ك — أعمدة ه ح ، ك ل على ب ى [أقليدس ، ق ١٢] ، فيفصل [13] منه [14] ب ح ، ح ل متساوية [الشكل السادس ب] ، ويكون مجموعها [15] المساوى لـ ع س أطول من ب ط ، فيكون موقع عمود ك ل على ب ى [16] — وهو نقطة ل — خارجاً [17] عن [18] ب ط ؛

ونفصل من ب ج ب م مثل ب ك ، ونصل م ل ؛

فيكون فى مثلثى ب ك ل ، ب م ل ضلعا ك ب ، ب ل وزاوية ك ب ل مساوية لضلعى م ب ، ب ل وزاوية م ب ل ؛

فيتساوى زاويتا ب ل ك ، ب ل م ؛ و

ب ل ك قائمة ، فـ ب ل م قائمة ، و[19]

(٩) كذ ضلعى اب د (١٠) كذ هب (١١) كذ لضلعى زبح بح (١٢) كذ عدتهما (١٣) كا فتنفصل ؛ كب فيفصل ؛ با فنفصل (١٤) من (١٥) كج ، كذ مجموعهما (١٦) كذ على ب (١٧) كا خارجة (١٨) با من (١٩) ب ف

ك ل م خط مستقيم [أقليدس ، ق ١٤] .

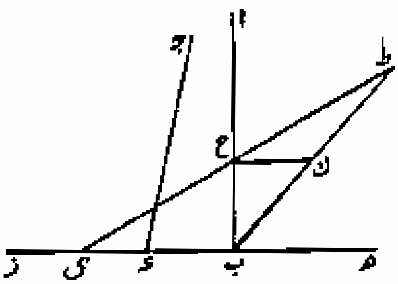
ونصل د ب ، ونخرجه إلى ن ، ونعمل على نقطة د من خط ن د زاوية ن د ف [٢٠] مثل زاوية د ن ل [أقليدس ، ق ٢٣] ؛

فيكون خطا ف د ، ك م متوازيين ، لتساوي متبادلتيهما [٢١] [أقليدس ، ق ٢٧] ؛

ونخرج ف د حتى يخرج [٢٢] من مثلث ب ك م على نقطتي ف ، ص ؛ فيكون خط ف د ص هو الموصول بين ضلعي ا ب ، ب ج [٢٣] — المار بنقطة د .

(٢٠) كج ف د ن (٢١) كا ، با متبادلتهما ؛ كب متبادليهما (٢٢) كد ، با تخرج (٢٣) كد ضلعي اب د .

الثامن (وهو لإثبات القضية) [١] :



وليكن الخطان ا ب ، ج د ، والواقع عليهما ب د ، والداخلتان — اللتان هما [٢] أصغر من قائمتين — هما ا ب د ، ج د ب .

ولنخرج ب د في الجهتين إلى ه ، ز ؛ ونفصل من ب ا ب ح مثل ب د .

فزاوية [٣] ا ب د مع زاوية ج د ب أصغر من قائمتين ؛ ومع زاوية ا ب ه كقائمتين [أقليدس ، ق ١٣] ؛

يبقى زاوية [٤] ا ب ه أعظم من زاوية ج د ب .

فنعمل [٥] على ب من ب ح زاوية [٦] ح ب ط مثل زاوية ج د ب

(١) كج والثامن هو لإثبات القضية (٢) كا ، كد ، با ساقطة (٣) كا ، با وزاوية (٤) كا ساقطة (٥) كا فلنعمل ؛ كد نعمل ؛ با ونعمل (٦) با وزاوية

[أقليدس ، ق ٢٣] ، ونصل بين خطى ط ب ، ب ز المحيطين بزاوية ب خط[٧] ط ح ى ماراً بنقطة ح [الشكل السابع ب] ؛

فزاوية ط ح ب الخارجة من مثلث ى ح ب أعظم من زاوية ح ب د[٨] [أقليدس ، ق ١٦] .

ونعمل على نقطة ح من خط ب ح زاوية ب ح ك[٩] مثل زاوية ا ب د ، ونخرج ح ك إلى أن يقطع[١٠] ب ط على ك ؛

وإذ تقدم ذلك أقول : فخطا ا ب ، جـ د يتلاقيان —

لأنا لو توهمنا تطبيق ب د على ب ح المساوى له ، انطبق د جـ على ب ك لتساوى زاويتى ح ب ك[١١] ، ب د جـ[١٢] ، و

ب ا على ح ك لتساوى زاويتى ب ح ك ، د ب ا[١٣] ؛ فيتلاقيان ضرورة على نقطة ك .

وذلك ما وعدت[١٤] بيانه .

(٧) كا ، كه بخط (٨) با وزاوية (٩) با ببلح (١٠) كج تقطع
(١١) با ببحك (١٢) با دبا (١٣) با سقط : و با الخ.

قضايا من أقليدس افترضها الطوسى فى استنباطاته السابقة

(وجميعها من المقالة الأولى من كتاب «الأصول»)

٣ — لنا أن نفصل من أطول خطين خطاً مساوياً لأقصرهما .

٤ — إذا تساوى من مثلثين ساقاهما ، كل لنظيره ، وكانت الزاويتان المحصورتان بينهما متساويتين ، فقاعدتاهما أيضا متساويتان ، والمثلثان متساويان ، والزاويتان الأخريان متساويتان ، كل لنظيرتها ؛ وهما الزاويتان اللتان يوترهما الساقان المتساويان .

٥ – زاويتا قاعدة المثلث المتساوى الساقين متساويتان ، وإن أخرج الساقان المتساويان على الاستقامة فإن الزاويتين اللتين تحت القاعدة متساويتان .

٦ – إذا تساوى فى المثلث زاويتان ، فإن الضلعين الموترين للزاويتين المتساويتين أيضا متساويان .

٩ – لنا أن ننصف زاوية مستقيمة الضلعين .

١١– لنا أن نخرج عمودا على خط مستقيم من نقطة عليه .

١٢– لنا أن نسقط عمودا على خط مستقيم غير محدود من نقطة ليست عليه .

١٣– إذا قام خط مستقيم على خط مستقيم ، فإن الزاويتين الحادثتين عن جنبتيه إما قائمتان وإما مساويتان لقائمتين .

١٤– إذا خرج من نقطة فى خط مستقيم خطان مستقيمان عن زاويتين مساويتين لقائمتين ؛ فالخطان متصلان على الاستقامة .

١٥– إذا تقاطع خطان مستقيمان ، فكل زاوية مثل مقابلتها .

١٦– إذا أخرج ضلع من مثلث ، فالزاوية الخارجة أعظم من كل واحدة من الداخلتين اللتين تقابلانها .

١٧– كل مثلث فمجموع أى زاويتين فيه أنقص من قائمتين .

١٩– الزاوية العظمى فى كل مثلث يوترها الضلع الأعظم .

٢٣– لنا أن نعمل على خط مستقيم معلوم ، ومن نقطة فيه ، زاوية مستقيمة تساوى زاوية مستقيمة معلومة .

٢٦ ـ إذا ساوت زاويتان من مثلث كلٌّ نظيرتها من مثلث آخر ، وتساوى ضلعان متناظران ، أى إما الضلعان المجاوران للزاويتين المتساويتين وإما الضلعان الموتّران لزاويتين متساويتين ، فإن الزوايا والأضلاع الباقية متساوية على التناظر .

٢٧ ـ إذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين فصير الزاويتين المتبادلتين متساويتين ، فالمستقيمان متوازيان .

للبحث بقية

مراجع

ابن النديم

[١] الفهرست ، القاهرة .

بروكلمان ، Carl Brockelmann

[١] *Geschichte der Arabischen Litteratur*. Band I, Weimar 1898; Band II, Berlin 1902; Supplementband I, Leiden 1937; Supplementband II, Leiden 1938.

بلوى E. B. Plooij

[١] *Euclid's Conception of Ratio and his Definition of Proportional Magnitudes as Criticized by Arabian Commentators*. Rotterdam 1950.

بونولا ، Roberto Bonola

[١] *Die Nichteuklidische Geometrie*. Historisch-Kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Leipzig 1919.

هذه ترجمة عن الأصل الايطالى .

سارتون ، George Sarton

[١] *Introduction to the History of Science*. Baltimore 1927-1948.

ثلاثة أجزاء فى خمسة مجلدات .

[٢] *Ancient Science and Modern Civilization* . Nebraska 1954.

الطوسى ، أبو جعفر نصير الدين (٥٩٧/١٢٠١–٦٧٢/١٢٧٤)

[١] *Euclidis elementorum geometricorum libri tredecim. Ex traditione doctissimi Nassiridini Tusini nunc primum arabice impressi*. Romae in typographia Medicae MDXCIV. Cum licentia superiorum. ("النسخة المطولة" ا)

[٢] تحرير أصول الهندسة والحساب المنسوب إلى أقليدس (" النسخة المختصرة " ب) :

كا : مخطوط دار الكتب المصرية ، ٧٠٣ رياضة ؛ ١٠٠٦ هـ .

كب : مخطوط دار الكتب المصرية ، ٣٥ رياضة م ؛ ١١١٩ هـ .

كج : مخطوط دار الكتب المصرية ، ٣٦ رياضة م ؛ ١١٢٢ هـ .

كد : مخطوط دار الكتب المصرية ، ١٠٢٦ رياضة ؛ ١٢٥٠ هـ . (*)

يا : مخطوط بلدية الإسكندرية ، ٥١٩٨ ج ؛ ١١٣٠ هـ .

نوردن ، A. P. Norden

[١] *Elementare Einführung in die Lobatschewskische Geometrie.* Berlin 1958.
طبع هذا الكتاب بلغته الأصلية (الروسية) سنة ١٩٥٣ .

هيث ، Thomas L. Heath

[١] *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* Translated from the Text of Heiberg with Introdcution & Commentary by Sir Thomas L. Heath, 3 vols. 2nd. edition, Cambridge 1925. (Reprinted by Dover Publications, Inc., New York, 1956.)

[٢] *Euclid in Greek.* Book I, with Introduction and Notes. Cambridge 1920.

[٣] *A History of Greek Mathematics.* 2. vols. Oxford 1921.

[٤] *The Works of Archimedes.* Edited in Modern Notation with Introductory Chapter by T. L. Heath. Cambridge 1912. (Reprinted by Dover Publications, Inc., New York.)

(*) أشكر دار الكتب المصرية بالقاهرة لسماحها لي بالحصول على صور فوتوغرافية من هذه المخطوطات . وأخص بالشكر القائمين بها عن شؤون قسم المخطوطات والتصوير لما أسدوه إلي من معونة كريمة .