

Y-A-T-IL UNE CRISE DES MATHÉMATIQUES CONTEMPORAINES?

§ 1. — Une crise de *rigueur* en matière de mathématique a provoqué dès le 19^e siècle, parmi les mathématiciens soucieux d'assurer leur discipline, des critiques fiévreuses des notions et principes fondamentaux de la *Géométrie* et de l'*Analyse*. Elle a posé ainsi un problème d'un genre nouveau, essentiellement philosophique: celui du *fondement* de ces disciplines. C'est autour de ce problème que sont nées, on le verra plus loin, les écoles les plus opposées en mathématiques contemporaines.

En effet, certaines exigences du *progrès intensif* ⁽¹⁾ des mathématiques au XIX^e siècle concourent avec celles qui se sont manifestées en Géométrie ⁽²⁾ à la critique de l'*évidence intuitive* des principes de l'*Analyse*. D'abord, il y a eu le besoin de donner une base solide à celle-ci en élucidant les difficultés déjà mûres pour le Calcul Infinitésimal en ce qui concerne les séries divergentes, le minima, le maxima, les dérivées, etc. En 1826, Abel pouvait se plaindre encore qu'on raisonnât sur des séries divergentes: "Elles sont quelque chose de fatal, dit-il, et c'est une bonte qu'on ose y fonder aucune démonstration. Ce sont elles qui ont fait tant de malheurs et causé tant de paradoxes" ⁽³⁾. Des malheurs et des paradoxes parce que les notions de l'*Analyse* étaient assurées jusque là par l'*évidence* de leur corrélat géométrique (spatial). D'Abel et de Cauchy, jusqu'à Weierstrass, les Analystes se sont voués à la critique et à la révision de leurs idées fondamentales — infini, continuité, fonction, limite, dérivée, nombre complexe, irrationnel, etc. — en les affranchissant des bornes où l'intuition géométrique les avait longtemps retenu enfermées, et en les développant hors de ses limites arbitraires. Cette critique réussit enfin depuis

(1) Au *progrès extensif* qui est l'adjonction de telle ou telle théorie nouvelle, nous opposons le *progrès intensif* qui est le fruit d'une réflexion en profondeur sur les faits déjà acquis à la suite de laquelle ceux-ci apparaissent dans de nouvelles combinaisons ou structures (Cf. notre *Extension de la Logique et fondement des Math.*, ch. III, § 22).

(2) Nous ne nous occupons pas ici de la Géométrie, dont la critique a révélé, on le sait, la coexistence idéale de plusieurs géométries autres que celles d'Euclide.

(3) Abel, dans le *Journal de Crelle*, t. i, 1820, p. 311.

Weierstrass et Meray à apporter son fruit : Elle a affiné les sciences mathématiques jusque dans leurs parties les plus délicates en les édifiant entièrement sur l'idée du *nombre entier*. C'est en ces deux auteurs que s'épanouit en effet ce qu'on a appelé avec Kroneker et Klein l'*arithmétisation des mathématiques*. Mais tandis que la critique approfondie de l'Analyse Infinitésimale semblait chasser l'idée de l'infini et de l'infinitésimal, en réduisant ses théorèmes aux cas des variables indéfiniment croissantes et décroissantes, un travail se faisait sur l'*Arithmétique* elle-même : Une exploration plus soignée des principes de cette science, par Georg Cantor, arrivait à résoudre l'enigme de l'Infini, en dénuisant les paradoxes qui, depuis Zenon d'Elée, avaient arrêté la pensée dans cette direction. Cette exploration dite *théorie des ensembles* ne confirme pas seulement la tendance arithmétisante en mathématiques, mais, comme l'analyse de Zenon, touche de près la Logique, surtout sous sa forme algébrisée; et cela en faisant appel à certaines notions et propriétés opératoires qui caractérisent particulièrement la logique de l'Ecole de Boole. Telles par exemple la notion même d'"ensemble" qui n'est autre que celle de "classe", et les opérations additive et multiplicative dans le domaine du transfini qui donnent des résultats analogues à ceux du principe de tautologie ou de dualité logique. On a par exemple en logique :

$$\begin{aligned} a + a &= a \\ a \times a &= a, \end{aligned}$$

ce qui est l'analogie, p.ex., des théorèmes suivants de G. Cantor concernant le nombre ordinal transfini :

$$\begin{aligned} \eta &= \eta + \eta \\ \eta &= \eta \times \eta \\ \eta &= (1 + \eta) \eta \\ \eta &= \eta^\eta \end{aligned}$$

autrement dit, dans un cas comme dans un autre, les opérations additive et multiplicative ne changent en rien l'égalité. Par conséquent, l'*axiome de l'inégalité* (le tout est plus grand que la partie) d'Euclide est une proposition qui est en défaut par rapport aux classes logiques ainsi qu'aux nombres transfinis. "Mais si nous ne considérons que la mathématique et laissons de côté les autres sphères intellectuelles (la logique p.ex.), la théorie des ensembles embrasse les domaines de l'Arithmétique, de la théorie des fonctions et de la Géométrie; elle les réunit sur la base de l'idée de *puissance* en une unité supérieure. Dis-

continu et *continu* se trouvent de la sorte considérés du même point de vue et mesurés avec une mesure commune" (1). Tel est le fait suprême qu'a établi Cantor.

§ 2. — A peine la construction de sa théorie mathématique du transfini est-elle terminée, après un départ difficile dans une méfiance justifiée par l'échec des spéculations antérieures sur l'infini actuel (Zenon, Gallilée, Leibniz, Cauchy, Bolzano, Du Bois - Raymond, etc), que des *paradoxes* sérieux viennent en secouer les fondements d'un ébranlement menaçant de s'étendre à l'Analyse et soulevant parmi les mathématiciens des discussions interminables quand à la justification entière de la théorie cantorienne ou à sa délimitation possible.

Dès 1897, Burali-Forti avait signalé une antinomie concernant la considération de la totalité des ordinaux transfinis : Cantor démontre que les nombres ordinaux transfinis peuvent être rangés en une série linéaire telle que de deux nombres inégaux, l'un soit plus petit que l'autre, et que le plus grand ordinal soit le terme de la série. Or, Burali-Forti remarque, en substance, que la série peut avoir un nombre ordinal plus grand encore que son dernier terme, et que par conséquent le plus grand ordinal transfini n'est pas le plus grand ordinal transfini : ce qui est une contradiction (2). Peu de temps après fût découverte l'antinomie de Zermelo (3) - Russell, que ce dernier publia le premier en 1903. Elle concerne le nombre cardinal transfini, et peut s'énoncer comme suit : L'ensemble de tous les ensembles qui n'ont aucun élément en commun peut être regardé lui-même comme l'un de ses sous-ensembles, c'est-à-dire comme un ensemble qui se contient et ne se contient pas à la fois, ce qui est une contradiction (4). En 1905, J. Richard publia encore l'antinomie suivante : avec un nombre fini de mots, il est possible de définir un nombre au sujet duquel on peut démontrer en même temps qu'il est indéfinissable par un nombre

(1) G. Cantor, dans *Math. Ann.*, t. XX, p. 182.

(2) Burali-Forti : *Una questione sui numeri transfiniti*, dans *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, XI, 1897, p. 164. Voir aussi sa *Logica Mathematica*, 1919, p. 330.

(3) « J'avais trouvé moi-même, déclare Zermelo, cette antinomie indépendamment de Russell et l'avais communiquée... au professeur Hilbert avant 1903 ». (*Neuer Beweis die Wohlordnung*, *Math. Ann.* t. 65, 1908, p. 119 n.)

(4) Russell : *Principles of Mathematics*, 1903, p. 101. — *Les Paradoxes de la logique*, *Rev. de Mét. et de Mor.*, 1906, p. 287; même loc., 1910 et 1911. — *On Some difficulties in log.*, dans *Proc. of London Math. Soc.* 1906.

fini quelconque de mots ⁽¹⁾. Suivent ensuite maintes autres antinomies ⁽²⁾, qui ont toutes déterminé les mathématiciens à en chercher une solution ou à les éviter; et dans ce but ceux-ci se sont vus amenés à justifier la théorie des ensembles dans son intégrité ou à la délimiter à certaines de ses parties, manifestant ainsi pour la première fois dans l'histoire des mathématiques des divergences telles qu'ils se séparent en *Ecoles* non seulement à l'égard des ensembles, mais encore à l'égard de toutes leurs disciplines constituées. C'est donc à propos de ces antinomies que s'est allumée la controverse, caractéristique de notre époque, qui divise les mathématiciens en deux camps opposés: *idéalistes* et *empiristes* comme le dit Du Bois-Raymond ⁽³⁾, ou encore *formalistes* et *intuitionnistes* comme on le dit communément aujourd'hui en suivant la désignation de Brouwer ⁽⁴⁾. Il ressort même de l'état actuel des discussions que les deux attitudes mentales opposées ne paraissent pas seulement comme historiquement liées aux origines des quelques doctrines mathématiques, mais encore comme deux interprétations possibles des doctrines toutes formées, ainsi qu'on le voit déjà dans le dialogue de Paul du Bois-Raymond entre un idéaliste et un empiriste, ou tout récemment dans le dialogue du mathématicien suisse, F. Gonseth ⁽⁵⁾. Par conséquent, il y a entre *formalistes* et *intuitionnistes* d'abord une opposition localisée dans la théorie des ensembles dont dépend le sort même de cette mathématique du transfini; ensuite une opposition généralisée à toute les mathématiques constituées, au sujet des principes méthodologiques capables de les fonder et dont l'enjeu est certaines théories mathématiques classiquement admises. Nous nous occupons pour l'instant de la première opposition (la seconde sera discutée aux §§ 6 et 7).

§ 3. — D'abord, du point de vue de l'empirisme, Poincaré fait ressortir, le premier, que toute proposition concernant le transfini doit être regardée comme une proposition concernant

(1) J. Richard, dans *Rev. Gen. des Sc.*, 1905; et *Acta Mathematica*, 1906, p. 295; 1909, pp. 377 et 193.

(2) Telles que celle du catalogue des catalogues, des mots prédicables et imprédicables, etc. etc. Voir un exemple typique de ces paradoxes dans Colerus: *De Pythagore à Hilbert*, tr. fr., p. 251.

(3) Du Bois-Raymond: *Die allgemeine Functiontheorie*, 1882.

(4) Brouwer: *Intuitionism and formalism*, dans *Bull. of Amer. Math. Soc.*, t. XX, 1914, p. 31-95.

(5) F. Gonseth: *Math. et Réalité*, 1936.

le fini, autrement elle ne sera pas "vérifiable": "Comme les vérifications ne peuvent porter que sur les nombres finis, il s'ensuit que tout théorème sur les nombres infinis, ou sur ce qu'on appelle ensembles infinis ou cardinaux transfinis, ou ordinaux transfinis, etc... etc..., ne peut être qu'une façon abrégée d'énoncer des propositions sur les nombres finis. S'il en est autrement, ce théorème ne sera pas vérifiable, il n'aura pas de sens" (1). Inutile donc d'isoler le transfini, de lui attribuer des propriétés qui ne se vérifient pas pour le fini.

De là l'attitude empirique, plus explicite de Borel, de "regarder comme réels les êtres avec lesquels il (= le mathématicien) vit quotidiennement et dont il parle couramment sans avoir été jamais exposé à un malentendu" (2). Partant de ce critère, il distingue entre "des parties de la théorie des ensembles qui ont effectivement contribué au progrès de la théorie des fonctions", et "des constructions logiques purement verbales dans lesquelles on jongle avec les symboles auxquels ne correspond aucune intuition" (3). Les paradoxes des ensembles ont précisément leur source, selon lui, dans ces constructions logiques ou vides d'intuition: "Je ne comprends pas, s'écrie-t-il, le point de vue des analystes qui croient pouvoir raisonner sur un individu déterminé, mais non-défini; il y a là une contradiction dans les termes..." (4). Or, qu'est ce que l'individu défini caractéristique du système de Borel sinon l'intuition — par opposition aux constructions logiques — d'une part du nombre entier, et d'autre part du continu géométrique? C'est à partir d'eux que s'établissent les objets mathématiques: Si la suite indéfinie des entiers est parfaitement saisissable, c'est qu'elle est soumise au contrôle de l'intuition montrant qu'"après chaque entier, il y en a un autre". Par contre, la suite des ordinaux, que Cantor appelle "classe II", ne fait pas partie des mathématiques réelles, "car la proposition analogue — au delà de chaque suite indéfinie de fonctions croissantes, il y a une autre — ne suffit pas à nous donner une idée nette du transfini"; et il ajoute au sujet de ces ordinaux de la Classe II: "Lorsqu'on raisonne sur ces nombres ou sur un ensemble de même puissance, on ne peut donc faire que des raisonnements très généraux ou symboliques, dans lesquels l'ensemble considé-

(1) Poincaré: *Science et Méthode*, p. 136.

(2) E. Borel: *Leçons sur la théorie des fonctions*, 1914, p. 169.

(3) Ibid., p. 181.

(4) Ibid., p. 92.

ré est représenté par un symbole unique. De tels raisonnements en tant que raisonnements généraux sont légitimes du moment qu'ils sont exempts de contradictions, mais ils sont vides de tout contenu précis. Pour pouvoir leur donner un contenu, il faudrait préciser la désignation des éléments de l'ensemble, et c'est précisément ce qui est impossible. La théorie des ensembles non-dénombrables se réduit forcément à une sorte d'algèbre de logique dont les symboles ne recouvrent aucune réalité accessible, les divers mathématiciens ne pouvant être assurés qu'ils sont d'accord sur cette réalité puisqu'ils n'en ont pas une représentation commune" (1). Borel évite ainsi d'envisager une solution des antinomies en *amputant* tout simplement les nombres transfinis: "ces constructions logiques" qui ne possèdent nullement cette réalité mathématique caractéristique "des êtres avec lesquels le mathématicien vit quotidiennement". — Cette position de Borel est plus ou moins partagée par d'autres éminents mathématiciens tels que Baire et Lebesgue. A-t-on le droit de disposer ainsi de la théorie des ensembles au nom de la seule intuition? Et l'intuition peut-elle fournir une "représentation commune" qui assurera l'accord entre mathématiciens? On verra des intuitionnistes, plus radicaux encore que Borel, tels que Brouwer et Weyl, qui montreront que l'Analyse regardée par Borel comme l'expression même de ces êtres mathématiques dont il était question tout à l'heure, souffre elle-même et au nom de la même intuition de certaines imperfections dont le remède sera encore une amputation plus radicale que celle du transfini, puisque plus menaçante aux parties les plus établies de la science mathématique: l'Arithmétique et la Géométrie. Par conséquent, la distinction entre êtres mathématiques et constructions logiques, sur laquelle s'est basé Borel ne semble pas assurer la validité d'une doctrine mathématique étant donné que l'intuition est un événement tout personnel, ainsi qu'on le voit de la division des empiristes entre eux.

§ 4. — Si les empiristes se fondent sur l'intuition dans le rejet du transfini cantorien, et par ce rejet ne s'embarrassent point des paradoxes signalés; par contre les *formalistes* soutiennent que la *consistance logique* à elle seule suffit à valider une doctrine mathématique telle que la théorie des ensembles. Partant de là, ils cherchent, pour sauver intact l'édifice cantorien, à triompher de ces paradoxes: soit en *axiomatisant* cet édifice (Zermelo, Skolem, Fraenkel, Neumann), soit en générali-

(1) Ibid., p. 160-1.

sant ces paradoxes aux objets purement logiques et en introduisant une théorie de *types logiques* qui a pour but de remédier au mal antinomique à sa source lointaine (Russell, Whitehead, Ramsey, Quine). Nous sommes donc en présence de deux solutions formalistes différentes mais aussi voisines en tant que formelles.

Pour Zermelo, à qui revient l'initiative d'axiomatiser la théorie des ensembles en 1908, les paradoxes sont dûs à la définition cantorienne de la notion d'ensemble comme "Zusammenfassung, von bestimmten Vohlunderschiedenen Objekten unserer Auschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen"; et il établit un système d'axiomes où cette notion est prise comme indéfinissable. "Partant de la théorie des ensembles historiquement existante, dit-il, il faut chercher les principes qui sont nécessaires pour la fondation de cette discipline mathématique. J'ai l'intention de montrer comment cette théorie créée par Cantor et Dedekind se laisse ramener à quelques définitions et à sept axiomes qui semblent indépendants les uns des autres". Il s'agit de "restreindre assez les principes pour exclure les contradictions et... garder pourtant ce qui a une valeur" (1). La méthode, remarque justement J. Cavaillès (2) est celle dont D. Hilbert avait donné le modèle pour la géométrie dès 1899. Entre les objets indéterminés qui constituent le champ de la théorie, l'axiomatique définit par ses propriétés une relation fondamentale E : élément-ensemble. Les seconds termes de cette relation seront les ensembles: ou plutôt la théorie ne s'occupe que de déduire logiquement de nouvelles propriétés à partir des propriétés initiales de la relation c , sans s'inquiéter de la réalité ou de la structure des termes. L'axiome I — de la *détermination* — définit une relation: la relation d'égalité = suite des relations E et c ($M=N$ si $M \subset N$ et $N \subset M$, ou si pour tout $x \in M$, $x \in N$ et réciproquement). L'axiome II — des *ensembles élémentaires* — pose comme ensembles: l'ensemble vide, les ensembles constitués de un et de deux éléments. L'axiome III — de *séparation* —: si une proposition $E(x)$ est définie pour tous les éléments d'un ensemble M , M possède toujours une partie ME constituée par tous les éléments x de M pour

(1) Zermelo: *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, I, *Math. Ann.*, 1908, p. 261, cité par J. Cavaillès: *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles*, II, 1938, p. 120.

(2) Voir au sujet des axiomes suivants l'ouvr. cité de Cavaillès, p. 121-2.

lesquels $E(x)$ est vrai. Les axiomes IV et V posent respectivement l'existence de l'ensemble des parties BM d'un ensemble donné et de l'ensemble réunion CM formé par les éléments des éléments de M . L'axiome VI — *de choix* — si T est un ensemble dont tous les éléments sont des ensembles disjoints non vides, leur réunion CT contient au moins une partie S , qui a, avec chaque élément de T , un et un seul élément commun. Enfin l'axiome VII — *de l'infini* — : il existe un ensemble Z qui contient comme éléments l'ensemble vide et avec tout élément a l'élément de forme $\{a\}$. Ainsi disparaît par exemple l'antinomie - Russell : de l'axiome III résulte que tout ensemble M contient au moins une partie qui n'est pas élément de M . Mais Zermelo ne montre pas comment la théorie de l'ordre et des nombres ordinaux peut se déduire de ces axiomes, comme il reste d'ailleurs à démontrer que ces axiomes sont consistants, c'est-à-dire ne peuvent pas amener à un ensemble paradoxal. Reprenant cette question depuis 1922, Fraenkel et von Neumann essaient de compléter l'axiomatique de Zermelo en modifiant les axiomes et en précisant leurs rapports entre eux et avec l'édifice cantorien. Mais en ce qui concerne la consistance des axiomes, Gödel a démontré en 1928 que la non-contradiction ne peut pas se démontrer à l'intérieur du système dont on veut démontrer la consistance, ce qui semble limiter la portée de l'axiomatique.

§ 5. - L'autre tentative formaliste de résoudre les antinomies sans mutiler l'édifice cantorien est celle des logisticiens. Il est évident que, quelle que soit la portée de l'axiomatique de la théorie des ensembles (et en dépit de son incapacité de démontrer elle-même sa non-contradiction) cette méthode ne peut pas satisfaire aux logiciens tant qu'elle n'écarte que des antinomies localisées, laissant ainsi à l'ombre la solution de l'antinomie en général. Il est donc d'une importance particulière pour les logiciens de fonder une théorie pouvant remédier aux paradoxes en général et permettant de régler le sort des antinomies des ensembles sans sacrifier les principes fondamentaux de Cantor autour desquels elles ont pris naissance. C'est là le but de la théorie des *types logiques* de Russell - Whitehead.

Poincaré qui s'est intéressé plus que tout autre mathématicien à l'aspect logique de ces antinomies, a bien remarqué qu'elle proviennent d'un cercle impliqué dans les termes mêmes qui définissent les paradoxes signalés. Par exemple, dans le paradoxe de Richard : un nombre indéfinissable par un nom

bre fini quelconque de termes, est *effectivement* défini au moyen des termes : un nombre indéfinissable par un nombre fini quelconque de termes. Cette définition posée antérieurement aux objets définis est, dit-il, "non-prédicative", et une définition est non-prédicative quand elle contient un *cercle vicieux* (1). "Si la définition d'une notion N dépend de *tous* les objets A, elle peut être entachée de cercle vicieux si parmi les objets A il y en a qu'on ne peut définir sans faire intervenir la notion N elle-même" (2).

De la même manière, Russell regarde les antinomies comme des cercles vicieux dus à la supposition qu'une collection d'objets (un ensemble) puisse contenir des membres qui peuvent seulement être définis au moyen de la collection prise comme totalité. Des collections de cette sorte sont absurdes et n'ont aucun sens : et c'est pour les éviter que s'introduit la théorie des types : Celle-ci distingue une *hiérarchie* de types logiques dans les collections en question qui sont toutes déterminables par des *fonctions propositionnelles* ayant des variables apparentes. Ce qui importe alors c'est de délimiter le champ de la variabilité de ces variables de sorte qu'une fonction propositionnelle donnée ne puisse avoir comme argument la fonction propositionnelle elle-même. Et c'est ainsi qu'on triomphe, dit-on, des antinomies. Cette théorie, exposée tout le long des *Principia Mathematica* de Whitehead et Russell, n'a pas eu l'assentiment des mathématiciens, vu qu'elle présente un caractère chaotique et contient un axiome dit de *réductibilité* qu'il faut postuler sans démonstration. D'ailleurs, Russell lui-même déclare que "la théorie des types n'appartient pas d'une façon absolue à la partie achevée et certaine de notre sujet [c-à-d, du formalisme logistique]. Cette théorie est encore passablement chaotique, confuse et obscure". Et il ajoute : "Le besoin d'une doctrine des types n'est point douteux, mais cette doctrine attend une forme précise" (3). Cette forme s'obtient-elle par l'exclusion de l'axiome en question ? C'est du moins ce que prétendent des auteurs tels que P. Ramsey (4) et le polonais Chwistek (5) qui ont récemment remanié, séparément, la théorie des

(1) Poincaré : *Science et Méthode*, p. 207.

(2) Ibid. dans *Rev. de Mét. et de Morale*, 1903, p. 318; *Sci. et Meth.* p. 212.

(3) Russell : *Introduction à la philos. math.*, tr. fr., p. 115.

(4) F. P. Ramsey : *Foundations of Mathematics*, 1931.

(5) Chwistek : *Über die Antinomien der Principien der Mathematik*, dans *Math. Zeitschrift*, 1922, p. 241 et suiv., *Annales de la Société Polonaise des Math.*, II, Krakow 1924, p. 9-15; II, 1925, p. 32-41.

types. Mais Russell qui est au courant des oeuvres de ces deux auteurs ne s'est pas déclaré en faveur de ce raminement. D'autres tentatives pour la production d'une théorie des types plus précise (par ex. celle de l'américain Quine (1)) ou pour s'en débarrasser totalement, attirent actuellement l'attention d'un certain nombre d'auteurs.

Ainsi donc, en ne s'en tenant qu'à la doctrine classique de Russell - Whitehead, on peut affirmer que, pas plus que les tentatives précédentes des empiristes et des axiomaticiens, celle des logisticiens n'a pas élucidé les difficultés de la théorie des ensembles ni n'a rencontré un assentement général, bien que la solution — s'il y en a une — de ces difficultés semble dépendre d'une doctrine logique telle que celle des types. Quoiqu'il en soit de toutes ces tendances opposées au sujet de la validité intégrale ou partielle de l'édifice cantorien, on se ferait aujourd'hui une idée unilatérale de cet édifice, si on se confinait dans l'une ou l'autre d'entre elles; et en fait cet édifice n'est à l'heure actuelle qu'une juxtaposition des théories plus ou moins différentes de l'oeuvre cantorienne primitive. Et comme le remarque justement Poincaré: "C'est sans doute parce qu'il y a des âmes différentes et qu'à ces âmes nous ne pouvons rien changer: il n'y a donc aucun espoir de voir l'accord s'établir entre les pragmatistes et les cantorens" (2).

§ 6. — Historiquement parlant, le formalisme logistique en élaboration entre 1903 et 1910 a soulevé la critique de Poincaré, comme le formalisme axiomatique de Zermelo a soulevé la réaction de Borel. Ce conflit opposant formalistes et empiristes, primitivement sur le terrain limité de la théorie des ensembles, s'étend par la suite à toute la mathématique et engage les discussions dans des voies plus difficiles. Cette extension du conflit est due d'une part au complet affermissement de la méthode logistique en mathématiques entre 1910 et 1913 et d'autre part à la réaction empiriste de Brouwer et de son école (Weyl, Heyting, etc...) contre la construction exclusive des mathématiques par des voies algébriques et sur des bases entièrement logiques (3); c-à-d, contre des constructions basées sur le langage mathématique et les raisonnements logiques. Cette réaction dirigée à la fois contre D. Hilbert (père de l'axiomati-

(1) W. Quine: *System of Logistic*, 1934. Cf. aussi *Proc. Nat. Acads. Sci.* 22, 1936.

(2) Poincaré: *Dernières Pensées*, p. 161.

(3) R. Weyl: *Y-t-il une crise des Math.*? dans *Rev. de Mét. et Mon.* 1924, p. 435.

que moderne) et les logisticiens, a pris toutefois de l'ampleur en touchant, dans l'empire des mathématiques, des régions plus vitales que celle de la théorie des ensembles; et c'est ce qui a soulevé la réaction de D. Hilbert, au nom de la technique, pour sauver cet empire de la menace intuitionniste. Dès lors, le monde des mathématiciens s'est divisé à partir de la seconde décennie de notre siècle en intuitionnistes — plutôt *néo-intuitionnistes* — et *formalistes*, ou en *brouweriens* et *hilbertiens*, sans exclure cependant toute une gamme d'intermédiaires.

Nul n'a songé en effet avant les brouweriens à mettre en doute certaines doctrines mathématiques classiquement certaines. Par une réaction audacieuse, ceux-ci montrent à présent que les paradoxes des ensembles sont des symptômes d'une maladie plus profonde: "On considère les antinomies de la théorie des ensembles, dit Weyl, comme des escarmouches qui n'intéressent que les confins les plus extrêmes de l'empire des mathématiques et qui ne menacent en aucune façon la sécurité et la solidité de l'empire lui-même... Un examen sérieux et sincère de la question ne peut que conduire à la conviction qu'il faut interpréter ces irrégularités dans les régions frontalières... comme des symptômes; c'est par là que vient au jour le mal secret, que cache le jeu en apparence parfait des rouages dans les domaines centraux, et qui est l'inconsistance et le manque de solidité des fondements sur lesquels tout l'empire est assis" (1). Il y a donc quelque part, dans l'Analyse, un défaut grave, pensent les brouweriens, source lointaine des maux: la notion du *nombre irrationnel*. Cette notion leur semble être basée sur un cercle vicieux: Le nombre irrationnel est défini par la *coupure*; l'existence de celle-ci se démontre par l'idée d'une borne supérieure d'un ensemble infini des nombres rationnels; et finalement l'existence de cette borne par la *construction* d'une coupure. Ces auteurs en concluent que tous les domaines où cette notion d'irrationnel intervient sont compromis dans leur solidité et doivent être abandonnés à l'outil du *démolisseur* (2). C'est contre pareilles amputations que Hilbert s'élève: A-t-on le droit de rejeter ainsi l'irrationnel et tout ce qui est bâti sur lui? Cette vue, réellement "révolutionnaire", telle que la qua-

(1) Weyl, dans *Mathematische Zeitschrift* (1921), cité par P. Goursat: *Fondement des Math.*, 1926, p. 189.

(2) Cette définition, due à Dedekind et Cantor, doit être distinguée de celle autre basée sur l'idée de *limite* et due à Weierstrass et Méray.

(3) Weyl, même loc.

lifie Weyl en parlant de Brouwer (1), ne semble pas satisfaire au technicien impartial. "Si l'existence du cercle vicieux, dit F. Gonseth, ne peut être niée, on peut tout de même y regarder deux fois avant d'adopter les conclusions de Mr. Weyl : elles ne sont pas logiquement nécessaires. Admettons même que toute façon de définir le nombre irrationnel comporte un cercle vicieux, nous n'en pouvons jamais logiquement tirer que ceci : il n'est pas possible de ramener sans pétition de principes la notion du nombre réel quelconque à celle du nombre rationnel et du nombre entier. Mais de cette constatation à l'affirmation que la notion du nombre irrationnel et celle de point, de ligne continue, etc... sont condamnées, il y a un abîme" (2).

Si on cherche maintenant à décrire une doctrine d'ensemble du point de vue néo-intuitionniste et à en préciser les contours, on est tout de suite frappé par l'aspect d'une entreprise qui *desinit in piscem* puisqu'on se trouve en présence de quelques vues fragmentaires, difficilement constituables en une doctrine qui puisse se présenter comme étant La mathématique du point de vue néo-intuitionniste et sur laquelle il y ait accord entre ces auteurs. Car aussi loin que je puisse en juger d'après les travaux de ces auteurs, chacun à son système propre et même parfois des vues qui vont à l'encontre de la méthode intuitionniste et paradoxalement en conformité avec la méthode formaliste contre laquelle s'insurgent ces auteurs. Ainsi par exemple, les nombres réels sont construits chez Weyl de la façon "umfangsdefinit", c-à-d, à l'aide d'un petit nombre de principes logiques, auxquels est adjointe l'induction complète ou mathématique en tant que principe transfini unique. D'autre part, le même auteur esquisse une espèce de théorie des types logiques semblable à celle de Russell (3).

Mais en dépit de ces différences individuelles déconcertantes, il semble que les neo-intuitionnistes sont unanimes sur quelques points dont le premier en importance est celui-ci : méthode et fondement des mathématiques sont l'unique intuition. En cela ils se réclament de Poincaré et de Borel (4), mais

(1) Weyl dit que «Brouwer est la révolution» en matière des mathématiques contemporaines, vu ses amputations audacieuses, voir même loc., p. 58.

(2) F. Gonseth: *Fond. des Math.*, 1926, p. 191.

(3) Weyl: *Das Continuum*, 1918.

(4) Voir sur ce point une déclaration de Heyting reproduite dans Gonseth: *Philosophie Mathématique*, 1939, p. 74.

illégitimement, puisqu'au moins la thèse de Poincaré "*exister en mathématique c'est être non-contradictoire*", diminue par elle-même son exigence de tout fonder sur la seule intuition, et que d'autre part l'intuition chez Poincaré est le "vérifiable", alors que pour Brouwer la démonstration de la non-contradiction des mathématiques même classiques serait sans importance pour juger de leur validité, "de même que l'impossibilité de démontrer la culpabilité de l'accusé ne constitue pas une preuve pour son innocence" (1). Et en ce qui concerne l'intuition, les brouweriens se refusent tous à l'intuition géométrique : quant à ce qu'ils admettent, on trouve des explications *obscurum per obscurius* qui concernent, ce me semble, l'intuition temporelle comme génératrice des entités arithmétiques (nombres naturels) grâce à l'activité de l'esprit qui isole par abstraction ces entités du contenu psychologique de cette intuition et surtout des symboles linguistiques qui les extériorisent (2, et c'est de ces entités que se construisent dans la conscience individuelle tous les objets mathématiques, de sorte qu'*existence en mathématique* signifie *constructibilité* (et par *non-contradiction* comme chez Poincaré). Ainsi donc, alors que les formalistes hilbertiens regardent les objets mathématiques comme des possibilités logiques dont l'existence se révèle universellement, objectivement et indépendamment de la conscience individuelle par le fait qu'ils sont *non-contradictaires*, les néo-intuitionnistes se replient sur des actes de conscience individuelle qui révèlent comment ces objets peuvent être *construits mentalement*. C'est pourquoi une explication de l'intersubjectivité s'est montrée depuis longtemps nécessaire, et c'est ce qu'a récemment tenté de faire, pour combler la lacune néo-intuitionniste, G. Mannoury (3).

Un deuxième point sur lequel il y a accord entre néo-intuitionnistes est l'indépendance des mathématiques à l'égard des signes du langage mathématique que les hilbertiens ont voulu soumettre (dans leur *théorie de la démonstration* ou de la *métamathématique*) à un traitement lui-même mathématique

(1) Brouwer: *Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik*, dans *Math. Ann.*, t. 95, 1926.

(2) Il est très difficile de dégager une acception commune et nette de ce que les néo-intuitionnistes entendent du mot *intuition*. En cela, comparer Heyting (dans Gonsseth: *Philos. Math.*, p. 73-44) et Brouwer: *Intuitionism and Formalism* dans *Bull. of Am. Math. Soc.*, 1914, p. 85-6.

(3) Mannoury: *Die signifikanten Grundlagen der Mathematik*, 1934

pour lui procurer "la précision et la stabilité d'un instrument matériel" (1), et dont les signes sont par conséquent regardés comme étant en eux-mêmes des réalités mathématiques dès que le traitement auquel ils sont soumis démontre leur consistance logique (non-contradiction). Cette tendance marque aussi les travaux de l'Ecole de Vienne. Ce qui nous sépare des adeptes de cette école dit un brouwérien, c'est l'estimation du rôle du langage. Nous maintenons que la tâche ne consiste pas dans l'étude des langues, ni dans celles des idées que la langue tâche d'exprimer, mais dans la création de ces idées elles-mêmes" (2).

Un troisième point est le rejet du *tertium non datur* comme fondement valide des raisonnements mathématiques, surtout tels qu'ils se rencontrent dans la théorie abstraite des ensembles. En effet, les canonicus formalistes regardent toute question en mathématique comme pouvant être tranchée par l'alternative, et G. Cantor regardait un ensemble comme suffisamment déterminé dès qu'on pouvait dire d'un élément quelconque qu'il lui appartenait ou non. Faisant preuve de grande timidité en présence de l'infini, les néo-intuitionnistes acceptent indistinctement comme dogme que l'esprit n'est capable que d'un nombre fini d'actes de pensée. Conséquence nécessaire du point de vue psychologue qui veut que l'existence en mathématique soit la constructible (3), et par suite si l'on pose par exemple la question de savoir si au cours du développement décimal de π surgira à un moment donné la suite 0, 1, 2, 3...9, cette question est absurde et ne peut pas se trancher par oui ou non, vu qu'elle implique des actes de pensée d'un nombre infini (4). Remarquons, précise Heyting, que nous ne rejetons pas le principe du tiers exclu comme étant faux, nous nous bornons à le considérer comme trop mal fondé pour servir de base aux mathématiques (5). Pour trancher une question mathématique, il ne faut donc pas recourir au raisonnement abstrait au moyen du *tertium non datur*; il faut montrer seulement la possibilité de construire mentalement, c-à-d, de calculer sur des objets existant préalablement dans l'intuition (6). On est donc loin des ensembles abstraits qui posent des existences, car

(1) Brouwer: *Mathematik Wissenschaft und Sprache*, dans *Monatshefte f. Math. u. Phys.*, t. 35, 1929, p. 158.

(2) Heyting, loc. cit., p. 75.

(3) Gössoth: *Fund. der Math.*, 1930.

(4) Heyting, loc. cit., p. 72.

(5) Ibid.

tout ensemble doit être construit des éléments indiscutablement préexistants. D'où une transformation radicale des mathématiques classiques. Surtout le *continuum* traditionnel depuis Dedekind ne peut subsister comme un ensemble infini *parfait* (1). Nous avons déjà vu le rejet, par Weyl, du nombre irrationnel, gardien du continu géométrique. Brouwer montre aussi que le "point" dans un continu n'est jamais actuel, mais peut être seulement regardé comme limite des divisions infinies; autrement dit, le nombre irrationnel n'est pas actuel, mais peut être seulement déterminé approximativement par des fractions décimales infinies dont la continuation devient selon son expression un *médium de libre devenir* qui ne se compose pas de l'élément (points) mais des parties elles-mêmes continues. Préciser est assez difficile: on peut dire que le continuum ne peut pas être regardé comme un ensemble infini *donné*, mais comme l'expression d'un processus continuable indéfiniment, comme "ein medium freies Werdens" (2).

Tels sont quelques principes fondamentaux de la reconstitution des mathématiques du point de vue des brouweriens. Ces principes du néo-intuitionnisme, comme le remarque le mathématicien bien avisé, Fraenkel, font perdre sa validité à la plus grande partie de l'Analyse classique et de la théorie des ensembles. Mais il est encore plus impressionnant que même les domaines conservés ne se laissent fonder qu'avec de grandes difficultés, et de petites parties seulement ont vraiment réussi à être prouvées jusqu'à maintenant (3). Il est vrai que la reconstruction néo-intuitionniste des mathématiques n'est pas encore achevée; mais puisque les vues des intuitionnistes dans ce qu'ils amputent aussi bien que dans ce qu'ils édifient ou conservent, rencontre la plus vive résistance non seulement dans le camp de leurs adversaires les formalistes, mais aussi parmi les purs techniciens peu soucieux du problème du fondement, nous nous abstenons d'insister davantage sur cette doctrine et nous passons aux formalistes.

§ 7. — Ceux-ci se sont réunis longtemps autour de D.

(1) Un ensemble est *parfait* quand il est en même temps *dense* et *fermé*. Et il est *dense* quand ses éléments sont tous *principaux* (Hauptelemente); et il est *fermé* (abgeschlossen) quand toute série fondamentale a un élément-limite dans l'ensemble.

(2) Brouwer: *Die Struktur des Kontinuums*, 1930.

(3) Fraenkel: *Discontinu et continu*, IX^e Cong. Intern. de Philos., Paris 1937, t. VI, p. 198.

Hilbert, dont la *méthode axiomatique* appliquée dès 1899 à la Géométrie est restée célèbre et a provoqué l'admiration indivisible des mathématiciens modernes au nombre de qui figure en première place le nom de Poincaré. Entre 1899 et 1918, année où Hilbert a commencé sa campagne contre les brouweriens, un événement important s'est produit : l'apparition des *Principia Mathematica* (1910-1913) de Whitehead - Russell, ouvrage qui donne le point de vue des logisticiens au sujet des fondements simplement logiques des mathématiques. Aussi, Hilbert en tient-il compte dans sa campagne, de sorte qu'entre ses mains, axiomatique et logistique collaborent ensemble dans l'édification de sa *théorie de la démonstration* ou *métamathématique*, destinée à fonder les mathématiques sur un formalisme intégral.

En 1899, par conséquent avant la méthode logistique et la méthode néo-intuitionniste, Hilbert ne pouvait distinguer en matière de méthode que la méthode *génétique* en théorie des nombres, à laquelle il opposait sa méthode *axiomatique* en Géométrie. La première est celle de la doctrine arithmétisante qui reconstituait toute l'Analyse à partir de l'idée du nombre entier et des opérations dont il est susceptible. Ainsi procédaient Weierstrass et Kronecker en Allemagne, Meray et J. Tannery en France. — C'est seulement à la suite des géométries non-euclidiennes et de la conception la plus large qu'on s'est faite du *principe de la dualité projective* qu'on est parvenu à l'idée d'une méthode axiomatique en géométrie; c'est à dire à l'idée d'êtres géométriques abstraits, susceptibles d'une multitude d'interprétations dans le domaine de l'intuition (pure ou empirique), dont les seules propriétés sont énoncées au moyen d'un système d'axiomes, librement choisis, conçus comme simples relations logiques (appartenance, inclusion, égalité, etc...) et qui ne prétendent pas être vrais en eux-mêmes. Ce sont, selon l'expression de Mr. Lalande (1), des *lexis* dont la vérité, s'il en est question, est la possibilité d'en déduire d'autres propositions; ou encore selon l'expression des logisticiens des *fonctions proportionnelles* qui ne disent rien de particulier sur les choses comme les propositions proprement dites, mais qui sont des cadres disponibles à recevoir une multitude de pareilles propositions, par conséquent des expressions variables ou indéterminées que G.

(1) Lalande: *Fuc. Phil.*, suppl. — «lexis»

Frege a légitimement qualifié de *pseudoaxiomes* (1) par opposition aux axiomes déterminés d'Euclide. — C'est précisément cette nature variable ou indéterminée d'un système moderne d'axiomes qui a posé le problème épineux (longuement discuté par Hilbert) et presque insoluble de la *non-contradiction* des axiomes, étoffe commune de la *saturation* (un système est saturé ou fermé si l'adjonction d'un nouvel axiome le rend contradictoire) et de l'*indépendance* (un axiome est indépendant des autres si le système formé de ceux-ci et de sa négation est non contradictoire). En 1899, dans l'aménagement d'une axiomatique en Géométrie, Hilbert a résolu ce problème épineux indirectement et par délégation : la non-contradiction de l'arithmétique est déléguée à la géométrie. C'est là la conséquence nécessaire de l'arithmétisation des mathématiques.

Ce sont là les deux méthodes qu'opposent Hilbert l'une à l'autre en 1899. La question qu'il se pose alors est de savoir "si la méthode génétique est la seule appropriée aux nombres, la méthode axiomatique pour le fondement de la géométrie. Voici mon opinion, dit-il : malgré la haute valeur pédagogique et heuristique de la méthode génétique, la méthode axiomatique est préférable pour une représentation définitive et un complet affermissement logique de la théorie des nombres réels" (3). Et dans un mémoire : *Sur le Concept du Nombre*, il donne un système d'axiomes destinés à fonder les nombres réels, et calqués à peu près sur ceux de la géométrie (4). La difficulté est ici d'établir *directement* la non-contradiction de cette axiomatique *initiale* sur laquelle repose la non-contradiction de toute la mathématique y comprise la géométrie.

Hilbert reconnût de bonne heure l'obstacle : dès 1900, lors du II^e Congrès des mathématiciens (Paris), il regarde comme un grand problème à résoudre la *démonstration* de la non-contradiction de l'arithmétique, pour laquelle, à la différence de ce qui a lieu en géométrie, "il faut cette fois prendre la route directe" (5). En 1904, ayant eu connaissance des travaux les

(1) G. Frege, dans *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1903.

(2) S. Elfendi: *Extension de la logique et Fond. des Math.*, § 23. p. 178-203.

(3) Hilbert: *Grundlagen der Geometrie* (Anhang VI) p. 246.

(4) Voir l'exposé de ces axiomes dans Poirrier: *Le nombre*.

(5) Hilbert, dans II^e Congrès Inter. des Mathématiciens, Paris 1900, t. IV, p. 300.

plus récents de Frege — père de la logistiqué — il remarque que "fonder l'arithmétique sur la logique" n'est pas possible parce que "pour exposer les lois logiques, certains concepts arithmétiques comme celui d'ensemble et celui du nombre cardinal sont indispensables". Reste donc la seule ressource d'une "réédification *simultane* de la mathématique et de la logique" (1). Mais cette démonstration reste à l'état d'un projet jusqu'en 1930, lors de la constitution véritable de sa *théorie de la démonstration* ou métamathématique, destinée à sauver ses méthodes et ses résultats des amputations, réclamées par les intuitionnistes, auxquelles il ne veut pas se résoudre.

Ni le rejet de la théorie abstraite des ensembles, en particulier l'arithmétique du transfini "la plus admirable, efflorescence de l'esprit mathématique", ni surtout le renoncement aux "élégantes démonstrations" où intervient le tiers exclu, ne le trouvent résigné. Si le cercle signalé par Weyl (cf. § 6) est incontestable, du moins il est inoffensif. "Brouwer n'est pas la révolution comme croit Weyl (cf. § 6), mais le renouvellement d'une tentative de patch avec d'anciennes méthodes qui, à leur époque, quoique plus énergiquement utilisées, ont complètement échoué, et maintenant que le pouvoir central est armé et renforcé grâce à Frege, Dedekind et Cantor, sont à l'avance éliminés l'insuccès" (2). La solution véritable de toutes ces difficultés signalées par les brouweriens est donc une *formalisation* totale des mathématiques grâce à la logique symbolique — qui prend l'effet (3) par Whitehead - Russell.

La formalisation de l'ensemble des mathématiques procède à un système général des signes ou des formules concernant tout ce qui peut être dit mathématique et logique; et la métamathématique devient la science dont l'objet est l'assemblage des signes ou formules, leur organisation en unités de dépendance ou théories: elle a pour tâche primordiale la démonstration de la non-contradiction formelle. Dans son article: *Die logischen Grundlagen der Mathematik* (4), Hilbert fonde ce système de signes sur quatre groupes d'axiomes: ceux de l'implication (5), de la négation (désignée par un trait horizontal), de l'égalité et du nombre entier. Il prétend avoir dé-

(1) Hilbert, dans *Verhandlungen d. III Intern. Math. Kongress* cité par Cavailles: *Axiom. et Syst. Form.*, p. 90.

(2) Hilbert, dans Cavailles, p. 95-1.

(3) Hilbert, dans *Math. Ann.*, 1925, p. 1718.

(4) Dans *Mon. math. Annalen*, 1925.

montré la non-contradiction des axiomes métamathématiques suivants :

I.	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	dans PM	2.02
	$\{ A \rightarrow (A \rightarrow B) \} - \{ B \rightarrow (A \rightarrow C) \}$. .		.45
	$\{ A \rightarrow (B \rightarrow C) \} - \{ B \rightarrow (A \rightarrow C) \}$. .		.04
	$(B \rightarrow C) \rightarrow \{ (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \}$. .		.05
II.	$\bar{A} \rightarrow (A \rightarrow B)$		.25
	$(A \rightarrow B) \rightarrow \{ (\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow B \}$		.61
III.	$a = a$		13.51
	$a = b \rightarrow A(a) \rightarrow A(b)$		.21
IV.	$a+1 = 0$		
	$d(a+1) = a$		

Ce sont là selon lui les axiomes métamathématiques sur lesquels se fondent toute la mathématique positive. Nous avons noté par des nombres leurs analogues dans *Principia Mathematica* auquel nous avons donné le sigle *PM*. Le procédé de démonstration des formules dérivées à partir de ces formules-axiomes est celui qui vaut dans tout système formel : la règle de la *substitution* qu'on rencontre chez les logisticiens : Peano et Russell, et dont le schéma chez Hilbert se présente comme suit :

$$\frac{S \quad T}{S \rightarrow T}$$

La démonstration est exemple de la manière à la fois dont la théorie des ensembles peut être intégrée au formalisme et dont la métamathématique situe et résout les problèmes. Nous ne pouvons pas toutefois suivre ici ces problèmes délicats et de caractère technique dont le mathématicien avisé est le seul juge pour savoir si oui ou non les amputations brouweriennes sont par là refutées. Ce qui est certain pour nous, c'est que le problème fondamental de la non-contradiction des mathématiques n'est pas encore résolu une fois que logique et arithmétique sont simultanément édifiées. Cela est dû essentiellement au fait que les axiomes de base sont des fonctions propositionnelles et non des propositions proprement dites. A supposer même que tous les axiomes soient, actuellement et dans les limites des épreuves faites, consistantes, rien ne peut nous assurer que dans de lointains développements ils ne révéleront

pas de contradiction. D'autre part nous croyons qu'une fois appelée métamathématique, les difficultés n'ont pas cessé d'exister, elles ont seulement changé de nom. D'ailleurs, le mathématicien Gödel a démontré en 1928 l'impossibilité de la démonstration de la non-contradiction au sein d'un même système d'axiomes. Notons cependant que Hilbert n'était pas satisfait de ses premiers résultats et qu'il n'a cessé de revenir à la question de la non-contradiction d'une axiomatique métamathématique. Une fois de plus, il a déclaré en 1928 que ses recherches ont abouti à des résultats définitifs. Mais nous ignorons s'il les a publiés avant sa mort survenue en 1937. Ce que nous savons c'est que la théorie hilbertienne, n'étant pas complètement élaborée, a animé, dans cette direction, des travaux importants tels que ceux de W. Ackermann, de Bernays, de J. Herbrand, de v. Neumann, de Fraenkel, de Destouches etc. Nous savons aussi que quel que soit le résultat de ces travaux, il ne peut pas satisfaire aux néo-intuitionnistes qui refusent d'admettre la non-contradiction comme preuve de l'existence des objets mathématiques... La crise continue, mais la technique mathématique n'en souffre réellement pas.

S. ELFENDI