## البحث الثـــالث :

## « نظرية مقترحة فى تعلم الرياضيات »

**مقدمـــه :** صحبت ثورة تحديث البرامج المدرسية فى الرياضيات أساليب حديثه فى تحليل العملية التعليمية approaches • وقد قدمنا فى دراسة سابقة (١) ثلاثة من هذه الأساليب يمكن اعتبارها مستقلة ومكملة بعضها البعض • وهى التعلم بالاكتشاف لبرونر والتعلم الموجـــه لجانييه والتعلم بالمعنى لاوسابل • كما قدمنا دراسة تحليلية لهذه الأساليب (٣) بالنسبة لعشر متغيرات فى تعلم الرياضيات وتدريسها ، وكذلك دراســـة وضع الطريقة البديهية التى تميـــز التركيبـــات الرياضـــية للرياضـــيات الحديثة والأحدث والتضمين التربوى لهـــا (٣) • ومـــن ذلك اتضـــحت الحاجة الى بناء أسلوب جديد للتعلم يكامل بين هذه الأساليب ، ويتمشى مع خصائص للرياضيات الحديثة ( والأحدث ) أهملتهـــا هذه الأساليب • وعلى ذلك فاننا نقدم هنا أسلوبا جديدا فى تعلم الرياضيات بمثابة نظرية مقترحة • وقد آثرنا تسميتها نظرية لاننا سنوضح فى هيكلها مبادىء أساسية أو تعميمات نسلم بصحتها ويمكن أن تكون نواة لفروض تشتق منهـــا ، ويبنى جسم النظرية على أساس نتائج البحوث التجريبية الخاصة بهذه الفروض • وبعض مبادىء النظرية المقترحة يمتد جذورها الى الأساليب الثلاث فى التعلم ليوحد ويكامل بينها ، وبعضها تعميمات تتعلق بتعـــلم وتدريس الرياضيات على أساس الدراسة التحليلية التى قدمناها فى (٣) ، وبعضها الآخر نبع من مجال خبرتنا فى تبسيط الرياضيات العالية للمراحل المدرســـية •

### الاطار العام للنظرية المقترحة :

تهدف النظرية المقترحة الى التكامل والتوحيد بين الأساليب الثـــلاث التعلم بالاكتشاف والتعلم المـــوجه والتعـــلم بالمعنى ، بحيث تأخـــذ فى

الحسبان التطور فى الرياضيات ومستويات التجريد التى تميز تركيباتها •

ومن ثم فالنظريه المقترحه تأخذ فى الحسبان التعلم كعمليه وناتج ( نتاج ) وتهتم بالجوانب المعرفية والوجدانية • فبجانب انها تعمل على زرع المفاهيم والمبادىء والنظريات الرياضية فى ذهن التلميذ تربى فيه حب الاستطلاع الرياضى والكشف والاعتماد على النفس والرغبه فى تعلم رياضيات أكثر ، والاتجاهات السليمه حول اكتشاف الرياضيات واستخدامها ، وتركز على المتعلم وخصائصه وعلى الرياضيات الناميه ( الحديثه والأحدث ) ومستويات التجريد التى تميز تركيباتها •

والطريقه التى تحاول بها النظريه التوحيد بين الأساليب الثلاث ليست سطحيه كما حدث بالنسبة لتوحيد الاكتشاف والتعلم الموجه لتكوين الاكتشاف الموجه (١) • حيث استخدم أحد ملامح التعلم الموجه فاقتصر التوجيه على مساعدة التلميذ للاكتشاف بارشادات موضوعه بأسلوب برنامجى • ولكن التوحيد عن طريق استخدام بعض مبادىء الأساليب المختلفه فى صوره أكثر شمولا وتفاعلا فى الاطار الجديد هذا بجانب اكمال هذه المبادىء فى صورتها الجديده بمبادىء اثارتها الدراسه التحليله(٢) ومن خبرتنا ( وطلابنا فى البحوث ) فى تبسيط الرياضيات العاليه ( مثل التوبولوجى العام ، التوبولوجى الهندسى ، تكامل ليبيه ••••••• ) للمراحل المدرسية • وعلى هذا الأساس نقترح مبادىء النظرية فى النقطه التاليه •

**مبادىء النظرية المقترحه :**

**المبدأ الأول** : يسير تعلم الرياضيات فى دورات قد تكون متداخله يكتشف فيها المتعلم المعلومات الرياضيه ويحققها وينظمها فى ذهنه تنظيما منطقيا وتتعاقب الدورات بحيث ان المعلومات الرياضيه فى كل دوره أكثر تجريدا أو عمقا ( أو علوا فى السلم التعليمى ) عن الدوره السابقه •

**المبـدأ الثـانى** : تكون اثارة التعلم عن طريق الأحـوال لأكثـر تعميمـا •

المبـدأ الثـالث : كل دوره تعلم فى صورتها المتكاملة تتـم تبعـا للمراحل الآتيـة : —

**المرحلة الأولى : المرحلة التمهيدية أو مرحلة الاكتشاف وتتم وفقـا للمراحل الجزئية الآتيـة :**

**( أ ) مرحلة التعامل مع المـألوف** • وفيها يتعامل المتعلم مع ما هو معروف وملموس له لاستخلاص الخواص الرياضية الأساسية • ولـكن التعامـل هنا ليس بالضرورى مع أشياء وادوات ( واقعية ) ، ولكن مع ما هو معروف وملموس له حتى ولو كان شيئا مجردا توصل اليه فى دورة سابقة ومثله فى ذهنه وأصبح مألوفا له ( وذا معنى ) •

**( ب ) مرحلة التجريد والبناء** • وفيها تجرد الخـواص المستخلصـة وتستخدم كنواة للوصول الى قانون أو فكرة عامة أو حل للمشكلة • وهـه تناظر المرحلة الثالثة لبرونر ومرحلة البناء لدينيز •

**المرحلة الثـانية : مرحلة التقنين** • وهى مرحلة تقنين الاكتشـاف وفيها يضع المتعلم ما اكتشفه فى صورة متفق عليها رياضيا باستخدام لغـه أو رموز رياضية مناسبة ويستخدم فيها التعلم الموجه •

**المرحلة الثالثة** :مرحلة التحقيق • وهى مرحلة تحقيق الاكتشـاف • وهنا يتبين المتعلم صحة اكتشافه أو ما توصل اليه بأسلوب رياضى منظم أما : عن طريق التحقيق ( والتعويض ) المباشر فى خواص المشـكلة التى استخلصها باستخدام وسائل عدديه أو هندسية ، أو باستخدام أسلوب منطقى مجرد باستخدام الطريقة البديهية والبرهان المنطقى أو عن طريق أخذ بعض الخواص التى استخلصـها وجردها كمسلمـات ويستنتج منها

ما أكتشفه بالبرهان المنطقى من تـركيب رياضى • وفى هـذه المرحـلة يكون المتعلم واعيا ومدركا للخطوات المختلفة (كالمرحلة السابقه) • ويكون التعلم هنا موجها وذا معنى فيستخدم مبدأ تحليل العمل لجانبيه وطريقته فى بناء المـادة الرياضية بطريقة متدرجه وهرمية كما قد تستخـدم المنظمـات المتقدمه أو التالية ( حيث يكون المنظم بعد المـادة المتعلمة وليس قبلها ) ليستطيع المتعلم تمثيل ما تعلمه بطريقة تتآلف مع تنظيم المـادة الرياضية أى ليتآلف التركيب المعرفى للمتعلم والتركيب ( التنظيم ) الرياضى المنطقى للمـادة •

**المرحلة الرابعة : مرحلة التطبيق** • أى تطبيق الاكتشاف • وهنـا يقوم المتعلم باستخدام ما توصل اليه ( اكتشفه وحققه ) فى الوصول الى :

( أ ) تطبيقـات مباشرة عـددية هندسـية ، مفاهيميـة ، ( فى الرياضيات أو خارجها ) •

( ب ) حل بعض المشكلات أو التمارين •

( جـ ) استنتاج بعض الحالات الخاصة فى الرياضيات أو خارجهـا • او اثبات قوانين نظريات مرتبطة •

( د ) توسيع التركيب الرياضى الأساسى بحيث يكون هذا التركيـب متشاكلا مع جزء من التركيب الموسع الجديد ( مثل توسع النظم العددية من طبيعية ــ صحيحة قياسية ــ حقيقية ــ مركبه ــ هامتونيه كيليـه الى جراسمانية ) •

**المبدأ الرابع** : يكون التعلم على مستويات كل مستوى يتميز مراحله **بأبعاد مختلفة** • فمثلا المراحل المختلفة فى دورة التعلم المتكاملة تتميـز بالأبعاد التى نوضحها فيما يلى : ــ

**بالنسبة للمرحلة التمهيدية أو الاكتشاف :**

( أ ) التعامل بأشياء واقعية — التعامل مع المألوف حتى ولو كان شيئا مجردا .

( ب )التجريد والبناء عن طريق اللعب بالمحسوسات ، أجهزة تركيبه الاستقراء من انماط عدديه أو هندسية أو مفاهيمية — التعامل بالرموز والتركيبات الرياضية .

**بالنسبة لمرحلة التقنين :**

استخدام اللغة اللفظية — استخدام خليط من اللغة اللفظية والرموز — استخدام اللغه والرموز الرياضية .

**بالنسبة لمرحلة التحقيق :**

تحقيق عددى أو هندسى ( أو مفاهيمى ) مباشر لخواص المشكلة استخدام البرهنة المنطقية وأنواعها المختلفة باستخدام الطريقه البديهية

**بالنسبة لمرحلة التطبيق :**

تطبيقات مباشرة بأمثلة عددية أو هندسية أو مماثلة — تطبيقات خلاقة تؤدى الى تعميم أو توسع تركيبات رياضية أو خلق تركيبات رياضية .

**المبدأ الخامس** : ليس من الضرورى ان يمر المتعلم بكل مراحل التعلم فى الدورة المتكاملة .

**المبدأ السادس** : يوجد ثم تناظر بين مراحل نمو الطفل وبين مستويات التعلم التى تناظر بدورها أيضا مستويات تبسيط المادة .

**المبـــدأ السابع** : التعلم دالة لمتغيرات خاصة بالمتعلم ( قـــدراته ، نواحى شخصيته ، أسلوبه المعرفى ، حصيلته المعرفيه ( تنظيمه السيكلوجى للمعرفة ) ومتغيرات متعلقة بالتنظيم المنطقى للمادة وطبيعتها ( خصائصها ) وأخرى متعلقة بالتربية بوجه عام •

والمبادىء السابقه المقترحه يمكن ان تكون نواة لنظـــرية فى تعـــلم الرياضيات فكأى نظرية theory فى الرياضيات التربوية mathematical education تكـــون هـــذه المبـــادىء ( وهى تناظـــر المسلمات ) نقطة البداية تشتق على أساسها فروض البحث التى تتضح صحتها من النواحى التجريبية • أى تستخدم هذه المبادىء كنقطة بداية لتـــوجيه البحث فى تعلم الرياضيات بصفة خاصة وفى الرياضيات التربوية بصفة عامة •

**رابعـــا : مناقشة حول النظريه المقترحه فى تعلم الرياضيات :**

نوضح فيما يلى ان المبادىء التى اتخذت لهذا الأسلوب الجـــديد أما تعميمات وضحت صحتها فى مجالات أخرى ومتآلفه مع مبادىء وردت فى الأساليب الثلاث وجذورها أو نتيجة لتبلور الأفكار الناشئة من خبرتنا فى مجال تعليم الرياضيات العالية الجامعية أو تبسيطها للمراحل المدرسية •

١ — المبدأ الثانى للنظريه المقترحه الذى يقول ( اثارة التعـــلم أو بدايته ) عن طريق الأحوال الأكثر تعميما ، متآلف مع أفكار أوسابل وبرونر من ان التعلم يبدأ من أعلى السلم التعليمى • فأوسابل يعتقد ان المنظم المتقدم ( المـــادة الأكثـــر عمـــومية وتجريدا وشمـــولا ) يســـبق المـــادة المتعلمه ، أما لبرونر ، فاكتشاف حل المشـــكلة يكون فى الصداره ( أو قمة السلم التعليمى ) ويؤدى بالمتعلم الى البحث عن الحقائق والعلاقات التى تكون ادنى فى السلم التعليمى • كما ان هذا المبدأ يتفق مع ما استنتجه بياجيه من أن الرياضيات الحديثة أقرب الى ذهن الطفل من الرياضيات التقليدية ، حيث ان الرياضيات الحديثة أكثر شمولا وعمومية • فمثـــلا تبين لبياجيه ان الأفكار التوبولوجيه ( بصورتها المبسطة ) أقرب للطفل

من أفكار الهندسة الاقليديه ، كما أن التوبولوجى ( كما ذكرنا )أعم أنواع الهندسات • كذلك تبين له ان بعض الأفكار الأساسية للمفاهيم الحديثة عن الفئات ، والعلاقات ، تعد اساسية لتكوين مفهوم العدد عند الطفل •

ويمكن ان نستخلص هذا المبدأ أيضا من نتائج تجريب البرامج الحديثة فى المراحل المختلفة وخاصة الأولى ، ومن نتائج بحوث دينير (٣) التى تبين فاعلية مدخل الرياضيات حتى التقليدية منها عن طريق المفاهيم الحديثة الأكثر تعميما وشمولا • كما بينت البحوث فاعلية المداخل التى تشتمل على الاحوال العامة ( كمدخل ) فى فهم المفاهيم والأفكار الرياضية الاعلى فى السلم التعليمى • فمثلا وضحت الدراسة ان المدخل الى النظام العدى بأسس مختلفة ( ومنها الحالة الخاصة بأساس عشرة ) يؤدى الى سهولة فهم الضرب والقسمة المطوله واجراءاتها المختلفة (٤)•وكذلك الأعمال النظرية التى قدمناها(فى مراجع ) (٥) ، (٦) توضح ان الرياضيات الحديثة ( مفاهيمها — علاقاتها — اساسياتها — نظرياتها — تركيباتها وهى الاكثر عمومية ومشمولا ) تعد اساسية فى فهم وبناء الرياضيات حتى التقليدية منها على أساس سليم فى ذهن تلميذ المرحلة الأعدادية أو الثانوية . وبلغة أخرى تعد أساسية للتنظيم المنطقى وكذا السيكلوجى للمادة • ونود ان نشير أيضا ان المدخل عن طريق الأحوال الاعم حتى فى الرياضيات التقليدية يساعد على فهم المفاهيم المترتبة ، وقد وضحنا ذلك ايضافىمرجع(٦)— فمثلا فهم حل معادلتين آينيتن من الدرجة الثانية بصفة عامة ( عن طريق التعويض بأحد المتغيرين ينتج معادلة من الدرجة الرابعة فى مجهول واحد ) يؤدى الى فهم الحالات الخاصة وعدد جذورها ( الأربعة ) وأنواعها ••• ) كما بينت الدراسة ( لاحد طلابنا ) أيضا فاعلية مدخل تدريس التكامل الاعم وهو تكامل ليبيه Lebesgue لتلميذ المرحلة الثانوية (٧) •

٢ — بالنسبة للمبدأ الأول للنظريه المقترحه ، فواضح ان الدوريه للتعلم فيه تتفق مع فكرة دينيز فى ان التعلم يمر بدورات متعاقبة ، وايضا

مع أفكار برونر عن المنهج الحلزونى ، وتتابع مراحل نمو التفكير لبياجيه ، والدوريه فى مراحل التفكير الابداعى أو الخلاقه (*) • اما اختلاف مستويات التجريد وعمقها فى الدورات المتعاقبه الموجودة أيضا فى المبدأ الأول فهى تتفق مع تفسير هاريسون (*) لمراحل النمو لبياجيه أو الدراسات الخاصة بتبسيط الرياضيات للمراحل المدرسية • كما انه يتفق مع رأى سكمب الذى يوضح فيه : أنه بينما المفاهيم الأساسية مثل الفئات والتناظر الاحادى ، •• يمكن ان تنمى عن طريق وسائل ملموسه ( أو اجهزة تركيبية ) الا أن المفاهيم المركبة التى تعتمد على مفاهيم كثيره أساسية ولها طبيعة أكثر تجريدا تحتاج الى طريقة مجردة فى تقديمها • وذلك بتقديم المفاهيم المركبه فى مستوى التجريد المناسب للدورة التعليمية • كذلك تقديم الأفكار المركبة فى مستوى التجريد المناسب يتفق مع رأى العالم الرياضى فرويدنثال (٦) ، الذى يحذر من أن تبسيط الأفكار الرياضية المجردة ( مثل تركيب المجموعة ) للمراحل المبكرة قد يشغل التلاميذ باجراءات وانشطة طويلة تتوه فيها الأفكار الرياضية • وهو يخشى من ان وضع الرياضيات المتقدمه ( العالية ) بصورة ابتدائية بأسلوب خاطىء باستخدام نماذج لا تنقل الأفكار الرياضية بأمانه ، تكون عملية خطره فيها تقليد ولمسات صناعية تشوه الافكار الكبيرة للنظريات الرياضية وتحول الرياضيات الى لا رياضيات • فمن رأيه مثلا ان محاولة اتاحة الفرصه للتلميذ اكتشاف تركيب ( خاصه بديهات) المجموعة عن طريق جداول المجموعات أو رسم المجموعة قد يؤدى الى ان يعتقد التلميذ الاعتقاد الخاطىء بأن كل العمليات الثنائية لها خواص تركيب المجموعة • وعلى ذلك فهو يرى عدم التبديد باعطاء الافكار الرياضية المجردة بصفة عامة مثل مفهوم المجموعة والاكتفاء بالتمهيد لها فى المراحل الأولى •

وهذا ما يركز عليه المبدأ الأول مع المبدأ الثالث فى الاسلوب الجديد من التمهيد للافكار الرياضية فى مرحلة التعامل مع المألوف ،

واكتشاف الخواص الرياضية وتجريدها فى الدورات التعليمية المتعاقبة المختلفة .

٣ — بالنسبة للمبدأ الثالث للنظريه المقترحه الخاص بمراحل ( استراتيجيات التعلم ) فهو من جهة يكامل مراحل برونر ودينيز للتعلم بالاكتشاف فى ضوء المادة الرياضية وطبيعتها الناميه ، ويستخدم أفكار جانييه وأوسابل فى تسهيل اجتياز هذه المراحل . ومن جهة أخرى كما أوضحنا فى النقطة السابقة يتفق مع أفكار سكمب وفرويدنثال الخاصة بتقديم الأفكار المركبة أو المتقدمه المجردة . كما أنه يتفق مع الدراسات التجريبية الخاصة بتبسيط الرياضيات العالية للمرحلة الثانوية مثل ماجاء فى ( ٧ ) وغيرها . فمثلا فى دراسة تحت التجريب لتقديم التوبولوجى التحليلى ( العام ) لتلميذ المرحلة الثانوية تبين ان التلميذ فى المرحلة التمهيدية يتعامل مع المألوف فى فراغ الاعداد الحقيقة ذى بعد واحد $ح^1$ ثم فى بعدين $ح^2$ ثم فى ثلاثة ابعاد $ح^3$ ليكتشف الفترات المفتوحة وخواصهاعلى خط الاعداد أولا ثم ما يناظرها فى الفراغات الأخرى يقننها (ككرمفتوحه) ويحقق الخواص بأسلوب هندسى فى فراغ ذى بعد واحد ثم يطبقها فى فراغات بأبعاد مختلفة ، وفى الوصول الى مفاهيم تربولوجية توصف عن طريق الكرات المفتوحة مثل الجوار وخواصه ، والانغلاق وخواصه ، ..... وفى دورة تعليمية أخرى تجرد الكره المفتوحه الى فئة مفتوحة وتجرد الخواص الأساسية للفئات المفتوحة وتستخدم كبديهات للتركيب التربولوجى ثم تشتق خواص المفاهيم التربولوجية كنظريات من بديهات هذا التركيب . . . .

٤ — بالنسبة للمبدأ الرابع للنظرية المقترحه الخاص بأبعاد مستويات التعلم ، فهو يحدد التعلم على أساس المستويات التى تصنف تبعا لابعادها المختلفة ويتفق هذا المبدأ جزئيا مع مستويات ( مراحل ) تبسيط المادة لبرونر (١) ولكنه أكثر شمولا وتكاملا حيث ان مراحل برونر تعد حالة خاصة منه . كذلك يعتبر هذا المبدأ أكثر احتواءا وشمولا وتصنيفا

من مستويات المعرفة لبلوم (تذكر — فهم — تحليل — تطبيق — بناء — تقويم) حيثأوردنا البناء ضمن ابعاد المرحلة التمهيدية للاكتشاف وأبعاد مرحلة التحقيق • كذلك الفهم والتحليل متضمن فى مرحلة التحقيق •وتستند ابعاد المستويات المختلفة فى هذا المبدأ الى افكار بياجيه ، وهاريسون ، والسلم التعليمى لجانيه ، طبيعة المادة الرياضية النامية • كما يكامل هذا المبدأ ، المبدأ الثالث والأول لهذا الأسلوب الجديد •

٥ — بالنسبة للمبدأ الخامس الذى يبين ان كل دوره تعليمية لا تستلزم بالضرورة أن تكون فى صورتها المتكاملة ( أى قد لا تمر بكل المراحل ) فتنبع من فكرة برونر عن المنهج الحلزونى ، وجانييه للسلم التعليمى مع ، الاخذ فى الاعتبار مراحل النمو لبياجيه وحدودها •

٦ — بالنسبة للمبدأ السادس الذى يحدد العلاقة بين مستويات تبسيط المادة ومراحل التعليم ومراحل النمو ، فهو يتفق مع أفكار بياجيه وبرونر فيسلم بأمكانية تبسيط المادة بأمانة رياضية بشرط ان تناسب مرحلة نمو الطفل • وهو مع المبدأ الرابع الخاص بأبعاد التعلم يتفق مع اوسابل فى تمثيل المادة بمعنى فى ذهن التلميذ •

٧ — بالنسبة للمبدأ السابع الخاص بمتغيرات التعلم فهو يتفق مع أفكار شالمان عن الاسلوب المعرفى ودراسات ايزنك وولاش فى مجال العوامل الشخصية وأثرها فى التعلم وكذلك مع بحوث كرونباخ بشأن الفروق الفردية والتعلم ( وطرق التدريس ) وأفكار بلوم عن مستوى التمكن (٣) ، وهو يربط بين أفكار برونر وجانيه من جهة واوسابل من جهة أخرى فى ان التعلم عملية نتاج ( ناتج) ،ويربط بين طبيعة المادة والنتائج التربوية وخصائص المتعلم •

وعموما فالنظرية المقترحة تحتاج الى بلورة لمبادئها • وهذا يتأتى عن طريق اشتقاق فروض على أساس مبادئها واختبار صحتها تجريبيا أو تحليلها نظريا • وبذلك يتسع جسم النظرية من جهة ومن جهة أخرى

نرجع الى الوراء ونرسى مبادئها على أساس أعمق وبعلاقات أوثق . وهذا ما يتبع فى النظم البديهه الرياضية للبورباكيين (٣) .

وختاما نود أن نقدم الشكر لطلبة الدبلوم الخاص على مدى ست سنوات الذين كان لهم الفضل من خلال مناقشاتهم فى بلورة أفكار النظرية.

## المراجـــــع :


١ — د. نظلة حسن أحمد خضر « حول تعلم الرياضات » مقبول للنشر فى مجلة التربية بقطر — البحث الاول فى هذا الكتاب .

٢ — د. نظلة حسن أحمد خضر « دراسة تحليلية للتعلم بالاكتشاف والتعلم الموجه والتعليم بالمعنى بالنسبة لمغيرات اساسية تخص تدريس الرياضات مقبول للنشر فى مجلة التربية بقطر — البحث الثانى فى هذا الكتاب .

٣ — د. نظلة حسن أحمد خضر « دور الطريقة البديهية فى الرياضيات الحديثة ( والاحدث ) والتضمين التربوى لها « صحيفة التربية : العدد الاول ١٩٧٧ » .

٤ — احسان مصطفى شعراوى « اثر فهم النظام العدى العشرى على نجاح تلاميذ المرحلة الابتدائية فى فهم الاسس التى تقـــوم عليهـــا العمليات الحسابية واتقانهم لها « رسالة دكتوراه — كلية التربية جامعة عين شمس ١٩٧٢ » .

٥ — د. نظلة حسن أحمد خضر « أصـــول تدريس الرياضيات » عالم الكتب ١٩٧٤ .

٦ — د. نظلة حسن أحمد خضر « المدرس والرياضيات الحديثة والتقليدية » عالم الكتب ١٩٧٨ .

٧ — عبد اللطيف الجزار : « مدخل مقترح لتدريس التكامل — بواسطة مفاهيم نظرية القياس » رسالة ماجستير — كلية البنات — جامعة عين شمس ١٩٧٧ .