

البحث التاسع :

« برنامج تمهيدى مقترح لتطوير مناهج الهندسة بالسنوات الاولى

بكليات التربية »

١ - مقدمة :

تحت نظام التعليم الحالى عندنا نجد ان الحاصلين على الثانوية العامة مجبرون على التدريب على حل مسائل امتحانات خاصة في السنة الأخيرة ، ولم يكن لديهم الا فرصة قليلة جدا ليتعلموا ما هي الرياضيات . وعند التحاقهم بكليات العلوم أو التربية فانهم يكونون ملتزمين ببرامج نظامية في الرياضيات مملوءة بالبراهين وعلى مستوى عالى من الرسمية (formal) والصرامة (rigorovs) . وبالنسبة لكليات التربية فقد حدث تطور في مناهج الرياضيات في العشر سنوات الأخيرة شمل ادخال موضوعات جديدة بأسلوب يهدف الى عمل نوع من الترابط والتكامل المعرفى على سنوات الدراسة الأربع (١) . الا انها لم تعالج العيب في نظام التعليم المشار اليه ، بل بالعكس عملت على زيادته بالتركيز على برهنة اجزاء نظرية وحل تمارين نمطية اعتاد ورودها في الامتحانات النهائية التى من شأنها أن تعد مدرسا ينقل نفس الاتجاه الى تلاميذه في التعليم العام .

وقد اتاحت لى فرصتان اتضحت فيها هذه الأحوال . الفرصة الأولى عند استضافة قسم الرياضيات لى في كلية التربية والبنات (ج . عين شمس) لمدة عامين قمت فيها بتدريس مقررات فى التوبولوجى وهندسة المسلمات (هندسات اقليدية ولا اقليدية واسقاطية وهندسة تحويلات ..) ، ، الفرصة الثانية عند اشرافى على رسائل علمية منها ما يختص بتطوير تدريس الهندسة للمرحلة الثانوية بتقديم نظرية تصنيف السطوح كمدخل للتوبولوجى الهندسى وتقديم التوبولوجى

(التحليلي أو العام) بأسلوب مبسط ، هذا الى جانب عملي الأساسى الذى يسهم فى تطوير اعداد مدرس الرياضيات من الناحية الرياضية والفنية التربوية .

وقد لمست من خلال ذلك بعض الاعتبارات حول تعلم الهندسة والتوبولوجى أناقشها فيما يلى :

١ . محاولة تحديث الهندسة عن طريق هندسة المسلمات التى تعطى بالاسلوب البديهي الرسمى لهيلبرت (وباش) تعتبر بالنسبة للطلبة الذين يدرسونها فى السنة الثانية ، معقدة وحمل غير ذى معنى يذوه مفهوم الهندسة بالنسبة لهم . واتفق فى هذا الرأى مع فرويدنتال (٣) الذى يضيف « انها تصلح فقط للقراءة أو عمل بحوث أساسية foundational research ولكن لا نستطيع أن نعمل بها هندسة . وفى أى حال لا يمكن تدريس هندسة بها » . كما لاحظ شيباتا (٢) « قد يكون من الغريب على الطلبة ومن الصعب جدا عليهم فهم النظام البديهي لهيلبرت وبخاصة دور بديهية الاستمرار continuity حتى على المستوى الجامعى » . هذا لا يعنى انى لا أرى تدريس هذه الهندسة كما يرى فرويدنتال ، ولكن يستحسن تعديل مدخلها اما عن طريق النمو التاريخى البديهي كما اقترح شيباتا وذكرناه فى عمل سابق (٤) أو عن طريق الجبر الخطى كما يقترح شيبجاكى وشوكيه (٥) وفرويدنتال (٢) .

٢ . تأخير تقديم التوبولوجى حتى السنة الثالثة (أو الرابعة) بأسلوب رسمى مجرد يتسم بكثرة اجزائه النظرية وقلة تدريباته وانعدام توضيح دلالاته التطبيقية ، يجعل الطالب ينفر من المادة ولا يستسيغها ، وكل ما يفعله هو اجترار لشيء لا معنى ولا دلالة له . وذلك فى الوقت الذى يكون الطالب فى سنواته النهائية على اعتاب مهنته ويحتاج الى تكامل معرفى ذى دلالة تطبيقية ووظيفية . ومن بعض المعالجات غير الرسمية للمادة بمداخل ملموسة وبلقاءات مع الطلبة المتفوقين منهم

والعاديين والضعفاء لاحظت ان الجميع متشوقون فعلا الى معرفة أصل المادة ومعناها ودلالاتها ومحتاجون لتمهيد مبسط ذى طابع هندسى أكثر منه تحليلى .

٣ . الطالب محتاج أن يتسع افقه فى الهندسة : أ) كمادة لهندسات مختلفة ، (ب) كمدخل أو أساس لمجالات جديدة فى الرياضيات بنيت على أساسها ثم استقلت عنها — كالهندسة التوبولوجية والهندسة الديناميكية والهندسة الجبرية والتفاضلية و . . . ، (ج) كوسيلة هندسية ونماذج للتمثيل فى كل الرياضيات .

٤ . لا اعالى اذا قلت ان الطلبة المصريين بصفة خاصة عندهم الحس والحماس للهندسة (منذ التفوق الهندسى لقدماء المصريين) . وهم فى حاجة الى أن ننمى ونقوى فيهم هذه المقدرة بدلا من اخمادها . وعلى ذلك فهم فى حاجة الى أن تدرس لهم الهندسة باسلوب مشوق (بحيث : ١) تكون محتفظة بطابعها المميز كنظام بديهى مجرد ، ب) كوسيلة لمعرفة خواص الاشكال ولفهم الفراغ وتركيبه المترى *mexic* والاتجاهى *vector* والتوبولوجى . وهم فى حاجة ان يؤسسوا بعقلية هندسية ناضجة ، ويكتسبوا ، خبرة ومهارة فى الحدس *intuition* الهندسى ، وان يتذوقوا الجمال الهندسى ويمارسوا المتعة العقلية المرتبطة بالاكشاف ويشاركوا فى فرحة اكتشاف الآخرين ، وان يدرّبوا على حل المشكلات والتوصل الى التطبيقات الطبيعية *natural* غير المصطنعة وكل ذلك عن طريق خبرات تعليمية محببة وغير منفرة لهم .

٥ . تبين من التجربة ان تلاميذ المرحلة الثانوية يستطيعون التمكن من ، وتذوق شكل *form* جديد من الهندسة يتمثل فى نظرية تصنيف السطوح كمدخل للتوبولوجى الهندسى باسلوب يشجع الحدس الهندسى ويتدرج من الملموس الى المعالجة المجردة الرسمية . وقد اتاحت لى فرصة الالتقاء بتلاميذ التجربة ، وقد سعدت من استجابتهم وفرحتهم

(م ١٥ — دراسات تربوية)

وحبهم للمادة الجديدة مع فهمهم لها والتطلع الى معرفة المزيد عنها ،
أكثر من سعادتي بمعرفة النتائج الكمية للتجربة التي تعكس فاعليتها .
فالمهم أن نساعد الطالب ان ينجح في فهم وحب وتذوق المادة الجديدة
ولا نكتفى بمساعدته على مجرد تحصيله لها .

مما تقدم يمكن أن نستخلص ان طالب كلية التربية (بصفة خاصة) في
دراسته للهندسة يلزمه ما يأتي :

أ . اعداد واسع في الهندسة حيث انه متوقع منه ان يقدم اعدادا
واسعا لتلاميذه . وفي مقتبل دراسته بالكلية (سنواته الاولى فيها)
يحتاج أن يتعرف على الجديد في الهندسة : هل هي امتداد لما سبق أن
درسه بالثانوي أم تعمق فيه ؟ هل توجد هندسات أو أشكال
أو أوجه أخرى للهندسة ؟ ما هي دلالة الهندسة في نمو مجالات الرياضيات
الجديدة ؟

ب . معرفة شيء عن تاريخ الهندسة المميز . وخاصة تاريخ ما استجد
أو تطور فيها ، بما يكفي لتذوق اتجاهاتها الحالية وتقدمها والشعور
بحيوية المادة .

ج . دراسة صور جديدة للهندسة ، بجانب دراسة الهندسات
المختلفة الاقليدية واللاقليدية والاسقاطية بنظمها البديهية ، بشيء من
العمق .

د . ان تدرس الهندسة على سنوات الدراسة المختلفة بالتعليم
الحلزوني المتدرج من البسيط الى المركب . وان تدرس بعض المجالات
التي لها علاقة بالهندسة ليأخذ صورة متكاملة عن الهندسة وعلاقتها
بالرياضيات .

هـ . ان يكون تعليم الهندسة خبرة محببة تركز على أن يقوى

حدسه الهندسى ويفهم المادة ويعرف معناها ودلالاتها ويتذوق جمالها
ويحبها ويقدر نظمها البديهية ويتمكن منها .

ومن ثم فاننا نهدف فى هذه الدراسة الى وضع تصور لبرنامج
تمهيدى فى السنوات الاولى لكلية التربية يراعى فيه الاعتبارات السابقة ،
ونوضحه فيما يلى :

٢ - برنامج تمهيدى مقترح للهندسة فى السنوات الاولى لكليات التربية

يقدم البرنامج عرضا لشكل جديد من الهندسة متمثلا فى موضوعين :
الأول التربولوجى الهندسى والثانى التوبولوجى (التحليلى - العام)
بمداخل تعتمد على النماذج الحدسية والانتقال التدريجى بالمعالجة
المجردة لطلبة كلية التربية فى السنة الاولى أو السنتين الاولى والثانية
فى تتابع .

وبصفة خاصة يهدف البرنامج الى :

أ . تقديم تطوير للهندسة لمجالات جديدة ، مع توضيح نشأتها
(جذورها التاريخية) وابرار النواحي الجمالية الخلاقة فيها ، وتربية
الحدس الهندسى وتذوق جمالها والتبسيط مع الحفاظ على الطبيعة
الاستدلالية المجردة والطريقة البديهية فى معالجة نظرياتها والتعامل مع
المادة بشئ من العمق .

ب . ولو ان الموضوعين يمكن اعطاءهما مستقلين (أو اعطاء أحدهما
دون الآخر) ، الا انهما يمثلان تكاملا وترابطا رياضيا . حيث يقدم
الموضوع الثانى تفسيرا (تحليلى) لبعض ما يقدم فى الأول .

ج . عمل تمهيد وترابط لما يدرس بالفعل بالكلية . فالموضوعان
يمهدان لدراسة الهندسة (هندسة المسلمات والتحويلات الهندسية)

والتوبولوجى من جهة ولدراسة التحليل الرياضى من جهة أخرى فى السنوات الأخيرة .

والملاحظ أن التوبولوجى التجميى combinatorial كأحد أوجه التوبولوجى الهندسى مدرج بطريقة رسمية فى بعض برامج اعداد مدرسى المرحلة الثانوية الجديدة باليابان (٧) مع الهندسة الاقليدية والاسقاطيه والتفاضلية .

وفيما يلى فقدم مدخل كل موضوع فى جزأ .

٣ — الجزأ الاول : مدخل تمهيدى للتوبولوجى الهندسى لتقديم نظرية تصنيف السطوح .

نقدم باختصار المحتوى وطريقة عرضه التى نحاول بها غرس وتربية نواحي مختلفة من التفكير الرياضى مثل : الحدس ، الابتكار ، التجريد والاستدلال المنطقى الصارم ، تذوق الجمال الرياضى ، فرحة ومتعة الاكتشاف وقد صمم المدخل ليقع فى أربعة أقسام نقدمها فيما يلى :

١٠٣ — القسم الاول : المقدمة .

من المهم أن نشوق الطالب ليعرف ما سوف يقوم بدراسته ، فيعطى مقدمة تاريخية وفكرة عامة عن موضوع دراسته تهيئه لاستقبال وجه جديد للهندسة بعقلية متفتحة .

وبالنسبة للمقدمة التاريخية فانها لا تكون مجرد سرد المادة بالاسلوب الذى يتبع عادة فى تدريس تاريخ الرياضيات ويبعث الملل بتركيزه على التاريخ القديم دون الحديث وانفصامه عما هو معاصر . ولكن بالأخذ بتوصيات ياركستون (٨) وهى : أ) أن نتصل بالمنبع الحقيقى للمادة ونعرف

تطورها ، بحيث ننظر اليه بعين الحاضر . كأن نحل مشكلات أثارت نمو المادة (منها ما لم يمكن حله في وقت حدوثه) باستعمال حلول معاصرة ، مع تقديم حلول قديمة أصيلة . (ب) أن نركز على دراسة شخصية رئيسية central لعبت دورا رئيسيا في نمو ما نقوم بدراسته .

ومن ثم تثار في هذه المقدمة منشأ كلمة توبولوجى (أصلها اليونانى *Topos* تقرأ توبوس ، التى تعنى هندسة الموضع) وأول من استخدمها لهذا المدلول الرياضى الألمانى ليستنج ١٦٤٠ ، ويذكر اكتشاف أولير وحله لاحدى المشكلات التاريخية الشهيرة المعروفة بمشكلة كبرى كونجسبرج ١٧٣٦ والحل الحديث لها عن طريق الشبكات *networks* (أحادية وغير أحادية الاتصال) ، كما يذكر أهم ما تأثر به نمو التوبولوجى من أعمال جاوس وريمان وموبيس وكلاين وبوانكاريه . وقد يكون من المهم أن نذكر أن ريمان كان من تلاميذ جاوس ، وموبيس من تلاميذ ريمان وكلاين من تلاميذ موبيس كل منهم أخذ من أستاذه وزاد عليه ، فهذا قد يبين الاستمرارية في العطاء والمدرسة الرياضية الخلاقة وجذورها . وقد يكون في معرفة : ان ريمان الذى يعد من أكبر الرياضيين في التحليل الرياضى والتوبولوجى مات بمرض السل وهو في السابعة والثلاثين ، ما يبين نوع العطاء الذى يقدمه الرياضى من جهده وعمره . وان الرياضيات المقدمة للطلاب هي ثمرة كفاح وحياة أبطال رياضيين . ويمكننا تقديم بوانكاريه كشخصية رئيسية لعبت دورا هاما في وضع أساسيات التوبولوجى الهندسى . فهو بصفة عامة (١٨٥٤ — ١٩١٢) قدم اكتشافات أصيلة كثيرة في الرياضيات وتطبيقاتها كما قدم أفكارا رائدة عن عملية التفكير الحدسى ودور اللاشعور في الاكتشاف . وبصفة خاصة قدم نموذجا للمستوى في الهندسة الزائدية *hyperbolic* معروف باسمه . وهو الذى وضع وبلور أساسيات ونظريات في التوبولوجى الهندسى (التجميى) والتوبولوجى الجبرى وبصفة خاصة نظرية تصنيف السطوح وتوصله الى المجموعة

الأساسية fundamental group والى نظرية النقطة الثابتة قبل وفاته مباشرة ١٩١٢، التي نمت منها واستحدثت مجالات عديدة في القرن العشرين مثل الهومولوجى والكهومولوجى ودراسات الطى manifolds ونظريات الأبعاد .

ويمكن ان يأخذ الطالب أيضا فكرة عن النمو التحليلى للتوبولوجى (من التحليل الرياضى ونظرية الفئات) . وهنا يتعرف الطالب أيضا بصفة عامة على نوعين من التوبولوجى . أحدهما وهو التحليلى (توبولوجى فئات النقط point set topology) يتعامل مع المواد الصغيرة المكونة microscopic ويستخدم النقط والفئات فى وصف الفراغ التوبولوجى ، والثانى وهو الهندسى يتعامل مع المكونات الكبيرة macroscopic لتعميمات الأسطح التى تسمى الطيات . ومن هنا نثير موضوع الدراسة فى البرنامج (المقترح) وهو المشكلة الخاصة بنظرية تصنيف السطوح ذات بعدين (طى - ٢) التى اكتشفت وبرهنت فى القرن الماضى - وقد قدم سمال Smale ١٩٦١ وأخرون إثباتها على أساس أفكار بوانكاريه بالنسبة للأبعاد $n \leq 5$ إلا أنها لم تثبت بعد بالنسبة للأبعاد ٣ ، ٤ . أما براهانها الذى سوف نقدمه فى هذه الدراسة فهو مستمد من أعمال الرياضى المعاصر زيمان الذى قدمها ١٩٦٤ (١١) كمثال جميل للتوبولوجى الهندسى يعكس الروح الحالية للبحث فى الرياضيات .

يمكن للطالب أن يأخذ فكرة عن أهمية التوبولوجى فى علم النفس ، حيث استخدمت أفكاره كأدوات لقياس نمو التفكير . . فمثلا اذا قدم لطفل دون الثالثة شكل وجه دائرى وطلب منه رسم عينين فإنه يرسم العينين خارج الدائرة لأن مفهوم الداخل لم يتكون بعد عنده ، واذا طلب منه رسم قبة فيرسمها بعيدا عن الوجه لأن مفهوم الاتصالية لم يتكون بعد عنده . . .

٢٠٣ - القسم الثاني : السطح (طى - ٢ وخواصه) :

بالنسبة للمبتدئ يستحسن عدم تقديم التعريف الرسمى للسطح

طى - ٢ manifold -- 2 :

«A surface is a two - dimensional locally Euclidean compact Hausdorff space».

لانه يتطلب معرفة واسعة بالتوبولوجى التحليلى . ومن ثم نقدم السطح (طى - ٢) بطريقة حدسية (بدون تعريف رسمى) كتجريد لما نعينه عن السطح الاقليدى وله نفس الخواص المحلية للمستوى الذى نألفه فى الهندسة الاقليدية . ثم نقدم أمثلة لسطوح مألوفة مثل : قرص ، ورقة مربعة ، ورقة مثلثة ، سطوح مجسمات كرة وهرم واسطوانة ومخروط . وأمثلة لسطوح غير مألوفة مثل : تورس torus ، شريط موبيس ، تورس بأكثر من فجوة ، كرة ذات مقبض أو عدة مقابض ، تورس معقود knotted ، . . . وتعطى فرصة للطلاب أن يشكل نفسه بعضا من هذه السطوح مثل تشكيل اسطوانة وتورس وشريط موبيس من قطعة ورق مستطيلة . هذه الفرصة تجعله ، من جهة نشطا وتحببه فى المادة وتربى فيه روح الكشف والابتكار ، ومن جهة أخرى تمهده بأسلوب حدسى لتكوين فراغات توبولوجية جديدة بواسطة مطابقة بعض النقط فى فراغ توبولوجى معطى وهذه تناظر فكرة لصق أو خياطة سطحين أو أكثر - وذلك يقوده فيما بعد الى فكرة الفراغ المطابق quotient or identification space.

كما تعطى فرصة للطلاب ليصل بنفسه من الأسئلة الموجهة الى خواص السطح (طى - ٢) بأن يكون :

١ - متصلا connected

ب - مقفلا closed

ج - ممكنا تثليثه triangulable

فيصل الى أن جميع السطوح في الأمثلة المعطاة هي سطوح متصلة بمعنى أنه يمكن أن نصل بين أى نقطتين بمسار path أو منحني . ويصل الى أن بعض السطوح لها اطار مثل القرص وشريط موبيس ، ومن ثم فهي سطوح غير مقللة . أما باقى السطوح كسطح الكرة فليس لها اطار وعلى ذلك تكون مقللة . كذلك ليصل الى أن كل سطح يمكن تثليثه بمعنى أنه يمكن تقسيمه الى عدد محدود من الرؤوس والأحرف والأوجه المثلثة سواء كانت مستوية أو منحنية . ثم يدرب الطالب على تثليث الأسطح المختلفة ، كل سطح بأكثر من طريقة للتثليث .

ويقدم الهمومورفيزم (التحويل التوبولوجى - التكافؤ التوبولوجى) homeomorphism كفكرة رئيسية تميز التوبولوجى عن أى شكل آخر للهندسة . ويمكن أن نناظره بالتشاكل الذى يحفظ تركيب المجموعة . ثم تقدم السطوح الهمومورفية (المتكافئة) توبولوجيا . ويستعان بفكرة هندسة ورق المطاط وبالاسقاط المركزى والعمودى من سطح الى آخر . ويدرب الطالب على تعيين السطوح المتكافئة توبولوجيا من الأمثلة السابقة وأمثلة أخرى كسطح كرة مثقوب وقرص و

٣٠٣ - القسم الثالث : التوجيه - عدد أويلر - السطوح المعيارية :

نقدم فى هذا القسم بعض الخواص التوبولوجية مثل التوجيه orientation وعدد أويلر والسطوح المعيارية .

(أ) لتقديم التوجيه نسترجع كيفية تشكيل شريط موبيس من قطعة ورق مستطيلة ولصق طرفيها بعد لويها نصف لوية . فبأخذ المستطيل $S^2 = z(م، ص) \ni C^2 : -10 > م > 10 ، -1 > ص > 1$ ومطابقة النقط (١٠ ، ص) مع النقط (-١٠ ، -ص) لكل $-1 > ص > 1$ يتكون شريط موبيس . ثم يقدم السطح الموجه orientable على أنه

سطح لا يحتوي على شريط موبيس (ذى الوجه الواحد) والسطح غير
الوجه على أنه سطح يحتوي على شريط موبيس .

نقدم أمثلة لسطوح غير موجهة مثل قنينة كلاين Klein Bottle
والمستوى الإسقاطي Projective plane . فبالنسبة لقنينة كلاين
يعطى الطالب فرصة ليعرف أنها تتكون من شريطين موبيس أو ككرة
مخيط عليها شريطين موبيس . أما بالنسبة للمستوى الإسقاطي فنأخذ
من الوجهة التوبولوجية كقرص مخيط على حرفه شريط موبيس . ونساعد
المطالب أن يتعرف عليه حدسيا بالتشكيل من الثلاثة أحوال المتكافئة
الآتية :

- ١ - خياطة شريط موبيس على سطح كرة .
- ٢ - ثقب سطح كرة والمطابقة القطرية لحدود الثقب .
- ٣ - ثقب سطح كرة وخياطة كاب مصلب cross-cap عليها .

(ب) يعطى عدد أويلر x ويعين للسطوح الموجهة وغير الموجهة في
الأمثلة التي تعرف عليها عن طريق تثليث السطح أو السطح المشكل منه
مع مراعاة النقط والأحرف المطابقة ، وليصل الطالب الى أن x (للسطح
المقفل المتصل القابل للتثليث) في الأحوال التي قابلته > ٢ .

(ج) تعطى السطوح المعيارية الموجهة وغير الموجهة . يعرف السطح
المعياري الموجه ذون من الجينات $n \leq$. بأنه سطح كرة مخيط عليها n
من المقابض . أما السطح المعيارى غير الموجه ذو n من الجينات
 $n \leq ١$ بأنه سطح كرة مخيط عليها n من شرائط موبيس .

وتقدم عمليات القطع والوصل لتبسيط سطح معيارى موجه وغير
موجه . فيبسط بعدد محدود من عمليات القطع الى شكل سطح كرة ،
ويشكل ثانية الى أصله بعدد محدود من عمليات الوصل . مع توضيح
أن عدد عمليات القطع تدل على عدد الجينات n

٣٠٤ - القسم الرابع : نظرية تصنيف السطوح :

نبين للطالب صعوبة التصنيف في الهندسة الاقليدية وامكانيته في التوبولوجى الهندسى . فالسطحان يعتبران متكافئين في الهندسة الاقليدية اذا أمكن نقل أحدهما الى الآخر بتحويل اقليدى ، ومن ثم فان عدد السطوح المختلفة يكون كبيرا جدا لدرجة لا نستطيع وصفها في قائمة . بينما في التوبولوجى نركز على خواص ذاتية غير قياسية metric ، فمثلا لا يهمننا أبعاد التورس بقدر ما يهمننا أنه يحتوى على فجوة واحدة .

وتصنيف السطوح في التوبولوجى يصير ممكنا بأخذ السطوح المعيارية واثبات أن كل سطح يتكافأ مع أحد هذه السطوح المعيارية .

ثم تبسط نظرية تصنيف السطوح التى تقول :

«Any compact surface is either homeomorphic to a sphere or to a connected sum of projective planes».

وذلك باستخدام اللغة التى قدمناها للأسطح المعيارية ، وبتجزئى النظرية الى خمسة نظريات في نظام بديهي نوضح فيه للطالب عملية تكوين بديهياته من تجريد خواص عدد أوليلر للسطوح المختلفة والمتكافئة توبولوجيا . ويكون النظام على النحو التالى :

بديهية (١) : اذا كان P سطحاً متصلاً ومقفلاً وقابلاً للتثليث فان $x = (P) = 2$

بديهية (٢) : اذا كان P سطحاً متصلاً ومقفلاً وقابلاً للتثليث فان P يكون سطحاً مقفلاً بسيطاً spherelike

« (P) = 2 ، P يتكافأ توبولوجيا مع سطح الكرة نظرية (١) : اذا كان P سطحاً متصلاً ومقفلاً وقابلاً للتثليث

وكان x (ط) = ٢ فان ط تتكافأ توبولوجيا مع
سطح الكرة .

نظرية (٢) : اذا كان ط سطحاً متصلًا ومقفلًا وقابلًا للتثليث وموجهاً
وبسط بواسطة عمليات قطع متتالية الى ط_١ ،
ط_٢ ، ... طرفان x (ط) \cong x (ط_١) ، ...
 x (ط_٢) = ٢ >

نظرية (٣) : اذا كان ط سطحاً متصلًا ومقفلًا وقابلًا للتثليث وغير
وبسط بواسطة عمليات قطع متتالية الى ط_١ ، ط_٢ ، ...
ط_٣ فان x (ط) \cong x (ط_١) \cong x (ط_٢) \cong x (ط_٣) = ٢

نظرية (٤) : اذا كان ط سطحاً معيارياً موجهاً ذا جنات ن
فان ن = ٢ - x (ط)

نظرية (٥) : اذا كان ط سطحاً معيارياً غير موجهاً ذا جنات ن
فان ن = ١ - $\frac{1}{2} x$ (ط) . الاثبات والتطبيقات
والتمارين في (٩) ، (١٠) .

ويمكن أن تبسط النظرية أيضاً الى اثني عشر نظرية تعطي بعضها
كتمارين (٩) أو يستخدم نظام بديل تكون فيه البديهيتان ١ ، ٢ نظريتين
مشتقتين من أربعة نظريات أولية تقوم على فكرة الشكل graph الذي
يحوي خية loop أو شكل الشجرة tree (١١) .

٤ - الجزء الثاني : مدخل تمهيدى للتوبولوجى التحليلى :

تستند المجالات العديدة للتوبولوجى الى أساس يبدأ تقريبا من
نفس المعلومات الأساسية للتوبولوجى التحليلى . هذه الأساسيات تعالج
بمداخل تمهد للطرق المتميزة لكل مجال . منها ما يمهد للتحليل الحديث (١٢)
أو للهندسة التوبولوجية (١٣) أو للتوبولوجى الهندسى (١٤) . مقرر

التوبولوجى فى السنوات الأخيرة يقدم بمداخل يقترب من أحد هذه المداخل ويعالج بأسلوب رسمى يؤدي الى سلبيات أثرنا اليها فى المقدمة ، واقترحنا لتفاديها مدخلا تمهيديا فى السنوات الأولى . يتميز هذا المدخل بطابع هندسى بمعنى أنه يستخدم أمثلة فى الهندسة ووسائل ونماذج هندسية من الفراغات الاقليدية المألوفة وبعض ما قدم فى الجزء الأول ، كدوافع لاثارة أفكار التوبولوجى أو كتطبيقات عليها . وفيما يلي نعطى فكرة سريعة توضح تقديم بعض الأفكار الرئيسية فى هذا المدخل .

١٠٤ - تقديم الفراغات التوبولوجية والمفاهيم الأساسية المرتبطة :

عن طريق الفترة المفتوحة فى ح^١ وما يناظرها من قرص مفتوح فى ح^٢ وكرة مجسمة مفتوحة فى ح^٣ نساعد الطالب ليصل الى مفهوم الكرة المفتوحة open ball وبتجريده يصل الى مفهوم الفئة المفتوحة open set . ثم تجرد الفئات المفتوحة وخواصها فى هذه الفراغات الاقليدية بحيث لا تعتمد على القياس أى نحررها من الأعداد الحقيقية . ثم تعرف على فئة من النقط ، ليست بالضرورة نقطا هندسية . وبذلك يصل الطالب الى الفراغ التوبولوجى المجرى .

وبطريقة مماثلة تقدم المفاهيم الأساسية كالجوار ، وداخلية وخارجية وحدود وانغلاق closure فئة فى هذا الفراغ والقاعدة basis ، وذلك بأسلوب حدسى بالاستعانة بأشكال هندسية فى ح^١ ، ح^٢ ، ح^٣ والصورة المموسة للفئة المفتوحة ككرة مفتوحة أو اتحادات لكرات مفتوحة .

وكذلك بالنسبة لتقديم الفراغ الجزئى subspace نستخدم أشكالا وسطوحا هندسية كفئات جزئية من ح^١ ، ح^٢ ، ح^٣ ، ونكون التوبولوجى النسبى relative من تقاطع الفئات المفتوحة بصورتها

الملموسة مع هذه الأشكال لتكوين فراغات جزئية وبالتالي فراغات
توبولوجية جديدة .

فمثلا نعتبر سطح الكرة فراغا توبولوجيا على أساس أن التوبولوجي
هو فصل الطاقيات المفتوحة وهي عبارة عن تقاطع الكرات الجسممة
المفتوحة في ح^٢ مع سطح الكرة . هنا الطاقية المفتوحة فئة مفتوحة على
سطح الكرة ولكنها ليست فئة مفتوحة في ح^٢ .

ويقدم التوبولوجي المطابق على أساس تشكيل الأشكال . فمثلا عن
طريق لصق طرفي قطعة من السلك يصل الطالب الى التوبولوجي المطابق
المعين بالدالة التي حولت القطعة المستقيمة الى دائرة : أي د (β) =
(جتا β ، جا β) التي تحول القطعة المستقيمة [٠ ، ٢ ط] الى
الدائرة س^٢ + ص^٢ = ١ .

أما الهومومورفيزم فيثار عن طريق الاستمرار continuity بلغة
الفئات المفتوحة والصورة الحدسية له ، كدالة تناظر أحادي مستمرة
ومعكوسها دالة مستمرة . وتعطى أمثلة له توضح الفراغات التوبولوجية
المتكافئة والصورة الهندسية لها .

مثلا د (س) = $\frac{١ - س^٢}{س(١ - س)}$ توضح أن الفترة - الفراغ

التوبولوجي - (صفر ، ١) تكافئ توبولوجيا ح^١ .

٦ د (س) = ظا $\frac{ط}{٢}$ س توضح أن (- ١ ، ١) تكافئ توبولوجيا ح^١

د (س) = (س) أ (١ - س) + ب س توضح أن (١ ، ٠) تكافئ
توبولوجيا (أ ، ب) . وكذلك دالة الاسقاط المركزي التي تنقل نصف
دائرة بدون نهايتها الى ح^١ ، وطاقية مفتوحة أو قرص مفتوح الى ح^٢ .

ومنها نعتبر مثلا ان الطاقة المفتوحة أو القرص المفتوح نماذج توبولوجية للمستوى الاقليدي . ثم تقدم الخواص التوبولوجية على أنها لا متغيرات تحت الهومومورفيزم . مع التشويق بفكرة هندسة ورقة المطاط . فمثلا خاصية أن للدائرة داخل وخارج لا تتغير مع تحوير شكل الدائرة هي خواص توبولوجية . وكذلك اذا أخذنا نقطة واحدة من الدائرة فالتبقى قطعة واحدة هي خاصية توبولوجية .

ثم نوضح أن الخاصية التوبولوجية هي التي توصف عن طريق الفئات المفتوحة التي تعتبر العناصر الرئيسية في الفراغ التوبولوجي . ومن ثم يمكن توضيح هذه الخواص بالاستعانة بالصورة الملموسة للفئة المفتوحة في ح^١ ، ح^٢ ، ح^٣ ، والنماذج التوبولوجية لهذه الفراغات ، والفراغات الجزئية منها المثلة في الأشكال الهندسية والسطوح المختلفة .

قد تكون هذه الخواص متعلقة بفئات في الفراغ التوبولوجي كأن تكون الفئة مفتوحة أو مغلولة ٠٠٠ ، أو متعلقة بنقط الفراغ كأن تكون النقطة داخلية أو خارجية ٠٠٠ ، أو متعلقة بنوع الفراغ نفسه كأن يكون الفراغ ها وسد ورف أو يكون منضغطا compact أو متصلا ٠٠٠٠ فمثلا يصل الطالب حدسيا أن ح^١ فراغ غير منضغط ، وهذا ينقله الى أن النموذج التوبولوجي له ، وهو فترة مفتوحة مهما صغرت ، هي أيضا فراغ غير منضغط وكذلك القرص المفتوح أو الطاقة المفتوحة هي فراغات غير منضغطة لأنها نماذج توبولوجية للفراغ ح^٢ غير المنضغط .

وعلى هذا النوال تقدم المفاهيم الأساسية الأخرى بالاستعانة بأمثلة هندسية ليصل اليها الطالب حدسيا ولتصير ذات معنى قبل معالجتها رسميا .

المراجع :

- ١ — محمد الفزى : « منهج الرياضيات بكليات التربية » — اعمال وتوصيات مؤتمر تعليم الرياضيات ما قبل الجامعة ، القاهرة ١٩٨١ .
2. H. Freudenthal; «Mathematics as an Educational Task» Dordcecht-Holland, 1973.
3. T. Shibata : «The Role of Axioms in Contemporary Mathematics and in Mathematical Education» In A. Howson : «Developments in Mathematical Education» Cambridge Univ. Press, 1973.
4. N. Khedre : «An Analysis of the Axiomatic Process Developed by Prospective Teachers of Mathematics in Egypt».
- مجلة كلية التربية ج . عين شمس ١٩٨٣ — البحث السابع هنا .
5. W. Shibagaki : «A Course to be Given to College Preparatory Students or to Freshman Students», JSME, Special Issue, 1971.
6. T. Shibata : «Geometry in the Elementary Shools», JSME Special Issue, 1971.
7. T. Kawagauoni : «Training of Mathematics Teachers in Japan», JSME Special Issue, 1971.
8. C. Parkinson : «How to Take a History Course Without Yauning», IEEE Students Journal, 1968.
- ٩ — محمود عبد العليم خليل ربيع : « تبسيط نظرية تصنيف السطوح ومبادئها الاساسية لتلميذ المرحلة الثانوية » رسالة ماجستير — كلية التربية ج . عين شمس ١٩٨٢ .
10. W. Massey : «Algebraic Topology - An Introduction», Harcourt, Brace & World Inc., 1967.
11. E. Zeeman : «An Introduction to Topology. The Classification Theorem for surfaces», Mathematics Institute. University of Warwick, Conventry, England.
12. G. Simmons : «Introduction to Topology and Modern Analysis» McGraw - Hill, 1963.
13. I. R. Porteous : «Topological Geometry», Van Nostrand Reinhold Comp., London, 1969.
14. R. Brown : «Elements of Modern Topology» McGraw-Hill, 1968.

**A Suggested Preparatory Course in Geometry for First Years
of Colleges of Education**

**Dr. Nazla H. A. Khedre, Faculty of Education
Ain Shams University**

.....

Abstract

The present paper aims at suggesting a preparatory course of a new form of geometry. It is designed to include two simplified approaches; one of geometric topology and the other of general topology to suit first-years, colleges of education - students. This is done to foster geometric intuition, appreciation and true understanding. The first approach includes : historical introduction - surface (2 - manifold), orientation and standard surfaces - the classification theorem for surfaces. The second approach includes : introducing topological spaces and their fundamentals, with a geometric flavour, using models in A_1 , R_2 , R_3 , to motivate the ideas.