

AS-SAMAW'AL IBN YAHYA AL-MAGRIBI (-c. 570 H.)

PAR

ADEL AMBOUBA

Connu dès le 14^e siècle par une traduction latine de sa «Réfutation des Juifs», as-Samaw'al ibn Yahya al-Magribi (1) a été étudié en tant que médecin par Leclerc dans son «Histoire de la Médecine chez les Arabes» (2). Mais ses écrits mathématiques, dont quelques rares manuscrits sont conservés à Istanbul et à Berlin, ne semblent pas avoir fait l'objet d'une étude complète. Or, un travail que nous préparons sur le mathématicien al-Karagī, nous ayant amené à rechercher son influence sur les mathématiciens postérieurs, nous avons pris connaissance des deux œuvres suivantes d'as-Samaw'al :

Al-Mūğaz al-Mūdawī (3)

Al-Bāhir fi-l-Hisāb (4)

Si *al-Mūğaz* est d'un caractère élémentaire et ne renseigne pas sur la vraie valeur de son auteur (5), par contre le second qui présente l'algèbre de l'époque, à son stade le plus avancé, nous révèle un as-Samaw'al, mathématicien de classe, qui mérite d'être placé au tout premier rang des algébristes arabes.

L'objet de cet article est de présenter au lecteur quelques extraits d'*al-Bāhir* (6) montrant la part de l'auteur dans l'avancement de l'algèbre.

Les contributions d'as-Samaw'al méritent, d'ailleurs, d'être soulignées. Grâce à lui, un progrès décisif est réalisé dans l'usage des nombres soustractifs ou déficients (7). On en jugera mieux si on voit où en était leur emploi à son époque.

Chez le premier algébriste de langue arabe, al-Huārizmī, la règle de multiplication des signes est clairement énoncée et couramment employée (8). Dans le développement des produits $(10-x)^2$, $(10-x)(10+x)$, al-Huārizmī écrit textuellement: moins x par moins x égale plus x^2 , moins x par plus x égale moins x^2 (9). Sans doute ne faut-il voir là qu'une convention, un abus de langage destiné à énoncer certains résultats sous une forme commode,

et al-Huārizmī, suivi en cela par les mathématiciens ultérieurs, dont as-Samaw'al lui-même, ne reconnaît pas l'existence en soi de -10 .

Mais le fait est que cet abus, dont le caractère antigrammatical et illogique était reconnu par les mathématiciens, a continué d'être utilisé au titre de règle opératoire et a rendu d'immenses services à l'algèbre. Pour la *soustraction des signes*, rien d'analogue. Al-Huārizmī énonce les résultats suivants :

$$\begin{aligned}(20 - \sqrt{200}) - (\sqrt{200} - 10) &= 30 - 2\sqrt{200} \\ (100 + x^2 - 20x) \div (50 - 10x - 2x^2) &= 150 - x^2 - 10x.\end{aligned}$$

Il donne de la première égalité une justification laborieuse sur figure, dénuée de tout intérêt opératoire, mais avoue son insuccès à représenter l'addition des deux trinômes par des lignes. Cependant, dit-il, le résultat de l'addition se justifie par le discours : «Tu sais que tu as $100 + x^2 - 20x$; en lui ajoutant $50 + 10x$, cela devient $150 + x^2 - 10x$, car les $10x$ additifs ont restauré (*ḡabar*) $10x$ des $20x$ manquants et il est resté $150 + x^2 - 10x$. D'autre part, il y avait un x^2 avec le 100 ; en retranchant de $100 + x^2$, les $2x^2$, soustraits de 50 , un x^2 *emporte* un x^2 et tu *dois* encore un x^2 ; ce qui fait $150 - x^2 - 10x$ C.Q.F.D.» (11). Ainsi donc l'attention du mathématicien est détournée du monôme soustractif en soi, vers la quantité dont il est soustrait, à laquelle on ajoutera justement le terme qui lui manque (*ḡabr*); et l'addition d'un terme soustractif avec un terme additif, comme $-2x^2$ avec x^2 se présente avec l'idée sous-jacente de «*ḡabr*»: restituer ici la plus grande partie manquante: un x^2 sur deux.

Cette décomposition de l'addition $-2x^2 + x^2$ en plusieurs temps ($-x^2 - x^2 + x^2$; $x^2 - x^2$; $-x^2$), sur lesquels l'attention du mathématicien se porte avec la même force, semble le distraire du résultat final et de la formulation d'une règle générale pour l'obtenir.

Deux siècles plus tard, la question a progressé à peine. Dans *al-Fahri*, al-Karagī effectue, par *ḡabr*, l'opération:

$$(8x + 20 + x^2) - (10x - 4 - x^2) \quad (12),$$

c'est-à-dire qu'il ajoute x^2 aux deux polynômes, pour restituer au deuxième le terme qui lui manque; et il évite ainsi la soustraction de nombres soustractifs, opération dont la signification et la justification lui échappent.

La soustraction continue ainsi: «ôtez $8x$ de $10x$, le reste $2x$ est soustractif» ce qui représente un progrès sur la manière d'al-Huārizmī. Mais la soustraction d'un nombre soustractif sera

toujours éludée par al-Karagī et aucune audace de langage ou de pensée ne l'amènera à dire $x^2 - (-x^2) = 2x^2$. Or, cette défaillance va peser sur son œuvre et entraver son développement dans la théorie de l'extraction de la racine carrée. On doit à ce mathématicien le premier calcul de la racine carrée d'un polynôme. Voici comment il en énonce la règle sur le polynôme (13):

$$P(x) = 4x^8 + 12x^7 + 9x^6 + 20x^5 + 42x^4 + 18x^3 + 25x^2 + 30x + 9.$$

La racine de $4x^8$ est $2x^4$; ôtons de $P(x)$ le carré de $2x^4$, nous obtenons: $R_1(x) = 12x^7 + 9x^6 + \dots + 9$. Cherchons le terme A tel que $A(2x^4) = 12x^7$, nous trouvons $3x^3$. Ôtons alors de $R_1(x)$, la quantité $3x^3(2x^4 + 3x^3)$, il reste: $R_2(x) = 20x^5 + 42x^4 + 18x^3 + \dots + 9$. La partie trouvée de la racine est $2x^4 + 3x^3$. Calculons B tel que $2(2x^4 + 3x^3)B + B^2$ puisse se retrancher de $R_2(x)$. Nous trouvons $B = 5x$ etc...

On voit que l'extraction de la racine carrée de $P(x)$ repose sur le développement du carré d'un polynôme suivant la formule suivante :

$$(A + B + C + \dots + K + L)^2 = A^2 + (2A + B)B + (2A + 2B + C)C + \dots + (2A + 2B + 2C + \dots + 2K + L)L$$

où l'on reconnaît la somme des carrés des termes et le double produit de chacun des termes par ceux qui le précèdent.

Or, malgré la généralité de la règle qu'il vient de découvrir, al-Karagī n'en saisit pas l'application à des polynômes contenant des termes soustractifs. Analysant la formation du carré P^2 d'un polynôme P , en vue de surprendre un moyen d'en retrouver la racine, on le sent visiblement gêné par le fait que certains coefficients de P^2 soient le résultat d'additions et de soustractions combinées; de même qu'on le sent embarrassé par la disparition de certaines puissances dans P^2 . C'est en vain qu'il multiplie les remarques ingénieuses, et qu'il divise la question en cas et sous-cas. Il réussit à trouver la racine quand elle est formée de trois termes ou quatre, (de cinq aussi, mais très péniblement); cependant sa résolution se fait par des considérations particulières à chaque cas et non par l'utilisation de la règle générale qu'on lui doit.

Est-il vraiment inutile de noter qu'al-Karagī a utilisé la seule règle des signes connue à l'époque, celle de la multiplication, et que s'il avait été familiarisé avec la soustraction des nombres soustractifs et additifs, les altérations subies par les coefficients dans l'élévation en carré n'auraient pas été pour lui un obstacle?

Il appartenait à as-Samaw'al de reconnaître que la règle trouvée par al-Karagī pouvait devenir tout à fait générale, moyennant l'introduction de nouvelles règles de soustraction. C'est à cette occasion qu'il énonce textuellement (14): «Si nous soustrayons un nombre additif d'un nombre soustractif le reste est égal à leur somme soustractive; si nous soustrayons un nombre soustractif d'un nombre soustractif plus grand, le reste égale leur différence soustractive; si le nombre dont on soustrait est inférieur au nombre ôté, le reste est leur différence additive; si l'on soustrait le nombre soustractif d'un nombre additif, le reste égale leur somme additive; si nous soustrayons un nombre additif d'une puissance absente (15), il reste le même nombre négatif; si nous soustrayons le nombre négatif d'une puissance absente, il en reste le même nombre positif».

Ce texte renferme toutes les audaces. Pour la première fois, semble-t-il, dans l'histoire des mathématiques arabes, un auteur soustrait un nombre additif d'un nombre soustractif, un nombre soustractif d'un nombre soustractif (16). De plus, fait d'une grande portée, zéro est traité comme un nombre, et on imagine d'en soustraire aussi bien un nombre additif qu'un nombre soustractif.

Il est une autre circonstance où as-Samaw'al a senti le besoin des règles de soustraction. C'est dans la division des polynômes dont on lui doit la théorie. Ces règles y sont appliquées, sans énoncé, bien que le chapitre de la division précède celui de l'extraction de la racine carrée. Ceci semble indiquer que la première idée des règles de soustraction s'est imposée à as-Samaw'al, par l'étude critique d'*al-Bāhir* dont il reproduit des dizaines de pages, et que le chapitre de l'extraction de la racine carrée, bien que classé après celui de la division, a été probablement conçu et rédigé avant.

Une deuxième contribution importante est réalisée par as-Samaw'al dans le domaine des puissances. Tout en conservant la nomenclature de son époque: chose, carré, cube, carré-carré, carré-cube, cubo-cube, carré-carré-cube, ..., pour désigner x , x^2 , x^3 , x^4 , x^5 , x^6 , x^7 , ..., il introduit aux symboles près, nos idées exponentielles actuelles. Al-Karagī, dans le premier chapitre d'*al-Fahrī*, avait eu le mérite remarquable d'inclure, indistinctement,

dans la notion de puissance les quantités x , x^2 , x^3 , ..., $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, ...

As-Samaw'al qui a cité ce passage d'*al-Fahrī*, dispose alors sur une même droite (17), à partir de l'unité, en allant vers la gauche les puissances successives: x , x^2 , x^3 , x^4 , ...; affectant l'unité (et les termes constants) du rang (ou degré) zéro, et les autres puissances

des rangs: 1, 2, 3, 4... Puis, sur la même droite, il dispose à la droite de l'unité $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4} \dots$

qu'il affecte également des rangs 1, 2, 3, 4...

5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5
x^5	x^4	x^3	x^2	x	1	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{x^5}$

à la suite de quoi, il établit les règles de multiplication et de division des monômes qu'il énonce ainsi pour la multiplication (18):

«Si les deux puissances sont de part et d'autre [de l'unité], à partir de l'une d'entre elles nous comptons dans la direction de l'unité, autant [de casiers] qu'il y a entre l'unité et l'autre puissance. Si les deux puissances sont d'un même côté de l'unité, nous comptons dans le sens opposé à l'unité».

A quelques siècles de distance, cette règle n'évoque-t-elle pas notre addition de vecteurs portés par un axe et la distinction des deux sens de parcours sur une droite, qui s'est avérée si féconde dans notre géométrie moderne?

A côté de cette règle que nous qualifierions de graphique, as-Samaw'al énonce expressément dans les exemples traités, que le rang (ou degré) du produit de deux puissances est la somme des rangs des deux puissances, si elles sont d'un même côté de l'unité, et leur différence si les puissances sont de part et d'autre (19).

Le rang de $\left(\frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{x^4}\right)$ est $3 + 4 = 7$. Celui de $\left(\frac{1}{x^2} \cdot x^3\right)$ est $3 - 2 = 1$, pris du côté de 3 qui est le plus fort.

Plus loin, dans le chapitre: «Division des monômes» (20), as-Samaw'al s'exprime ainsi: «Pour diviser une puissance par une autre, si elles sont d'un même côté [de l'unité] nous comptons à partir du dividende vers l'unité autant [de casiers] qu'il y en a de l'unité au diviseur. Si les puissances sont de part et d'autre [de l'unité] nous comptons à partir du dividende en sens contraire de l'unité. La puissance où l'on aboutit est celle du quotient». As-Samaw'al explique l'usage de cette règle sur les exemples:

$$8 x^5 : 4 x^2 = 2 x^3; 24 x^2 : 6 x^6 = 4\left(\frac{1}{x^4}\right); 16\left(\frac{1}{x^3}\right) : 2\left(\frac{1}{x^5}\right) = 8 x^2 \dots$$

Aux apports fondamentaux relatifs aux puissances et à la soustraction des nombres additifs et soustractifs, à la remarquable théorie de la division des polynômes, à l'extraction de la racine

carrée d'un polynôme à coefficients soustractifs et additifs, vient encore s'ajouter la résolution d'un nombre important de questions laissées sans réponse par ses prédécesseurs. C'est ainsi qu'as-Samaw'al vient à bout de la formule $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (21)

où avait échoué al-Karagī (22).

Il démontre également:

$$2[1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (2n-1)(2n)] + n = 1^2 + 2^2 + \dots + (2n)^2 \quad (23).$$

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (2n-1)(2n) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 \quad (24).$$

et bon nombre de propositions analogues, comme la sommation des cubes des n premiers nombres entiers (25) dont al-Karagī avait donné une solution géométrique. Opérant un travail de base, as-Samaw'al donne systématiquement la démonstration des règles opératoires dont l'évidence et le caractère théorique avaient, peut-être, rebuté les mathématiciens antérieurs. Les règles

$$\frac{a \cdot c}{b} = \frac{ac}{b} = \frac{a}{b:c} \quad (26)$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{a}{d} \cdot \frac{c}{b} \quad (27)$$

$$\sqrt[3]{a^3 b^3} = ab \quad (28)$$

et bien d'autres analogues sont impitoyablement passées au crible de la déduction mathématique.

Il serait trop long d'énumérer toutes les richesses contenues dans *al-Bāhīr*. Signalons-y cependant pour terminer l'apparition des combinaisons (29). Le problème qui provoque la naissance de cette notion est celui du calcul de dix inconnues connaissant leur somme six à six (30), ce qui amène as-Samaw'al à écrire un prodigieux système de 210 équations à dix inconnues; et la manière dont il s'y prend montre qu'il est, évidemment, en possession d'une règle raisonnée pour former les combinaisons. Dans la résolution du système, as-Samaw'al déploie, d'ailleurs, les qualités d'un très habile calculateur et d'un esprit vigoureux qui ne recule pas devant l'examen de la compatibilité d'un nombre aussi grand d'équations. A une époque où tout symbolisme était inexistant, poser un tel problème était déjà une gageure, mais l'auteur trouve tout naturel de désigner les dix inconnues par les dix premiers nombres écrits en chiffres indiens. Le système se présente sous la forme d'un tableau en deux pages, de 35 lignes chacune, et où

la page est divisée en trois colonnes. Voici un fragment de la 1ère colonne:

a	1	2	3	4	5	6	65
b	1	2	3	4	5	7	70
ġ	1	2	3	4	5	8	75
d	1	2	3	4	5	9	80
h	1	2	3	4	5	10	60
w	1	2	3	4	6	7	55
z	1	2	3	4	6	8	60

où a, b, ġ, d, h, w, z ont la valeur des lettres de l'alphabet numéral: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et désignent, ici, le rang. La première ligne se lit donc: 1ère équation, les six premières inconnues ont pour somme 65.

Remarquons que dans le texte, as-Samaw'al désigne les inconnues par les mots: le premier, le deuxième, etc... sans user d'abréviation. Ce passage montre, d'après nous, que la découverte des notations ne posait pas pour les Arabes un problème de difficulté majeure, et que c'est surtout l'état élémentaire de l'algèbre chez eux, joint aux exigences spéciales de leur langue et à un certain sentiment des convenances (31), qui les détournait durant des siècles du symbolisme algébrique.

Tel est un aperçu rapide et forcément incomplet d'une œuvre qui se place au premier rang des algèbres arabes. Ajoutons qu'à sa valeur mathématique, s'ajoute un intérêt historique. *Al-Bāhir* nous a conservé un bon nombre de fragments d'œuvres antérieures perdues, dont le fameux triangle arithmétique, dit de Pascal ou de Tartaglia, découvert par al-Karagī (32). De plus, as-Samaw'al y rapporte les propositions qu'il énonce à leur premier auteur, ce qui peut rendre de grands services dans les questions de priorité et, d'une façon plus générale, dans la connaissance de l'histoire des mathématiques chez les Arabes.

Dans les pages qui suivent, nous donnons la traduction de quelques-uns des extraits publiés plus loin.

DIVISION DES POLYNÔMES

[Aucun mathématicien n'ayant, avant lui, énoncé de règle pour la division des polynômes, as-Samaw'al se propose d'en exposer une sur un exemple. La méthode s'inspire de la division des nombres écrits dans la numérotation indienne (de position), et se trouve être, en substance, la méthode classique utilisée de nos jours. On admirera la remarquable généralité qu'as-Samaw'al a donnée à sa règle et l'aisance avec laquelle il l'utilise

dans des polynômes généralisés formés, comme nous dirions de nos jours, de puissances entières positives et négatives de l'inconnue].

(fol. 172). Soit à diviser :

$$20x^6 + 2x^5 + 58x^4 + 75x^3 + 125x^2 + 96x + 94 - 140\frac{1}{x} - 50\frac{1}{x^2} + 90\frac{1}{x^3} + 20\frac{1}{x^4}$$

par $2x^3 + 5x + 5 + 10\frac{1}{x}$

x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	unités	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^4}$
20	2	58	75	125	96	94	140	50	90	20
2	0	5	5	10						

Disposons les polynômes généralisés dans leur ordre naturel, comme ci-dessous, en mettant 0 dans les cases vides

Divisons la plus haute puissance du dividende par la plus haute puissance du diviseur, nous obtenons $10x^3$ pour quotient que nous écrivons dans le casier des x^3 , en face de 75; puis multiplions $10x^3$ par le diviseur et soustrayons le produit de $10x^3$ par chaque puissance du diviseur du terme situé au-dessus, et déplaçons le diviseur vers la droite d'un casier, comme dans le calcul indien. Il en résulte le tableau suivant:

x^3	x^4	x^3	x^2	x	unités	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^4}$
		10							
2	8	25	25	96	94	140	50	90	20
2	0	5	5	10					

Nous cherchons alors le plus grand nombre dont le produit par le diviseur n'excède pas le reste obtenu. Nous trouvons 1 que nous multiplions par le diviseur en ôtant le produit par 1 de chaque puissance, du terme qui est en face d'elle. Puis nous déplaçons le diviseur d'un casier vers la droite; il en résulte le tableau suivant:

x^4	x^3	x^2	x	unités	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^4}$
	10	1						
8	20	20	86	94	140	50	90	20
2	0	5	5	10				

Puis nous cherchons le plus grand nombre dont le produit par les différentes puissances du diviseur ne soit pas supérieur aux puissances [du dividende] situées au-dessus. Nous trouvons 4 que nous plaçons avant le 1 et nous le multiplions par les puissances du diviseur en ôtant les produits respectifs des termes situés au-dessus. Puis nous déplaçons le diviseur vers la droite [d'un casier]. Il en résulte le tableau suivant:

x^3	x^2	x	unités	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^4}$
10	1	4					
20	0	66	54	140	50	90	20
2	0	5	5	10			

Puis nous cherchons le plus grand nombre dont le produit par la dernière puissance du diviseur n'excède pas le terme situé au-dessus d'elle. Nous trouvons 10, que nous mettons avant le 4, et nous le multiplions par la dernière ligne; puis, nous soustrayons le produit de la ligne du milieu. Ensuite, nous déplaçons le diviseur vers la droite d'un casier.

[Ici, as-Samaw'al juge inutile de donner un tableau, qui aurait été le suivant]:

x^3	x^2	x	unités	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^4}$
10	1	4	10				
	0	16	4	40	50	90	20
	2	0	5	5	10		

Nous recherchons un nombre comme précédemment et nous n'en trouvons pas. Nous mettons zéro avant le 10 de la ligne supérieure et nous déplaçons le diviseur d'un rang vers la droite. Il vient le tableau V.

x^3	x^2	x	unités	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^4}$
10	1	4	10	0			
		16	4	40	50	90	20
		2	0	5	5	10	

Nous recherchons un nombre comme précédemment et nous trouvons 8 que nous plaçons avant le zéro et que nous multiplions par la dernière ligne. Nous soustrayons de ce qui est dessus et nous déplaçons le diviseur d'un rang vers la droite, il vient le tableau VI.

x^3	x^2	x	unités	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^4}$
10	1	4	10	0	8		
			4	0	10	10	20
			2	0	5	5	10

Nous recherchons un nombre comme précédemment et nous trouvons 2. Nous le multiplions par le diviseur et nous ôtons le

produit du dividende, il ne reste rien. Nous additionnons alors la première ligne et nous avons:

$$10x^3 - x^2 + 4x - 10 \div 8 \frac{1}{x^2} = 2 \frac{1}{x^3}$$

Tel est le quotient de la division.

[As-Samaw'al donne ensuite un exemple sur la division de polynômes à termes soustractifs].

$$6x^8 + 28x^7 + 6x^6 + 38x^4 + 92x^3 + 20x - 80x^5 - 200x^2$$

à diviser par

$$2x^5 - 8x^4 - 20x^2$$

[Il a l'occasion d'appliquer la règle de soustraction des nombres soustractifs et additifs qu'il vient de découvrir. Voici le tableau de disposition de la division]:

x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x
6	28	6	moins 80	38	92	moins 200	20
2	8	0	moins 20				

[Dans le chapitre relatif au rapport de deux polynômes, as-Samaw'al donne des exemples de divisions illimitées].

(fol 192) Nous voulons prendre le rapport de $20x^2 \div 30x$ à $6x^2 - 12$ ou bien diviser la première quantité par la seconde. Nous les disposons comme dans le tableau I et nous opérons pour le rapport comme pour la division. Le quotient est $3 \frac{1}{3}$ unités que nous mettons dans le casier des unités, et que nous multiplions par 6, en retranchant le produit de ce qui est au-dessus de 6. Il ne reste rien. Le produit de $3 \frac{1}{3}$ par 12 est 40 que nous ôtons de ce qui est au-dessus de 12. Et nous déplaçons la ligne inférieure d'un rang vers la droite comme dans le tableau II.

I

x^2	x	unités
20	30	
6	0	12

Nous cherchons un nombre dont le produit par 6 donne 30: nous trouvons 5 que nous multiplions par le diviseur, en soustrayant le produit de la ligne médiane et nous déplaçons, d'un rang vers la droite, la quantité à laquelle l'autre a été rapportée comme dans le tableau III.

II

x	unités	$\frac{1}{x}$
.	$3\frac{1}{3}$	
30	moins 40	
6	0	12

Puis nous cherchons un nombre dont le produit par 6 donne moins 40, nous trouvons moins $6\frac{2}{3}$ que nous multiplions par le diviseur en soustrayant le produit de ce qui est dessus, et nous déplaçons le diviseur d'un rang vers la droite; il vient le tableau IV.

III

unités	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$
$3\frac{1}{3}$	5	
moins 40	moins 60	
6	0	12

Puis nous cherchons un nombre dont le produit par 6 donne moins 60; nous trouvons moins 10 que nous plaçons avant $6\frac{2}{3}$ et que nous multiplions par toute la dernière ligne, et nous ôtons cela de ce qui est au-dessus; il vient le tableau V.

IV

unités	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$
$3\frac{1}{3}$	5	moins $6\frac{2}{3}$	
	moins 60	80	
	6	0	12

Puis nous cherchons un nombre dont le produit par 6 donne 80, nous trouvons $13\frac{1}{3}$ que nous plaçons après le 10 et que nous multiplions par toute la ligne inférieure, et nous ôtons de ce qui est au-dessus, puis nous déplaçons le diviseur d'un rang vers la droite; il vient le tableau VI.

V

unités	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^4}$
$3\frac{1}{3}$	5	moins $6\frac{2}{3}$	moins 10	
		80	120	
		6	0	12

Puis nous cherchons un nombre dont le produit par 6 donne 120, nous le plaçons avant 13 1/3, nous le multiplions par le diviseur, et nous ôtons de ce qui est au-dessus, puis nous déplaçons le diviseur d'un rang vers la droite; il vient le tableau VII.

VI

unités	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{x^5}$
3 1/3	5	moins 6 2/3	moins 10	13 1/3	
			120	moins 160	
			6	0	12

Puis nous cherchons un nombre dont le produit par 6 donne moins 160, nous trouvons moins 26 2/3 que nous plaçons, et nous déplaçons le diviseur d'un rang vers la droite; il en résulte le tableau VIII.

VII

unités	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{x^5}$	$\frac{1}{x^6}$
3 1/3	5	moins 6 2/3	moins 10	13 1/3	20	
				moins 160	moins 240	
				6	0	12

Puis nous cherchons un nombre dont le produit par 6 donne moins 240, nous trouvons moins 40 que nous plaçons à la suite de 26 2/3

VIII

unités	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{x^5}$	$\frac{1}{x^6}$	$\frac{1}{x^7}$
3 1/3	5	moins 6 2/3	moins 10	13 1/3	20	moins 26 2/3	
					moins 240	320	
					6	0	12

et que nous multiplions par le diviseur; puis nous ôtons le produit de ce qui est au-dessus et nous déplaçons le diviseur d'un rang vers la droite; il en résulte le tableau IX.

IX

unités	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{x^5}$	$\frac{1}{x^6}$	$\frac{1}{x^7}$	$\frac{1}{x^8}$
3 1/3	5	moins 6 2/3	moins 10	13 1/3	20	moins 26 2/3	moins 40	
						320	480	
						6	0	12

Et nous continuons ainsi aussi loin que nous voulons; nous

contentant ici de l'approximation obtenue, nous nous arrêtons là et nous additionnons le quotient de la division. Nous trouvons dans cet exemple:

$$3\frac{1}{3} + 5\left(\frac{1}{x^4}\right) + 13\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right) + 20\left(\frac{1}{x^5}\right) - (6\frac{2}{3})\left(\frac{1}{x^2}\right) - 10\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ - (26\frac{2}{3})\left(\frac{1}{x^6}\right) - 40\left(\frac{1}{x^7}\right)$$

Telle est la réponse approchée.

Pour la vérifier, nous la multiplions par le diviseur, lequel est $6x^2 + 12$; il vient:

$$20x^2 + 30x + 40 + 60\left(\frac{1}{x}\right) + 80\left(\frac{1}{x^2}\right) + 120\left(\frac{1}{x^3}\right) - \\ 160\left(\frac{1}{x^4}\right) + 240\left(\frac{1}{x^5}\right) - 40 - 60\left(\frac{1}{x}\right) - 80\left(\frac{1}{x^2}\right) - 160\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ - 240\left(\frac{1}{x^4}\right) - 320\left(\frac{1}{x^5}\right) - 480\left(\frac{1}{x^6}\right).$$

Après la réduction des termes additifs par les soustractifs, il reste $20x^2 - 30x - 320\left(\frac{1}{x^6}\right) - 480\left(\frac{1}{x^7}\right)$. La différence entre cette quantité et le dividende est $320\left(\frac{1}{x^6}\right) - 480\left(\frac{1}{x^7}\right)$ qui est le reste dans le tableau.

Si nous cherchons le quotient exact du rapport nous ajoutons au quotient obtenu, le reste, ici $320\left(\frac{1}{x^6}\right) - 480\left(\frac{1}{x^7}\right)$ divisé par $6x^2 + 12$. Il faut répéter la division (comme nous l'avons fait, de nombreuses fois, pour reconnaître la relation entre les termes du quotient ou pour pousser l'approximation.

Voici quant à la relation entre les termes. Dans la division de $20x^2 + 20x$ par $6x^2 + 12$, nous avons obtenu:

$$3\frac{1}{3} \text{ unités} \quad 5\left(\frac{1}{x}\right) \quad (13\frac{1}{3})\left(\frac{1}{x^4}\right) \quad 20\left(\frac{1}{x^5}\right) \\ - (6\frac{2}{3})\left(\frac{1}{x^2}\right) - 10\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad - (26\frac{2}{3})\left(\frac{1}{x^6}\right) \quad - 40\left(\frac{1}{x^7}\right)$$

Nous trouvons que $3\frac{1}{3}$ est la moitié du nombre de la 3^e puissance à partir de lui, c.-à-d. $6\frac{2}{3}$; de même, $6\frac{2}{3}$ est la moitié du nombre de la 3^e puissance à partir de lui, c.-à-d. $13\frac{1}{3}$; $13\frac{1}{3}$ est la moitié du nombre de la 3^e puissance à partir de lui,

soit $26 \frac{2}{3}$. Nous trouvons de même que 5 est la moitié du nombre de la 3^e puissance à partir de lui, c.-à-d., 10; 10 est la moitié du nombre de la 3^e puissance à partir de lui, soit 20, et 20 est la moitié du nombre de la 3^e puissance à partir de lui, soit 40. Ceci provient de ce que (le nombre de) la première puissance du diviseur est la moitié (du nombre de) la 3^e puissance à partir d'elle, c.-à-d., 6 et 12.

Quant à l'ordonnance des puissances, nous avons trouvé toujours deux puissances consécutives additives, suivies de deux puissances consécutives soustractives. Par suite, nous connaissons les nombres (مردة) du quotient et son ordonnance; nous en écrivons autant de puissances que nous voulons, sans besoin d'autre opération que d'écrire les casiers.

unités	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{x^5}$	$\frac{1}{x^6}$	$\frac{1}{x^7}$	$\frac{1}{x^8}$	$\frac{1}{x^9}$	$\frac{1}{x^{10}}$	$\frac{1}{x^{11}}$
$3 \frac{1}{3}$	5	moins $6 \frac{2}{3}$	moins 10	$13 \frac{1}{3}$	20	moins $26 \frac{2}{3}$	moins 40	$53 \frac{1}{3}$	80	moins $106 \frac{2}{3}$	moins 160
$\frac{1}{x^{23}}$	$\frac{1}{x^{22}}$	$\frac{1}{x^{21}}$	$\frac{1}{x^{20}}$	$\frac{1}{x^{19}}$	$\frac{1}{x^{18}}$	$\frac{1}{x^{17}}$	$\frac{1}{x^{16}}$	$\frac{1}{x^{15}}$	$\frac{1}{x^{14}}$	$\frac{1}{x^{13}}$	$\frac{1}{x^{12}}$
moins 10240	moins $6826 \frac{2}{3}$	5120	$3413 \frac{1}{3}$	moins 2560	moins $1706 \frac{2}{3}$	1280	$853 \frac{1}{3}$	moins 640	moins $426 \frac{2}{3}$	320	$213 \frac{1}{3}$
$\frac{1}{x^{35}}$	$\frac{1}{x^{34}}$	$\frac{1}{x^{33}}$	$\frac{1}{x^{32}}$	$\frac{1}{x^{31}}$	$\frac{1}{x^{30}}$	$\frac{1}{x^{29}}$	$\frac{1}{x^{28}}$	$\frac{1}{x^{27}}$	$\frac{1}{x^{26}}$	$\frac{1}{x^{25}}$	$\frac{1}{x^{24}}$
							54613	moins 40960	moins 27306 $\frac{2}{3}$	20480	$13653 \frac{1}{3}$

[Nous citons ci-après une extraction de racine carrée d'un polynôme carré parfait]:

(fol. 270) Soit à extraire la racine carrée de

$$\begin{aligned}
 & 25 x^6 - 9 x^4 - 84 x^2 + 64 + 100 \frac{1}{x^2} - 64 \frac{1}{x^4} - 30 x^5 - 40 x^3 \\
 & - 116 x - 48 \frac{1}{x} - 96 \frac{1}{x^3}
 \end{aligned}$$

Nous écrivons le polynôme sur le plateau [de sable] tel que dans le tableau:

	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	unités	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^4}$
I	25	-30	9	-40	84	-116	64	-48	100	-96	64
II	25	-30	9	-40	84	-116	64	-48	100	-96	64
	5	10	-3								
III				5	-3						
				-40	84	-116	64	-48	100	-96	64
			10	-6							
IV				5	-3	0	-4				
				-40	84	-116	64	-48	100	-96	64
				10	-6	0	-4				
V				5	-3	0	-4				
					60	-116	48	-48	100	-96	64
					10	-6	0	-8			
VI				5	-3	0	-4	6			
						-80	48	0	64	-96	64
						10	-6	0	-8	12	

[En vue de faciliter la lecture du texte, nous en avons groupé les tableaux (non numérotés, d'ailleurs, dans le manuscrit) en y ajoutant les tableaux II et IV. Dans l'original, les casiers vides ne sont pas tracés]. (37)

Commençant au casier des unités [puis passant aux autres] nous disons: racine pas racine, racine pas racine (33), comme dans

[l'extraction de] la racine carrée des nombres connus et nous marquons (34) à droite et à gauche des unités les puissances où tombe [le mot] racine. Le dernier tombe sur x^6 . Nous cherchons le plus grand nombre dont le produit par lui-même ôté de 25 donne pour reste zéro. Nous trouvons $5x^3$ que nous plaçons dans la ligne supérieure face à x^3 et dans la ligne inférieure sous 25; nous multiplions le 5 supérieur par le 5 inférieur et nous ôtons le produit de ce qui est dessus: ce dernier s'annule. Nous doublons le 5 inférieur et nous le déplaçons d'un rang vers la droite. Nous cherchons, alors, le plus grand nombre qui multiplié par le 10 inférieur donne moins 30; nous trouvons moins 3, que nous plaçons dans la ligne supérieure après le 5 — au-dessus de 84 — et dans la ligne inférieure après le 10 — sous le 9. Nous multiplions le moins 3 supérieur par le 10 inférieur, ce qui fait moins 30 que nous ôtons de ce qui est dessus: le casier se vide.

Nous multiplions le 3 supérieur par le 3 inférieur, ce qui fait plus neuf parce que le produit de deux soustractifs est un additif; nous l'enlevons de ce qui est dessus, lequel s'annule alors. Puis nous doublons le 3 inférieur et nous le déplaçons, avec ce qui est avant, d'un rang vers la droite: il vient ce qui est dans le tableau (II).

Nous cherchons un nombre dont le produit par 10 donne zéro, nous trouvons 0, que nous plaçons *avant* le 3 qui est dans la ligne supérieure et *après* (35) le 6 inférieur et nous déplaçons la ligne inférieure, y compris le 0, d'un rang vers la droite.

Nous cherchons un nombre qui multiplié par 10 donne moins 40, nous trouvons moins 4 que nous mettons après le 0 des lignes supérieure et inférieure et nous le multiplions par 10, puis nous ôtons le résultat de ce qui est au-dessus de 10, celui-ci s'annule; nous multiplions le moins 4 supérieur par moins 6, il vient plus 24 que nous enlevons de ce qui est au-dessus de 6, il reste 60 unités; nous multiplions le moins 4 supérieur par le moins 4 inférieur, il en résulte plus 16 que nous soustrayons de ce qui est au-dessus de 4, il reste 48. Puis nous doublons le 4 et nous déplaçons la ligne inférieure d'un rang vers la droite, il vient comme dans le tableau (IV).

Puis nous cherchons un nombre qui multiplié par 10 donne 60, nous trouvons 6 que nous plaçons après le 4 supérieur et le 8 inférieur et nous le multiplions par 10 et nous enlevons le résultat de ce qui est au-dessus de 10, lequel s'annule; nous le multiplions par moins 6, il en résulte moins 36 que nous enlevons de ce qui est au-dessus, il reste moins 80; et nous multiplions 6 aussi par moins 8,

il vient moins 48, que nous ôtons de ce qui est au-dessus de 8: il s'annule; puis nous multiplions 6 par lui-même, il vient 36; nous l'enlevons de ce qui est au-dessus de 6, il reste 64. Nous doublons le 6 inférieur et nous déplaçons la ligne d'un rang vers la droite comme dans le tableau V.

Puis nous cherchons un nombre qui multiplié par 10 donne moins 80, nous trouvons moins 8; nous le mettons après le 6 de la ligne supérieure et le 12 de la ligne inférieure; puis nous multiplions le 8 par toute la ligne inférieure et nous enlevons chaque chose de ce qui est dessus. La quantité dont nous prenons la racine s'annule, et sa racine est la ligne supérieure soit $5x^3 + 6\frac{1}{x} - 3x^2 - 4 - 8\frac{1}{x^2}$. C'est ce qui est demandé.

Le principe dans l'extraction de la racine des quantités à termes soustractifs est que le produit du soustractif par l'additif est soustractif et par le soustractif, additif. Si nous soustrayons un nombre additif d'un nombre soustractif, le reste est la somme des deux nombres prise soustractive. Si nous soustrayons un nombre soustractif d'un nombre soustractif plus grand, le reste est leur différence prise soustractive; si celui dont on soustrait est plus petit que le nombre soustrait, le reste est leur différence prise additive. Si nous soustrayons le soustractif de l'additif, il reste leur somme prise additive. Si nous soustrayons un nombre additif (36) d'une puissance vide, il reste de cette puissance le même nombre pris soustractif. Si nous soustrayons un nombre soustractif d'une puissance vide, il reste le même nombre positif.

NOTES

(1) Nous renvoyons pour la vie et la bibliographie d'as-Samaw'al à: *Ihbār al-'Ulumā'*, d'AL-QURṬĪ, art. as-Samaw'al; *'Uyūn al-'Anbā'*, d'IBN ANI UṢAYNĪ, éd. Muller, Le Caire, vol. II, p. 30.

G. SARTON, *Introd. to the History of Science*, vol. II, p. 401 et (1227); (vol. III, p. 418 et 596).

H. SUTER, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber*, n° 302.

Aux œuvres d'as-Samaw'al citées par les historiens, ajoutons: 1°) *Az-Zāhir*, livre d'algèbre; 2°) Un mémoire sur l'analyse; 3°) Un commentaire de l'Arithmétique de Diophante. — Ces trois œuvres, apparemment perdues, sont mentionnées dans *al-Bāhir*, respectivement, aux pages 24r, l. 8; 30r, l. 7 et dernière page.

D'autre part, noter l'attribution par Ḥaggi Halifa à as-Samaw'al, d'un abrégé de *Ḥisāb ad-dirham wa-d-dīnār* (*Kaṣf az-Zunūn*, éd. d'Istanbul, col. 1377).

(2) in vol. II, p. (12-17).

(3) Ms. 3439,15, Fātih, Istanbul.

(4) Ms. 2718, Aya Sofya, Istanbul.

(5) Il existe un autre traité élémentaire d'as-Samaw'al, *at-Tabṣira fi-l-Ḥisāb*, ms. Bibl. Nat. Berlin, actuellement à Tübingen (n. 5962 du cat. d'Ahlwardt).

(6) Signalé par MAX KRAUSE, dans *Stambuler Handschriften islamischer Mathematiker* (Quellen und Studien. Band. 3, 1936, p. 437-532), à la page 487, avec les caractéristiques suivantes: 116 feuillets, 19 lignes la page, 15 x 21,5 cm, copié en 725 H.

(7) Nous appelons ainsi les nombres arithmétiques qui doivent être soustraits (de nombres plus grands). Bien qu'ils jouent dans la pratique des opérations le rôle des nombres négatifs, nous évitons l'emploi de ce mot qui pourrait faire croire que les Arabes connaissaient les nombres relatifs: positifs et négatifs.

(8) Cette règle se trouve déjà dans l'Arithmétique de Diophante. Cf. T.L. HEATH, *A Manual of Greek Mathematics*, p. 481.

(9) *Al-Ḥuārizmī Kitāb al-ğabr wa-l-muqābala*, éd. Le Caire, 1939, p. 28 et 29.

(10) *Ibid.*, p. 33 et 34.

(11) Le vocabulaire employé et l'idée d'annuler une partie du nombre soustrait par le nombre additif égal à cette partie montrent assez le rôle que la notion de dette et d'avoir jouaient dans l'introduction et l'explication des opérations sur ces nombres.

(12) *Al-Fahri*, d'AL-KARĠĠ, ms. de la Bib. Nat. du Caire. VI, 212, fol. 10r. l. 6. Al-KarĠĠ est le nom erroné d'al-Karagi.

(13) *Al-Baḍī*, d'AL-KARĠĠ, ms. Barb. Or. 36. I. Bibl. du Vatican, fol. 77r et s.

(14) *Al-Bāhir*, fol. 29r, l. 14.

(15) As-Samaw'al veut dire qu'on soustrait $a \cdot x^a$ de $o \cdot x^a$.

(16) Cependant as-Samaw'al, qui donne la démonstration de toutes les propositions, ne justifie pas les règles de soustraction ou d'addition des nombres, et n'expose pas quelle signification pourrait avoir pour lui $(-x^2) - (-2x^2)$, ou $0 - (-4)$.

- (17) *Al-Bâhir*, fol. 5v.
 (18) *Al-Bâhir*, fol. 6r. l. 4.
 (19) *Al-Bâhir*, fol. 6r. l. 13.
 (20) *Al-Bâhir*, fol. 10r. l. 2.
 (21) *Al-Bâhir*, fol. 55r-56r.
 (22) C'est à tort que certains historiens attribuent à al-Karagî la solution de cette question. Cf. notre article sur al-Karagî, dans la revue *Al-dirâsât al-Adabiyyat*, T. II et III, 1959, Univ. Lib. Beyrouth.
 (23) *Al-Bâhir*, fol. 58v. l. 3.
 (24) *Al-Bâhir*, fol. 58v. l. 17.
 (25) *Al-Bâhir*, fol. 63r.
 (26) *Al-Bâhir*, fol. 7 et 8.
 (27) *Ibid.*, fol. 13 et 14.
 (28) *Ibid.*, fol. 47r.
 (29) Le fait mérite d'être souligné, d'autant plus que cette notion n'a pas été signalée, jusqu'à présent, dans une œuvre antérieure à celle de Lévi ben Gerson (1288-1344). Voir, G. SARTONE, *Introd. to the Hist. of Science*, vol. III, p. 396.
 (30) *Al-Bâhir*, fol. 104v-110r.
 □ Dans le manuscrit, par erreur, 20.
 (31) On peut en rapprocher le sentiment actuel des auteurs français qui répugnent à utiliser des signes abrégatifs pour désigner, par exemple, des droites perpendiculaires ou parallèles.
 (32) Voir note 22.
 (33) C'est l'équivalent de notre méthode actuelle consistant à diviser le nombre en tranches de deux chiffres.
 (34) De petits ronds servent de marque dans l'original; nous ne les avons pas maintenus ici.
 (35) As-Samaw'al emploie ici avant et après pour dire à droite.
 (36) Il s'agit d'un certain nombre de fois une certaine puissance de x , comme $a.x^n$ à enlever de $o.x^n$.
 (37) Le signe — a été utilisé dans les tableaux pour des raisons d'ordre typographique.