

نظرية التوازي وأثر العرب فيها

يُعد كتاب « أصول الهندسة » لأقليدس من أعظم الكتب المدرسية Text Books ، التي أثرت في تطور الرياضيات منذ حدود عام ٣٠٠ ق.م حتى اليوم . ومن العمومية بمكان أن نأتي بمشغل كثيرة على هذا النوع من الكتب التعليمية . فلو عدنا هذا الكتاب مثلاً من المصور القديمة ، لأمكن أن نعد كتاب « الجبر والمقابلة » للخوارزمي مثلاً من المصور الوسطي ، لأن منه نشأ اسم الجبر ، وانتشر موضوع الحساب الجبري . أما في المصور الحديثة بعد أن نشأت الحضارة الغربية ، فقد يختار المرء ما بين كتاب « الهندسة » لديكارث الذي أنبثت منه الهندسة التحليلية أو كتاب « الأسس Principia » لنيوتن الذي نجد فيه أول تصميم دقيق للكون ، وكتاب « البعث » لسكاوس الذي نشره يوم كان في الرابعة والعشرين من عمره وتعرض فيه لخطوط الرياضيات العريضة ؛ أو ربما اختار كتاب « مقدمة في الجبر » لأويل الذي فيه مزج الجبر بالتجليل الرياضي فأقسم الثنائي بضبط الأول وهكذا ولد التجليل الحديث . ويمتاز كتاب « الأصول » عن كافة هذه الكتب بكونه أول كتاب نجد فيه روح البرهنة الرياضية السليمة ، التي أصبحت فيما بعد ، منارةً للأظمة المنطقية في كثير من فروع المعرفة . فالفيلسوف سبينوزا مثلاً يحاول - في كتابه « الأخلاق » - أن يبرر مناقشاته وحججه الفلسفية بشكل نظريات مبنية على الفرضيات والتعاريف ومتراصلة فيما بينها ترابط القضايا الهندسية المعروف لدى كل من درس مبادئ الهندسة المستوية . لذا أرى من المناسب أن أقف قليلاً عند كتاب « أصول الهندسة » لعرف منشأه ومحتوياته وترجماته وأثره .

لا يُعرف على وجه التحديد متى نُشر هذا المؤلف ، كما لا يعرف شيء عن مولد مؤلفه

نظرية التوازي وأثر العرب فيها

أقليدس أو موته . وكل الذي نعرفه أن إقليدس نشر كتابه هذا في حدود عام ٣٠٠ ق.م في مدينة الاسكندرية بمصر . فقد عاش إقليدس معظم حياته أستاذاً بجامعة الاسكندرية ، ولا نعرف له من المؤلفات شيئاً آخر . ولم يصل إلينا عنه أنه ابتدع هذه النظريات الواردة في كتابه ، لا بل إن قسماً كبيراً من المؤرخين لا يعمتونه بأكثر من جامع ومرتب ومنسق للمعلومات المذكورة فيه ، ولسكن الانصاف يحمل ذوي الأغلبية من الكتاب يشيدون بفضلهم في هذا العمل الأول من نوعه ، وهو الذي أصبح في أكثر من ألفي سنة كتاباً مدرسياً يستعمل في مدارس أوروبا وأفريقية وآسية وحتى أمريكا ولو لوقت غير قصير . ويأوح أن الكتاب الأصلي بلغته الإغريقية لم يتداول كثيراً منذ زمن بعيد ، وأن أقدم نسخة المتداولة هي ترجمته العربية . ولقد جاءتنا ترجمات عربية عديدة لهذا السفر النفيس ترجع إلى نصير الدين الطوسي ويوحنا القيس وثابت بن قرة والجوهري وغيرهم . وأعدت ترجمة الطوسي من أشهرها ولذلك سنعتمد إليها فيما بعد .

أما ترجمة هيث الانكليزية التي نشرها في حدود سنة ١٩٢١ ، فقد نقلها عن الإغريقية مع شروح وافرة ومقارنة مسهب فيها بالتراجم العربية . وقد نشر هذه الترجمة في ثلاثة أجزاء . تعتبر تحفة كلاسية رائمة في تاريخ الرياضيات .

إن أول ترجمة إنكليزية هي التي كان قد قام بها إديلارد الباتي عن نسخة عربية وجدها في قرطبة . أما ترجمة هيث فهي أدق التراجم على العموم وأوثقها وأكثرها شيوعاً ، ولذلك سنرجع إليها دون غيرها كلما اقتضت الضرورة ذلك .

مخويات « الأصول » :

لقد بنى إقليدس « أصوله » على التمارين والفرضيات كما يجب الحال مع أي نظام منطقي سليم . ومن دون الفرض لا يمكن البرهان ، لأن الإثبات المنطقي لا بد أن يرتكز على نقطة ابتداء مفروضة بغير مناقشة . وإلا فالحلقة المفرغة لا مناص منها . ووضع إقليدس إلى جانب

بعض التعاريف المتمثلة بالنقطة والخط والمستوي وحسود الخط والمستوي ، وكذلك الزاوية وأنواعها والأشكال وأجزائها ، عشر فرضيات استند إليها في اشتقاق نظريات الهندسة الاقليدية المعروفة ، ووضع هذه البديهيات في مجموعتين : الأولى سماها بالمفاهيم العامة Common notions والثانية دعاها بالبديهيات أو المصادرات Postulates كما أطلق عليها العرب الأقدمون .

وتتألف المفاهيم العامة من خمس فرضيات هي :

- ١ - الأشياء المتساوية لشيء واحد متساوية فيما بينها .
- ٢ - إذا أضيفت كميات متساوية الى أخرى متساوية تكون النتائج متساوية .
- ٣ - إذا طرحت مقادير متساوية من أخرى متساوية تكون البواقي متساوية .
- ٤ - الأشياء المتطابقة متساوية .
- ٥ - الشكل أكبر من جزئه .

وأما الفرضيات الهندسية فمدها خمس أيضاً وهي :

- ١ - من الممكن الوصل بين أي نقطتين بخط مستقيم .
- ٢ - يجوز مده قطعة المستقيم من جهتها إلى غير حد .
- ٣ - يمكن رسم الدائرة إذا علم مركزها ونصف قطرها .
- ٤ - جميع الزوايا القوائم متساوية .
- ٥ - إذا قطع مستقيمان مستقيمان ثالث بحيث كان مجموع الزوايتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع أقل من قائمتين فإن المستقيمين يتلاقيان في تلك الجهة من القاطع إذا مدها إلى غير حد .

وبعد أن قدم اقليدس هذه الفرضيات ، بدأ باشتقاق نظرياته الواحدة بعد الأخرى . ولسبب ما، أراد اقليدس أن يعرف الى أي حد يستطيع أن يسير بالمفاهيم والفرضيات التسع الأولى ومن دون الفرضية العاشرة التي أطلق عليها اسم الفرضية الخامسة أو فرضية التوازي . وقد توفى في اشتقاق ٢٨ نظرية فقط دون أن يلجأ الى استخدام بديهية التوازي هذه . ومن بين هذه

نظرية التوازي وأثر العرب فيها

النظريات ، النظرية ١٧ وتنص على أن مجموع أي زاويتين في مثلث أقل من قائمتين ، وهي مكموس الفرضية الخامسة . أما نظرية ٢٧ فتقول بأنه إذا قُطع مستقيمان بمقاطع وكانت الزاويتان المتبادلتان الداخليتان متساويتين ، توازي المستقيمان . ومن الجدير بالذكر أن نقول إن أي مستقيمين ، على رأي أفليدس ، إما أن يتقاطعا فيكونا متقاطعين وإما أن لا يتقاطعا فيكونا متوازيين ، ولا ثالث لهما . أما نظرية ٢٨ فتتنص على أنه إذا قطع مستقيمان مستقيمين وكانت الزاويتان الداخليتان الخارجيتان والواقعتان على نفس الجهة من المقاطع متساويتين ، أو كان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من المقاطع يساوي قائمتين ، يكون المستقيمان متوازيين .

ومن السهل استخراج هاتين النظريتين ومن غير استعمال الفرضية الخامسة . أما لماذا تجنب أفليدس فرضية التوازي في البرهنة على نظرياته الثماني والعشرين الأولى ، فسيفي ذلك لغزاً غير قابل للحل من الوجهة التاريخية . فقد يكون سببه نفسياً أو منطقياً أو فلسفياً . والذي يمكننا أن نقره : هو أن أفليدس لم يستعمل بديهية التوازي إلا في البرهان على نظرية ٢٩ وأنه لم يحاول أن يبرر هذا العمل بأي شكل من الأشكال ، مع العلم بأن عمله هذا لا يتطلب التبرير من الوجهة المنطقية البحتة .

وتنص نظرية ٢٩ من كتاب « الأصول » على ما يلي :

إذا قُطع مستقيمان متوازيان بمقاطع فإن الزاويتين الداخليتين المتبادلتين متساويتان ، والزاويتين الخارجيتين الداخليتين متساويتان ، وكذلك مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من المقاطع يساوي قائمتين .

وبدلاً من أن أسرد برهان أفليدس لهذه القضية الذي في استطاعة الفرد أن يذكره بسهولة ، سأنتقل إلى تحليل الوضع الذي ترنّب على هذه النظرية واستعمال بديهية التوازي في إثباتها .

فمن البداية وعقب أفليدس مباشرة ، لم يربح الرياضيون المهندسيون لعمل أفليدس هذا ، ولذلك حاولوا أن يجدوا له بديلاً يرضون عنه . وبما كنا أن نحدد موقف هؤلاء بواحد من

الأوضاع الآتية :

- (١) اعتقد قوم أن فرضية التوازي ليست فرضية بحق ، وكان أولى بأقليدس أن يستنتجها من بقية فرضياته التسع ، وبذلك يضمنها في قائمة النظريات . وهكذا حاول قسم غير قليل من الرياضيين أن يقوم بهذا العمل الذي لم يفعله أقليدس .
- (٢) وظن قوم آخرون أنه في الامكان البرهنة على نظرية ٢٩ من دون استخدام فرضية التوازي ، فان صح ذلك فستصبح هذه الفرضية لا محل لها من الاعراب .
- (٣) وحاول قسم ثالث من علماء الرياضيات أن يفيد من نقيض فرضية التوازي ، لاثبات الفرضية نفسها ، وذلك بواسطة خلاف الفرض أو الطريق غير المباشر في البرهان . وهكذا فقد أضاف هؤلاء الناس منقوض الفرضية العاشرة الى الفرضيات التسع ، واستمروا على اشتقاق نظريات جديدة عليهم يقومون على تناقض في النتائج أو تضارب في النظريات ، وبذلك يبررون صحتها ويثبتون في عين الوقت إمكان أستخلاصها . ماذا كانت النتيجة ؟
- وقبل أن نجيب عن هذا السؤال ، نود أن نشير ، ونحن في هذه المرحلة ، الى أن فرضية التوازي من بين الفرضيات الأخرى لا يمكن تحقيق صحتها أو خطأها بصورة اختبارية إن نحن مثلنا الخط المستقيم بشعاع من الضوء أو بخيط رفيع مثلاً . والمهم في هذه البديهية أنها تخص المستقيم بكامل طوله إذا تصورناه يمتد الى غير حد في طرفيه ، لأن قولنا : إن مستقيمين متوازيين ، إنما يعني أنها لا يلتقيان مهما امتدا . ومن الواضح أن هنالك مستقيمت عديدة تمر من نقطة معينة ولا تقطع مستقيماً معيناً ضمن أية مسافة ثابتة محدودة ، مما كانت كبيرة . وبما أن الطول الأعظم الممكن أن تأخذه مسطرة حقيقية أو يأخذه خيط رفيع أو حتى شعاع الضوء الظاهر من خلال تلسكوب هو من المؤكد محدود ، وبما أنه من الممكن رسم ما لانهاية له من المستقيمت داخل أية دائرة محدودة من نقطة معينة بحيث لا تقطع مستقيماً معيناً داخل الدائرة ، فمن الواضح أن هذه الفرضية لا يمكن تأكيدها صحتها بالاختبار العملي أو التجريبية . ولذلك فهي تختلف عن سائر فرضيات أقليدس التي تمتلك جميعها طابعاً محدوداً بسكونها تتعلق بأجزاء محدودة من المستقيمت

نظرية التوازي وأثر العرب فيها

وبأشكال مستوية محدودة الامتداد . ولأن هذه الفرضية لا يمكن تحقّقها بالاختبارات العملية ،
بمملكتنا الشك فيها إن كانت قابلة للاستنتاج من بقية الفرضيات .

ولسكنها تعود إلى شرح بعض المحاولات المبددة التي بدأها رياضيون كفاءة في حل مغاليق هذا
السرد الذين ويطرق عظمة متنوعة لمدة تزيد على ألفي سنة ، يحسن بنا أن نتذكر بعض العبارات
الهندسية الكافية لفرضية التوازي التي يحقّ لنا أن نستفيض بها عن هذه الفرضية متى شئنا
ذلك . يقال لفرضية ف ١ إنها تكافئ الفرضية ف ٢ بوجود نظام من فرضيات أخرى ط إذا
كان ط + ف ١ يؤدي إلى استنتاج ف ٢ وكذلك ط + ف ٢ يقود إلى استخلاص ف ١ . وبهذا
المعنى نستطيع أن نثبت أن أيّاً من العبارات الآتية يكافئ فرضية التوازي :

(١) لا يمكن رسم أكثر من مواز واحد لمستقيم مفروض من نقطة خارجة عنه .

(٢) مجموع زوايا المثلث يساوي قائمتين .

(٣) البعد بين مستقيمين متوازيين ثابت لا يتغير .

(٤) إذا قطع مستقيم أحد مستقيمين متوازيين فإنه يقطع الآخر .

(٥) المستقيمتان الموازيان لنفس المستقيم تكونان متوازيتين فيما بينهما .

(٦) يوجد زوج من المثلثات المتشابهة .

(٧) من الممكن إمرار دائرة بثلاث نقاط لاتقع على استقامة واحدة .

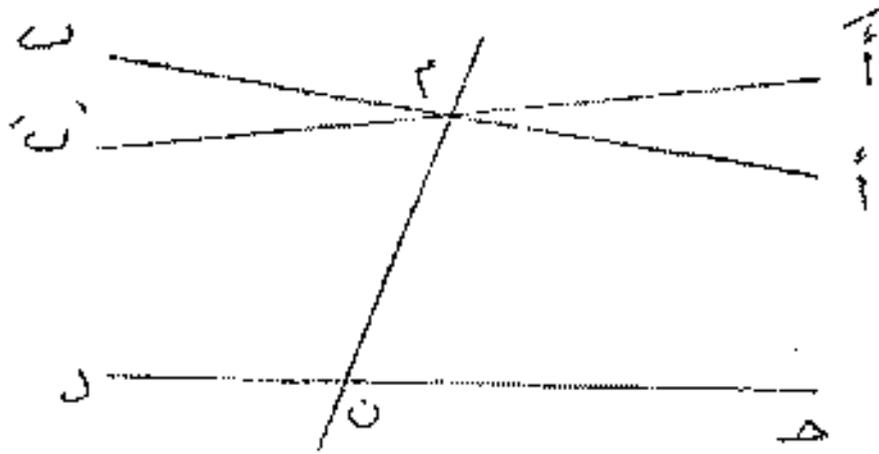
(٨) إذا احتوى الشكل الرباعي على ثلاث زوايا قوائم فإن زاويته الرابعة تكون قائمة أيضاً .

هذه هي أشهر النظريات التي تكافئ بديهية التوازي الاقليدية ، وهي جزء صغير من عدد

ضخم لهذا النوع من العبارات الهندسية . وكذلك ، دعنا نثبت العلاقة التكافؤية ما بين فرضية

أقليدس والعبارة الأولى في القائمة المذكورة أعلاه والسماة بفرضية بليفيير ، التي تنص على عدم

إمكان رسم أكثر من مواز واحد لمستقيم من نقطة خارجة عنه .



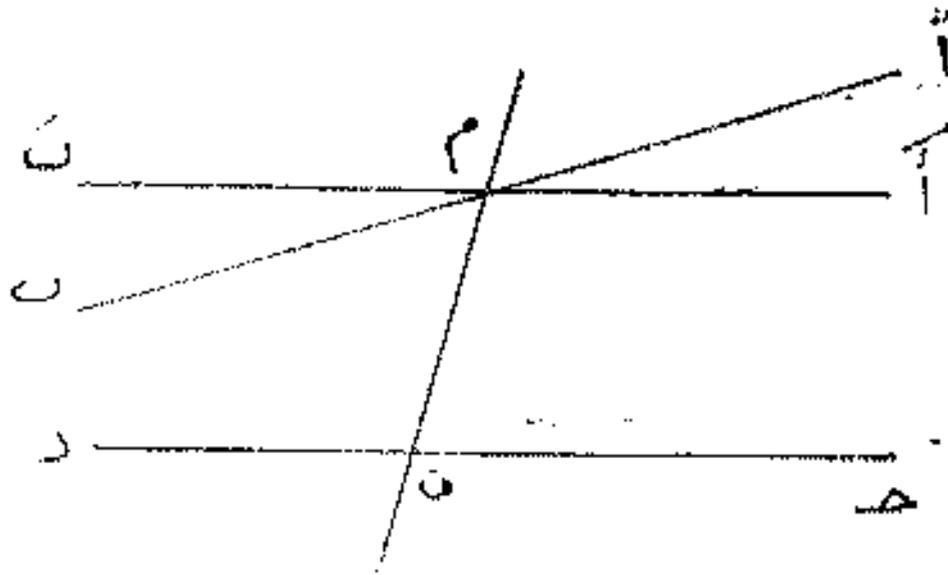
(الشكل ١)

لتفرض أن AB ، CD مستقيمان وقد قطعنا بالمستقيم MN بحيث كان مجموع الزاويتين AMN ، BNM أقل من قائمتين . سنثبت أن AB و CD يتلاقيان في هذه الجهة من المقاطع MN . من نقطة M ، ارسم AB' بحيث يكون مجموع الزاويتين AMN ، MNB' يساوي قائمتين . فبموجب نظرية ٢٨ من « كتاب الأصول » يكون أن موازياً للمستقيم CD (الشكل ١) . فلو افترضنا عدم إمكان رسم أكثر من مواز واحد للمستقيم CD من نقطة M — حسب فرضية بليفيير — كان عند ذلك واجباً أن يلاقي المستقيم AB المستقيم CD ، وبذلك ثبتت فرضية أقليدس الخامسة . ومن الجدير بالذكر أن نلاحظ أن تلاقي هذين المستقيمين يجب أن يكون في الجهة التي فيها مجموع الزاويتين الداخليتين أقل من قائمتين ، وإلا تكون مثلث فيه الزاوية الخارجية أقل من واحدة من زاويتيها الداخليتين ، وهذا مناقض لنظرية ١٦ من « الأصول » .

ومن أجل أن ثبت العكس وهو استخلاص نظرية بليفيير من فرضية أقليدس ، نفترض أن AB ، AB' موازيان للمستقيم CD من النقطة M (الشكل ٢) .

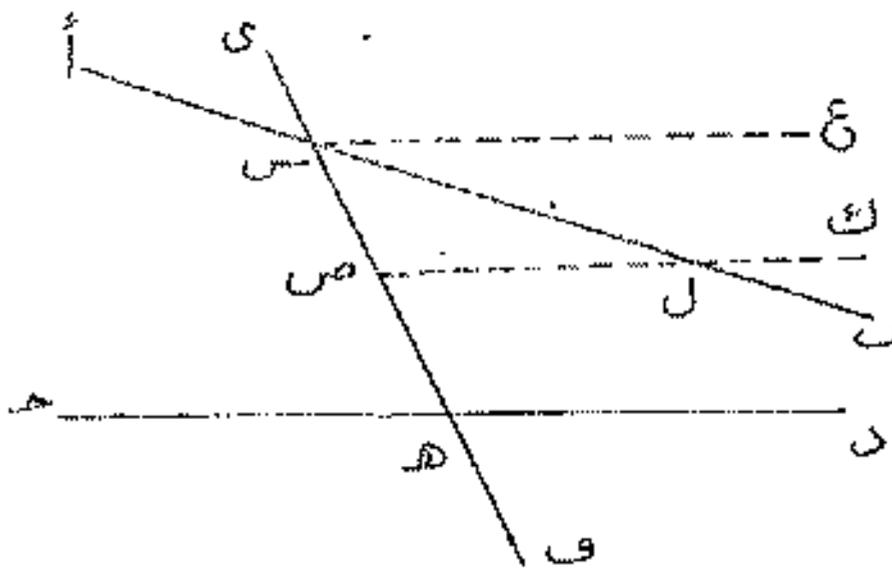
أي مستقيم MN يمر من M ويقطع CD يحدث زاويتين مجموعهما قائمتين . لذلك فكل من زاوية AMN + زاوية MNB ، زاوية AMN + زاوية MNB' ، يساوي قائمتين ، وهذا تناقض فيجب لذلك أن ينطبق المستقيم AB على المستقيم AB' ، وبذلك يتم المطلوب . اذنت فرضية أقليدس وبديهية بليفيير متكافئتان من الوجهة المنطقية .

نظرية التوازي وأثر العرب فيها



(الشكل ٢)

ولننظر الآن في علاقة فرضية أقليدس بالعبارة التي تنص على « وجود زوج واحد من المثلثات المتشابهة » وهي المعماة بفرضية جون والس . أما أن هذه العبارة يمكن استنتاجها من فرضية أقليدس في التوازي فهو أمر معروف عند كل من درس مبادئ الهندسة المستوية فوجد أن التشابه بين المثلثات يمكن إسناده إلى التوازي بين أضلاعها . أما عكس ذلك وهو أن كان استنتاج الفرضية الاقليدية من وجود زوج واحد من المثلثات المتشابهة فهو أمر لطيف .
 ليكن المستقيمان $أ ب$ ، $ج د$ مقطوعين بالمستقيم $ي ف$ في النقطتين $س$ ، $هـ$ على التوالي
 (الشكل ٣) بحيث كان المجموع زاوية $ب س هـ$ + زاوية $س هـ د$ أقل من قائمتين .



(الشكل ٣)

نجد واصل الظاهر

من الواضح أن زاوية γ من β أكبر من زاوية δ من δ . فلو تحركت القطعة h من على المستقيم γ ، بحيث يكون المستقيم d - مثبتاً بصورة محكمة بالمستقيم f في نقطة h ، إلى أن تتطابق النقطة h على النقطة g ، عند ذلك يأخذ المستقيم d - الوضع من e . لذلك فإثناء حركته هذه يجب على المستقيم d - أن يقطع المستقيم β كما في الوضع من k مثلاً . فلو رسمنا الآن ، مثلثاً على القاعدة من h مشابهاً للمثلث من g ل ، وذلك ممكن بحسب فرضية والس ، فيقطع المستقيم h - المستقيم β ويتم المطلوب .

إن هذا الإثبات الأخير ، في الواقع يعود إلى جون والس نفسه ، وقد قدمه إثباتاً لفرضية التوازي ولكنه نسي أنه يدور في دائرة من المنطق لأنه استخدم هذه العبارة التي هي مسورة أخرى من فرضية التوازي في إثبات فرضية التوازي نفسها .

كما قلنا سابقاً ، لقد رحب الرياضيون منذ البداية بفرضيات أقليدس إلا فرضته في التوازي ؛ فهم مع أنهم لم ينكروها اعتقدوا أن محلها الطبيعي هو في عداد النظريات ، لا مع البديهيات . لذلك حاول عدد غير قليل منهم أن يبرهن على صحة هذه الفرضية باستعمال الفرضيات التسع الباقية ، واتخذوا لذلك سبلاً متنوعة ، منها مباشرة ، ومنها غير مباشرة ، كطريقة خلاف الفرض أو إثبات نظرية ٢٩ من دون استخدام بديهية التوازي ، أو اشتقاق إحدى العبارات المكافئة للفرضية من بقية الفرضيات . وقد استمرت هذه المعركة الشديدة الصامته ما يزيد على ألفي سنة ، وقفت بعدها فرضية التوازي كالطود الشامخ وقد أكسبتها هذه المدة نصيباً ، وزادتها قوة وثباتاً . وكان من نتاج هذه المعركة المريرة نشوء هذا الطابع الضبطي الناشف في الرياضيات عامة ، والرغبة في نقد الفرضيات وتمحيصها وهو مما أدى إلى ظهور موضوع أسس الرياضيات Foundations of Mathematics علماً قائماً بذاته ، وتفرعت منه أخيراً مواضيع أخرى هي المنطق الرياضي وعلم ما وراء الرياضيات Metamathematics وفلسفة الرياضيات . وكذلك وقد ولدت أيضاً الهندسة اللاأقليدية ، وهي علم لا يقل أهمية عن تقيضه الهندسة الاقليدية ، من حيث النظر أو التطبيق .

نظرية التوازي وأثر العرب فيها

إن أول محاولة لإثبات فرضية التوازي قام بها بطليموس ، حيث قصد أن يستنتج نظرية ٢٩ بغير استخدام هذه الفرضية . وتتلخص محاولته بما يلي :

قال بطليموس : إن امتدادي المستقيمين ، المقطوعين بثالث ، على جهة من القاطع ليسا أكثر توازياً من امتداديهما في الجهة الأخرى . فلو كان مجموع الزاويتين الداخليتين في إحدى الجهتين يقل عن قائمتين لكان هذا المجموع يقل عن قائمتين في الجهة الأخرى أيضاً . وهكذا يكون مجموع الزوايا الأربعة أقل من أربع قوائم ، بينما هو في الواقع يساوي زاويتين مستقيمتين . ويمكن توليد مثل هذا التناقض لو فرضنا أن مجموع الزاويتين الداخليتين أكثر من قائمتين ، وهكذا استنتج نظرية ٢٩ .

وبدلاً من أن أبين المغالطة في هذه المناقشة التي أريد بها برهان النظرية ٢٩ ، سأترك ذلك لأنه ليس مما يصعب تبيانه ؛ وسأنتقل إلى بروكس بعد بطليموس حيث ترك محاولة في حدود عام ٤٠٠ ب . م . وكان بروكس قد اطلع على محاولة بطليموس فلم يقتنع بها وأراد أن يأتي بأحسن منها . لذلك أراد بروكس أن يتجنب هذه الفرضية بإعطاء تعريف جديد للتوازي ، فعرّف المستقيمين المتوازيين بأنها المستقيمان اللذان تكون الأبعاد بينهما متساوية . ولكنه لم يوفق للملاحظة أنه بهذه الخطوة قد حوّل الصعوبة من محل إلى آخر بدلاً من أن يحلها . فهذه الفرضية ، كما ذكرنا ، شكل ثان لفرضية أفليدس . ثم قام بمحاولة ثانية فعرّف الموازي كحل هندسي للنقاط التي تبعد بأبعاد متساوية عن مستقيم معلوم . إلا أنه في هذه المرة أثار مشكلة جديدة إذ عليه الآن أن يثبت أن هذا المحل الهندسي هو خط مستقيم . ولأنه لم يتمكن من إثبات ذلك فقد سأل هذه الجماعية عن دون برهان ، وهكذا لم يفلت من دائرة التوازي ففسر الماء بعد الجهد بالماء كما يقولون !

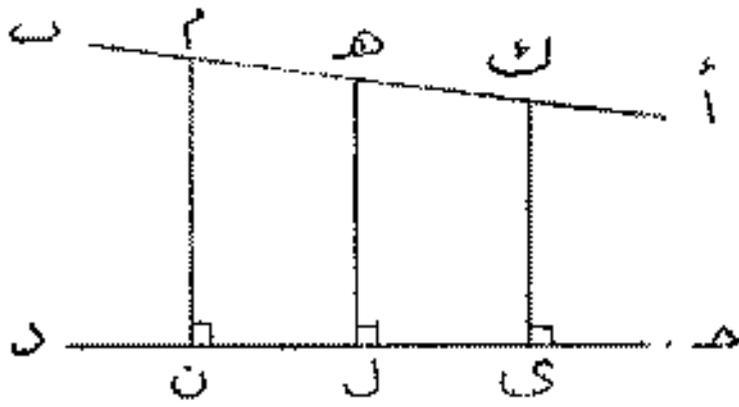
بهذا القدر من المعلومات حول نظرية التوازي نستقبل الحضارة العربية . وكما هو معلوم جيداً كان العرب في عصر الإسلام قد درسوا العلوم اليونانية وشغفوا بها ، وحفظوها ووسموها في جوانب عدة وأضافوا إليها أشياء قيّمة ، ثم نقلوها إلى أوروبا ، وبذلك نقلوا أوربة من

الظلمات إلى النور . وكان كتاب « الأصول » من أشهر الكتب الاغريقية التي ترجمها العرب في مناسبات عديدة وفي ترجمات مذيقة بتعليقات وهوامش مع حواشٍ وإضافات . ومن أهم الترجمات التي قام بها نصير الدين الطوسي ، التي فيها برز اهتمامه وتضلعه من نظرية التوازي . ولد محمد بن محمد بن الحسن أبو جعفر خواجه نصير الدين الطوسي عام ١٢٠١م في خراسان . وأدركته المنية سنة ١٢٧٤م ببغداد . ولقد بدأ الطوسي حياته العلمية بدراسة مؤلفات أفلاطون وأرسطو وارشميدس وبطليموس وابولونيوس وأقليدس . واهتم بكتب ثابت بن قرة وقسطا بن لوقا والحجاج بن مطر والنازن وعمر الخيام . وقد ترك الطوسي ترجمتين لكتاب الأصول ، وبذلك أضافها إلى ترجمات ثابت بن قرة والحجاج بن مطر وغيرها . وبلغتنا طبعتان لترجمتي الطوسي الأولى في روما عام ١٥٩٤م والثانية في طهران عام ١٨٨١م والثانية تتميز عن الأولى باحتوائها على الجزء من الرابع عشر والخامس عشر مضافين إلى الأجزاء الثلاثة عشر الأولى الموجودة في الثانية .

ومن ترجمته يلوح أنه كان أول من لفت النظر ، في دراساته لنظرية التوازي ، إلى النتيجة القائلة بأن مجموع زوايا الثلث يساوي قائمتين . ونجد في محاولاته لإثبات فرضية التوازي بذوراً حية لأفكار مهمة سُقيت فنمت وأثمرت فأينعت وكان قلوبها علم الهندسة اللا إقليدية . لذلك نرى جون والس الانكليزي وجيرو لاموسا كيري الايطالي يذكران في مؤلفيهما الخاصين بنظرية التوازي فضل الطوسي في هذه النظرية ومرجعها إليه في دراساتها للموضوع . وفي محاولة نصير الدين لإثبات فرضية التوازي ، يفترض البديهية الآتية التي اعتقد أن الاحساس العام Commonsense يسندها ويبرر الاعتماد عليها وهي :

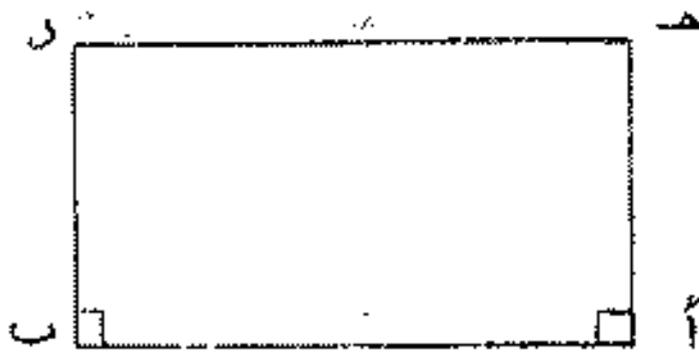
إذا رسم مستقيان ab ، cd بحيث كانت الأعمدة m ، n ، h ، l ، k ، y ، ... الخ (الشكل ٤) المرسومة من أحدهما على الثاني تعمل مع ab زوايا حواد من جهة a وبالتالي منفرجات في جهة b فإن المستقيمين ab ، cd يتباعداً في جهة b وبتقاربان في جهة a ، وبذلك تقصر الأعمدة في الجهة الأولى ، وتطول في الجهة الثانية والعكس صحيح كذلك . بعد هذه الفرضية التي

نظرية التوازي وأثر العرب فيها



(الشكل ٤)

سألها بغير سؤال ، اتخذ شكلاً كان من حسن حفظه أن يشتهر ويمثل دوراً مهماً في دراسة التوازي . ويتألف هذا الشكل (الشكل ٥) من إقامة عمودين متساويين من طرفي قطعة مستقيم ا ب وعلى نفس الجهة منه مثل ا ح ، ب د وأخذاً ح د ب د ثم اكمل الشكل الرباعي بوصل النقطتين ح ، د . وبالاستناد الى فرضيته المذكورة في أعلاه وبطريقة خلاف الفرض يتوصل إلى أن



(الشكل ٥)

الزاويتين ا ح د ، ب د قائمتان . إذ قال : لأنه لو أمكن أن تكون الزاوية ا ح د حادة لسكان ب د أقصر من ا ح حسب فرضيته ، وهو خلاف الفرض . وكذلك لا يمكن لهذه الزاوية أن تكون منفرجة . وهكذا فقد انقاد في استدلاله إلى أن كلا من الزوايا الأربعة قائمة ، وبذلك يكون المثلثان الناشئان من وصل ا د متطابقين وهو الأمر الذي ينتج عنه أن مجموع زوايا كل منهما قائمتان ، وهذا معناه أنه توصل الى إثبات لفرضية التوازي على ما يظهر .

ومن المهم أن نذكر ، مع أن هذه المحاولة لم تنجح كثيرها من المحاولات التي قام بها أناس كفاة ، أنها ولا شك وضعت حجراً أساسياً في بناء مقدمة الهندسة الاقليدية . فقد استفاد

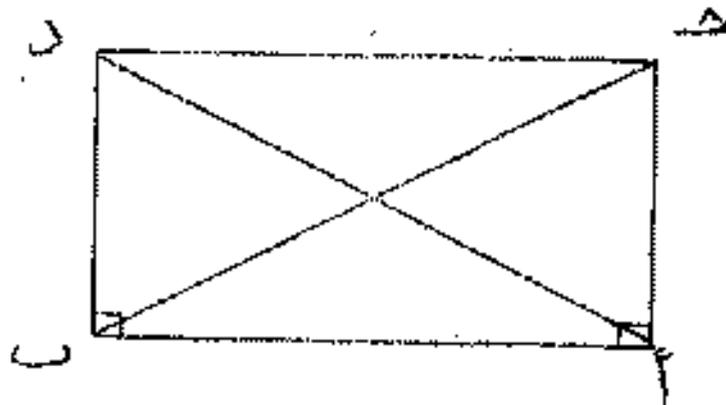
ساكيري من هذا الشكل الذي ابتدعه الطوسي ، وليكثرة ما استعمل ساكيري هذا الشكل سمي فيما بعد « برباعي ساكيري » وكان أحق أن يسمى برباعي الطوسي بشهادة ساكيري نفسه .

لقد كان ذلك كل ما كان معروفاً من أعمال العرب في نظرية التوازي حتى عام ١٩٣٥ م حينما نشر المؤرخ الرياضي المعروف ديفد أوجين سمث بحثاً في الممدد الأول من المجلد الثالث من مجلة سكربتا ماثماتيكا Scripta Mathematica . ففي هذا البحث أشار سمث إلى مخطوطة عثر عليها في طهران في أثناء جولاته في الشرق الاوسط . وفي ذلك يذكر أن هذه المخطوطة ألّفها نصيرالدين الطوسي وهي واحدة من مجموعة رسائل بعنوان « المفاتيح » تحتوي على رسائل تعود إلى رياضيين عرب وإغريق وفرنسيين ، ومؤرخة بعام ١٣٨٧ م أي زهاء حوالي ١١٤ سنة بعد موت الطوسي . وفيها يذكر الطوسي أنه ينقل عن كتاب يرجع إلى الشاعر المشهور والرياضي الفلكي المعروف عمر الخيام . وبذلك يسجل نصير الدين أن الخيام واحد ممن وضعوا حجراً أساسياً في نظرية التوازي . وإلى ذلك الوقت لم يكن معروفاً عند مؤرخي الرياضيات أن الخيام قد اشتغل بنظرية التوازي أو بفرضية أقليدس على الخصوص . وحتى هذا اليوم ، لم نشر بعد كتب تاريخ الرياضيات إلى أعمال الخيام في التوازي بالرغم من النتيجة التي نشرها سمث .

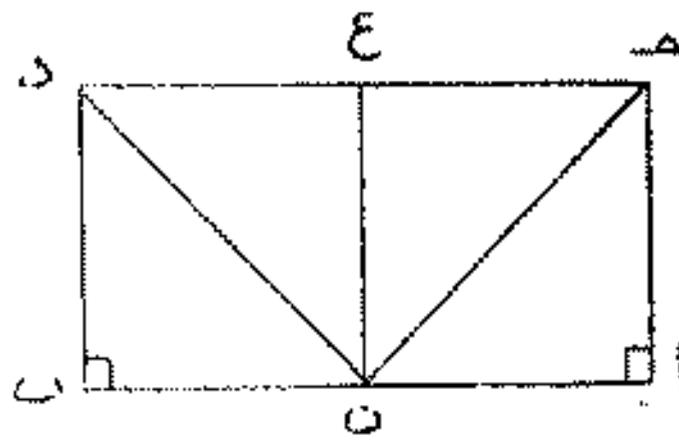
ولد عمر بن إبراهيم الخيام عام ١٠٤٤ م وتوفي عام ١١٢٣ م ، وهو معروف عند العرب شاعراً أكثر من كونه عالماً حتى أطلقوا عليه على نوع مدين من الشعر عرف « بالخياميات » . ولكنه في الحقيقة قد أبدع في الجبر ، فدرس الخواص الجبرية للأقطوع المخروطية ، واستخدم ذلك في حلول بعض الأصناف من معادلات الدرجة الثالثة . وزيادة على ذلك فقد اشتغل بعلم الفلك وله تقويم فيه وآثار فلسفية أخرى .

أما رسالته في التوازي التي أشار إليها المؤرخ ديفيد سمث فهي تتألف من سلسلة من القضايا يريد بها البرهنة على فرضية التوازي الخامسة .

نظرية التوازي وأثر العرب فيها



(الشكل ٦)



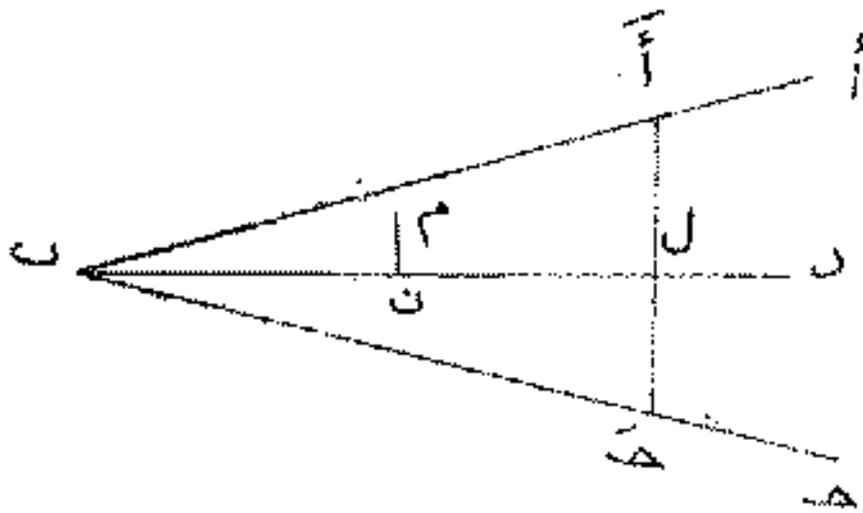
(الشكل ٧)

يفترض الخيام قطعة المستقيم $أب$ وقد رُسم عليها العمودان $أد$ ، $دب$ بحيث كانا متساويين ثم يبرهن على أن زاوية $دحأ =$ زاوية $دحب$ (الشكل ٦) وذلك بأن يطابق بين المثلثين $دأب$ ، $دأب$ فيستنتج أن زاوية $ب د أ =$ زاوية $أ د ب$. ثم يطابق بين المثلثين $دأد$ ، $ب د د$ ويستنتج تساوي الزاويتين $ب د د$ ، $أ د د$ وهكذا يحصل على أن زاوية $أ د د =$ زاوية $ب د د$. ويثبت في القضية التالية أن العمود المقام من منتصف $أب$ (الشكل ٧) ينصف $ح د$ ويكون عموداً عليه وذلك بتطابق المثلثين $دأ ن$ ، $دب ن$ أولاً ثم المثلثين $د ن ع$ ، $د ن ع$ ثانياً . وأخيراً في قضيته الثالثة يبرهن الخيام على أن الزاويتين $أ د د$ ، $ب د د$ المتساويتين يجب أن تكون كل منهما قائمة ، وذلك بالاعتماد على العبارة القائلة : بأن المسافة بين المستقيمين المتوازيين ثابتة لا تتغير .

ومن غريب المصادفات أن يظهر العدد الرابع من السنة الثالثة - نيسان (أبريل) ١٩٥٨ -

من مجلة العلوم التي تصدرها دار العلم للملايين ببيروت في هذا الاسبوع حاوية مقالا فيه ينقل كاتبه ويشرح مقالة الخيام التي نحن بصددھا ، التي سبق أن كشفھا المؤرخ سمث عام ١٩٣٥ م كما قلنا آنفاً ، وبذلك كفاني هذا المقال ، الذي أصبح بمتناول القراء الآن ، مؤونة الشرح المفصل لهذه المخطوطة التي لم تكن معروفة من قبل . ولكني قبل أن أنتقل الى نقطة أساسية في كلمتي هذه أود أن أشير إلى أن سمث قد قارن في خطوط عربيضة ما بين سلسلة نظريات الخيام التي نوهنا بها وسلسلة من نظريات ساكيري فأبان أن السلسلتين متشابهتان في وجوه عدة ، ومتطابقتان حتى في البراهين في أحيان كثيرة . وهكذا يتبوا الخيام محله ما بين أقليدس وساكيري بين علماء نظرية التوازي .

ويلوح كذلك أن هذا كل ما هو معروف من أعمال العرب في بحوث التوازي ، إلا أنني قد عثرت قبل سنوات قليلة في مكتبة بلهتون بجامعة كولومبيا على مقالة هندسية ينسب فيها كاتبها برهاناً لفرضية التوازي الى أثير الدين الأبهري المتوفى سنة ١٢٦٤ م . وتبين لي أن هذه الرسالة ليست معروفة عند مؤرخي الرياضيات لابل ليس معروفاً عندهم أن الأبهري ، وهو من المفكرين العرب ، قد اشتغل بالرياضيات وفي بديهية التوازي ذاتها . لذلك سأكرس الباقي من هذه الكلمة في شرح محاولة أثير الدين الأبهري لإثبات فرضية التوازي .
يحاول أثير الدين أن يثبت أولاً القضية الآتية :
الستقيم العمود على منتصف زاوية من نقطة مفروضة عليه ، يقطع ضلعها .



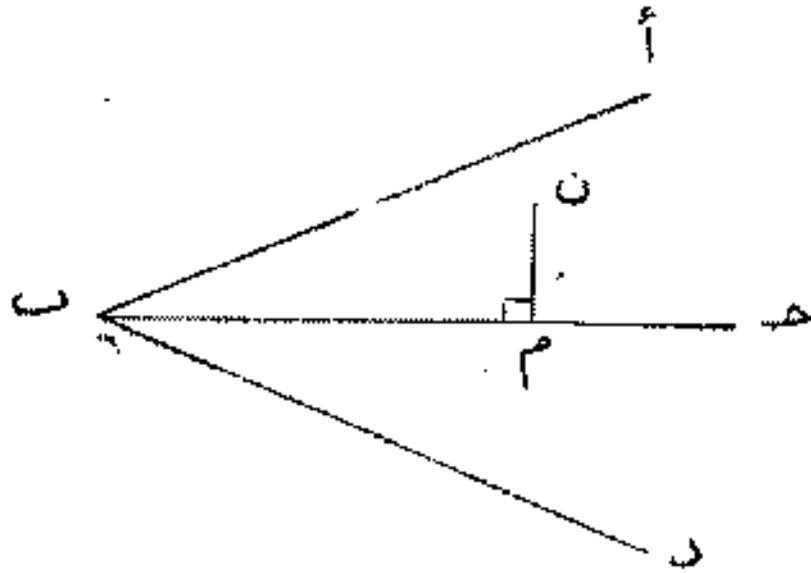
(الشكل ٨)

نظرية التوازي وأثر العرب فيها

فالفروض الزاوية $أ ب ح$ ، والمستقيم $ب د$ منصف لها . أخذت النقطة $ن$ أباً كانت على المستقيم $د ب$ وأقيم منها العمود $ن م$. والمطلوب إثباته أن $ن م$ يقطع المستقيمين $أ ب$ ، $ح د$. من الواضح أن هنالك مستقيمتين عموديتين على $د ب$ وتقطع المستقيمين $أ ب$ ، $ح د$ وهي ولا شك المستقيمتان التي يصل كل منها بين نقطتين تقعان على $أ ب$ ، $ح د$ ، وعلى مسافتين متساويتين من نقطة $ب$. ولا يثبت أن $ن م$ يقطع ضلعي الزاوية نقول : إنه لو صح أن يكون $ن م$ غير قاطع لها ما أمكن لأي عمود آخر مرسوم من نقطة $ل$ التي هي أبعد عن $ب$ من نقطة $ن$ أن يقطع $أ ب$ ، $ح د$ وذلك واضح من حصول المثلث $ل ب أ$ وفيه تصبح زاوية $م ن ب$ الخارجية مساوية لزاوية $أ ل ن$ الداخلية لأن كليهما قائمة ، وذلك غير ممكن بموجب نظرية ١٦ من كتاب « الأصول » . لذلك لا يمكن للعمود أن يعقب $م ن$ وأن يقطع ضلعي الزاوية $أ ب$ ، $ح د$. وهكذا فالأعمدة التي تقطع ضلعي الزاوية تتلو بعضها بعضاً ، بينما الأعمدة التي لا تقطع تتكون فيما بينها نظاماً متراحاً ، لا يفصل بعضه عن البعض أي عمود من النوع الذي يقطع . لنفرض الآن أن آخر الأعمدة من النوع الأول الذي يقطع ضلعي الزاوية هو $م ن$ مثلاً (الشكل ٨) . فلا يثبت عدم إمكان ذلك أيضاً يكفي أن نأخذ نقطتين $أ$ ، $ح$ أبعد من نقطتي تقاطع آخر الأعمدة ، وهو $م ن$ ، مع ضلعي الزاوية بحيث يسكون بعداهما عن رأس الزاوية متساويين . وبما أن الخط الواصل بين هاتين النقطتين سيكون عموداً على $ب د$ ، فقد وجدنا عموداً آخر يتلو العمود $م ن$ ويقطع ضلعي الزاوية ، هو خلاف الفرض القائل بأن $م ن$ هو آخر الأعمدة من هذا النوع . بذلك يتم الأبهري برهان نظريته . وسوف أترك مناقشة هذا البرهان ، وتبيان أوجه النقص أو المغالطة فيه لأتابع بقية المحاولة . فبعد ذلك أنتقل أثر الدين في إثباته إلى فرضية أفليدس ، فطبق عليها قضيةه السابقة . ومن أجل ذلك لاحظ احتمالات ثلاثة هي :

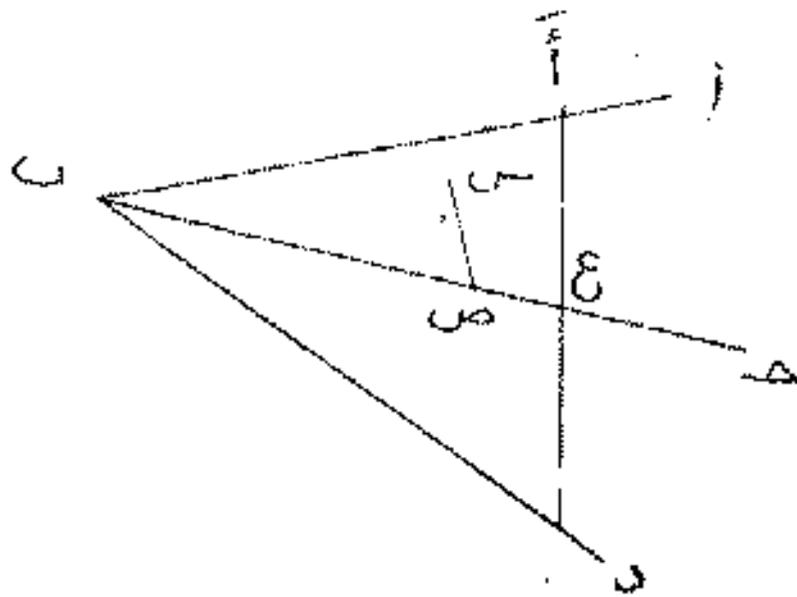
(١) إذا كانت إحدى الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع — حسبما تنص عليه فرضية التوازي — قائمة والأخرى حادة فمستقيمات $ب د$ مستقيماً مثل $ب د$ يصنع زاوية مع $ح د$ تساوي زاوية $أ ب ح$. لحسب نظريته المذكورة اعلاء يقطع المستقيم العمود $م ن$

ضلعي الزاوية $أ ب د$ ، وبذلك يتلاقى المستقيمان $م ن$ ، $أ ب$ في جهة القاطع $ح ب$ التي فيها زاوية $ن م ب +$ زاوية $أ ب م$ أقل من قائمتين (الشكل ٩) .



(الشكل ٩)

(٢) أما إذا كانت كل من الزاويتين حادة مثل الزاويتين $أ ب ح$ ، $س ص ب$ الناشئتين من قطع المستقيم $ح ب$ للمستقيمين $أ ب$ ، $س ص$ ، فنزعم أيضاً مستقيماً مثل $ب د$ (الشكل ١٠) بحيث تكون زاوية $ح ب د$ تساوي زاوية $أ ب ح$. لناخذ نقطة $ع$ مثل $ع$ على المستقيم $ح ب$ المصنف للزاوية $أ ب د$. إن العمود القائم من نقطة $ع$ على $ح ب$ يقطع المستقيمين $أ ب$ ، $د ب$ بموجب القضية السابقة . فمندئذ يجب على المستقيم $س ص$ أن يقطع $أ ب$ ، وإلا فإنه يقطع العمود $ع$ أ



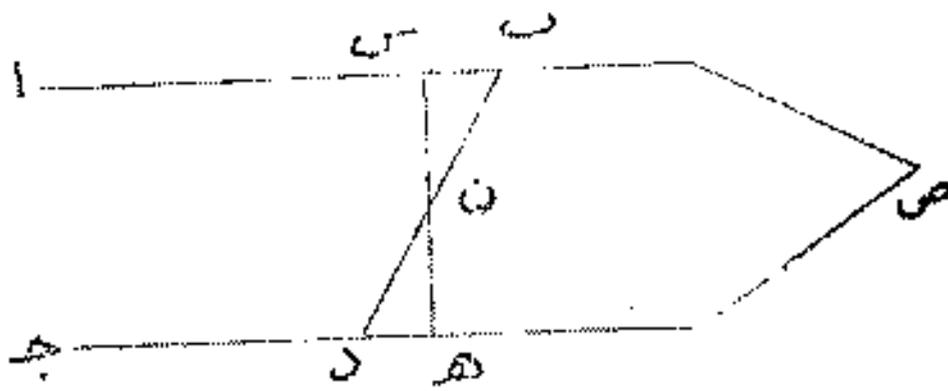
(الشكل ١٠)

نظرية التوازي وأثر العرب فيها

وهذا مستحيل لأن الزاوية الحادة $س ص ب$ تصبح خارجة بالنسبة للثلث المتكون والذي فيه زاوية $أ ع ب$ قائمة .

(٣) تبقى الآن الحالة الأخيرة وفيها إحدى الزاويتين حادة والأخرى منفرجة .

لتفرض المستقيمين $أ ب$ ، $د ح$ وقد قطعها المستقيم $ب د$ بحيث كان المجموع زاوية $أ ب د +$ زاوية $ب د ح$ أقل من قائمتين ، والزاوية $أ ب د$ حادة ، بينما الزاوية $ب د ح$ منفرجة (الشكل ١١)



(الشكل ١١)

ننصف $ب د$ في $ن$ وننزل $ن ه$ عموداً على $د ح$ ، فتكون زاوية $د ن ه$ حادة بموجب نظرية ١٧ من «الأصول» . وبما ان زاوية $أ ب د$ حادة كذلك ، فيجب على امتداد المستقيم $ه ن$ أن يلاقي المستقيم $أ ب$ في نقطة مثل $س$ وذلك بتطبيق الحالة الأولى ، لا يمكن لزاوية $ب س ن$ أن تكون قائمة والا لتطابق المثلثان $ب س ن$ ، $د ه ن$ وكانت نتيجة ذلك زاوية $س ب ن =$ زاوية $ن د ه$ وبالتالي زاوية $ن د ح +$ زاوية $ن د ه =$ زاوية $س ب ن +$ زاوية $ن د ح$ وهذا غير معقول لان أحد طرفي المتساوية يساوي قائمتين بينما طرفها الثاني أقل من قائمتين . وكذلك فلا يمكن للزاوية $ب س ن$ أن تكون حادة لأن ذلك يؤدي بالمستقيمين $أ ب$ ، $د ح$ أن يتلاقيا من الجهة الثانية في نقطة مثل $ص$ وذلك حسب الحالة الأولى . وهكذا تكون زاوية $ب د ح$ خارجة بالنسبة للثلث $د ب ص$ من فيجب أن تكون أكبر منها بموجب نظرية ١٦ من «الأصول» ، وهذا مناقض للفرض القائل : بأن مجموع زاوية $أ ب د +$ زاوية $ب د ح$ أقل من قائمتين ، بينما نجد والحالة هذه أن زاوية $أ ب د +$ زاوية $د ب ص =$ قائمتين وبذلك يجب أن تكون زاوية

د ب ص أكبر من زاوية ب د ح . وهكذا نستنتج بأن زاوية ب س ه متفرجة وتكون زاوية
 أس ه حادة . وبتطبيق الحالة الأولى يتلافى المستقيمان أس ، ح د في الجهة الثانية ويتم المطلوب .
 ومع أن البرهان الذي قدمه الأبهري غير مضبوط منطقياً كغيره من البراهين التي تكسرت
 على صخرة فرضية أفليدس ، فمما اجتهد تنطوي على عمق ، وتمتاز بطابع الإبداع الأسيل . فلم
 يسبق أن لاحظ أحد قبله العلاقة ما بين فرضية أفليدس وقضية الأبهري المذكورة في صدر
 محاولته ، وبذلك أضاف نظرية مكافئة لها . ويظهر عمق هذا البرهان بجلاء أكثر حينما نعلم بأن
 أحد الرياضيين الانكليز نشر « برهاناً » لفرضية أفليدس مشابهاً لبرهان الأبهري عام ١٨٩٨ م
 أي بعد الأبهري بما يقرب من ٧٠٠ سنة ، وذلك في « مجلة الرياضيات البحتة والتطبيقية »
 وبغير تحويل يذكر . هذا مع علمنا بأن المشكلة كانت قد انتهت قبل هذا التاريخ بزهاء ٣٢
 سنة ، حين ولدت الهندسة اللا اقليدية ، وثبت عدم إمكان اشتقاق فرضية التوازي من بقية
 فرضيات أفليدس ، فقد بُنيت الهندسات اللا اقليدية على نظام من الفرضيات يضم فرضيات
 أفليدس كلها ، عدا العاشرة التي استبعض عنها بنقيضها وهو : من الممكن رسم أكثر من مواز
 واحد لمستقيم من نقطة خارجة عنه ، ويسمى هذا الفرع من الهندسة اللا اقليدية بالهندسة
 الهذلولية Hyperbolic Geometry . ثم اخترعت هندسة أخرى لا وجود فيها ولا معنى
 للتوازي ولذا لا يمكن رسم أي مواز لمستقيم معلوم من نقطة مفروضة خارجة عنه ؛ وتسمى هذه
 بالهندسة الإهليلجية Elliptic Geometry وبقى لبلترامي الايطالي أن يثبت عام ١٨٦٨ م عدم
 التناقض ما بين هذه الهندسات أو ما بينها وبين الهندسة الاقليدية ، وبذلك انتهت مشكلة
 التوازي ، وثبت عدم إمكان استخلاص هذه الفرضية من بقية الفرضيات الاقليدية ، وأنها
 وتقيضها سيات .

وفي الختام نقول إن الأسس التي شقها أفليدس ، وزاد في حفرها بروكاس والطوسي
 والخيام والأبهري ، ملاءها بالحجارة العلية ساكيري ولامبرت وليجنندر ، ثم شيدت عليها
 گاوس و بوليا ولوجيفسكي وريمان وكلاين وهربرت بناء الهندسة الشامخ بطبقاته الثلاث ؛

نظرية التوازي وأثر العرب فيها

وبذلك طويت صفحة قصة لا أجد لها وصفاً أجمل من عبارة الأستاذ كايذر التي قال فيها : -
« لقد كان من حسن حظ إحدى فرضيات أفليدس - فرضيته الخامسة - أن تكون
خاتمة العصر ، فهي أشهر وأعمق همسة أطلقت في جوف تاريخ العلوم » .

محمد واصل الظاهر

المراجع

1. Boyer, C., The Foremost Textbook of Modern Times; Proceedings of the Internal Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., U.S.A., (1950); P 748.
2. Bonola, R., Non-Euclidean Geometry; Dover Publications, (Combined with the books of Bolyai & Lobachevski); (1911); PP. 1—180.
3. Callahan, J. J.; Euclid or Einstein, The Devin-Adair Company, N. Y., (1931); PP. 57—137.
4. Courant, R. and Robbins, H.; What is Mathematics? Oxford University Press, London, (1946); PP. 214-226.
5. Wilder, R., Foundations of Mathematics, John Wiley and Sons, Inc., N. Y., (1952); PP. 3-49, 264-285.
6. Wolfe, H., Introduction to Non-Euclidean Geometry, The Dryden Press, N. Y., (1945); PP. 1-130.