الفصل السابع

الملحق الرياضي

Mathematical Appendix

- تمهيد.
- الأنموذج الاقتصادي.
- أنواع الدوال والمعادلات.
- التفاضل.
- التكامل.
- تمارين الفصل السابع.
- مراجع الفصل السابع.

7–1 تمهيد:

نحاول في هذا الملحق الرياضي مراجعة أهم المفاهيم الرياضية اللازمة لفهم الموضوعات المطروحة في هذا الكتاب. وهذه المفاهيم الرياضية ليست بالجديدة على غالبية طلاب السنة الثانية في المرحلة الجامعية فمعظمها تم تناولها في المراحل الثانوية أو السنة الأولى من الجامعة؛ ولكن التذكير بها ومراجعتها في إطار ما يستعرضه الكتاب من مفاهيم اقتصادية للموارد الطبيعية والبيئة سيكون له قيمته الإيجابية.

7–2 الأنموذج الاقتصادي:

الأنموذج الاقتصادي هو تبسيط للعلاقات الاقتصادية لموضوع أو ظاهرة اقتصادية يضم أهم علاقة أو علاقات بين المتغيرات الاقتصادية في هذا الموضوع. وبشكل عام فإن الأنموذج الاقتصادي هو تطبيق اقتصادي للنمذجة أو للأنموذج في مفهومه العام الذي يمثل بعض عناصر العالم الحقيقي للظاهرة أو الموضوع الاقتصادي، ويتضمن أهم عناصر الموضوع المراد دراسته. وعادة ما يمكن توضيح هذا الأنموذج بطرق مختلفة منها الطريقة الوصفية ويسمى في هذه الحالة بالأنموذج الوصفي، والطريقة البيانية ويسمى في هذه الحالة بالأنموذج البياني، وأخيراً الطرق الرياضية ويسمى في هذه الحالة بالأنموذج الرياضي، . ومن أهداف وضع الأنموذج الاقتصادي:

1. استخدامه في تحليل الهيكل الاقتصادي.
2. توضيح طبيعة واتجاه العلاقة أو العلاقات المهمة بين المتغيرات الاقتصادية.
3. كما يمكن استخدامه في التنبؤ.
4. كما أنه يعد أداة لتقييم السياسات المطبقة أو المقترحة.

وكمثال للأنموذج الاقتصادي، يمكن أن نأخذ العلاقة بين الكمية المعروضة من سلعة و سعر هذه السلعة.

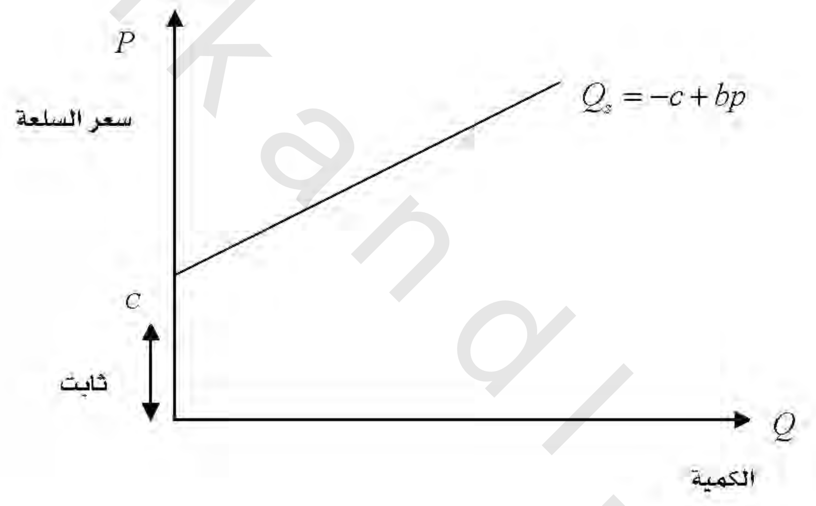
حيث يقول الأنموذج الوصفي: إنه كلما زاد سعر السلعة زادت الكمية المعروضة منها، مع افتراض بقاء الأشياء الأخرى على حالها.

ويمكن التعبير عنه رياضياً عن طريق العلاقة بما نسميه الأنموذج الرياضي

$$Q_S = -c + bp$$

بينما يمكن التعبير عن العلاقة نفسها بالأنموذج البياني الذي يوضحه الشكل (1–7).

الشكل رقم (7–1) العلاقة البيانية لدالة العرض



ويوضح الرسم البياني والمعادلة الرياضية لأي إنموذج أو علاقة ثلاثة أمور هي:

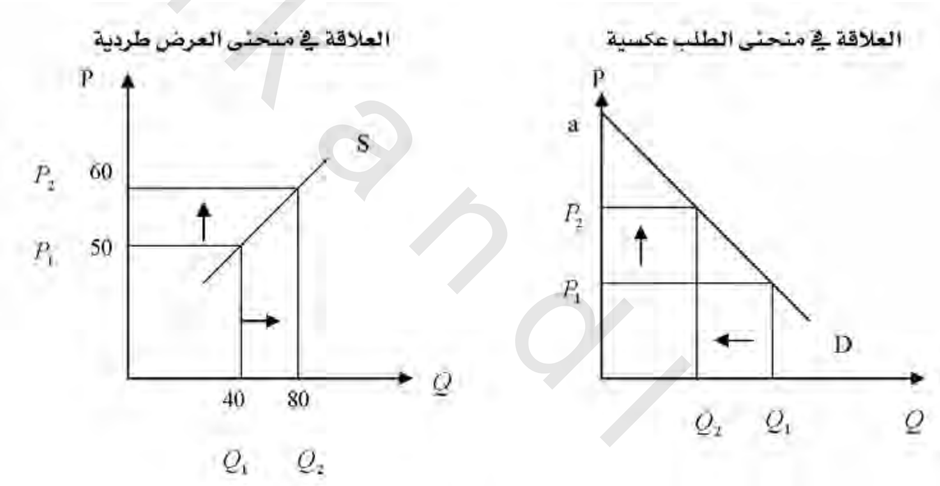
1. طبيعة العلاقة بين المتغيرات (خطية أم غير خطية).
2. اتجاه العلاقة بين المتغيرات [طردية (موجبة) أم عكسية (سالبة)].
3. حجم التأثير الحدي بين المتغيرات (الميل).

وفي العلاقة الخطية كالمثال السابق يكون الميل ثابتاً، أما في العلاقة غير الخطية فإن الميل يكون غير ثابت. ونلاحظ في الأنموذج الرياضي أن هناك متغيرات، أحدها تابع والآخر واحد أو أكثر تكون مستقلة. فالمتغير المستقل

(الخارجي) في المثال السابق هو السعر P . كذلك هناك معالم أو ثوابت وهي المعاملات التي لا تتغير ولكنها تقوم بربط المتغير المستقل (الخارجي) مع المتغير التابع، وهي قد تكون عدداً أو رمزاً مثل C و b كما في الأنموذج السابق. بينما المتغير التابع هنا هو الكمية المعروضة Q_S حيث إنه تابع للتغير الحادث في المتغير المستقل (وهو في هذه الحالة السعر P).

ويوضح الشكلان الآتيان طبيعة العلاقة بين المتغيرات فإحداهما عكسية (سالبة) والأخرى طردية (موجبة).

الشكل رقم (7–2) العلاقات البيانية لمنحنى الطلب ولمنحنى العرض



حيث؛ $Q_d = a - bp$ هي دالة الطلب بينما $Q_S = -c + dp$ هي دالة العرض، ويمكن توضيح حجم التأثير الحدي بين المتغيرات عن طريق الميل أو المرونة بناءً على نوع الأنموذج.

الميل؛ يمثل الميل اقتصادياً معدل تأثير متغير اقتصادي على متغير آخر، أو معدل تغير المتغير التابع الناتج لتغير في المتغير المستقل؛ ويعبر عنه رياضياً بما يأتي:

$$m \text{ الميل} = \frac{\Delta \text{ في المتغير التابع}}{\Delta \text{ في المتغير المستقل}}$$

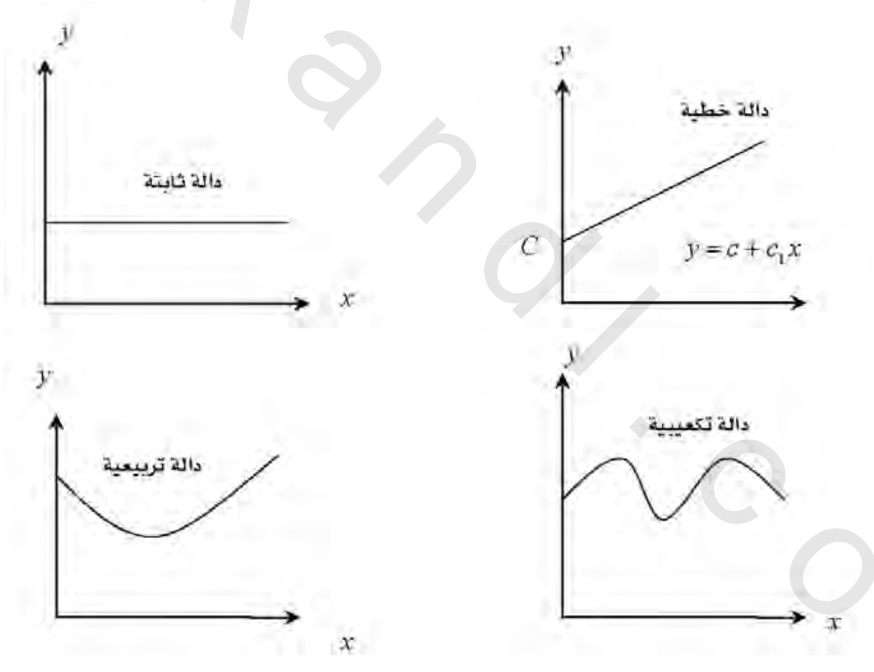
حيث Δ هنا ترمز إلى التغير.

ففي حالة منحنى العرض السابق يكون الميل: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{80-40}{60-50} = \frac{40}{10} = 4$

3–7 أنواع الدوال والمعادلات:

يعتمد نوع الدالة على أعلى قوة (أس) يرفع إليه أي متغير فيها. فالدالة الخطية أعلى أس فيها هو واحد، بينما الدالة التربيعية أعلى أس فيها هو 2، بينما الدالة التكعيبية أعلى أس فيها هو 3، وهكذا. وتوضح الأشكال الآتية بعض أنواع الدوال المعتادة التي يمكن استخدامها في الأدبيات الاقتصادية.

الشكل (3–7) أنواع الدوال



$y = c$ .... دالة ثابتة.................. $n = 0$

$y = c + c_1 x$ .... دالة خطية أو من الدرجة الأولى..... $n = 1$

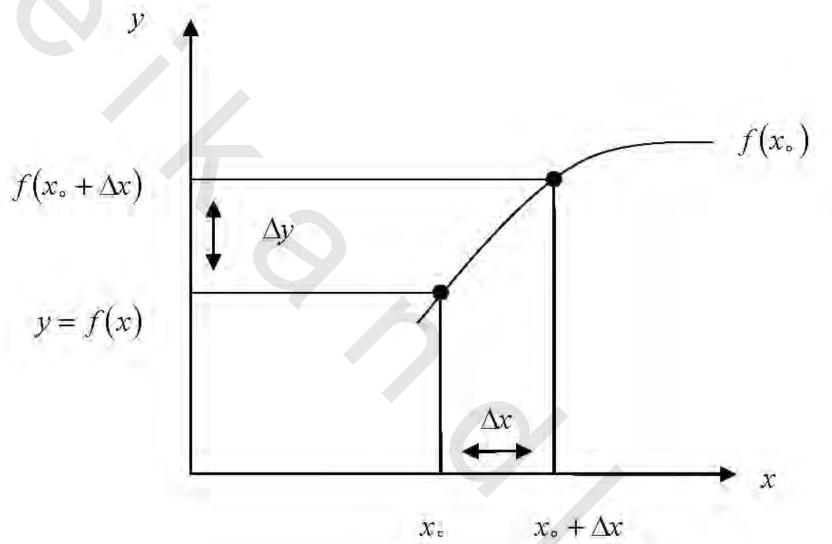
$y = c_\circ + c_1 x + c_2 x^2$ .. دالة تربيعية أو من الدرجة الثانية.. $n = 2$

$n = 3$ .. دالة تكعيبية أو من الدرجة الثالثة.. $y = c_\circ + c_1 x + c_2 x + c_3 x^3$

7–4 التفاضل:

يعرف التفاضل بأنه معدل التغير في الدالة الناتج عن التغير في المتغير المستقل تغيراً صغيراً جداً (لحظي)، ويوضح الشكل (7–4) هذا التغير.

الشكل (7–4) تفاضل الدالة بيانياً



فإذا كانت لدينا الدالة المستمرة في المجال $y = f(x)$ ؛ وإذا كان هناك تغير صغير في X مقداره Δx بحيث تنتقل x من النقطة X_0 إلى النقطة $x_O + \Delta x$ فإن الدالة y ستتغير بـ Δy لتصبح:

$$y + \Delta y = f(x_o + \Delta x)$$

وبذلك يكون التغير الذي حصل للدالة Y هو:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

حيث Δy تعبر عن التغير في قيمة الدالة Y المقابلة للتغير في x أي Δx وبقسمة المعادلة على Δx نحصل على متوسط معدل التغير أو معدل التغير للدالة y .

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f\left(x_o+\Delta x\right)-f\left(x_o\right)}{\Delta x}$$

التفاضل أو المشتقة: هو التغير في Y الناجم عن التغير x بـ Δx بحيث إن ΔX التغير في x صغير جداً أو يصل إلى صفر.

ونرمز للتغير في Y أو مشتق الدالة $Y = F(X)$ بأنه:

$$\frac{dY}{dX}=F'(X)=\lim_{\Delta X\to O}\frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

7–4–1 قواعد التفاضل:

(1) **تفاضل دالة مقدار ثابت**

إذا كانت الدالة $Y = C$ ، فإن $F'(X)=\frac{dY}{dX}=0$

(2) **تفاضل دالة لمتغير واحد**

إذا كانت الدالة $Y = 5X$ ، فإن $F'(X)=\frac{dY}{dX}=5$

(3) **تفاضل الدالة الآسية**

إذا كانت الدالة $Y = CX^n$

حيث C عدد أو مقدار ثابت و n أس (قوة) بينما المتغير هو X ، وهو عدد ع موجب أو سالب، فإن مشتقة الدالة y هي:

$$F'(X)=\frac{dY}{dX}=nCX^{n-1}$$

مثال (1)

إذا كانت لدينا الدالة $Y = 5X^2$

فإن المشتقة هي: $\frac{dY}{dX}=F'(x)=2(5)x^{2-1}=10x$

مثال (2)

إذا كانت لدينا الدالة $Y = 5X^4$

فإن مشتقة y بالنسبة لـ x هي: $\frac{dY}{dX} = 20X^3$

(4) **تفاضل مجموع أو فرق الدوال**

إذا كان لدينا دالتان هما $f(x)$ و $g(X)$ بحيث تكون الدالة y هي:

$$y = f(X) \mp g(X)$$

فإن مشتقة الدالة y هي:

$$\frac{dy}{dx} = f'(X) \mp g'(X)$$

أي إن مشتقة مجموع (أو طرح) دالتين يساوي مجموع (أو طرح) مشتقة الدالتين.

مثال (1)

إذا كانت الدالة y هي: $y = 2x + 4x^2$

فإن مشتقة الدالة y بالنسبة لـ x هي: $\frac{dy}{dx} = 2 + 8x$

مثال (2)

إذا كانت الدالة y هي: $y = 2x^4 - 2x^2$

فإن مشتقة الدالة y بالنسبة لـ x هي:

$$\frac{dy}{dx} = 8x^3 - 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = (4)2x^{4-1} = 2(2)x^{(2-1)}$$

(5) **تفاضل حاصل ضرب دالتين**

إذا كانت لدينا دالتان هما $f(x)$ و $g(x)$ ودالة ثالثة هي y ، حيث y هي: $y = f(x).g(x)$ ، فإن مشتقة الدالة y بالنسبة لـ x تكون:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).g(x) + g'(x).f(x)$$

مثال (1)

إذا كانت الدالة y هي: $y = (2x+3).(3x^2)$

فإن مشتقاتها هي

$$\frac{dy}{dx} = (2)(3x^2) + 6x(2x+3)$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 12x^2 + 18x$$

مثال (2)

إيجاد دالة إيراد حدي من دالة إيراد متوسط.

إذا كانت لدينا دالة الإيراد المتوسط من منشأة هي: $AR = (15 - Q)$

حيث Q هي الكمية و AR هو الإيراد المتوسط، فإن الإيراد الكلي TR يكون:

وبذلك يكون الإيراد الكلي هو:

$$TR = AR.Q = (15 - Q).Q$$

$$TR = 15Q - Q^2$$

$$TR = f(Q)$$

بينما الإيراد الحدي MR هو المشتقة التفاضلية الأولى لدالة الإيراد الكلي TR.

وبذلك يكون الإيراد الحدي هو: $\frac{dTR}{dQ} = 15 - 2Q$

(6) **تفاضل حاصل قسمة دالتين**

إذا كانت لدينا الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ ودالة ثالثة هي y ؛ حيث الدالة الثالثة y هي: $y = \dfrac{f(x)}{f(g)}$

فإن مشتقة الدالة y بالنسبة لـ x هي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x).g(x) - g'(x).f(x)}{[g(x)]^2}$$

مثال:

إذا كانت الدالة y هي: $y = \dfrac{x}{x^3}$

فإن مشتقتها هي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1(x^3) - 3x^2(x)}{[x^3]^2}$$

$$= \frac{x^3 - 3x^3}{x^6} = \frac{-2x^3}{x^6} = \frac{-2}{x^3}$$

(7) **تفاضل دالة الدالة (السلسلة)**

إذا كانت لدينا دالتان هما g و h ؛ حيث g هي دالة في x و g هي دالة في h بحيث تكون y هي:

$$\mathrm{Y} = f(x) = g[h(x)]$$

فإن مشتقة الدالة y بالنسبة لـ x هي:

$$f'(y) = \frac{dy}{dh} \cdot \frac{dh}{dx}$$

مثال(1)

إذا كان لدينا الدالة y : $y = u^4$

حيث u هي $u = 2x^2 + 3$

فإن تفاضل y بالنسبة لـ x هو:

$$\frac{dy}{dx} = 4u^3(4x) = 4(2x^2+3)^3.(4x) = 16x(2x^2+3)^3$$

مثال(2)

إذا كان لدينا الدالة y $y = f(u)^{10}$

حيث u $u = 8x^2 + 4$

فإن تفاضل y بالنسبة لـ x هو:

$$\frac{dy}{dx} = 10(8x^2+4)^9.(16x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 160x(8x^2+4)^9$$

(8) **تفاضل الدالة الضمنية**

إذا كانت y و x ترتبطان بعلاقة من النوع $f(x,y) = 0$

وبذلك تعد y دالة ضمنية في x ، فإنه لإيجاد مشتقة الدالة y بالنسبة لـ x فلا بد من اشتقاق طرفي المعادلة $f(x,y) = 0$ بالنسبة لـ x ثم بالنسبة لـ y ، ثم نفصل y' في الطرف الأيسر وتنقل بقية الحدود إلى الطرف الأيمن بعد علامة يساوي كما يأتي:

مثال:

إذا كان لدينا الدالة الآتية: $x^2 + xy + 2y^2 = 0$

$\therefore$ لإيجاد $\frac{dy}{dx}$

$$2x + y + xy' + 4yy' = 0$$

أو
$$(x+4y)y' = -2x - y$$
$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{-2x-y}{x+4y}$$

(9) **تفاضل دالة اللوغاريتم الطبيعي**

تفاضل الدالة اللوغاريتمية هو مشتقة المتغير المرافق للوغاريتم مقسوماً على المتغير نفسه.

$$y = Log_a x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\ln_a} = x^{-1}Log_a$$

مثال:

إذا كانت الدالة y هي: $y = Log.(x^3+2)$

فإن تفاضلها هو:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x^3+2)Ln_{10}}(x^3+2)'$$
$$= \frac{3X^2}{(x^3+2)Ln_{10}} = \frac{3x^2}{(x^3+2)(2.718)}$$

اللوغاريتم الطبيعي

إذا كان أساس الدالة اللوغاريتمية هو العدد النيبيري e فإن:

$$y = \ln x$$
$$\frac{dy}{dx} = x^{-1}$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1\ln)^n} = 2.718281828$$

مثال:

$$e^{\circ} = 1$$
$$e^{1} = e = 2.71828$$
$$e^{a}(e^{b}) = e^{a+b}$$

مثال:

$$y = e^{x^2}$$
$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2}$$

مثال:

$$y = e^{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = e^{x}$$

7-4-2 التفاضل الجزئي:

في هذه الحالة تكون y دالة في أكثر من متغير مستقل مثل:

$$y = f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

وبهذا يكون التفاضل الجزئي الأول للدالة y وبالنسبة لأي متغير من المتغيرات $(x_n \dots, x_2, x_1)$ مثل:

تفاضل الدالة y بالنسبة لـ x_1 : $\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}$

تفاضل الدالة y الجزئي بالنسبة لـ x_2 : $\frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2}$

. . .

. . .

. . .

تفاضل الدالة y الجزئي بالنسبة لـ x_n :

$$\frac{\partial y}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

مثال (1)

إذا كانت لدينا الدالة

$$y = 5x_2^2 x_1 + 3x_1^{-1} + 5x_2$$

فإن

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 5x_2^2 - 3x_1^{-2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 10x_2 x_1 + 5$$

وتسمى المعادلة الأولى بالمشتقة الجزئية الأولى للمتغير x_1 ، بينما تسمى المعادلة الثانية بالمشتقة الجزئية الأولى للمتغير x_2 .

7–4–3 التفاضل الجزئي الثاني أو أكثر:

بالنسبة للدالة السابقة $y = f\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$ يمكن أخذ تفاضل جزئي آخر لمشتقاتها الجزئية الأولى بالنسبة لكل المتغيرات الداخلية وبذلك تسمى المشتقات الجزئية الثانية، كما يمكن أخذ مشتقات جزئية لمشتقاتها الجزئية الثانية بالنسبة لكل المتغيرات الداخلية وبذلك نحصل على المشتقات الجزئية الثالثة. وهكذا بحسب قابلية المشتقات للتفاضل.

فمثلاً تصبح المشتقات الثانية الخاصة بـ $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ هي:

$$\frac{\partial f / \partial x_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f / \partial x_1}{\partial x_2}, \ldots\ldots\ldots \frac{\partial f / \partial x_1}{\partial x_n}$$

أما المشتقات الثانية الخاصة بـ $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ فهي:

$$\frac{\partial f / \partial x_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f / \partial x_2}{\partial x_2}, \ldots\ldots\ldots \frac{\partial f / \partial x_2}{\partial x_n}$$

أما المشتقات الثانية الخاصة بـ $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ فهي:

$$\frac{\partial f / \partial x_n}{\partial x_1}, \frac{\partial f / \partial x_2}{\partial x_2}, \ldots\ldots\ldots \frac{\partial f / \partial x_n}{\partial x_n}$$

وبالطريقة نفسها يمكن الحصول على المشتقات التفاضلية الثالثة من المشتقات التفاضلية الثانية، وهكذا.

7–4–4 التفاضل من مرتبة أعلى:

إذا كانت لدينا الدالة $y = f(x)$ حيث $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ المشتقة الأولى، فإذا كانت المشتقة أيضاً قابلة للاشتقاق، فنستطيع الحصول على المشتقة الثانية للدالة بالنسبة لـ x.

$$\frac{d^2 . f(x)}{dx^2} = f''(x)$$

مثال: إذا كانت الدالة y هي: $y = 5x^4$

فإن المشتقة الأولى بالنسبة لـ x هي: $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 20x^3$

بينما المشتقة الثانية بالنسبة لـ x هي: $\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x) = 60x^2$

بينما المشتقة الثالثة بالنسبة لـ x هي: $\frac{d^3 y}{dx^3} = f'''(x) = 120x$

بينما المشتقة الثالثة بالنسبة لـ x هي: $\frac{d^4 y}{dx^4} = f''''(x) = 120$

7–4–5 التفاضل الكلي:

يستخدم التفاضل الكلي لمعرفة التغير الحاصل في دالة لأكثر من متغير داخلي، أي عندما تتغير كل متغيراتها الداخلية تغيراً صغيراً جداً. فمثلاً إذا كانت لدينا الدالة $y = f(x_1, x_2, ...x_n)$ وتغيرت جميع متغيراتها الداخلية $(x_1, x_2, ...x_n)$ تغيراً صغيراً جداً. وفي هذه الحالة يكون التفاضل الكلي للدالة y هو:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

$$dy = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$$

حيث $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ... \frac{\partial f}{\partial x_n}$ هي المشتقات الجزئية للدالة f بالنسبة للمتغيرات الداخلية $x_1, x_2, ..., x_n$ على التوالي؛ أما dx_1, dx_2, dx_n فتشير إلى التغير الصغير جداً الحادث في هذه المتغيرات.

مثال: إذا كانت لدينا الدالة $y = x_1^4 + 8x_2 x_1 + 3x_2^3$

والمطلوب إيجاد التفاضل الكلي للدالة y.

فنقوم بإيجاد المشتقات الجزئية للدالة y بالنسبة للمتغيرين الداخليين x_1, x_2:

$$\frac{dy}{dx_1} = 4x_1^3 + 8x_2$$

$$\frac{dy}{dx_2} = 8x_1 + 9x_2^2$$

ثم نعوض عن هذين المشتقين في الصيغة العامة للتفاضل الكلي

$$dy = (4x_1^3 + 8x_2)dx_1 + (8x_1 + 9x_2^2)dx_2$$

7–4–6 النهايات العظمى للدوال ذات المتغير الواحد:

إذا كان لدينا الدالة:

$$y = f(x)$$

والمطلوب إيجاد قيمة النهايات العظمى لها ، فلا بد من القيام بالتحقق من:

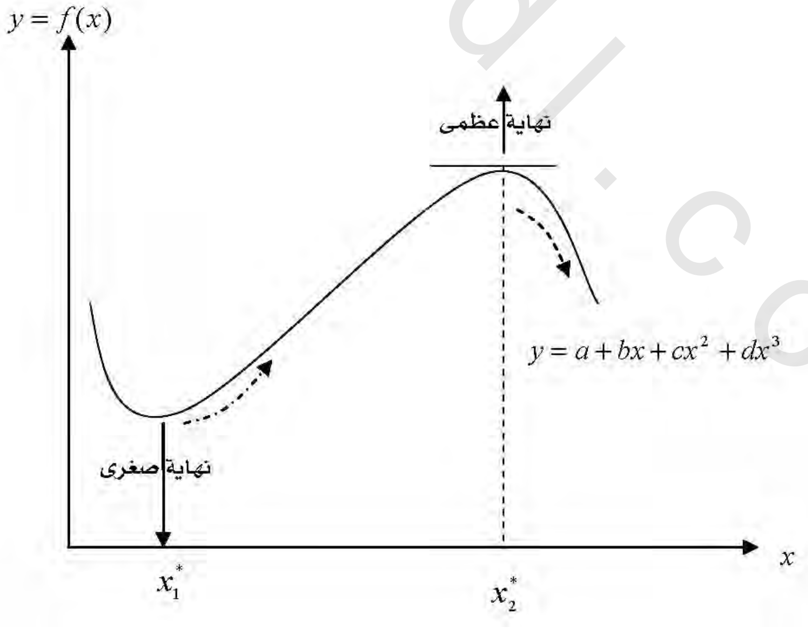
شروط النهاية العظمى وهي شرطان:

الشرط الأول (1) أن نقوم بأخذ التفاضل الأول بالنسبة للمتغير x ومساواته بالصفر ومن ثم حل المعادلة لـ x للحصول على قيمتها الحرجة:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 0$$

ومن ثم الحصول على الشرط الثاني (2) (الشرط الكافي) حيث نقوم بأخذ التفاضل الثاني للمعادلة نتيجة الشرط الأول (1) بالنسبة للمتغير x : فإن كانت نتيجة هذا التفاضل الثاني أن: $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ أي أصغر من الصفر فإن هذه نهاية كبرى أي Max . أما إذا كانت نتيجة التفاضل الثاني أكبر من الصفر، حيث؛ $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ فإن هذه نهاية صغرى أي Min .

الشكل رقم (7–5) النهاية الكبرى والصغرى للدالة



لاحظ أن الرسم البياني يوضح أن قيمة الدالة عند نهاية صغرى أي عند منخفض، وأنها ستواجه بعد ذلك صعوداً إلي أعلى (أي إن التفاضل للثاني سيكون موجباً)؛ بينما إذا كانت قيمة الدالة عند نهاية عظمى أي إنها عند قيمة مرتفع، فإنها ستواجه انخفاضاً بعد ذلك (أي إن التفاضل الثاني سيكون سالباً).

مثال: إذا كان لدينا دالة التكاليف الكلية TC التي تعد دالة في كمية الإنتاج Q والمطلوب الحصول على كمية الإنتاج التي تصل التكاليف عندها إلى أقل مستوى (أي النهاية الصغرى للدالة TC)؟

$$TC = 31 + 24Q - 5.5Q^2 + \frac{1}{3}Q^3$$

فنأخذ التفاضل الأول بالنسبة للكمية ونساويه بالصفر، ونحل بالنسبة للكمية Q للحصول على القيمة أو القيم الحرجة للكمية Q العظمى، كما يأتي:

$$\frac{dTC}{dQ} = 24 - 11Q + Q^2 = 0$$

ثم نحلل للحصول على قيم Q الممكنة.

$(Q-8)(Q-3) = 0$ أي إن القيمة العظمى (المحققة للنهاية الصغرى) يمكن أن تكون إحدى قيمتين هما:

$$Q = 8? \qquad \text{أو} \qquad Q = 3?$$

ثم نأخذ التفاضل الثاني لـ TC بالنسبة لـ Q ونعوض بداخله عن قيم Q الممكنة للوصول إلى القيمة التي تحقق الشرط الثاني (الكافي) تدنية التكاليف.

$$\frac{d^2TC}{dQ^2} = -11 + 2Q$$

بالتعويض عن Q بـ 8 $\frac{d^2TC}{dQ^2} = -11 + 2(8) = 5 > 0 \rightarrow \max$

بالتعويض عن Q بـ 3 $\frac{d^2TC}{dQ^2} = -11 + 2(3) = -5 < 0 \rightarrow \min$

وبذلك يكون الحل $Q = 3$ هي كمية الإنتاج التي تصل التكاليف الكلية TC عندها إلى أقل مستوى.

7–4–7 التعظيم الرياضي (الأمثلية) لدوال في أكثر من متغير واحد:

هناك نوعان من التعظيم أحدهما: 1) تعظيم مقيد بقيود والآخر تعظيم دون قيود.

في كلتا الحالتين نقوم أولاً بإيجاد النقطة الحرجة التي تساوي النهاية العظمى، وهي إما أن تكون نهاية صغرى أو كبرى. ثم نقوم باستخدام المحددة الهيشية المطوقة في حالة التعظيم بشرط لمعرفة النهاية الصغرى من الكبرى للقيمة الحرجة.

حيث يكون الشرط العام لهذه المحددة هو في شكله العام كما يأتي:

نهاية كبرى
$$H = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{1\lambda_1} \\ L_{21} & L_{22} & L_{2\lambda} \\ L_{\lambda_1} & L_{\lambda_2} & L_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} > 0 \rightarrow$$

نهاية صغرى
$$H = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{1\lambda_1} \\ L_{21} & L_{22} & L_{2\lambda} \\ L_{\lambda_1} & L_{\lambda_2} & L_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} \prec 0 \rightarrow$$

أما في حالة التعظيم غير المقيد فنستخدم المحددة الهيشية غير المطوقة، لمعرفة النهاية الصغرى من النهاية الكبرى للقيمة الحرجة، تحت الشرط العام التالي لقيمة هذه المحددة.

نهاية عظمى
$$H = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{1\mu} \\ L_{21} & L_{22} & L_{2m} \\ L_{m1} & L_{m2} & L_{mm} \end{vmatrix} \succ 0$$

نهاية صغرى
$$H = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{1\mu} \\ L_{21} & L_{22} & L_{2m} \\ L_{m1} & L_{m2} & L_{mm} \end{vmatrix} \prec 0$$

مثال:

$$TC = 31 + 24Q - 5.5Q^2 + \frac{1}{3}Q^3$$

$$\frac{dTC}{dQ} = MC = 24 - 11Q + Q^2 = 0$$

لاستخراج القيمة العظمى:

$$24 - 11Q + Q^2 = 0$$

وبالتحليل نجد أن القيم الممكنة هي:

$$Q = 8, Q = 3$$

$$\frac{dTC}{dQ^2} = -11 + 2Q$$

وبأخذ التفاضل الثاني:

ومن ثم بالتعويض عن القيم الممكنة لـ Q في التفاضل الثاني نجد ما يأتي:

كبرى $-11 + 2(3) = -5 < 0$

صغرى $-11 + 2(8) = 5 \succ 0$

وبما أنها تكاليف والمطلوب نهاية صغرى لـ Q فنأخذ $Q = 8$

وللتأكد نعوض في الدالة الأساسية، فلو عوضنا عن $Q = 3 \leftarrow TC = 62.5$ ولو عوضنا عن $Q = 8 \leftarrow TC = 41.67$ إذن يجب أن نستخدم الكمية $Q = 8$ وذلك للحصول على أقل التكاليف.

وكأمثلة على التعظيم المشروط أي المقيد:

1. تعظيم منفعة مشروط بدخل.
2. تعظيم تكاليف مشروط بكمية إنتاج.

مثال: دالة منفعة لمجتمع يستهلك سلعتين.

دالة الهدف هي تعظيم دالة المنفعة: $U = 5X_1X_2 - 2X_1^2 - 3X_2^2$

حيث الدخل تحت قيد الدخل: $I = 100$

بينما الأسعار

$p_1 = 2$ للسلعة X_1

$p_2 = 3$ للسلعة X_2

وبذلك يكون القيد أو الشرط هو: $100 = 2X_1 + 3X_2$

معادلة الدخل: $I = P_1X_1 + P_2X_2$

$\therefore$ المطلوب: تعظيم دالة الدخل: $U = 5X_1X_2 - 2X_1^2 - 3X_2^2$

تحت شرط أو قيد الدخل:

$$100 = 2X_1 + 3X_2$$
$$100 - 2X_1 - 3X_2 = 0$$

الحل: نكون معادلة لاجرانج:

$$L(X_1, X_2, \lambda) = 5X_1X_2 - 2X_1^2 - 3X_2^2 + \lambda(100 - 2X_1 - 3X_2)$$

$$L(X_1, X_2, \lambda) = [5X_1X_2 - 2X_1^2 - 3X_2^2] + [\lambda(100 - 2X_1 - 3X_2)]$$

$$L(X_1, X_2, \lambda) = [5X_1X_2 - 2X_1^2 - 3X_2^2 + 100\lambda - 2X_1\lambda - 3X_2\lambda$$

ثم نقوم بأخذ الشرط الأول:

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = 5X_2 - 4X_1 - 2\lambda = 0 \qquad (1$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = 5X_1 - 6X_2 - 3\lambda = 0 \qquad (2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100 - 2X_1 - 3X_2 = 0 \qquad (3$$

لإخـراج قـيم X_1, X_2, λ نحـل المعـادلات 1,2,3 فنـضرب المعادلـة الأولى في 3 ونضرب الثانية في $2-$

$$15X_2 - 12X_1 = 6\lambda$$
$$-10X_1 + 12X_2 = -6\lambda$$

+

$$-22_1X + 27X_2 = 0$$

$$\therefore X_1 = \frac{27}{22}X_2$$

$$\therefore X_1 = 1.23X_2 \qquad (4)$$

وبالتعويض عن X_1 في المعادلة (3) $100 - 2(1.23X_2) - 3X_2 = 0$

ثم نحصل على قيمة X_2

$$X_2 = \frac{100}{5.46} = 18.3$$

ونعوض عن X_2 في المعادلة (4) لنحصل على قيمة X_1 : $X_1 = 22.53$

ومن ثم نتحقق من الشرط الثاني "الكافي" حيث:

$$H = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{\lambda_1} \\ L_{21} & L_{22} & L_{\lambda_2} \\ L_{\lambda_1} & L_{\lambda_2} & L_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}$$

$$L_{11} = \frac{\partial^2 L}{\partial . X_1}$$

$$L_{12} = \frac{\partial^2 L}{\partial X_1 \partial X_2}$$

$L_{1\lambda} = -2$ وهكذا بالنسبة لـ L_2 و L_λ

$$H=\begin{vmatrix}-4 & 5 & -2\\ 5 & -6 & -3\\ -2 & -3 & 0\end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix}5 & -2\\ -6 & -3\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}-4 & -2\\ 5 & -3\end{vmatrix}$$

$$=-2(-15-12)+3(12+10)$$

$$=54+66$$

$$=120>0$$

وهي تحقق الشرط الكافي لنهاية كبرى

أوجد القيمة العظمى:

$$Max \qquad U(X,Y)$$

تحت قيد :

$$S.T \qquad I=P_x X+P_y Y$$

الحل:

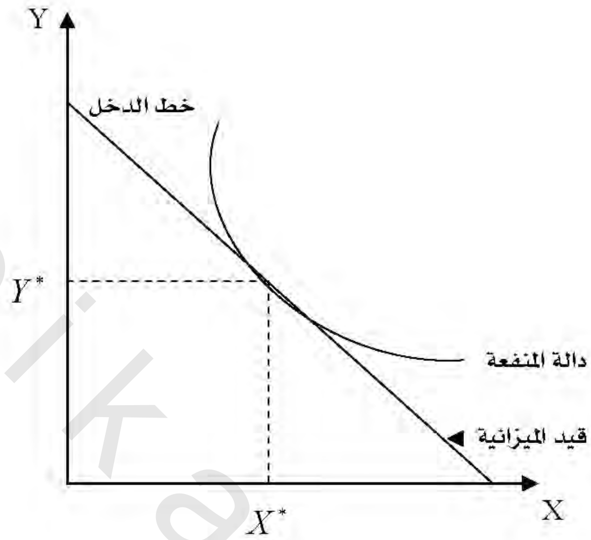
$$L(X,Y,\lambda)=U(X,Y)+\lambda(I-P_X X-P_Y Y$$

$$\frac{\partial L}{\partial X}=\frac{\partial U}{\partial X}-\lambda P_X=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y}=\frac{\partial U}{\partial Y}-\lambda P_Y=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial I}=I-P_X X-P_Y Y=0 \qquad (3)$$

الشكل (7–6) توازن منفعة المستهلك تحت قيد الميزانية



$$\therefore \lambda = \frac{\partial U / \partial Y}{PY}, \lambda = \frac{\partial U / \partial X}{PX}$$

$$\therefore \lambda = \frac{\partial U / \partial X}{PX} = \frac{\partial U / \partial Y}{PY}$$

$$\therefore \frac{\partial U / \partial X}{\partial U / \partial Y} = \frac{PX}{PY}$$

وبعبارة أخرى فإن:

ميل خط الدخل = ميل دالة المنفعة عند نقطة التوازن، أي نقطتي التوازن Y^* ، X^*.

7–5 التكامل:

يمكن فهم التكامل Integration على أنه مقابل التفاضل (أو معكوس التفاضل)؛ فمعروف أن التفاضل يقيس معدل التغير في دالة ما نتيجة تغير صغير في أحد متغيراتها الداخلية، أما التكامل فإنه يقيس المساحة التي يحدها منحنى مغلق، أي إن التكامل المحدود يدرس نهاية المجموع، وينقسم التكامل إلى نوعين أحدهما التكامل غير المحدود ويسمى المشتقة المضادة، والثاني هو التكامل المحدود الذي يستخدم في إيجاد المساحة المحصورة بين أي منحنى والمحاور.

7–5–1 التكامل غير المحدود:

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين معرفتين في نطاق معين وكانت $f(x)$ قابلة للتفاضل وتحقق:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = g(x)$$

في النطاق نفسه يقال إن الدالة $f(x)$ هي تكامل الدالة $g(x)$ ويرمز لذلك بما يأتي:

$$\int g(x)dx = f(x)$$

حيث تشير العلامة $\int$ إلى التكامل

حيث: $\frac{df}{dg} = d(x)$

وبذلك يصبح التكامل للدالة $g(x)$ هو البحث عن الدالة $f(x)$ التي يكون تفاضلها هو $g(x)$، وكما عرفنا من التفاضل فإن تفاضل أي مقدار ثابت هو صفر وبذلك تكون الصيغة الأشمل للتكامل هي: $\int g(x)dx = f(x) + C$

ويسمى C هنا ثابت التكامل، وهو لا يعتمد على x، ومن خلال هذا التعريف وبشكل عام يتضح أن:

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]= f(x)$$

وعليه نستطيع الوصول إلى القاعدة الأولى للتكامل:

$$\int dx = x + C$$

كما أن القاعدة الثانية للتكامل هي تكامل الدالة الأسية، فإذا كان لدينا:

$$f(x)= x^{n}$$

فإن:
$$f(x)=\int f'(x)dx=\int x^{n}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

مثال (1)

$$\int x^{-4}dx=\frac{-1}{3}x^{-4+1}+c=\frac{-1}{3}x^{-3}+C$$

مما سبق نستنتج أن صيغة التكامل للمعادلة الأسية هي:

$$\int x^{n}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C, \qquad (n\neq -1)$$

مثال (1)

$$\int x^{3}dx=\frac{x^{3+1}}{3+1}+C=\frac{x^{4}}{4}+C \qquad (n=3)$$

مثال (2)

$$\int \frac{1}{x^{2}}dx=\int x^{-2}dx=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-C$$

$$=\frac{x^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{x}+C, \qquad (n=-2)$$

ويمكن تلخيص أهم قوانين التكامل على نسق قوانين التفاضل السابق ذكرها فيما يأتي:

$$\int dx = x + C \qquad (1)$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad (n \neq -1) \tag{2}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = Ln|x| + C \tag{3}$$

$$\int e^x dx = e^x + C \tag{4}$$

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \tag{5}$$

$$\int b^x dx = \frac{1}{\ln b} b^x + C, \qquad (b > 0) \tag{6}$$

$$\int [a_1 f(x) + a_2 g(x)] dx = a_1 \int f(x) dx + a_2 \int g(x) dx \tag{7}$$

(تكامل المجموع)

(تكامل الضرب) $\int x_1 dx_2 = x_1 x_2 - \int x_2 dx_1$ (8)

(تكامل القسمة) $\int \frac{dx_1}{x_2} = \ln|x_1| + C$ (9)

2-5-7 التكامل المحدود:

لنفترض هنا أن تكامل الدالة $f(x)$ هو الدالة $g(x)$ أي إن: $\int f(x) dx = g(x)$ ، وعندما يكون ذلك التكامل محدداً بين النقطتين a و b للمتغير x هو $g(b) - g(a)$ ، حيث $a < b$ فنرمز للتكامل المحدد في هذه الحالة بـ:

$$\int_a^b f(x) dx$$

كما نرمز للفرق $g(b) - g(a)$ بالرمز $[g(x)]_a^b$ ، ويصبح التكامل المحدد بين النقطتين a و b في هذه الحالة:

$$\int_a^b f(x) dx = [g(x)]_a^b = g(b) - g(a)$$

مثال (1)

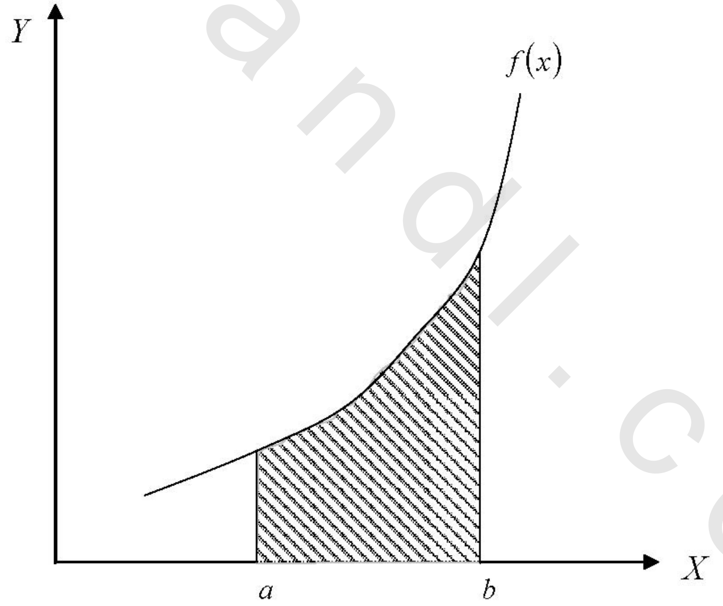
لنفرض أن لدينا الدالة $x^2 - x + 2$ والمطلوب حساب التكامل بين (5، 3).

$$\int_3^5 \left(x^2 - x + 2\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_3^5$$

$$= \left(\frac{125}{3} - \frac{25}{2} + 10\right) - \left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2} + 6\right)$$

$$= (39.166) - (10.5) = 28.666$$

الشكل (7–7) التكامل المحدود

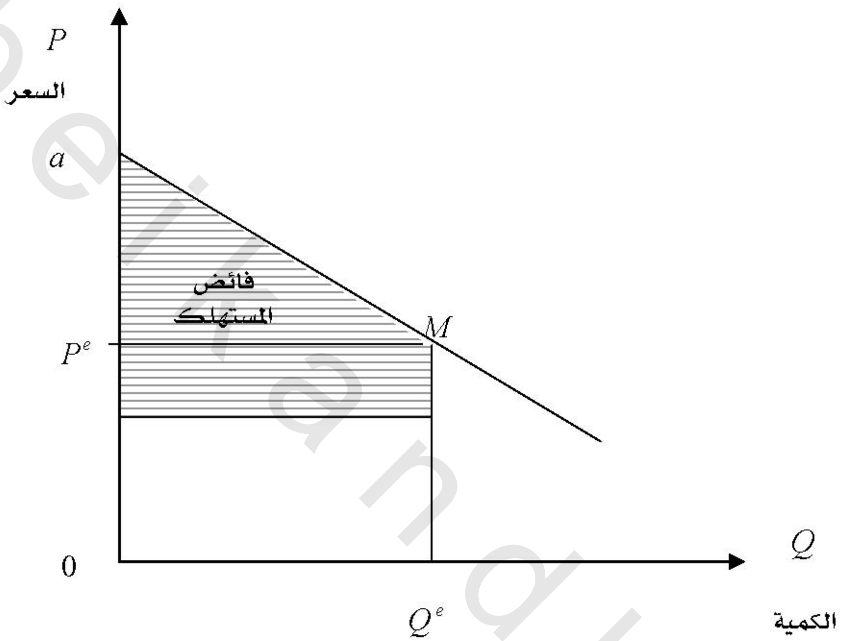


7–5–3 حساب فائض المستهلك:

لنفرض أن لدينا دالة طلب في صيغتها العامة $Q = a - bP$ وكان لدينا السعر التوازني P^e والكمية التوازنية Q^e والمطلوب حساب فائض المستهلك الذي يمثله

المثلث aP^eM ، ولحساب فائض المستهلك نقوم أولاً بحساب مساحة الشكل aMQ^eO ونطرح منه مساحة المستطيل P^eMQ^eO

الشكل (7–8) حساب فائض المستهلك باستخدام طريقة التكامل



ونوجد مساحة الشكل aMQ^eO عن طريق التكامل المحدد $\int_o^{Q^e} p(Q)dQ$

حيث $p(Q)$ هو السعر للدالة في الكمية التوازنية:

وحيث إن معادلة الطلب: $Q = a - bp$

فنوجد معكوس دالة الطلب: $p = \frac{Q}{-b} - \frac{a}{-b}$

وبذلك تكون مساحة الشكل aMQ^eO هي:

$$aMQ^eO = \int_o^{Q^e} \left(\frac{Q}{-b} + \frac{a}{b} Q \right) dQ$$

$$= \left[\frac{Q^2}{-2b} + \frac{a}{b} Q \right]_o^{Q^e}$$

$$= \frac{Q^{e^2}}{-2b} + \frac{aQ}{b}$$

مثال (1)

لنفرض أن دالة الطلب هي: $Q = 12 - 3p$

فتكون دالة سعر التوازن هي: $p = 4 - \frac{1}{3} Q$

فإذا كان سعر التوازن $p = 1$ فإن الكمية التوازنية $Q^e = 9$

وعليه يكون فائض المستهلك هو:

$$\int_o^{Q^e} \left(4 - \frac{1}{3} Q \right) dQ - p^* Q^*$$

$$= \left[4Q - \frac{1}{6} Q^2 \right]_o^9 - 1(9)$$

فائض المستهلك في هذه الحالة: $13.5 = 9 - (36 - 13.5) =$

4-5-7 حساب فائض المنتج:

إذا كان لدينا دالة العرض $Q_s = -c + bp$ حيث Q^e هي الكمية التوازنية و p^e هو السعر التوازني والمثلث $p^e MC$ يمثل فائض المنتج.

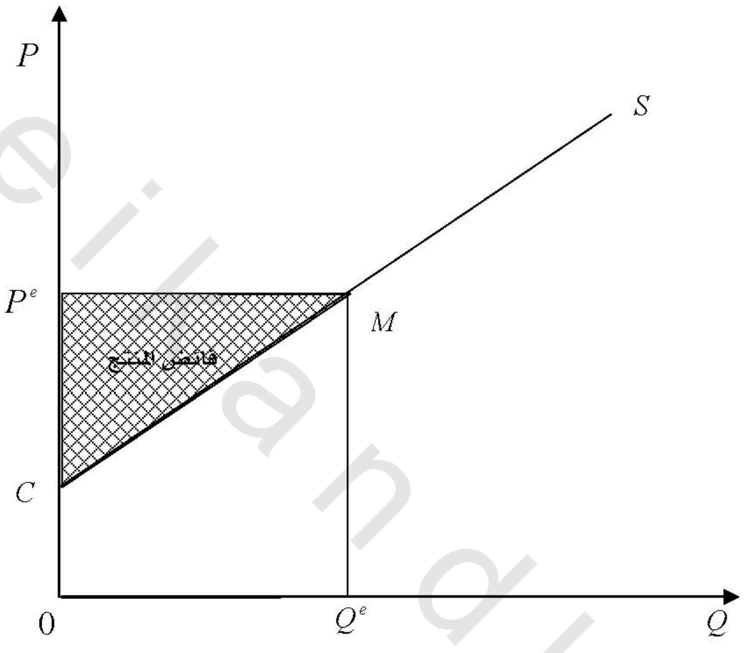
وعليه يمكن حساب فائض المنتج كما يأتي:

نحسب مساحة الشكل CMQ^eO التي تساوي تكامل دالة العرض المحدد بالنطاق (O, Q^e) أي:

$$\int_o^{Q^e} p(Q) dQ$$

ثم نطرحها من مساحة المستطيل $p^e MQ^e O$ لتكون المساحة الناتجة هي مساحة المثلث $p^e MC$ أو فائض المنتج.

الشكل (7–9) حساب فائض المنتج باستخدام طريقة التكامل



مثال (1): إذا كانت دالة العرض هي: $Q = -4 + 3P$ وكان السعر التوازني هو $P^e = 5$ وعليه فإن الكمية التوازنية $Q^e = 11$ وعليه تكون دالة السعر (معكوس دالة الطلب) هي:

$$P = \frac{Q}{3} + \frac{3}{4}$$

ويكون فائض المنتج مساوياً:

$$P^e Q^e - \int_o^{Q^e} \left(\frac{Q}{3} + \frac{3}{4} \right) dQ$$

$$= 5(11) - \left[\frac{Q^2}{9} + \frac{3}{4} Q \right] = 55 - (13.444 + 8.25)$$

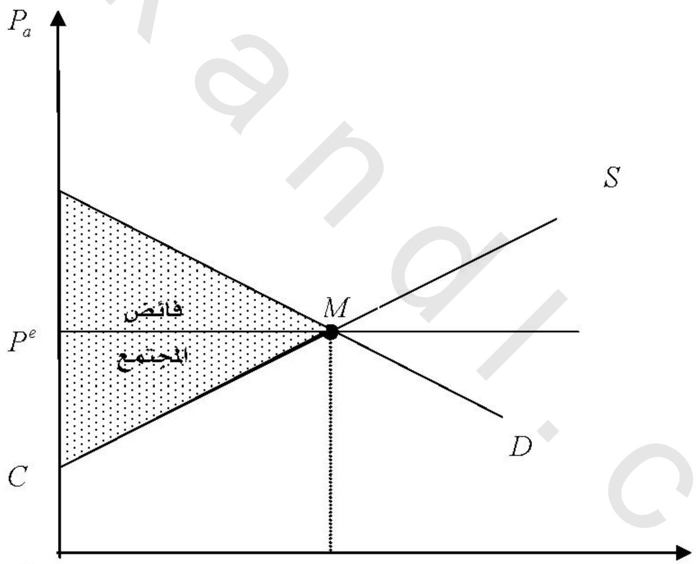
وبذلك تكون قيمة فائض المنتج هي:

$$= 55 - 21.694 = 33.306$$

7–5–5 حساب فائض المجتمع:

يعد فائض المجتمع (أو مجموع فائض المستهلك والمنتج) من أهم المفاهيم أو الأدوات في تحليل اقتصاديات الرفاه. ويتم حسابه بجمع فائض المستهلك مع فائض المنتج أو بحساب المنطقة المحصورة فوق منحنى العرض وتحت منحنى الطلب في نطاق الكمية التوازنية.

الشكل (7–10) حساب فائض المجتمع باستخدام طريقة التكامل



معكوس منحنى الطلب $p_1 = f_1(Q)$

معكوس منحنى العرض $p_2 = f_2(Q)$

فائض المستهلك $CS = \int_O^{Q^e} f_1(Q)dQ - Q^e P^e$

بينما فائض المنتج $= PS$ $\int = Q^e P^e - \int_O^{Q^e} f_2(Q)dQ$

وللحصول على فائض المجتمع نستطيع جمع فائض المستهلك مع فائض المنتج، أو الحصول على فائض المجتمع مباشرة عن طريق حساب المنطقة المحصورة فوق منحنى العرض وتحت منحنى الطلب كما يأتي:

فائض المجتمع $= PCS$ $\int_O^{Q^e} f_1(Q)dQ - \int_O^{Q^e} f_2(Q)dQ$

مثال (1): إذا كان لدينا منحنى طلب ممثل في الدالة: $P_d = 25 - Q^2$

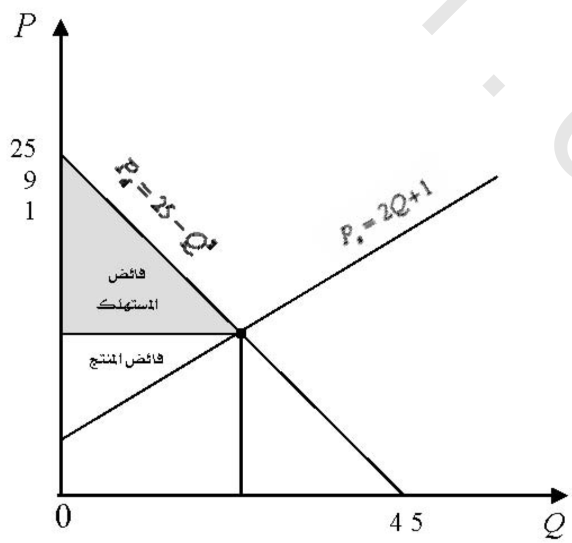
ومنحنى عرض ممثل في الدالة: $P_S = 2Q + 1$

وإذا كان السوق تنافسياً فإننا نتوقع تساوي العرض مع الطلب أي: $Q_d = Q_S$

$$2Q + 1 = 25 - Q^2$$
$$Q^2 + 2Q - 24 = 0$$
$$(Q+6)(Q-4) = 0$$

وعليه $P^e = 9$ و $Q^e = 4$

الشكل (7–11) مثال على إيجاد فائض المنتج



وبذلك نستطيع حساب فائض المستهلك CS كما يأتي:

$$CS = \int_O^4 (25 - Q^2)dQ - (9)(4) = \left[25Q - \frac{1}{3}Q^3\right]_O^4 - 36$$

$$= \left[25(4) - \frac{1}{3}(4)^3 - (0) - (36) = 42.67\right]$$

كما نستطيع حساب فائض المنتج PS كما يأتي:

$$PS = (9)(4) - \int_O^4 (2Q + 1)dQ = 36 - \left[Q^2 + Q\right]_O^4 = 16$$

وبذلك يكون فائض المجتمع: $CS + PS = 42.67 + 16 = 58.67$

أو يمكن حساب فائض المجتمع PCS مباشرة كما يأتي:

$$PCS = \int_O^4 (25 - Q^2)dQ - \int_O^4 (2Q + 1)dQ$$

$$= \left[25Q - \frac{1}{3}Q^3\right]_O^4 - \left[Q^2 + Q\right]_O^4 = \left[25(4) - \frac{1}{3}(4)^3\right] - 20 = 58.67$$

مثال (2)

إذا كان لدينا منحنى طلب ممثل في الدالة: $P_d = 113 - Q^2$

ومنحنى عرض ممثل في الدالة: $P_S = (Q + 1)^2$

وإذا كان السوق تنافسياً فإن: $Q_d = Q_S$

$$Q^2 + 2Q + 1 = 113 - Q^2$$

$$2(Q^2 + Q + 56) = 0$$

$$(Q + 8)(Q - 7) = 0$$

$Q^e = 7$ و $P^e = 64$

وعليه يمكن حساب فائض المجتمع PCS كما يأتي:

$$PCS = \int_O^7 (113 - Q^2)dQ - \int_O^7 (Q + 1)^2 dQ$$

$$=\left[113Q-\frac{1}{3}Q^{3}\right]_{O}^{7}-\left[\frac{1}{3}(Q+1)^{3}\right]_{O}^{7}$$

$$=676.78-115.22=561.56$$

تمارين الفصل السابع

س1) ما الفرق بين المعلمات والمتغيرات؟

س2) ما الفرق بين المتغيرات الداخلية والخارجية؟

س3) ما هو التوازن؟

س4) لنفرض أن لدينا أنموذج التوازن الآتي:

$$Q_d = Q_s$$

$$Q_d = 10 - P$$

$$Q_s = -1 + P$$

أوجد Q_d ، و Q_s التوازنيتين.

أوجد السعر P التوازني مع رسم الأنموذج؟

س5) ما هي دالة الهدف؟

س6) ما هي القيود؟

س7) ما هي مسألة التعظيم أو الأمثلية؟

س8) اشرح لماذا يعد شرط الرتبة الأولى (ضرورياً) لإيجاد قيمة عظمى؟

س9) ما هي دالة لاجرانج، وماذا تعني؟

س10) ما هو مضروب لاجرانج؟ وما هي قيمته؟

مراجع الفصل السابع

- الأشقر، أحمد. 2001م. الرياضيات في الاقتصاد والتجارة والعلوم الإدارية. الدار العلمية الدولية، عمان، الأردن.
- آل الشيخ، حمد محمد وأحمد عبد الله العسيري، 2007م. أسس الاقتصاد الرياضي، المسودة الأولى، قسم الاقتصاد، جامعة الملك سعود، الرياض، المملكة العربية السعودية.
- متولي، مختار محمد، 1988م. الأساليب الرياضية للاقتصاديين، مطابع جامعة الملك سعود، الرياض، المملكة العربية السعودية.
- متولي، مختار محمد، 1993م. النظرية الاقتصادية: مدخل رياضي، مطابع جامعة الملك سعود، الرياض، المملكة العربية السعودية.
- نجم الدين، عدنان كريم. 1999م. الاقتصاد الرياضي: مدخل كمي تحليلي. دار وائل للنشر، عمان، الأردن.
- ياسين، محمود محمد ودريد هاشم عوض. 1998م. الرياضيات الاقتصادية. منشورات جامعة دمشق. الجمهورية العربية السورية.

- Anthony, Martin and Norman Biggs. 1996. Mathematics For Economics and Finance: Methods and modeling. Cambridge University Press. Cambridge,MA.
- Chiang, Alpha. 1974. Fundemental Methods of Mathematical Economics. Mc Graw–Hill Company. NewYork, N.Y.
- Chiang, Alpha.1992. Elements of Dynamic Optimization.
- Glass, J. Colin, 1980. An Introduction to Mathematical Methods in Economics. Mc Graw–Hill Company. NewYork, N.Y.
- Mc Graw–Hill Company. NewYork, N.Y.
- Silberberg, Eugene and Wing Suen. 2001. The Structure of Economics: A Mathematical Analysis. Mc Graw–Hill, London, U.K.
- Takayana, A.1985. Mathematical Economics. Cambridge University Press. Cambridge, MA.

تم بحمد الله