

قصيدة غنائية في مديح إيمري لاكاتوس⁽¹⁾ أو تجارب فكرية ظاهريّة لجسر الهوة بين غرف صفوف

الرياضيات المثالية والفعليّة

بهاراث سريرامان Bharath Sriraman

جامعة مونتانا



ملخص

يستقصي هذا البحث النطاق الواسع للمحتوى والعمليات الرياضية التي تبرز في الصفوف الثانوية عبر استخدام مسائل «العد» غير العادية. ويتمثل أحد أهداف التدريس العام لمعلمي الرياضيات في نقل الشعور بوجود وحدة بين الموضوعات التي تبدو مختلفة ظاهرياً ضمن الرياضيات. ويمكن لمثل هذا الهدف أن يتحقق إذا تمكّننا من إجراء مناقشات صافية تنقل وجهة النظر اللاكاتوسية (الفكر التجريبي) في الرياضيات المتمثلة في استمرار التخمين- البرهان - الدحض الذي يشتمل على خبرات رياضية غنية. وأعرض هنا مساراً تجاه هذا الهدف التدريسي عن طريق عرض رؤى الطالب في مسألة عدّ غير عادية، وعن طريق استخدام هذه النتائج لبناء احتمالات رياضية «مثالية» (محتوى وعمليّة) للمناقشة. وقد أعدت، تحديداً، بناء المناحي شبه التجريبية لمحاولات ستة طلاب، يبلغ كل منهم من

(1) (Lakatos Imre) فيلسوف وعالم رياضيات، ولد في هنغاريا عام 1922، وتوفي في بريطانيا عام 1974. وكان شخصية إشكالية أثار خصومات مع معاصريه من الفلاسفة بعد نشر كتاب «البرهان والتفنيد» (Refutations And Proof) حاول فيه أن يعيد لتاريخ العلم بناءً آتة العقلانية وتفسيره بصورة معيارية لتقويم المنهجيات العلمية المتنافسة وقياسها، واقترح منهجية لتبرير معقولة القانون العلمي يستطيع المشتغلون بفلسفة العلم من خلالها، تحليل بنية النظريات وتفنيدها ورفضها تاركة المجال مفتوحاً لفرضية أو نظرية أخرى - المراجع

العمر أربعة عشر عاماً؛ لحل مسألة العد غير العادية هذه، وعرض احتمالات وضع الصيغ الرياضية في أثناء المناقشة الصفية بروح إيمري لاکاتوس التخيلية. وسوف نناقش في هذا البحث آثار تعليم/تعلم الرياضيات في المرحلة الثانوية وفي تربية معلمي الرياضيات.

المقدمة

يحتوي كتاب إيمري لاکاتوس (Imre Lakatos) «البرهان والتفنيد» (Proof And Refutations) على تصور للمناقشة الصفية بين الطلاب والمعلم في الصف «المثالي». حيث تحدث مثل هذه المناقشات الغنية في السياق التاريخي للمسألة عند تصنيف الأشكال المنتظمة (Regular Polyhedra) متعددة السطوح، وبناء إثباتات (Proof) للعلاقة بين الرؤوس، (Vertices) والوجوه، (Faces) والحافات (Edges) لشكل منتظم متعدد السطوح، عرضه ليونارد يولر (Leonhard Euler) على النحو الآتي: $V+F-E=2$. في ذلك التصور، يدخل المدافعون عن هذا الكتاب في جدال ونقاش مع المعلم بحماس حول صدق التعريفات، مستكشفين ومخمنين المسارات المحتملة للإثبات، ودحض صحة التعريفات والخطوات في البرهان من خلال تقديم أمثلة مختلفة (مشوهة) مضادة. وتحدث مثل هذه المناقشات الموجودة في هذا الكتاب في خيال لاکاتوس، ولكنها تطرح سؤالاً عمماً إذا كانت مثل هذه المناقشات قابلة للإعادة في غرفة الصف. ومع ذلك، فقد مر ثلاثون عاماً لم نشهد فيها أي متابعة عملية لرؤية لاکاتوس للمناقشة في غرفة الصف المثالية. ويحاول المعلم في هذا البحث إعادة بناء الصف اللاكاتوسي (Lakatosian Classroom) من خلال التأمل في مسارات المناقشة التي يمكن أن يسلكها الطلاب استناداً إلى استجاباتهم لمسألة عدّ غير عادية. ويكمن جوهر الطريقة اللاكاتوسية (Lakatosian Method) في الانتباه إلى استبعاد التشوهات الرياضية (Mathematical Pathologies) في أثناء البحث عن الحقيقة. حيث يبدأ المرء عادة بالقانون، ومن ثم يحدد الفرضية بوضوح، وهذا يتبعه استكشاف لإمكانية إثبات صحتها أو بطلانها. ويترتب على عملية التخمين-البرهان-الدحض تهذيب الفرضية سعياً وراء الحقيقة، إضافة إلى متابعة الفرضيات العرضية جميعها التي تبرز في أثناء المناقشة.

وهناك أمثلة كثيرة لمعلمي الرياضيات الذين يوجدون بيئة صافية مناسبة لمثل هذا النوع من النقاش. وخير مثال على ذلك، الدراسة التي قام بها هارولد فاوست (Harold Fawcett) مدة عامين في ثلاثينيات القرن الماضي، حيث نجح في بناء تجربة تدريس مدة عامين لطلاب المرحلة الثانوية، ركزت على دور النقاشات والمناظرات في اختيار التعريفات (Definitions) والبدهييات (Axioms)، وأوضحت القيمة التعليمية في التعامل مع «مجموعة أدوات محدودة». وتوصل الطلاب في هذه الدراسة إلى تعريفات ملائمة، واختاروا بدهييات ذات صلة بالموضوع عند الضرورة، وابتدعوا أيضاً هندسة إقليدية باستخدام الرياضيات المتوافرة في عهد إقليدس. ونتيجة لذلك، ابتدع كل طالب في الصف في أثناء تجربة التدريس التي استمرت عامين، نصه الخاص للهندسة الإقليدية عن طريق اختيار تعريفاتهم وبدهيياتهم ونظرياتهم وبراهينهم والدفاع عنها. وتوضح لمحات النقاش التي يجدها المرء في دراسة فاوست (Fawcett, 1938) إمكانية تقريب الرؤية اللاكاتوسية للصف المثالي إلى الواقع. وبالنظر إلى أهمية هذه الدراسة، فغالباً ما يشار إليها في بحوث تدريس الرياضيات التي توضح قيمة تدريس الهندسة الإقليدية، أو منحى فاوست التعليمي الذي سمح باكتشاف الهندسة الإقليدية بدلاً من تعلمها من الكتب المدرسية. ومن بين الأمثلة الحديثة على التعليم الصفي الذي يؤكد قيمة الأدوات البنائية التقليدية ودور النقاشات والمناظرات في الهندسة، الدراسة الأخيرة للفصول الدراسية في هولندا، حيث استخدم الطلاب في هذه الدراسات أدوات، مثل راسم القطوع المخروطية (Conic Sections Drawer) (Van Maanen, 1992)، في حين رسم آخرون هياكل هندسية تقليدية باتباع تعليمات لمخطوطات قديمة مثل الشكل خماسي الأضلاع (Pentagon) من مخطوطة فارسية قديمة (Hogendijk, 1996). وبحسب ملاحظتي، فقد كان المعلم الذي يمتلك المهارات التعليمية والاهتمام العميق بالمحتوى التاريخي، هو العنصر الحاسم في «المشروعات» الناجحة جميعها في دراسة الهندسة. ومن الأمثلة الأخرى المقترحة للتوصل إلى الحقائق استخدام النوادي التاريخية، حيث يمثل الطلاب نصاً تاريخياً، مثل العناصر (Elements) أو يدرسونه (Brodkey, 1996)، والمشاركة في مناقشات في أثناء إثبات حقيقة افتراض معين (Fawcett, 1938).

تشير رؤية لاکاتوس للمناقشات الصفية ومثال فاوست المثالي (وغيرهما من المقترحات أعلاه) إلى أن «بناء الصيغ الرياضية» (Mathematization) ممكن في الفصول الدراسية الثانوية. وأعني ببناء الصيغ الرياضية «عملية وضع بنية فوق بنية» (Wheeler, 2001, P. 51). ويشتمل بناء الصيغ الرياضية على عملية التعميم عندما يفرض شخص ما أو يكتشف تعميماً يكون أساساً للمسائل المتنوعة (Sriraman, 2004a, 2004b, Sriraman & Adrian, 2004a). وقد أشار ويلر (Wheeler, 2001) إلى صعوبة تدريب المعلمين في تحليل قدرات الطلاب وفهمهم بناءً على الصيغ الرياضية، وإلى الحاجة الملحة إلى إشراك طلابهم في بناء الصيغ للمسائل الرياضية الحقيقية عن طريق تسهيل المناقشة، لكنه لم يقصد بالمسائل الحقيقية تلك الموجودة في سياق العالم الحقيقي التي يمكن استنباطها في الأغلب، بل تلك المسائل التي تقود إلى رياضيات ذات قيمة، وتكون قابلة للحل.

استخدام مسائل العدّ غير القياسية

يمكن أن نعدّ العدّ نشاطاً يميزنا من غيرنا من الكائنات، ويمكن تتبع تاريخ البشرية من خلال الأفعال البدائية المتمثلة في التشارك في الكميات المتساوية، حتى تطوير الأرقام التي تمثل الفعل المادي الملموس لعملية العدّ، وصولاً إلى تطوير النظم المتطورة لتحديد القيمة المكانية للأعداد، وهو الأمر الذي أوصلنا إلى الحداثة. يزخر تاريخ الرياضيات بكثير من مسائل العدّ المشهورة. فقد حار جاليليو (Galileo) في فهم حجم مجموعة الأعداد الصحيحة، ومجموعة الأعداد الزوجية الصحيحة. وقد قادت هذه المسألة في نهاية المطاف إلى ما يعرف بحساب الأعداد ما وراء اللانهائيات أو الأعداد «العابرة للنهاية» (Transfinite Numbers)، الذي وضعه جورج كانتور (Cantor) بصفته إعادة بناء لعلم الحساب العادي (Rotman, 1977). يستطيع المرء أن يعمم ويقول بكل جرأة «كل شخص يستطيع أن يعدّ (إلى حدّ ما)، الأمر الذي يطرح تساؤلاً حول سبب تساؤل مسألة العدّ شيئاً فشيئاً مع تقدم الطلاب نحو المرحلة الثانوية. ويسود الغموض نصوص المناهج الصادرة عن بعض المؤسسات، مثل مجلس التعليم الأسترالي، والمجلس الوطني الأمريكي لمعلمي الرياضيات بخصوص وضع «مسائل العدّ» في منهاج الرياضيات للمرحلة الثانوية. ونعني

«بمسائل العد» تلك الحالات التي تلاحظ فيها ظاهرة معيّنة بين الأعداد (وهي عادة أعداد صحيحة موجبة)، وهي عادة ما تدفعنا إلى دراسة أسباب حدوث مثل هذه الظاهرة، أو المسائل التي تتطلب توظيف نظرية العدّ الأساسية، مثل قابلية الأعداد للقسمة وخصائص الباقي.. إلخ. وأحياناً تُؤكّد هذه المسائل بموجب مناهج الرياضيات المنفصلة التي تشتمل على موضوعات أساسية من التوافيق (Combinatorics). وعلى أي حال، فإن النقطة التي أحاول تأكيدها في هذا البحث هي عدم حاجة المرء إلى نص أو مناهج للإفادة من مسائل العد في الصف الدراسي.

ويتضمن مقصدي شقين، هما:

1. إظهار المدى الواسع للرياضيات الذي يمكن الوصول إليه في المرحلة الثانوية من خلال استخدام مسائل العد.
2. إبراز إمكانية بناء الصيغ الرياضية من خلال تفكير الطلاب في المسألة.

الغايات / الأهداف التربوية وآثارها في تاريخ الرياضيات

يتمثل أحد أهداف مناهجنا العامة في إعطاء شعور بوجود وحدة بين الموضوعات المختلفة ظاهرياً ضمن الرياضيات. ومن أجل إيضاح ملامح الطريق نحو تحقيق الأهداف آنفة الذكر، سأعرض نتائج استخدام إحدى المسائل «الفريدة» والاحتمالات الرياضية التي نشأت عن رؤى الطلاب تجاه تلك المسألة. ويُعدُّ هؤلاء الطلاب نمطياً فوق المتوسط بالنسبة إلى طلاب المرحلة الثانوية (13-15 سنة)، في مدرسة ثانوية ريفية أميركية، أُلحقوا ببرنامج تسريع الجبر رقم 1 الذي يُعدُّ مساقاً للطلاب ذوي الدافعية المرتفعة. وعينت على مدار العام الدراسي، بصفتي معلماً لهذا الفصل الدراسي مسائل حلّها الطلاب في صحائف مذكراتهم. وقد تمثلت آمالنا التربوية في وضع شروط تتيح للطلاب استقصاء المسائل المفتوحة النهاية على مدار مدة زمنية معيّنة، وتشجيعهم على كتابة حلولهم بكل عمق، والطلب إليهم التفكير ملياً في الحلول التي توصلوا إليها. وتناول الطلاب تلك المسائل مدة تراوحت بين سبعة أيام إلى عشرة، وأجريت معهم مقابلات بعد ذلك. وسعت الدراسة

أيضاً إلى جعل الطلاب يتبنون منهجية شبه تجريبية عند معالجتهم المسائل التي لم يسبق لهم رؤيتها من قبل في خبراتهم المدرسية.

وقد انتعش هذا الأمل جزئياً من خلال اتباع الطريقة التي يجري فيها تصميم عملية التدريس في العلوم. تتميز العلوم بالمبادئ الفيزيائية المكتشفة، أو التي يستدل عليها من خلال الملاحظات المنتظمة، ووضع الفرضيات والاختبار بوساطة التجربة. مثلاً، تُختبر صحة المبدأ العلمي من خلال إجراء تجربة منظمة في مختبر تجارب العلوم المدرسي، وتسجيل الملاحظات متبوعاً بتطبيق أساليب الانحدار (Regression Techniques) المناسبة (أو وسائل أخرى لتحليل البيانات) على البيانات لتحقيق صدق المبدأ. وقد يلجأ بعض المعلمين المبتكرين إلى وضع تجربة علمية متطورة ليجمع الطلاب البيانات من خلالها، ومن ثم محاولة استنتاج المبدأ الناجح. والتساؤلات التي يمكن طرحها في هذا السياق، هي: هل يمكن تكييف مثل هذه الطريقة العلمية لتعليم الرياضيات؟ وهل يمكن للمعلمين أن يسهلوا اكتشاف التعميمات الرياضية والمبادئ الأساسية، باستخدام مواقف تتضمن مسائل متطورة يترتب عليها تبني منهجية شبه تجريبية، تتسم ببناء حالات معينة وملاحظات، ومن ثم ينتج عنها رياضيات جديدة؟ وهل يمكن دفع الطلاب، عندما تربكهم مسألة لا يمكن حلها في إطار الأدوات الرياضية المتاحة لهم، أو ضمن نطاق حصيلتهم المعرفية، إلى ابتداء الأدوات الرياضية المطلوبة لحل المسألة؟ ووفقاً للمثل القائل: «الحاجة أم الاختراع»، فقد اتسم تاريخ الرياضيات بهذه الحاجة إلى بناء أدوات جديدة لمعالجة المسائل المقلقة. وإلى جانب علم حساب ما وراء اللانهائيات الذي جاء به كانتور والمشار إليه آنفاً، فهناك أمثلة تاريخية أخرى توضح وجهة نظري هذه. مثلاً، يمكن التعبير عن تخمين جولدباخ (Goldbach, 1742) القائل أن الأعداد الزوجية الصحيحة جميعها التي تكون $4 \leq$ ، تعبر عن مجموع عددين أوليين لم يُجب عنهما بعد، ولكن كان من نتيجة ذلك البحث عن آلية حسابية ونظرية جديدة لمعالجة هذه المسألة.

وأخيراً، لا يسعني سوى الإشارة إلى نمو ظاهرة الرياضيات، وكثير من النظريات الجميلة في القرن العشرين، نتيجة لرغبة جُلّ علماء الرياضيات في استخدام بدهية الاختيار

(Axiom Of Choice). وقد عرض باري لويس (Barry Lewis) رئيس جمعية الرياضيات في المملكة المتحدة عام 2003، فكرة مفصلة عن أهمية بناء الأدوات في الرياضيات، وقال: «لم يكن من المصادفة، عندما احتاج أينشتاين في بداية القرن الماضي إلى أدوات مختلفة ليعيد دراسة متصل الزمان والمكان (Space-Time Continuum)، أن مثل هذه الأدوات قد وجدت فعلاً... ولكنها كانت أدوات نظرية ليس لها أي استخدام عملي ممكن». (Lewis, 2003, P. 426).

وخلاصة القول، هل نستطيع استخدام البنية الأصلية وجمال المسألة الرياضية، في تحفيز استكشاف الرياضيات من خلال آراء الطلاب وتفكيرهم في المسألة، وإجراء نقاشات صافية فعلية من وحي روح نقاشات لاکاتوس النموزجية والتخيلية في الفصل الدراسي «المثالي»؟ دعونا نرى أيكون ذلك ممكناً.

المسألة

انظر إلى هذه المسألة (Gardner, 1997): اختر مجموعة من أعداد صحيحة موجبة «س» مؤلفة من عشرة أعداد أقل من مئة. مثلاً المجموعة: $S = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$. هناك اختاران مختلفان تماماً من بين المجموعة س لهما المجموع نفسه، فأستطيع مثلاً اختيار 14, 63، ومن ثم أختار 35, 42، لاحظ أن كلا المجموعين يساوي 77، أي، $(14+63=77)$ ، و $(35+42=77)$. أستطيع أن أختار أولاً 3, 9, 14، ثم أختار 26. لاحظ أن مجموع كليهما يساوي 26، أي: $(3+9+14=26)$ ، وأيضاً كانت مجموعة الأرقام المؤلفة من عشرة أعداد صحيحة موجبة أقل من مئة، فإنك ستحصل على المجموع نفسه من اختارين مختلفين تماماً. يمكنك أن تصمم مجموعات، وتتحققها بنفسك. لماذا يحدث هذا؟ برهن على أن ذلك يحدث دائماً.

مسارات الطلاب، التبصر وبناء الأدوات

تستدعي هذه المسألة الفضول على نحو واضح، وتعطي أيضاً شعوراً بغموض الأعداد الصحيحة. شجعت الطلاب على اختيار أعداد صحيحة تقع بين واحد ومئة بصورة عشوائية،

وعملنا كثيراً من المجموعات المؤلفة من عشرة أعداد. وسوف أعرض الآن المناحي شبه التجريبية، وإعادة بنائها لستة طلاب تراوحت أعمارهم بين ثلاثة عشر عاماً وخمسة عشر، وهم يحاولون إيجاد حل لمسألة العد أنفة الذكر في صحائف مذكراتهم. لقد استُخدمت كتابات صحائف الطلاب، وسرد المقابلات في إعادة تمثيل أساليب الطلاب، وتبصرهم في المسألة.

ابتكار أساليب لضبط تغيّر المسألة

كان أحد طلاب الصف ويدعى مات (Matt) ماهراً في اكتشاف اختيارات عديدة مختلفة تؤدي للوصول إلى مجاميع ثابتة. ومع ذلك، لم يعتقد حدوث ذلك دائماً، وشرع في بناء أمثلة مضادة معتمداً على ضبط كيفية اختيار الأرقام في المسألة. حاول «مات» في البداية ضبط متغيرات المسألة بتثبيت الرقم في منزلة العشرات وتغيير الأرقام الأحاد، وخبّن بقوله: لما كنت مضطراً إلى تكرار رقم أو أكثر من واحد إلى تسعة في اختيار العناصر العشرة، فإنه سينجم عن ذلك مجموعان متساويان. مثلاً، يمكننا تثبيت العشرات على الرقم ثمانية، ثم نبدأ بانتقاء الأرقام للمنازل الأخرى. لدينا عشرة خيارات للرقم في المنزلة (أعني الأرقام من صفر إلى تسعة)، ولكن يضطر المرء، في أثناء العملية، إلى تكرار الرقم ثمانية (حيث إن الأعداد الصحيحة العشرة يجب أن تكون مختلفة). بدأ مات تخميناته الأصلية بالمجموعة (99,....., 92, 91, 90)، حيث يستطيع المرء اختيار أرقام مختلفة إلى أن يصل إلى الرقم تسعة وتسعين، حيث يتكرر الرقم تسعة. أدت هذه بحسب رأيه إلى اختيارين مختلفين في مجموعة مؤلفة من عشرة عناصر لتنتج المجموع نفسه. ثم خبّن أن الحالة ليست كذلك إذا اختار المرء مجموعة مؤلفة من أقل من عشرة أعداد، وقدم المجموعة المؤلفة من خمسة عناصر (84, 69, 78, 12, 3)، حيث شطب الرقم 78، وقائمة بالمجاميع: $3+7=10$ ؛ $3+12=15$ ؛ $3+69=72$ ؛ $3+84=87$ ؛ $7+12=19$ ؛ $7+69=76$ ؛ $7+84=91$ ؛ $12+69=81$ ؛ $12+84=96$ ؛ $69+84=153$. شطب «مات» الرقم 78؛ لأنه كرّر الرقم 7 مصادفة، وكان مخطئه بناء مجموعة لا تتشابه فيها الأرقام جميعها. واختتم بالقول أن هذه المجموعة قد أوضحت نقطته للاختيارات المختلفة التي تنتج المجموع نفسه فقط عندما يكرر المرء الرقم. أنشأ «مات» مجموعة قصوى مؤلفة

من خمسة عناصر، من الأرقام صفر حتى تسعة مكررة مرة واحدة فقط، بهدف توضيح مخططه، ولكنه لم ينظر إلى المجاميع التي جمعت بين ثلاثة أرقام أو أكثر في مجموعته. ولو فعل ذلك، للاحظ أن $3+12+69=84$ ، وهو أحد عناصر مجموعته، وبذلك، يدحض ادّعاءه (Sriraman, 2004a).

وهذا يقودنا إلى التساؤل: هل فهم الطلاب بطريقة لاشعورية متطلبات الاختيارات المختلفة التي تنتج المجموع نفسه، بصفتها مجاميع لرقمين فقط؟ انظر الحل الآتي الذي قدّمه «جون» (John):

اكتشاف قانون العد للمجموعات الفرعية للمجموعة

تمثلت خطة «جون» في تناول عشرة أرقام، والتحقق هل سينجح ذلك، وأعني بذلك، إذا كان هناك مجموعان مختلفان متساويان يمكن أن يحدثا دائماً. وجرب ذلك مرات عدة «ليرى أن المجموع يساوي دائماً رقماً آخر». وبذلك، فقد تمثلت خطة «جون» بنمذجة المسألة، وتحقيق صحتها، كما في المسألتين الأولى والثانية. وبدأ باختيار المجموعة $(1, 15, 13, 4, 6, 99, 20, 75, 86, 51)$ ، وأوجد مجموع $99 = 13 + 86$ وهو أحد عناصر المجموعة. ثم وجد بعد ذلك أن $86 = 1 + 4 + 6 + 75$ وهو عنصر آخر من عناصر المجموعة، اعتقدت أن المجموع الثاني كان دقيقاً، وكتبت ملاحظة لأسأله هل طوّر طريقة معينة لبناء المجاميع. أما المجموعة الثانية التي اختارها فكانت $(1, 86, 91, 49, 25, 18, 10, 2, 98)$ ، وأوجد ناتج مجموع $98 = 2 + 10 + 86$ وهو أحد عناصر المجموعة أيضاً. ومن الواضح أن «جون» قد فهم «الاختيارات المختلفة» تماماً كما قصد الباحث، إذ اختار ثلاثة وأربعة مجاميع للأرقام.

أما المجموعة الثالثة التي اختارها فكانت $(90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98)$ ، التي اعتقد أنها مجموعة مثيرة للاهتمام؛ لأنها تعطي أكبر قدر ممكن من المجاميع لمجموعات تحتوي على عشرة أعداد صحيحة تقع بين الواحد والمئة، وسوف تبرز هذه الحقيقة على المسرح عند مناقشتنا الحل لاحقاً. كان المجموعان اللذان أوجدهما «جون» في هذه المجموعة، هما: $90 + 93 = 183$ ، $91 + 92 = 183$ ، وفي تلخيصه للمسألة كتب أنه

حلتها تماماً كما خطط لها. «أخذت مجموعات مؤلفة من عشرة أعداد ثلاث مرات، وقد نجحت في المرات جميعاً». وكتب بعدها أنه لم يتحقق سبب حدوث ذلك، لكنه اعتقد أن ذلك يعود إلى وجود عدد قليل جداً من الأرقام لتتجح العملية».

سُئل «جون» أن يوضح عمليات تفكيره في أثناء المقابلة، ولكن كان عليه إلغاء مواعده الأول بسبب انشغاله في مباراة تنس. وعندما حضر إلى المقابلة نظر مرة ثانية إلى المسألة في صحيفة مذكراته. وبدأ أنه قرر إلقاء «نظرة ثانية» على المسألة مرة أخرى، وبنى المجموعة الآتية: (2, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 19, 20)، وحصل على: $2+10=12$; $6+8=2+12=14$ ، وهذا أحد عناصر المجموعة، و $8+2=10$ أحد عناصر المجموعة، و $6+2=8$ عنصر آخر من عناصر المجموعة. انتقى بعد ذلك مجموعة أخرى على النحو الآتي: (1, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19)، وكتب « $9=5+3+1$ ، و $17=9+7+1$ الخ». لاحظت أن «جون» اختار في البداية أعداداً صحيحة من 1 إلى 20، ثم اختار أعداداً صحيحة فردية من 1 إلى 20. وكان يبدو حذراً في انتقاء الأعداد الصحيحة في هذه المرحلة آملاً التوصل إلى شيء ما. وأضاف الأرقام الآتية في حاشية صحيفة مذكراته: $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=45$ ورسم الجدول أدناه (الشكل 10: 1).

1	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
2	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
3	4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
4	5, 6, 7, 8, 9, 10
5	6, 7, 8, 9, 10
6	7, 8, 9, 10
7	8, 9, 10
8	9, 10
9	10
10	

شكل 1: 10 تمثيل جون لمسألة مجموع الأرقام

خلص «جون» استناداً إلى الجدول في شكل 10: 1 إلى ما يأتي:

أعتقد أن ذلك يحدث دائماً بسبب وجود كثير من الطرق للوصول إلى الإجابة. فرسمت جدولاً وأضفت رقمين، حيث هناك خمس وأربعون طريقة. وإذا أضفت ثلاثة أرقام فهناك فرص أكبر.

سبب حل «جون» هذا إرباكاً لي في البداية، وحاولت فهم ما توصل إليه. وقال إنه يمكن للمرء في البداية، حساب كم هائل من المجاميع، وهذه تعدُّ ملاحظة جيدة بحد ذاتها. ويتعين على القارئ ملاحظة أن هؤلاء الطلاب لم يسبق لهم أن واجهوا مفاهيم مجموعات فرعية متعددة من مجموعة ما تؤدي دوراً في الحل. وعلى الرغم من ذلك، بدأ جون بوضع طريقة منظمة لعد المجموعات الفرعية كلها. وحسب في جدولته المجموع الكلي لمجاميع رقمين في مجموعة مؤلفة من عشرة عناصر، أي خمسة وأربعين، أو عشرة، ثم أدرك بعد ذلك وجود مزيد من احتمالات المجاميع التي تحتوي على ثلاثة أرقام. واستناداً إلى هذه الملاحظة، توصل إلى أن حدوث مثل هذه الظاهرة مرده «وجود كثير من الطرق للوصول إلى الجواب». وتوصل «جون» إلى تعميم بإمكانية وجود عدد كبير من المجاميع، بحساب الاحتمالات كلها لجمع عددين بعضهما إلى بعض، ومن ثم ملاحظة وجود عدد أكبر من الاحتمالات بجمع ثلاثة أعداد بعضها إلى بعض. ويؤكد هذا المخطط استقلالية الطلاب في بناء القانون الذي يقول: إن عدد العناصر لمجموعة عنصر K (هو 2^k).

لم يغيّر «جون» الشروط الأولية المعطاة للمسألة. وبعبارة أخرى، لقد جرب مجموعات مؤلفة من عشرة عناصر فقط، على العكس من «مات» الذي قرر أن يغير الشروط والمحددات ليرى ما سيحدث. وهناك آخرون اتبعوا خطأً مختلفاً من التجارب الموضحة لاحقاً في محاولة «جيم» (Jim).

تأمل في غموض نظام العدد

فهم «جيم» المسألة على النحو الآتي: «يمكنك انتقاء عددين من أي مجموعة مؤلفة من عشرة أعداد صحيحة موجبة أقل من مئة، لتجمعهما مع رقم آخر في المجموعة. وكذلك يمكنك أخذ ثلاثة أعداد، وهناك أيضاً إمكانية لإضافة عددين إلى عدد في كلا الجانبين» تمثلت خطته للبدء في المسألة «بعمل مجموعة مؤلفة من عشرة أعداد بصورة عشوائية، وإيجاد ناتج مجموع واحد (One Combo) في الأقل، ومن ثم عمل مجموعة أخرى

ليتحقق نجاحها دائماً». اشتملت خطة «جيم» بصورة أساسية على تحقق معطيات المسألة. وبنى مجموعتين على النحو الآتي: (1, 33, 44, 71, 52, 27, 13, 69, 88, 97) و (3, 14, 99, 83, 71, 67, 55, 40, 39, 23)، وأوجد المجاميع الآتية: $49+52=13+88=101$ و $23+14+3=40$ على التوالي. لا يبدو وجود أي نظام واضح لدى «جيم» للتوصل إلى مجاميع متساوية. ولم يعمل «جيم» أي مجموعات أخرى، ولكنه خلاص إلى القول الآتي: «يتعامل الجواب مع النظام العشري الأساسي». وهناك عشرة أعداد فقط تستطيع أن تختار منها، وأي عدد أكبر من ذلك يمكن الإشارة إليه على النحو الآتي: $x + 10$. مثلاً، $11 = 10 + 1$ و $2 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 52$. وكتب عندئذٍ قائلاً: إن كل عدد يقع بين الواحد والمئة يكون «ناتجاً» (لجمع) عشرة إلى عدد آخر من صفر حتى تسعة.

لم أفهم مناقشة «جيم» لـ «الناتج». ويبدو أن عملية الجمع على أساس الرموز العشرة قد بينت له إلى حدٍّ ما سبب نجاحها. وقد أملت في أن المقابلة سوف توضح ما الذي كان يحاول قوله. وقد اختصرت هذه الرواية خصيصاً، أما القارئ الذي يرغب في تجاوزها، فقد كان جوهر مناقشة «جيم» على النحو الآتي: نجحت؛ لأن الرموز المتوافرة كانت من ضمن المجموعة 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10، ولأن الأرقام بين الواحد والمئة جميعها ما هي إلا نتيجة لجمع «إضافة» هذه الرموز إلى بعضها بعضاً، وهذا يؤكد إلى حدٍّ ما أن ناتج مجموعتين يؤدي إلى المجموع نفسه. وأما القارئ الذي يرغب في معرفة كيفية توصل «جيم» إلى هذه النتيجة فالحكاية على النحو الآتي:

الرواية الأولى

الطالب: استغرقت بعض الوقت في التفكير في النظام المبني على عشرة. لديّ خطان من الأعداد، مثل المجموعة المؤلفة من عشرة أعداد، وكنت دائماً أجد أعداداً لأضيفها إلى الرقم نفسه، وفي معرض تفكيري في حل الورقة، تبين لي فجأة وجود عشرة أعداد فقط تستطيع أن تختار منها، وأما غير ذلك فيمكن التعبير عنه بـ $10 +$ عدد ما، مثل: $11 = 10 + 1$ و $50 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10$ ، وهذا لا يعني وجود رمز جديد؛ لأن 11 هي $1 + 10$.

الباحث: حسناً، أنت تقول إن الأعداد التي تستطيع أن تختار منها فقط هي...؟

الطالب: 10... 4, 3, 2, 1 والأعداد الأخرى جميعها متغيرات لهذه الأعداد.

الباحث: حسناً، ولكن كيف يعطي هذا مجموعين متشابهين؟

الطالب: لأنها مرتبة وأقل من العدد خمسين، لذا، فمن السهل رؤيتها.

الباحث: ماذا لو اخترت الأرقام عشوائياً، مثل تلك الأعداد التي أريتك إياها في الصف؟

الطالب: عندئذٍ يكون من الأفضل تنظيمها بعد أن نختارها عشوائياً من الأصغر إلى الأكبر، وبعد ذلك يكون من السهل إضافتها بعضها إلى بعض بدلاً من القفز هنا وهناك، وعندئذٍ ستجد كثيراً من الاحتمالات، كأن تأخذ العدد الأول وترى هل يمكن إضافته إلى أي عدد ضمن المجموعة.

الباحث: كم يوماً استغرق حل هذه المسألة؟

الطالب: خمسة أيام تقريباً، حيث كتبت الواجب الأول قبل يومين، ثم كتبت كل شيء الليلة الماضية، واستغرقتني ذلك خمس وأربعون دقيقة.

الباحث: إذن، فكرت في المسألة مدة خمسة أيام؟

الطالب: نعم، لقد فكرت فيها منذ أمد بعيد (ضاحكاً). استؤنفت المقابلة في اليوم اللاحق، حيث كان يتعين على جيم أن يغادر بسبب نشاط ما بعد المدرس

اليوم الآتي:

الباحث: حسناً، ها قد عدنا مرة أخرى.

الطالب: لقد كتبت إلى حدٍ ما عن سبب حدوث مثل هذا، ربما لأن المجموعة من واحد إلى عشرة تمثل مجموعة الأعداد التي يمكنك الاختيار منها فقط.

الباحث: كيف يكون اختيار عشرة أعداد عشوائياً مرتبطاً بمجموعة أعدادك من واحد إلى عشرة؟

الطالب: لنقل: إن 88 هي مجموع إضافة عددين من هذه الأعداد أو عدد آخر. أي عدد يمكنك الحصول عليه هو واحد من هذه الأعداد، أو من مجموع إضافتها بعضها إلى بعض. لذا، فإن أي شيء يمكن أن تفعله ما هو إلا حيلة جمع هذه الأعداد أو دمجها.
(نحن ننظر إلى $49+52=13+88$)

الباحث: حسناً، دعني آخذ العدد 49 من مجموعتك، فما الذي تعنيه بالدمج؟

الطالب: خذ العدد 4 و 9 وضعهما معاً تحصل على 49.

الباحث: وكذلك العدد 52؟

الطالب: إنه 2 و 5.

الباحث: والآن، كيف نربط هذا بالعددين 13 و 88؟

الطالب: لأنهما أتيا من المجموعة نفسها، فالعملية ليست سحب العدد من شيء مختلف. إنهما من مجموعة الأعداد من واحد إلى عشرة ذاتها.

الباحث: ما زلت غير متأكد ما الذي ستختاره.

الطالب: يمكنك اختيار عدد من هذه المجموعة.

الباحث: ولكن كيف يجعلنا هذا نحصل على مجموعين متساويين؟

الطالب: تماماً مثل الأعداد جميعها في هذه المسألة، حيث يمكن إضافة بعضها إلى بعض، مثل: $1+1=2$, $1+3=4$ ، ويمكنك مواصلة ذلك على هذا النسق.

الباحث: حسناً، ولكن كيف يجعل هذا $49+52=13+88$ وكيف تنتقل من هنا إلى هناك؟

الطالب: هذه طريقة متقدمة جداً، فهناك عدان بدلاً من وجود عدد.

كان «جيم» يحاول جاهداً إثبات حله. فقد كان يرى أن الأعداد ضمن المجموعة المؤلفة من عشرة أعداد تشتمل على بعض التركيبات للأعداد من صفر حتى تسعة، لكن لا تزال كيفية الحصول على مجموعين متساويين غير واضحة المعالم، وقد عزا ذلك إلى «النظام المستند إلى عشرة أعداد وكيفية إضافة الأشياء بعضها إلى بعض». ربما يذكر القارئ أن «مات» قد عرض مناقشة مماثلة اشتملت على الأعداد من صفر حتى تسعة، ولكنه حاول جمع مجموعات تحتوي على أقل من عشرة أعداد ليتحقق صحة تخمينه بوساطة ضبط خيارات الأعداد في تلك المجموعات. أما حالة «جيم»، فقد حاول التوصل فيها إلى رؤيته المسألة بالتفكير ملياً في المجاميع في المجموعة (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)، وملاحظة أن المجاميع كلها يمكن التعبير عنها بالصيغة $10 + أ + ب$ ، حيث أ و ب ينتميان إلى المجموعة 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. وقد قاده ذلك إلى القول إن اختيارين يقودان إلى المجموع نفسه؛ بسبب طريقة جمع رموز الأعداد المحدودة. وعلى النقيض من «جيم» و«جون»، قررت «جيمي» (Jamie) التجريب بدءاً من شروط المسألة الأولية بهدف التوصل إلى رؤية تفسر سبب حدوث مثل هذه المجاميع الغامضة.

التلاعب بالفرضية المعطاة

بدأت «جيمي» المسألة في صحيفة مذكراتها حيث كتبت:

تتطلب المسألة أن تضع مجموعة مؤلفة من عشرة أعداد موجبة جميعها أقل من مئة. وتنص المسألة على وجود اختيارين من المجموعة س يكون لهما المجموع نفسه. وليس من المهم ما الأعداد التي أختارها، بل ما أريد التوصل إليه هو سبب حدوث ذلك، وإعطاء أمثلة داعمة. سيلاحظ القارئ أن «جيمي» قد أشارت من خلال إعادة صياغتها المسألة إلى «عرض أمثلة عن سبب حدوثها».

لقد قررت، لكي تبدأ بالمسألة، انتقاء عشرة أعداد صحيحة لـ «مجموعات الأعداد المختلفة». وستبحث بعد ذلك عن اختيارات تعطي المجموع نفسه، ثم كتبت: «عليّ تجريب عمليات جمع مختلفة قبل التوصل إلى مجموعة تلبى الغرض، ولكن لا بد من وجود اختيارين يعطيان المجموع نفسه دائماً».

جربت «جيمي» ثلاث مجموعات مختلفة، ووجدت في كل حالة من الحالات اختيارين يعطيان المجموع ذاته. تألفت المجموعة الأولى من 1, 2, 16, 19, 25, 40, 45, 72, 75, 89 التي

أعطت $1+2+16=19$ ، وهو أحد عناصر المجموعة. في حين تكوّنت مجموعتها الثانية من 3، 12، 15، 30، 35، 50، 63، 74، 87، 99 أنتجت $3+12=15$ وهو عنصر من عناصر المجموعة، و $87+12=99$ وهو أحد عناصر المجموعة أيضاً. أما مجموعتها الأخيرة فكانت 89، 90، 91، 92، 93، 94، 95، 96، 97، 98، أنتجت $90+92=89+93=182$ ، $93+94=95+96=188$ و $3+95=94+96=188$.

وعند هذه النقطة خلصت الطالبة إلى القول:

لا أعرف كيف سأثبت حدوث هذا دائماً. ولا بد من وجود نظرية ما تفسر حدوث هذا. لا أعرف تلك النظرية ولا أستطيع تخمين ماهيتها. ولا أظن أن ذلك يحدث دائماً بسبب استخدامنا عشرة أعداد صحيحة فقط.

سيلاحظ القارئ أن اختيارها الأعداد العشرة الصحيحة أصبح أقل عشوائية في المجموعة الثالثة، حيث اختارت أرقاماً متتالية من 89 حتى 98، ولم تضع نظاماً لإيجاد المجاميع المتساوية، وكان الباحث يأمل في أن تظهر المقابلة سبب توقفها عن متابعة المسألة.

الرواية الثانية

الطالبة: جرّبت مجموعات مختلفة ونجحت جميعها، ولم أتمكن من معرفة

سبب ذلك، أهي نظرية أم ماذا.

الباحث: إذن، فقد عثرت دائماً على خيارين؟

الطالبة: نعم، جربت مجموعات مختلفة ونجحت جميعها دائماً، ولم أعرف

سبب نجاحها. ولم أتمكن من إثبات نظرية أو شيء ما (تتنهد).

الباحث: إذن، فقد جربت مجموعات مختلفة مؤلفة من عشرة أعداد.

الطالبة: (صمت) حاولت معرفة سبب نجاحها.

الباحث: فيم فكرت؟

الطالبة: فكرت في أنها يجب ألا تكون أعداداً سالبة، بل تكون بين الواحد

والمئة.

قالت «جيمي» إنها ستعاود النظر في المسألة، وبعد ذلك تتحدث عنها. واشتملت

محاولتها الثانية على بناء كثير من المجموعات. حيث عدلت في هذه المرة محددات

المسألة على النحو الآتي، كما في الشكل 10: 2.

أ. مجموعات عدة مؤلفة من عشرة أعداد صحيحة سالبة تقع بين -1 و -100.
 ب. مجموعات عدة مختلفة الحجم تحتوي على أعداد صحيحة موجبة وسالبة تقع بين 1 و 100، و -1 و -100.

ج. مجموعات عدة تشتمل على خمسة عشر عدداً صحيحاً موجباً بين 1 و 200.
 د. مجموعات عدة مختلفة الحجم تحتوي على أعداد صحيحة موجبة تقع بين 1 و 100.

ملاحظة: حاولت «جيمي» في كل واحدة من الفئات الأربع، إيجاد تبرير لتسويغ ضرورة قبول الفرضية في المسألة المعطاة. وقد كانت النقاشات التي سجلتها في صحيفة مذكراتها لكل فئة على النحو الآتي:

أ. $\{73, -90, -89, -99, -96, -90, -89, -86, -73, -72, -65, -13, -1\}$
 $-86 = -13$.

إذا كانت القوانين تنص على استخدام عشرة أعداد سالبة أقل من مئة فسوف تنجح أيضاً، لكن هذا لا يحل المسألة (المعطاة)؛ لأننا يجب أن نستخدم أعداداً موجبة.

ب. $\{3, 7, 25, 31\}$; $\{-17, 27, 52\}$

استخدمت الأعداد الموجبة والسالبة، وهذه المجموعات مؤلفة من أقل من عشرة أعداد. لذا، لم ينجح شيء هنا!

ج. $\{3, 17, 24, 74, 84, 91, 93, 96, 108, 14, 121, 135, 145, 157, 163\}$
 $121+24=145$; $91+17=108$; $93+3=96$.

يمكن أن تنجح إذا غيرنا بعض الإرشادات، حيث يمكن أن تكون الأعداد أقل من مئتين بدلاً من أقل من مئة، وخمسة عشر عدداً بدلاً من عشرة أعداد.

د. $\{1, 3\}$

لا يمكن العمل بعددين فقط؛ بسبب استحالة الحصول على اختياريين ناجحين.

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$

يمكن أن تنجح هنا، نظراً إلى أن $1+2=3$ و $1+3=4$. ولكن لو كان لدينا $\{72, 93, 94, 95, 96\}$ لما نجحت.

استناداً إلى تجاربها بالفرضية المعطاة في الفئات أ، ب، ج، د (الشكل 10:2)، اختتمت «جيمي» بقولها: «كي تحصل دائماً على الحل الصحيح، لا بد من وجود عشرة أعداد صحيحة موجبة أو أكثر، ولا أعتقد أن الأعداد لها تأثير أيّاً كانت، ويجب أيضاً ألا تكون أقل من مئة، إذ قد تكون أكثر». استخدمت «جيمي» أمثلة وأمثلة مضادة في الحالات التي عدّلت فيها الفرضية لتبرير صحة الفرضية المعطاة، ويُعدُّ هذا منحى مهمّاً. وتجدر الإشارة إلى أنها حاولت التعامل مع المسألة مرة أخرى، كما حاولت تنويع الشروط المفروضة على المسألة بهدف التوصل إلى رؤية ما. ويوضح الحل الآتي بناء مثال مضاد للمسألة، حيث تغيرت الفرضية إلى مجاميع مجموعات مؤلفة من أربعة عناصر، ويظهر الحل أيضاً تشابهاً لخط تفكير جيمي.

بناء حالة «مرضية» Pathological خاصة⁽¹⁾

بدأت «هنّا» (Hanna) المسألة بإعادة كتابة المثال المقدّم من الباحث/المعلم، ثم افترضت السؤال الآتي لنفسها: «لماذا يحدث هذا لكل مجموعة مؤلفة من عشرة أعداد صحيحة موجبة أقل من مئة؟» ولكي تجيب عن هذا السؤال، قررت هنا أن «تبدأ باختيار مجموعتين لعشرة أعداد صحيحة أقل من مئة، وترى هل يكون مجموع اختياريين مختلفين متساوياً». وبعد هذا، سوف «تنظر إلى نتائجها وتحاول فهم السبب».

تألّفت مجموعة «هنّا» الأولى من {19, 7, 29, 30, 3, 21, 15, 16, 17, 28}، وأوجدت مجموع $16+3=19$ وهو من أحد عناصر المجموعة. في حين تألّفت مجموعتها الثانية من {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}، حيث أوجدت مجموع $2+3=5$ وهو أحد عناصر المجموعة. أما مجموعتها الثالثة فتألّفت من {2, 3, 5, 8, 4, 6, 7, 1, 10, 11}، حيث أوجدت مجموع $5+4=8+1=9$. في حين اشتملت مجموعتها الرابعة على {11, 3, 19, 7, 30, 2, 4, 6, 5, 9}، وأوجدت مجموع $19+6+5=30$ وهو عنصر في المجموعة. ثم جربت أربع مجموعات

(1) الظاهرة المرضية في الرياضيات، هي التي تعد خصائصها غير معتادة أو سيئة أو مضادة للحدس. عادة، عندما يُشكك في جدوى النظرية من خلال الأمثلة العكسية، يحتاج المدافعون عن النظرية بالقول إن الاستثناءات مرضية. ويمكن القول (ولا سيما في الرياضيات ونظرية المجموعات)، إن

الباحثين عن القصور، يشبهون التجريبيين الذين يهدفون إلى هدم النظريات الثابتة- المراجع

أخرى تحتوي كل واحدة منها على عشرة عناصر، ووجدت أن اختياريين في الحالات جميعها يعطيان دائماً المجموع نفسه.

لا أستطيع الكشف عن أي تنقيح اختارته «هنا» لتحديد الأعداد الصحيحة. حيث اشتملت المجموعات الست الأولى التي بنتها على أعداد صحيحة أقل من العدد عشرين. وكان لديها مجموعة واحدة مؤلفة من أعداد صحيحة من واحد إلى عشرة. ولم تضع أيضاً طريقة منظمة لحساب الاختيارات جميعها التي تؤدي إلى مجموعين متساويين، وأما ما يتعلق بسبب حدوث مثل هذه الظاهرة استناداً إلى تناولها المجموعات الثماني، فخلصت إلى ما يأتي:

«كانت كل مجموعة» من المجموعات جميعها التي تتألف من عشرة أعداد صحيحة موجبة، تتألف من اختياريين تتساوى مجاميعهما عند إضافتهما إلى بعضهما بعضاً. أعتقد أن سبب حدوث ذلك مرده إلى عدم استخدام أعداد سالبة ولأننا لا نقوم بعملية الطرح، ومن ثم، فلن يكون لديك أعداد سالبة. أعتقد أن سبب حدوث ذلك يعود إلى أنك تستطيع انتقاء عشرة أعداد صحيحة أقل من مئة، الأمر الذي يمنحك خيارات انتقاء جمة. إضافة إلى أن عشرة أعداد تمنحك عدداً قليلاً من الأعداد يمكنك تغييرها وجمعها، لتحصل على المجاميع المتساوية، ولكن إن كان لديك مجموعة مؤلفة من أربعة أعداد أو خمسة فقط أقل من مئة، فلا يمكنك الحصول دائماً على مجموعين متساويين، حيث يوجد لديك عدد قليل من الأعداد تتعامل معها» (Journal entry).

بنت «هنا» عندئذٍ مجموعة مؤلفة من أربعة عناصر، هي: {1, 2, 48, 19}، وحسبت المجاميع الممكنة جميعها في هذه المجموعة إلى جانب المجاميع البسيطة ل 1, 2, 48, 19. وكانت المجاميع المتبقية: $19+2=31$; $19+48=67$; $19+1=20$; $2+48=50$; $2+1=3$; $48+1=49$; $19+2+48=69$; $19+2+1=22$; $19+48+1=68$; $2+48+1=51$; $19+2+48+1=70$ وتوصلت إلى نتيجة مفادها «لا يوجد شيء في تلك المجموعة متساوي المجموع؛ بسبب عدم توافر عدد كافٍ من الأعداد تستطيع وضعها معاً؛ لتحصل على مجموع معين يكون مساوياً لمجموع اختيارات أخرى.»

كانت حجتها بوجود قدر كبير من التنوع (من حيث الاختيارات الممكنة) ضمن المجموعة المؤلفة من عشرة أرقام شبيهة بحجة «جون»، فقد افترضت أن المجموعة الصغرى لا تحتوي على «تنوع»، ومن ثم، فإن اختيارين لن يعطيا المجموع نفسه في مجموعة كهذه، وقد دعمت تخمينها ببناء مجموعة مؤلفة من أربعة عناصر، حيث لم ينجم عن مجموع اختياريين مجموع متشابه. ويقع هذا المثال المضاد ضمن الفئة الثانية من تجارب (جيمي). وبعد أن رأينا أربعة مناحٍ لتناول المسألة المعيّنة، فإنني أعرض أخيراً منحى غير عادي وضعته «إيمي» (Amy).

بناء مجموعة غير عادية

افتتنت «إيمي» (Amy) بهذه المسألة؛ فبنت مجموعة غير عادية في عملية تجريب مجاميع أعداد متعددة. وبعد بناء كثير من المجموعات المؤلفة من عشرة عناصر، تحققت لديها ظاهرة الاختيارات المختلفة التي تعطي المجموع نفسه. وكتبت في صحيفة مذكراتها أن عمليات التحقق المتكررة لهذه الظاهرة تؤكد صحة نجاحها دائماً، ولمعرفة سبب إعطاء الخيارات المختلفة المجموع ذاته، فقد تطلب الأمر منحى جديداً كاملاً، حيث يختار كل عنصر على نحوٍ يحقق الهدف. بنت المجموعة {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...}، وكتبت:

«حسناً، أعتقد أنني وصلت إلى مكان ما! حسناً، لقد حاولت إجراء معظم التنوع الممكن بهدف اختيار هذه المجموعة. دعني أوضح. بدأت بالعدد 1 ثم اخترت العدد 2. والآن، لم أكن أبحث عن حل، لذا، لن يكون الرقم اللاحق 3 بالتأكيد، وبذلك وضعت العدد 4 بدلاً منه؛ لأن $1+2=3$ ، ومن ثم سأحصل على جواب فوري. وهكذا، فقد واصلت عملي على هذا النحو. وسيكون العدد اللاحق الأكبر 7؛ لأن $1+2+4=7$ ، لذا، لم أختَر العدد 7. بل اخترت العدد بدلاً منه 8. والآن، $1+2+4+8=15$ ، وعلى هذا، لم أختَر العدد 15 لأنه سيكون حلاً، لذا، اخترت الرقم ستة عشر. وعندما حصلت على هذه الأعداد الخمسة ... 1, 2, 4, 8, 16، اكتشفت نمطاً. عليّ أن أضاعف العدد الأخير للحصول على العدد اللاحق... (وحصلت على) المجموعة {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...}.

وعند الانتهاء من بناء هذه المجموعة، كتبت «إيمي» أنها لا تستطيع مواصلة مخططها؛ لأن المسألة تتطلب أن تكون عناصر المجموعة بين واحد ومئة. وتفترض أن تكون مجموعتها

المؤلفة من سبعة عناصر مجموعة «قصوى» لا تنتج اختيارات لأعداد تضاف إلى المجموع نفسه.

الاحتمالات اللاكاتوسية للتطبيق من خلال بناء صيغ رياضيات لحلول / إستراتيجيات الطلاب

بعد أن عرضنا مسارات لسة طلاب في هذه المسألة، أصبحنا قادرين على التفكير ملياً في طبيعة النتائج وتقدير الاحتمالات الرياضية (محتوى وعملية) داخل غرفة الصف. وسأعرض في هذا الجزء أولاً مشاهد الصف المعقولة، استناداً إلى رؤى الطلاب الفعلية التي ناقشناها في الجزء السابق. وبهذه الطريقة، فأنا أضع نفسي مكان المعلم المتأمل، وأحلل رؤى الطلاب لأدرك خبرة بناء الصيغ الرياضية وفقاً لرؤى هؤلاء الطلاب؛ بهدف تسهيل لغة المناقشة في غرفة الصف التي تؤدي إلى رياضيات قيمة. ويمكن للمرء أن يتصور الموقف اللاكاتوسي، حيث يوجد هؤلاء الطلاب الستة في غرفة صف «مثالية» يتحاوون بخصوص محاولاتهم لحل المسألة، ويسهل المعلم خبرات بناء الصيغ الرياضية التي تؤدي إلى رياضيات معقدة.

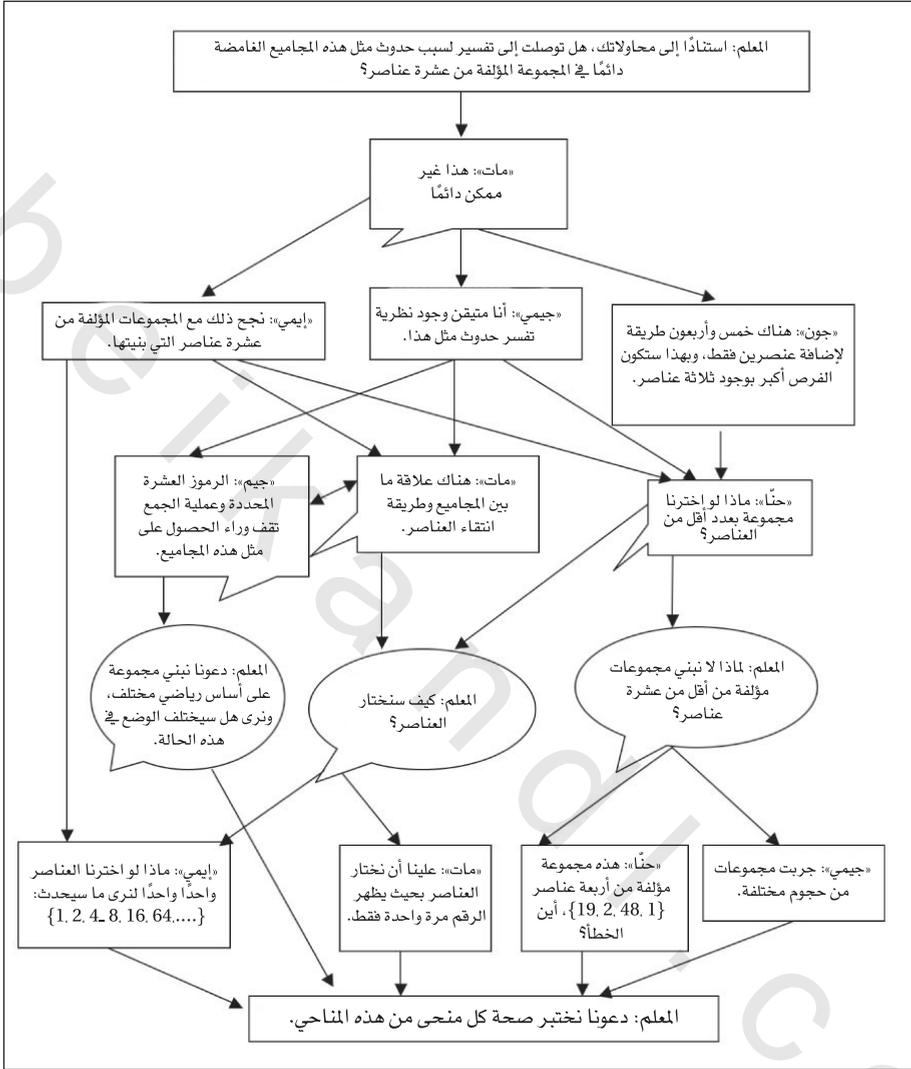
يوضح (الشكل 3:10) لغة المناقشات المعقولة استناداً إلى رؤى وإستراتيجيات الطلاب، ويوضح (الشكل 4:10) بناء المسارات الممكنة المؤدية إلى محتوى متنوع يستند إلى إستراتيجيات الطلاب في بناء الصيغ الرياضية، ويحتوي هذا الشكل أيضاً على عناصر العملية اللاكاتوسية المتمثلة في التخمين-البرهان-الدحض التي تؤدي إلى رياضيات غنية. لقد شرحنا كلا الشكليين في الجزء الآتي بعمق، إضافة إلى مناقشة الرياضيات الفعلية الناشئة عن بناء الصيغ الرياضية لرؤى/إستراتيجيات الطلاب، أي اكتشاف بنى عامة ونتائج أعمق.

مناقشة مسارات معقولة

يبدأ النقاش في (الشكل 3:10) بطرح المعلم سؤالاً على الطلاب الستة يتعلق بقدرتهم على التوصل إلى تفسير معقول للظاهرة الغامضة المتمثلة في إنتاج الاختيارات المختلفة

لأعداد تعطي مجاميع متساوية في المسألة المعطاة. لم يوافق «مات»، الذي كان طالباً متحمساً ولا سيما في هذا المساق، على إمكانية حدوث ذلك استناداً إلى إستراتيجيته بانتقاء عناصر بحيث لا يتكرر فيها أي رقم. في حين أفاد كل من «إيمي» و«جيمي» و«جون»، الذين تحققوا هذه الظاهرة لمجموعات متعددة تتألف من عشرة أعداد، أن هذه المجاميع تحدث في المجموعات جميعها المؤلفة من عشرة عناصر التي بنوها. أما «جيمي» فتعتقد وجود نظرية تفسر سبب حدوث هذا، في حين يرى «جون» أن هذه المجاميع تحدث بسبب مجموعة الطرق التي يمكن أن يحسب بها المرء مثل هذه المجاميع في مجموعة مؤلفة من عشرة عناصر، وأفاد بوجود خمس وأربعين طريقة للجمع بين عنصرين في وقت واحد. وهناك كثير من المسارات في هذه المرحلة التي يمكن أن تسلكها المناقشة. أشار «مات» إلى أن سبب حدوث مثل هذه المجاميع يعود إلى استخدام طريقة معيّنة في اختيار العناصر العشرة. وترى «هنّا» عدم حدوث مثل هذه المجاميع إذا كان مجموع العناصر في المجموعة أقل من عشرة أرقام. وبنى «جيم» على ملاحظات «جيمي» و«مات»، معتقداً أن المجاميع ما هي إلا دالة للطريقة المحدودة التي يستطيع المرء بواسطتها اختيار عشرة عناصر باستخدام نظام الأرقام المستند إلى عشرة. ويستطيع المعلم في هذه المرحلة أن يطرح أسئلة عدة تشجع الطلاب على تبادل الأمثلة فيما بينهم. فمثلاً، سيتيح سؤال «كيف سنختار العناصر» المجال لكل من «مات» و«إيمي» لتبادل الأفكار في بناء مجموعة قصوى مؤلفة من سبعة عناصر حيث لا يحدث أي مجموع فيها، وبناء مجموعة لا تسمح بتكرار أي عدد على التوالي. ويمكن للمعلم أيضاً أن يطلب بناء مجموعات تتألف من أقل من عشرة عناصر، وبذلك تتاح الفرصة أمام «هنّا» و«جيمي» لتبادل أعمالهما مع الآخرين.

ولكي يضيف المعلم رؤية «جيم» بخصوص الغموض الذي يكتنف النظام المبني على عشرة، يمكنه أن يطلب بناء مجموعة مؤلفة من عشرة عناصر على أساس مختلف.



شكل 10:3 مناقشة معقولة استناداً إلى حلول الطالب وإستراتيجياته

تصور للمسألة المعطاة. ويتعين على القارئ أن يلاحظ أنه على الرغم من أن المناقشة قد بنيت بروح التخيل اللاكاتوسي، فإنها معقولة جداً بكل تأكيد، حيث إنها بنيت على استجابات فعلية (حقائق) للطلاب في صحائف مذكراتهم، ومخطوطات المقابلات التي أجريت معهم.

مناقشة بناء صيغ رياضية للخبرات التي تؤدي إلى رياضيات معقدة

يعرض (الشكل 4:10) احتمالات جمة لتحويل رؤى الطلاب إلى صيغ رياضية، حيث يسهل المعلم (أو ينظم) هذه العملية. وناقشت أيضاً الرياضيات الرائعة التي برزت من آراء الطلاب في المسألة. أما إستراتيجية «مات» لبناء مجموعة يتكرر فيها كل رقم مرة واحدة فقط 84, 69, 78, 12, 7, 3، من أجل تنفيذ الادعاء بحدوث مثل تلك المجاميع دائماً، فيستطيع المعلم دائماً إعادة تنفيذها دائماً من خلال عرض مثال مضاد: $3+12+69=84$ لتحفيز الطلاب إلى وضع إستراتيجية لعد مجاميع العناصر الثلاثة جميعها. لذا، يمكن أن يسمح لـ «جون» بمشاركة إستراتيجيته لإيجاد مجموعات من عنصرين بانتظام، ويمكن أيضاً اختيار توجه جيم نحو العدد المحدود للرموز المبنية على عشرة، ونجم عنه عدد محدود من المجاميع عن طريق الطلب إلى الطلاب تقدير عدد المجاميع الممكنة في المجموعة المؤلفة من عشرة عناصر.

ويمكن أن يطلب إلى الطلاب تخمين إستراتيجية لمجاميع ثلاثة عناصر استناداً إلى عمل «جون»، الذي يمكن توسعته على نحو غير محدود، وكذلك ربطه بالمسألة العامة المتصلة بعدد المجموعات الفرعية لأي مجموعة معطاة، وبذلك ينير الطريق أمام البنية العامة للمجموعات الفرعية المنبثقة عن المجموعات. ويستطيع المعلم الطموح أن يوسع هذا على نحو أكبر بأن يطلب إلى الطلاب بناء مجموعات لها مجاميع مجموعات فرعية متميزة، وهي المسألة التي طرحها «بول إيردوس» (Paul Erdos) في عام 1930، ومن ثم يطرح مسألة «إيردوس» للمجموع المتراكم التي تتلخص على النحو الآتي:

يكون للمجموعة S المؤلف من أعداد صحيحة مجاميع مجموعات فرعية متميزة

إذا كان في المجموعة $\{ \sum_{x \in X} x : X \subset S \}$ عنصراً $2^{|S|}$ متميزاً. نفترض أن

وأن S لها مجاميع مجموعات فرعية متميزة، فكم أصغر حجم $f(n) = \min \{ \max S: |S|=n \}$ لـ $f(n)$ ؟

افتراض «إيردوس» في عام 1931 أن $f(n) \geq c 2^n$ للثابت c وفي عام 1955 أثبت إيردوس وموسر Moser أن $f(n) \geq 2n/10\sqrt{n}$ ، وبقي هذا أفضل تقدير للحد الأدنى (Bohman, 1996).

ومن الطبيعي أن نسأل أنفسنا: ترى، ما الحد الأعلى؟ إذا أخذنا المجموعة S لتكون هي القوة n الأولى من 2 كما فعلت «إيمي» فإننا نرى بسهولة أن $f(n) \leq 2^{n-1}$. كانت رؤية «إيمي» غير العادية للمسألة وبنائها لمجموعتها «القصى» قد أنتجت الأعداد الثلاثة الأولى في سلسلة كنواي-غاي (Conway-Guy) التي بنياها في عام 1967 (Guy, 1982)، وبرزت من هذا المجموع الصعب للمسألة المتراكمة. يمكن تعميم المسألة المعطاة للطلاب للحصول على أعداد كنواي وغاي على النحو الآتي (Gardner, 1997). وعلى نحو ما حددنا آنفاً، نفترض $f(n)$ العدد الصحيح الأصغر، بحيث توجد أعداد صحيحة N موجبة $f(n) \leq N$ تكون فيها مجاميع المجموعات الفرعية جميعها متميزة. القيم الثلاثة الأولى لـ f هي $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 4$. ومن المثير للاهتمام أن $f(4)$ ليس 8 بل 7. افترض الحد 8 من حقيقة أن مجاميع المجموعة الفرعية للقوى الأربع الأولى من اثنين هي: 8 و 4 و 2 و 1 متميزة على نحو واضح. وكانت هذه رؤية «إيمي» عندما حاولت بناء مجموعة بمجاميع متميزة. وقد تقود فكرة «إيمي» القارئ (الصف «المثالي») إلى الاعتقاد أنه إذا ما اخترت أربعة أعداد أقل من أو تساوي سبعة، فعندئذ يكون مجموعا اختيارين من المجموعة متساويين. وقد ثبت بطلان ذلك من خلال المجموعة الآتية: $S = (3, 5, 6, 7)$ (تحقق ذلك بنفسك!). ولعل ما يثير الدهشة على نحو أكبر هو أن $f(6) = 24$ وليس 32 التي يمكن أن يشك القارئ فيها من خلال اعتبارات التمثيل الثنائي. والمجموعة المقابلة هي $S = (11, 17, 20, 22, 23, 24)$. أما القيم الثماني الأولى لسلسلة كنواي وغاي $f(n)$ فهي: 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 84. والحد الأعلى الذي توصل إليه كنواي وغاي للمجموعة S كان 2^{n-2} ، شريطة أن تكون n كبيرة بما يكفي. وسيقود هذا المسار إلى تقديم الصياغة الرياضية للبنية الكبرى لما وراء المسألة الأصلية.

أما المسار الآخر في التعامل مع المسألة المتراكمة وأرقام كنواي وغي، فهو من خلال الإستراتيجيته المنظمة لإيجاد المجموعات الفرعية، ومن ثم يمكن استخدام المجاميع الممكنة جميعها لاختبار مجموعة «هنا» المؤلف من أربعة عناصر. والسؤال المطروح هو: هل يمكننا بناء مجموعة مؤلفة من خمسة عناصر وستة عناصر وسبعة عناصر، وهكذا، مع اختيار أعداد صحيحة من بين واحد ومئة، على ألا تعطي الاختيارات المختلفة المجموع نفسه. وسيتيح هذا السؤال المجال أمام المعلم لأخذ أفكار كل من «إيمي» و«جيمي» وتحويلها إلى صيغ رياضية مثمرة بحيث تؤدي إلى مجموع المسألة المتراكمة. وأخيراً، تؤدي مجموعة «إيمي» القصوى المؤلف من سبعة عناصر أخرى إلى مجموع المسألة المتراكمة التي اقترحها إيردوس، وكذلك عملية أعداد كنواي وغي إذا ما اقترنت بالتسهيل الملائم.

وتتمثل الإمكانية الأخرى في بناء الصيغ الرياضية بعد أن يكون الطلاب قد توصلوا إلى طرائق لإيجاد مجموعات فرعية من المجموعات، ومكّن عدد هذه المجموعات الفرعية «إيمي» من تطبيق مبدأ برج الحمام بهدف حل المسألة الأصلية. ويمكن عندئذٍ استخدام مبدأ برج الحمام في تسهيل حل المسألة الأصلية بملاحظة أن أصغر حل ممكن هو واحد، وأكبر حل ممكن هو $945 = 99 + \dots + 91 + 90$ ، لكن عدد المجموعات الفرعية لمجموعة مؤلفة من عشرة عناصر أكبر من ذلك بكثير، أي $2^{10} = 1024$ ، ومن ثم يجعل الاختيارات المتعددة للمجموعات الفرعية تنتج المجموع نفسه. وبهذه الطريقة، يمكن دمج الأفكار المتعددة للطلاب بدءاً من اختبار المجموعة $90, 91, \dots, 99$ «مات»، مروراً بحساب المجاميع «جون»، ومن ثم إلى تخمين الأرقام المحدودة بسبب الخيارات المحدودة للأعداد «جيم»، وصولاً إلى تأكيد صحة فرضية «هنا» و«جيمي». وتستطيع «هنا» و«جيمي» وغيرهما اختبار صدق تخميناتهم للمجموعات المؤلف من أقل من عشرة عناصر. وهذا من شأنه تأكيد حسّ «جيمي» بأن مجموعة مؤلفة من خمسة عشر عنصراً بأعداد صحيحة تقع بين الواحد والمئتين ستؤدي بالتأكيد إلى كثير من الاختيارات تؤدي إلى المجموع نفسه ($190 > 2^{15}$ $199 + \dots + 191 +$). هناك عدد ضخم من الإمكانيات لصوغ الأفكار الأخرى القوية صياغة رياضية، مثل قابلية القسمة والتطبيق الواسع لمبدأ برج الحمام. مثلاً، أثبت أننا نستطيع

اختيار مجموعة فرعية من مجموعة مؤلفة من عشرة أعداد صحيحة، بحيث يقبل مجموعها القسمة على عشرة (Fomin, Genkin, & Itenberg, 1996).

النتائج والمضامين

تؤكد المناقشة السابقة ذلك الكم الكبير من الرياضيات الذي بات متاحاً لطلاب المرحلة الثانوية إذا ما أفاد المعلم من رؤى الطلاب في المسائل العادية التي تقودهم إلى اكتشاف البنى الرياضية. وعلى الرغم من أن الطلاب الستة كان يملكون فقط التطور الرياضي لطلاب الجبر المبتدئين، وكانوا يعملون بأدوات محددة، فإن محاولاتهم أظهرت النزعة الطبيعية نحو ابتداء أدوات رياضية جديدة لمعالجة هذه المسألة. بمعنى أن سلوكهم الرياضي كان مشابهاً لعملية بناء الأدوات الغنية التي تميز تاريخ الرياضيات، عندما كانت تواجه علماء الرياضيات مسائل محيرة مثل، نظرية فيرمات (Fermat) الأخيرة، ومسألة الألوان الأربعة. وهكذا، فإن عملية إيجاد خبرات رياضية تحتم إيجاد أدوات جديدة تُعدّ أسلوباً تربوياً مفيداً.

ونود هنا تأكيد قيمة اختيار المسائل الجديدة (النموجية) التي تستحوذ على اهتمام الطلاب، وتكون سهلة المنال للممارسين من أصحاب المهنة. ويبدو أن كثيراً من الدراسات تشير إلى أن المسائل التوفيقية ومسائل نظرية الأعداد تُعدّ مفيدة بصورة خاصة في تسهيل هذه العملية، إضافة إلى أنها تقود نحو استقصاء البنية الأساسية. إن من شأن إمكانية الوصول إلى المسائل السهلة الصياغة (ولكن المعقدة رياضياً) أن تساعد المعلمين على تقوية التفكير المستقل، وتعزيزه في غرفة الصف.

ومع أن التوجه الحالي في تعليم الرياضيات يدور حول تأكيد استخلاص النموذج للمسائل/ الأنشطة الموجودة في سياق العالم الحقيقي (Lesh & Doerr, 2003) بصفته وسيلة لحفز بناء الصيغ الرياضية في غرفة الصف، فإن المسائل الرياضية الجديدة ما زالت تحتفظ بمكانتها المهمة في المنهاج. ونحن نعتقد أن عملية تشجيع الطلاب على معالجة مسائل العد الشاذة (Atypical Counting Problems) لعمل روابط عميقة بموضوعات نظرية الأعداد والتوافيق والتحليل، تُعدّ متممة للرياضيات التطبيقية والإحصاء اللذين

تعلمهما الطلاب عبر منحى النمذجة الذي يكتسب حماساً كبيراً في الوقت الراهن. ويكمن الأمل الكبير في ألا ينسى معلمو الرياضيات الجمال الكامن في الأنشطة الرياضية البحتة، وأن يؤكدوا لطلابنا أن مثل هذه الأنشطة تعزز من خيال علماء الرياضيات وتصوراتهم، وأسهمت أيضاً في نموها منذ فجر تاريخها.

تتمثل قيمة السماح للطلاب بمدة إضافية من الوقت لحل مسألة ما، وتشجيعهم على المشاركة في كتابات تأملية في صحيفة مذكراتهم، في تحقيق كثير من الأهداف. فهي لا تؤدي فقط إلى إيجاد جو هادىء يتيح للطلاب تجريب كثير من الإستراتيجيات، بل تساعد المعلم أيضاً على تخطيط حصص دراسية تشتمل على مناقشات رياضية تهدف إلى تسهيل إيجاد رياضيات جديدة، وكذلك اكتشاف البنية. وتعدُّ كتابة الطلاب في صحائف المذكرات مصدراً ثرياً للبدء بالمناقشات الصفية مع الإبقاء على هدف صياغة البنى الرياضية في الأذهان. ولا يتوقف الأمر عند هذا الحد، بل إن محاولات الطلاب غير الصحيحة أو الأمثلة المضادة تخدم الغرض التربوي، بإتاحة المجال أمام المعلم أو الطلاب الآخرين لوضع التنفيذ المناسب الذي يتيح لهم إجراء التعديلات الضرورية للمضي بالرياضيات قدماً. لقد رأينا في محاولات الطلاب السابقة في التعامل مع المسألة، أن لديهم ميلاً طبيعياً لتجربة الفرضيات عندما تكون المسألة صعبة جداً في صياغتها الحالية. ومن المؤكد أن التوصل إلى رياضيات جديدة يتحقق عبر عملية التعديل المتواصلة هذه التي تتعرض فيها الفرضية الأولية إلى غرلة حتى تبرز النظرية إلى السطح. تنقل لنا الطريقة اللاكاتوسية المتمثلة في التخمين-البرهان-الدحض صورة نابضة بالحياة للرياضيات. ومن المفيد تعريض معلمي المستقبل لنمذجة هذه العملية في الرياضيات ومساقات تدريسها. وتكشف النقاشات الصفية الافتراضية السابقة، وما حملته من آراء حقيقية للطلاب، تلك الرياضيات الثرية التي تصبح سهلة المنال عبر الطريقة اللاكاتوسية والتسهيل الدقيق للتطبيق. وهذا يستدعي ضرورة اكتساب معلمي المستقبل معرفة عميقة بالرياضيات المتقدمة.

وفي هذا السياق، دعا دوير وليفش (Doerr And Lesh, 2003) معلمي الرياضيات إلى إدراك إمكانية تطبيق مبادئ دينيز (Dienes 1960, 1961) لتربية المعلمين وقياسها.

فمثلاً، يُعدُّ «المبدأ متعدد المستويات» (Multi-Level Principle) الذي اقترحه دوير وليش نظيراً تعليمياً لـ «المبدأ الديناميكي» (Dynamic Principle) الذي نادى به دينيز، وأكدّه كلُّ من دوير وليش بقولهما: «يحتاج المعلمون في الغالب إلى معالجة المحتوى، وإستراتيجيات التعليم، والجوانب النفسية للمواقف التعليمية/التعلمية في آن معاً» (ص. 133). وهذا يعني أننا عندما نعطي الطلاب مسألة مفتوحة النهاية، تصبح عندئذٍ مسؤوليتنا معالجة أكبر قدر ممكن من جوانب المسألة، وبناء صيغها الرياضية إلى أن تؤتي ثمارها في التوصل إلى اكتشاف البنية كما أوضحنا آنفاً. وضمن هذا المسعى، تُعدُّ منهجية للاكاتوس المتمثلة في التخمين-البرهان-الدحض أداة قيمة في بناء الصيغ الرياضية للمسائل غير العادية، وربط غرفة الصف اللاكاتوسية «المثالية» الخيالية بغرفة صف الرياضيات الفعلية.

قائمة المراجع

- Australian Education Council (1990). A National Statement On Mathematics For Australian Schools. Melbourne, Vc: Australian Educational Council.
- Bohman, T. (1996). A Sum Packing Problem Of Erds And The Conway-Guy Sequence. Proceedings Of The American Mathematical Society, 124(12), 3627-3636.
- Brodkey, J. J. (1996). Starting A Euclid Club. Mathematics Teacher, 89(5), 386-388.
- Dienes, Z. P. (1960). Building Up Mathematics. London: Hutchinson Education.
- Dienes, Z. P. (1961). An Experimental Study Of Mathematics Learning. New York: Hutchinson.
- Doerr, H., & Lesh, R. (2003). A Modeling Perspective On Teacher Development. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), Beyond Constructivism (Pp. 125-140). Mahwah, Nj: Erlbaum.
- English, L. D. (1998). Children's Problem Posing Within Formal And Informal Contexts. Journal For Research In Mathematics Education, 29(1), 83-106.
- English, L. D. (1999). Assessing For Structural Understanding In Children's Combinatorial Problem Solving. Focus On Learning Problems In Mathematics, 21(4), 63-82.
- Fawcett, H. P. (1938). The Nature Of Proof. Thirteenth Yearbook Of The Nctm. New York: Bureau Of Publications, Teachers College, Columbia University.

- Fomin, D., Genkin, S., & Itenberg, I. (1996). *Mathematical Circles (Russian Experience)*. American Mathematical Society.
- Gardner, M. (1997). *The Last Recreations*. New York: Springer-Verlag.
- Goldbach, C. (1742) Letter To L. Euler, June 7, 1742. (Accessed On January 11, 2004) [Http://Www.Mathstat.Dal.Ca/~Joerg/Pic/G-Letter.Jpg](http://Www.Mathstat.Dal.Ca/~Joerg/Pic/G-Letter.Jpg)
- Guy, R. K. (1982). Sets Of Integers Whose Subsets Have Distinct Sums, Theory And Practice Of Combinatorics, *Annals Of Discrete Math*, 12, 141–154. North-Holland, Amsterdam.
- Hogendijk, J. P. (1996). Een Workshop Over Iraanse Mozaïken. *Nieuwe Wiskrant*, 16(2), 38–42.
- Hung, D. (1998) Meanings, Contexts And Mathematical Thinking: The Meaning-Context Model. *Journal Of Mathematical Behavior*, 16(3), 311–344.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs And Refutations*. Cambridge, Uk: Cambridge University Press.
- Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Foundations Of A Models And Modeling Perspective On Mathematics Teaching, Learning And Problem Solving. In R. Lesh And H. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism* (Pp. 3–34). Mahwah, Nj: Erlbaum.
- Lewis, B. (2003). Taking Perspective. *The Mathematical Gazette*, 87(510), 418–431.
- Maher, C. A., & Kiczek, R. D. (2000). Long Term Building Of Mathematical Ideas Related To Proof Making. *Contributions To Paolo Boero, G. Harel, C. Maher, M. Miyasaki. (Organisers) Proof And Proving In Mathematics Education. Icme9 –Tsg 12. Tokyo/Makuhari, Japan.*
- Maher, C. A., & Martino A. M. (1996A) The Development Of The Idea Of Mathematical Proof: A 5-Year Case Study. *Journal For Research In Mathematics Education*, 27(2), 194–214.
- Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996B) Young Children Invent Methods Of Proof: The «Gang Of Four.» In P. Neshier, L. P. Steffe, P. Cobb, B. Greer & J. Goldin (Eds.) *Theories Of Mathematical Learning* (Pp. 431–447). Mahwah, Nj: Erlbaum.
- Maher, C. A., & Martino, A. M. (1997) Conditions For Conceptual Change: From Pattern Recognition To Theory Posing. In H. Mansfield (Ed.), *Young Children And Mathematics: Concepts And Their Representations*. Durham, Nh: Australian Association Of Mathematics Teachers.
- Maher, C. A., & Speiser, B. (1997). How Far Can You Go With Block Towers? Stephanie's Intellectual Development. *Journal Of Mathematical Behavior* 16(2), 125–132.

- National Council Of Teachers Of Mathematics. (2000). Principles And Standards For School Mathematics: Reston, Va: Author.
- Rotman, B.(1977). Jean Piaget: Psychologist Of The Real. Cornell University Press.
- Sriraman, B (2003A). Mathematical Giftedness, Problem Solving, And The Ability To Formulate Generalizations. The Journal Of Secondary Gifted Education,14(3),151–165.
- Sriraman, B (2003B) Can Mathematical Discovery Fill The Existential Void? The Use Of Conjecture, Proof And Refutation In A High School Classroom (Feature Article). Mathematics In School, 32(2), 2–6.
- Sriraman, B. (2004A). Discovering A Mathematical Principle: The Case Of Matt. Mathematics In School, 33(2), 25–31.
- Sriraman, B. (2004B). Reflective Abstraction, Uniframes And The Formulation Of Generalizations. Journal Of Mathematical Behavior, 23(2).
- Sriraman, B. (2004C). Discovering Steiner Triple Systems Through Problem Solving. The Mathematics Teacher, 97(5) 320–326.
- Sriraman, B. (2004D). Re–Creating The Renaissance. In M. Anaya, & C. Michelsen (Eds.), Proceedings Of The Topic Study Group 21: Relations Between Mathematics And Others Subjects Of Art And Science: The 10Th International Congress Of Mathematics Education (Pp. 14–19). Copenhagen, Denmark.
- Sriraman, B., & Adrian, H. (2004A) The Pedagogical Value And The Interdisciplinary Nature Of Inductive Processes In Forming Generalizations. Interchange: A Quarterly Review Of Education, 35(4), 407–422.
- Sriraman, B., & English, L. (2004A). Combinatorial Mathematics: Research Into Practice. Connecting Research Into Teaching. The Mathematics Teacher, 98(3), 182–191.
- Sriraman, B., & Strzelecki, P. (2004A). Playing With Powers. The International Journal For Technology In Mathematics Education, 11(1), 29–34.
- Van Maanen, J. (1992). Teaching Geometry To 11–Year–Old «Medieval Lawyers.» The Mathematical Gazette, 76(475), 37–45.
- Wheeler, D. (2001). Mathematisation As A Pedagogical Tool. For The Learning Of Mathematics, 21(2), 50–53.

ملاحظة

1. افترض أن C مجموعة من المجموعات غير الخالية. عندئذٍ يمكن لنا أن نختار عنصراً من كل مجموعة. وهكذا، فإن هناك دالة معرفة على C ، لكل مجموعة S في المجموعة، بحيث تكون $f(S)$ عنصراً من S .



Obeyikanda.com