سمات الإبداع في الرياضيات

بهاراث سريرامان Bharath Sriraman

ملخص

يُعدُّ الإبداع في الرياضيات كفيلاً بتطور الرياضيات كلها. وأيّاً كان مصدر هذا النمو، فإن إبداع علماء الرياضيات ما زال حتى الآن مجالاً غير مكتشف إلى حدٍّ ما سواء في الرياضيات نفسها أم في تدريسها. وقد أُجريت دراسة نوعية شملت خمسة من علماء الرياضيات المبدعين؛ من أجل التوصل إلى معرفة كيف يبدعون في الرياضيات. وقد تُرك علماء الرياضيات في هذه الدراسة يتأملون عمليات التفكير المتصلة بابتكار الرياضيات. واستُخدم الاستقراء التحليلي (Analytic Induction) في تحليل البيانات النوعية في مخطوطات المقابلات، إضافة إلى تحقق الفرضيات المحرِّكة للنظرية. وتشير النتائج عموماً إلى أن عملية إبداع علماء الرياضيات اتبعت نموذج الجشتالت (Gestalt Model) الذي يتكون من أربع مراحل متمثلة في: الإعداد، الحضانة، الإشراق، والتحقق. وتبين أيضاً أن التفاعل الاجتماعي والتخيل والاستدلال والحدس والبرهان سمات مشتركة للإبداع في الرياضيات. وإضافة إلى ذلك، روجعت نماذج معاصرة للإبداع من علم النفس استخدمت في تفسير سمات الإبداع في الرياضيات (Mathematical Creativity) وخصائصه.

مقدمة

يـؤدي الإبداع في الرياضـيات إلى ضـمان النمو فـي حقل الرياضـيات عموماً. ويقدم الازديـاد المطـرد في عدد المجلات العلمية المكرسـة لبحوث الرياضـيات دليـلاً على نمو الرياضـيات. وعلـى الرغـم من ذلك، فـإن ما يكمن في جوهـر هذا النمـو، أي إبداع علماء الرياضـيات، لـم يكن موضـوعاً لكثيـر من هذه البحـوث. إذ إن جـلّ علماء الرياضـيات لا يكونـون في العـادة مهتمين بتحليل عمليات التفكير التي ينجم عنها الإبداع في الرياضـيات (Ervynck, 1991). ومـن أولـى المحـاولات المعروفـة التي عمدت إلى دراسـة الإبداع في الرياضيات،الاسـتبانة الشـاملة التـي نشـرت في الدورية الفرنسـية «تدريس الرياضـيات» (L'enseigement Mathematique 1902). وقـد ألهمـت هـذه الاسـتبانة، إضـافة إلى المحاضـرة التي ألقاها عالم رياضـيات القرن العشرين المشـهور هنري بوانكريه (Henri Poincaré) أمـام جمعيـة علـم النفـس عـن الإبـداع، زميلـه جـاك هادمـرد (Jacques Hadamard)، الذي يُعد عالماً آخر من مشـاهير علماء الرياضـيات في القرن العشـرين، للبحـث فـي علم نفس الإبداع في الرياضـيات (Hadamard, 1945). وقـد أجرى هادمرد استقصـاء غير رسـمي بيـن علماء الرياضـيات والعلمـاء البارزين فـي أميركا مـن أمثال جـورج بيركهوف (George Birkhoff) وجورج بوليا (George Polya) وألبرت آينشـتاين (Albert Einstein)، عـن الصـور الذهنية المسـتخدمة في مجال الرياضـيات. ولمّا كان هادمرد متأثراً بعلم نفس الجشـتالت (Gestalt) آنذاك، فقد أصدر أحكاماً نظرية تقول إن عملية إبداع علماء الرياضـيات تتبع نموذجاً جشـتالتيّاً (كليّاً) يتكون من أربع مراحل، هي: الإعداد، الحضـانة، الإشراق، والتحقق. ويصف نموذج الجشـتالت العملية التي يستخدمها علماء الرياضـيات في الإبداع، ولا تسـعى إلى تعريف الإبداع ذاته. ولكن، كيف يمكن لنا أن نعرِّف الإبداع؟ وما الإبداع في الرياضـيات تحديداً؟ وعلى وجه الخصوص، هل هو اكتشاف نظريـة جديـدة من عالم أو باحـث في مجال الرياضـيات؟ وهل يُعد اكتشـاف طالب نتيجة معروفة حتى يومنا هذا إبداعاً؟ هذه هي مجالات البحث في هذه الورقة.

مشكلة تعريف الإبداع

يوصف الإبداع في الرياضيات ببساطة على أنه فطنة واختيار وتمييز مستبصر (Poincaré ,1948). وأما من وجهة نظر بوانكريه (1948)، فإن الإبداع لا يتكوّن على وجه التحديد، من إيجاد ارتباطات لا طائل تحتها، بل يتضمن فقط تلك الارتباطات المفيدة، التي تكون نسبتها عادة صغيرة جدّاً. وقد يبدو هذا وصفاً مبهماً للإبداع في الرياضيات، إذ يمكن للمرء أن يفسر مجاز «الاختيار» الذي استخدمه بوانكريه على أنه مقدرة عالم الرياضيات على أن يختار بعناية من بين المسائل التي تؤدي إلى حلول ناجحة مقارنة بتلك التي لا تأتي بجديد. لكن هذا التفسير لا يكوّن حلّاً لحقيقة أن بوانكريه قد أغفل مسألة الجِدَّة (The Problem Of Novelty) وبعبارة أخرى، فإن وصف الإبداع في الرياضيات على أنه القدرة على الاختيار من بين الارتباطات المفيدة وتلك التي لا طائل تحتها، يماثل وصف فن النحت على أنه بترٌ لا لزوم له!

وقد كان تعريف «بوانكريه» للإبداع نتيجة لظروف عثر من خلالها على نتائج عميقة في الدوال الفوكسية(Fuchsian Functions) (نسبة إلى العالم الألماني لازاروس فوكس Lazarus Fucks). تألفت المرحلة الأولى من العمل الشاق للتوصل إلى رؤية للمشكلة الموجودة. وقد سمّاها بوانكريه المرحلة الأولية للعمل الواعي. ويشار أيضاً إلى هذه المرحلة **بمرحلة الإعداد** *Preparatory Stage* (Hadamard, 1945). وتحدث المرحلة الثانية حول الفترة التي يصار فيها إلى طرح المشكلة جانباً مدة من الوقت، ويكون فيها العقل مشغولاً بمشكلة أخرى. ويشار إلى هذه المرحلة **بمرحلة الحضانة** *The Incubatory Stage* (Hadamard, 1945). أما المرحلة الثالثة، فتكون عندما يظهر الحل فجأة في الوقت الذي ربما يكون فيه المرء مشغولاً بأمور أخرى لا علاقة لها بالمسألة. ويعدُّ هذا الظهور والإشراق المفاجئ علامة واضحة لعمل طويل لاشعوري يسبق مرحلة العمل(Poincaré, 1948). وقد أشار هادمرد إلى هذه المرحلة **بمرحلة الإشراق** *The Illuminatory Stage*. وعلى الرغم من ذلك، فإن عملية الإبداع لا تتوقف عند هذا الحد، إذ إن هناك مرحلة رابعة أخيرة تتمثل في التعبير عن النتائج شفهيّاً أو كتابيّاً. ويستطيع المرء عند هذه المرحلة أن يتحقق النتائج، ويجعلها دقيقة ومحكمة، وينظر إلى إمكانية نشرها على نطاق واسع من خلال

استخدام النتائج. وعموماً، يمكن القول إن نموذج الجشتالت يحتوي على بعض العيوب، أولها: أن هذا النموذج ينطبق بصورة رئيسة على المسائل التي طرحها علماء الرياضيات بوصفها **بدهيات**، ومن ثم فقد تجاهل العملية الرائعة الساحرة التي يُتوصل من خلالها إلى الأسئلة الفعلية. وثانيها: أن النموذج يعزو الجزء الكبير مما «حدث» في مرحلتي الحضانة والإشراق إلى محركات اللاشعور. وقد عالج إيرفينك (Ervynck, 1991) في نموذجه ذي المراحل الثلاث، المسألة المتصلة بكيفية التوصل إلى المسائل على نحوٍ جزئي.لقد وصف «إيرفينك» الإبداع في الرياضيات من خلال عملية مكونة من ثلاث مراحل. يشار إلى المرحلة الأولى، وهي مرحلة الصفر (Stage 0) **بالمرحلة التقنية التمهيدية** التي تتألف من بعض أنواع التطبيقات التقنية والعملية لقوانين الرياضيات وإجراءاتها، دون أن يكون لدى المستخدم أي إلمام بالأساس النظري (ص 42). أما المرحلة الثانية (المرحلة رقم 1)، فهي مرحلة **النشاط الحسابي** *Algorithmic Activity* التي تتألف بصورة أساسية من أداء المناحي الرياضية كما في تطبيق بعض الخوارزميات الرياضية على نحو صريح مراراً وتكراراً. في حين يشار إلى المرحلة الثالثة (المرحلة رقم 2) على أنها نشاط إبداعي (مفاهيمي، بنائي) *Creative (Conceptual, Constructive) Activity*. هذه هي المرحلة التي يحصل فيها الإبداع في الرياضيات الحقيقي، وتشتمل على اتخاذ قرارات غير حسابية. و«قد تكون القرارات التي تُتخذ ذات طبيعة متباينة على نطاق واسع، وتشتمل دائماً على خيار» (ص 43). وعلى الرغم من محاولة «إيرفينك» وصف العملية التي يتوصل من خلالها علماء الرياضيات إلى الأسئلة من خلال مرحلة الصفر والمرحلة رقم 1، فإن وصفه للإبداع في الرياضيات يشبه إلى حدٍّ بعيد وصف كل من بوانكريه وهادمرد، حيث إن استخدامه مصطلح «اتخاذ قرارات غير حسابية» يشبه استخدام «بوانكريه» مجاز «الخيار».

ولم يتوصل المؤلف إلى وجود دراسات في تعليم الرياضيات تحاول تعريف الإبداع صراحة. ولكن هناك مراجع للإبداع أشار إليها الباحث السوفييتي كروتتسكي (Kruitiski, 1976) ضمن سياق قدرة الطالب على تجريد المحتوى الرياضي وتعميمه. وعلى الرغم من ذلك، فهناك مثال رائع لمحاولة عالم الرياضيات جورج بوليا (George Polya,1954) لتقديم استدلال لمعالجة مشكلات ومسائل بطريقة مشابهة لما يمكن أن

يصدر عن عالم رياضيات يتمتع بقدرات عالية. لاحظ «بوليا» أننا «عند محاولة إيجاد حل للمسألة، ندرس مجالات مختلفة تتعلق بها كل على حدة، ثم نفكر فيها مراراً وتكراراً. لذا، فإن اختلاف المسائل أو المشكلات وتنوعها أمر أساسي في عملنا.» وأكد «بوليا» أهمية استخدام أنماط استدلال متنوعة لحل المسائل الرياضية ذات الصعاب المتنوعة. ويلاحظ أن علماء الرياضيات يعمدون في اختبارهم إلى معقولية التخمينات الرياضية، إلى استخدام إستراتيجيات متنوعة. ففي بحثهم عن الأنماط الواضحة، يعمد علماء الرياضيات إلى استخدام أنواع متعددة من الاستدلال، مثل (أ) التثبت من النتائج، و(ب) التثبت من نتائج عدة بنجاح، و(ج) التثبت من النتائج غير المحتملة و(د) الاستدلال من التماثل الجزئي و(هـ) تعميق التماثل الجزئي. وهكذا، يمكن النظر إلى الاستدلال على أنه آلية لاتخاذ قرارات تقود علماء الرياضيات عبر مسار محدد، قد تكون نتائجها مثمرة أو عديمة الجدوى. ويتضح من الفقرات السابقة أن معضلة تعريف الإبداع ليست سهلة.

وعلى الرغم من ذلك، فإنه قد نجم عن تجدد اهتمام علماء النفس بظاهرة الإبداع دراسات كثيرة تحاول تعريف مصطلح «**الإبداع**» وتفعيله، حيث حاولوا في الآونة الأخيرة ربط الإبداع بمقاييس الذكاء (Sternberg, 1985)، وبالقدرة على التجريد والتعميم (Sternberg, 1985)، والقدرة على حل المشكلات المعقدة (Frensch & Sternberg 1992,). وقد عرّف ستيرنبيرج ولوبارت (Sternberg & Lubart 2000) الإبداع أنه القدرة على إنتاج عمل أصيل غير متوقع يكون «**مفيداً**» وقابلاً للتكيف. وتدور بين علماء الرياضيات كثير من الخلافات والمناقشات حول هذا التعريف خاصة ما يتعلق بأثر نتائج العمل الإبداعي عند التطبيق الواقعي. ولعل المثال الحديث الذي يتبادر إلى الأذهان هو إثبات أندرو وايلز (Andrew Wiles) لنظرية فيرمات (Fermat) الرياضية الأخيرة. وقد نظر مجتمع علماء الرياضيات إلى عمله على أنه إبداع؛ إذ كان عملاً غير متوقع وأصيلاً لكنه يفتقر إلى أي تطبيق في الواقع، على نحو ما ارتأى ستيرنبيرج ولوبارت. ومن هذا المنطلق، فإنني أرى أنه يكفي أن نعرّف الإبداع على أنه القدرة على القيام بعمل جديد أو أصيل، وهذا يتفق مع تعريفي الشخصي للإبداع في الرياضيات بصفته العملية التي تنتج حلولاً غير عادية لمسألةٍ ما بصرف النظر عن المستوى. وفي سياق هذه الدراسة التي تضم علماء رياضيات

مبدعين، يُعرَّف الإبداع في الرياضيات على أنه نشر النتائج الأصلية في مجلات ودوريات بحثية مشهورة في مجال الرياضيات.

الدافعية وراء دراسة الإبداع

كان النقص في وجود دراسات حديثة عن الإبداع في الرياضيات أحد الدوافع لإجراء هذه الدراسة، فقد دعا موير (Muir, 1988) قبل خمسة عشر عاماً علماء الرياضيات إلى إتمام نسخة معدلة للبحث الأصلي المنشور في مجلة تدريس الرياضيات (L'enseigement Mathematique,1902). كانت نتائج تلك المحاولة مهمة جدّاً، لكنها لا تزال مجهولة حتى يومنا هذا. وهدفت هذه الدراسة إلى اكتساب رؤية لطبيعة الإبداع في الرياضيات. وتحقق هذا من خلال مقابلة خمسة علماء رياضيات مبدعين وبارعين باستخدام نظام معدل للمقابلات عما ظهر في تلك المجلة. وقد نوقش الغرض من استخدام نموذج الاستبانة القديمة ضمن الجزء الخاص بالمنهجية في هذا البحث. لقد كان المؤلف مهتمّاً بتنقيح السمات المشتركة لعملية الإبداع ليرى هل توجد أفكار أساسية لوصف الإبداع في الرياضيات. وكانت الأسئلة المحددة المستخدمة في الاستكشاف على النحو الآتي:

- هل لا يزال نموذج الجشتالت للإبداع في الرياضيات قابلاً للتطبيق حتى يومنا هذا؟
- ما سمات عملية الإبداع في الرياضيات وخصائصها ؟
- هل لدراسة الإبداع في الرياضيات أي آثار في غرفة الصف؟

مراجعة الدراسات السابقة

تتساءل أي دراسة عن طبيعة الإبداع في الرياضيات عما إذا كان علماء الرياضيات هم من اكتشفوا الرياضيات أو اخترعوها. واستناداً إلى ذلك، يبدأ استعراض الدراسات بوصف مختصر لوجهات النظر الأربع الشائعة حول طبيعة الرياضيات، ثم يتبعها استعراض شامل للنماذج المعاصرة للإبداع من علم النفس.

طبيعة الرياضيات

يوجد لدى علماء الرياضيات المشاركين بفاعلية في البحث بعض المعتقدات حول الوضع الوجودي (الأنتولوجي)[1] Ontological Status للرياضيات الذي يؤثر في طريقة البحث لديهم (Davis & Hersh, 1981; Sriraman, 2004). ويرى أصحاب مذهب أفلاطون أن المواد الرياضية موجودة قبل اكتشافها وأن «لكل سؤال ذي معنى عن أي مادة رياضية جواباً قاطعاً، سواء أكنا قادرين على تحديده أم لا» (Davis & Hersh, 1981). وتبعاً لوجهة النظر هذه، فإن علماء الرياضيات لم يخترعوا الرياضيات أو يوجدوها، بل اكتشفوها اكتشافاً. يقول علماء المنطق إنه يمكن أن يصار إلى تخفيض المفاهيم الرياضية كافة في نهاية المطاف إلى مفاهيم منطقية، وهذا يعني أن الحقائق الرياضية كافة يمكن إثباتها من خلال البدهيات وقوانين الاستدلال والمنطق وحدها. (Ernest, 1991) في حين لا يعتقد الشكليون[2] (Formalists) أن الرياضيات قد اكتشفت، بل يعتقدون أن الرياضيات عبارة عن لعبة اخترعها علماء الرياضيات استناداً إلى سلاسل من الرموز لا معنى لها (Davis & Hersh, 1981).

كانت البنائية (Constructivism)، وفيها الحدسية (Intuitionism)[3]، إحدى مدارس التفكير الرئيسة (إلى جانب الأفلاطونيين والمنطقيين والشكليين) التي ظهرت بسبب التناقضات التي برزت في نظرية المجموعات (Sets Theory) ونظرية الدوال

1) الأنتولوجيا ontology مصطلح فلسفي قديم يتعلق بدراسة الموجودات أو ما نفترض أنه موجود من أجل التوصل إلى حقيقة قاطعة. وقد أخذ يستخدم حديثاً لفئات أشياء توجد في ميدان بعينه للإشارة إلى المعرفة المشتركة للأشخاص العاملين في ذلك الميدان. وهو مصطلح يرتبط كثيراً بدراسة الواقع -المراجع

2) المدرسة التشكلية هي مدرسة روسية نشأت في رحاب الأدب في الفترة بين عام 1910-1920 وهي تشتمل على أعمال العديد من المفكرين الروس ذوي التأثير الكبير على الساحة الروسية، كان الادب قبل الشكلية الروسية يعامل على أنه صورة مرآتية عن سيرة المؤلف وخلفية أو توثيقاً تاريخياً أو اجتماعياً، أما الشكليون فيعلنون أن الادب منتج له استقاليته وخصوصيته.

3) تُعدُّ النظرية البنائية في التعلّم من الفلسفات التي تهدف إلى تعزيز التطور المنطقي والمفاهيمي للطالب مع التركيز على الخبرات في تعليمه حيث تؤمن هذه النظرية بأن الناس ينتجون المعرفة ويصيغون المعاني المستندة إلى خبراتهم. وهي تولي أهمية خاصة لدور المعلمين بوصفهم ميسّرين لعملية التعلم. أما النظرية الحدسية، فمذهب يرى أن الحدس هو العامل الأول في تكوين المعرفة. وقد جاءت هذه الفلسفة كرد فعل على النزعة المادية والاتجاه العلمي الذي شاع في أوروبا في القرن التاسع عشر. أفضل من يمثل هذا المذهب الفيلسوف الفرنسي هنري برجسون (1859-1941)، الذي جعل الحدس مصدر المعرفة الحقيقية للواقع- المراجع

(Functions Theory) في بدايات القرن العشرين. وكانت التناقضات مثل تناقضات رَسل (Russell's Paradox) كعاصفة رئيسة اجتاحت وجهة نظر أصحاب الأحكام المطلقة حول المعرفة الرياضية، أي إذا كانت الرياضيات مؤكدة ونظرياتها كلها موثوقاً بها، فكيف يمكن للتناقضات أن توجد في نظرياتها؟ وكان من البنائيين في الرياضيات براور (Brouwer) وهيتنج (Heyting) اللذان ينتميان إلى المدرسة الحدسية. يرى البنائيون أن كلاًّ من الحقائق الرياضية ووجود الأشكال الرياضية يمكن أن تُبنى بوساطة طرائق البناء، وأن الأنشطة الرياضية البشرية أساسية في إيجاد معرفة جديدة، وأن كلاًّ من الحقائق الرياضية والأشكال الرياضية يجب أن تؤسَّس من خلال المنهجية البنائية (Ernest, 1991, P. 29).

والسؤال الآن هو: كيف يجري العلماء بحوث الرياضيات؟ هل تبرز المسائل وحدها أم أن هناك نمطاً من التفكير أو البحث يقود إلى مسائل ذات معنى، وإلى الطريقة التي تُعالج فيها تلك المسائل؟ ويؤكد الكاتب أن ثقافة عالم الرياضيات تحدد، على نحوٍ كبير، نوع الأسئلة. وبعبارة أخرى، لا يمكن للمرء أن يكتسب المعرفة من العالم الخارجي دون تفاعل اجتماعي. وبحسب وجهة نظر إيرنست (Ernest, 1994)، ليس ثمة مجاز أساسي لعقل المرء المعزول تماماً، بل إن الاستعارة أو المجاز الأساسي يكمن في المحادثات التي تجري بين الأفراد في سياق لغوي ذي معنى في أثناء الحوار (Ernest, 1994)، حيث تصوغ اللغة عقل الإنسان مثلما تُعدُّ الإنتاج «الكلي» لأفكاره (Wittegenstein, 1978). وعلى أي حال، فإن الدراسات الحديثة في علم النفس تعترف بهذه الجوانب الاجتماعية لأنشطة البشر لأهميتها في عملية الإبداع. وهذا بدوره يتطلب اطّلاعاً معمقاً في الدراسات الخاصة بالرياضيات.

فكرة الإبداع في علم النفس

كانت البحوث عن الإبداع على نحو ما أشرنا سابقاً، على هامش علم النفس وعلم النفس التربوي وتدريس الرياضيات، ولم يتجدد الاهتمام بظاهرة الإبداع في مجتمع علم النفس إلا خلال ربع القرن الماضي فقط. ويرى ستيرنبيرج (Sternberg, 2000) في كتابه بعنوان **دليل الإبداع** (*Handbook Of Creativity*) الذي يحتوي على استعراض شامل

للبحوث جميعها المتوافرة في حقل الإبداع، أنه يمكن تصنيف معظم المناحي المستخدمة في حقل الإبداع ضمن ست فئات، هي: المنحى الروحي، والعملي، والدينامي-النفسي، والقياس النفسي، والمعرفي، والشخصي- الاجتماعي. وفيما يأتي استعراض مقتضب لكل من هذه المناحي.

المنحى الروحي

يرى المنحى الروحي (The Mystical Approach) في دراسة الإبداع، أن الإبداع ينجم عن إلهام روحي أو أنه عملية روحانية. وقد ادعى بليز باسكال (Blaise Bascal) أن كثيراً من آرائه الرياضية هي هبة من الله. وفي السياق نفسه، قال عالم الجبر المشهور في القرن التاسع عشر ليوبولد كرونكر (Leopold Kronecker): إن الله هو الذي خلق الأعداد الصحيحة، وأن ما تبقى كله من صنع البشر (Gillian, 1994). وعلى الرغم من أن اعتقاده المتطرف لم يلق تأييداً واسعاً، لكن الحدسيين دافعوا عن معتقداته الخاصة بالبراهين البنائية بعد وفاته بسنوات كثيرة. وقد جرت محاولات عدة لاستكشاف علاقات ممكنة بين معتقدات عالم الرياضيات عن طبيعة الرياضيات وإبداعه (Davis & Hersh, 1981; Hadamard, 1945; Poincaré, 1948; Sriraman, 2004). وتشير هذه الدراسات إلى وجود علاقة مؤكدة بين معتقدات علماء الرياضيات عن طبيعة الرياضيات والإبداع. ويعتقد أن وجهة نظر الأفلاطونيين الجدد تعدُّ مفيدة لبحوث علماء الرياضيات نظراً إلى الاعتقاد الفطري أن السعي وراء النتيجة/العلاقة موجود أصلاً.

المنحى العملي

يتطلب المنحى البرجماتي (The Pragmatic Approach) أن تكون مهتمّاً اهتماماً أساسيّاً بتطوير الإبداع وتنميته وليس بفهمه فقط (Sternberg, 2000, P. 5). ويعدُّ تركيز «بوليا» على استخدام عدد متنوع من الاستدلالات لحل المسائل الرياضية ذات الصعاب المتنوعة مثالاً على المنحى العملي. وبناءً عليه، يمكن أن يُعدّ الاستدلال آلية لاتخاذ قرار يقود علماء الرياضيات إلى مسار محدد قد تكون نتائجه مثمرة أو عديمة الجدوى. ويُعدُّ

الأسلوب الشائع المعروف بالعصف الذهني، مثالاً آخر على تحفيز الإبداع من خلال البحث عن أكبر عدد من الأفكار أو الحلول الممكنة.

المنحى الدينامي - النفسي

يستند المنحى الدينامي-النفسي (Psychodynamic Approach) في دراسة الإبداع إلى فكرة مفادها أن الإبداع يبرز بسبب التوتر بين حقيقة الشعور ومحركات اللاشعور (Hadamard, 1945; Poincaré, 1948; Sternberg, 2000; Wallace, 1926; Wertheimer, 1945). ويعدُّ نموذج الجشتالت ذو المراحل الأربع (الإعداد، الحضانة، الإشراق، والتحقق)، مثالاً على استخدام المنحى الدينامي-النفسي في دراسة الإبداع. وتجدر الإشارة إلى أن نموذج الجشتالت هو الذي أطلق شرارة كثير من نماذج حل المشكلات المعاصرة (Polya, 1945; Schoenfeld, 1985; Lester, 1985). وقد استخدمت المناحي الدينامية-النفسية الأولى في بناء دراسات حالة لمبدعين مشهورين، أمثال ألبرت أنشتاين (Albert Einstein)، غير أن السلوكيين انتقدوا هذا المنحى بسبب صعوبة قياس الأفكار النظرية المقترحة.

منحى القياس النفسي

يتضمن منحى القياس النفسي (The Psychometric Approach) في دراسة الإبداع، قياس مفهوم الإبداع بالاستعانة بالورقة وقلم الرصاص. وتعدُّ اختبارات تورانس للتفكير الإبداعي (The Torrance Tests Of Creative Thinking) التي طورها تورانس (Torrance, 1974)، وتستخدمها كثير من برامج الموهوبين في المدارس المتوسطة والثانوية في تحديد الطلاّب الموهوبين/ المبدعين، مثالاً على هذا المنحى. ويشتمل هذا الاختبار على كثير من الواجبات اللفظية والشكلية التي تتطلب استخدام مهارات حل المشكلات والتفكير التباعدي (Divergent Thinking). صمّم الاختبار لقياس مهارات الطلاقة والمرونة والأصالة (الندرة الإحصائية للاستجابة)، إضافة إلى مهارة التوسع أو التفاصيل (Sternberg, 2000). ويرى ستيرنبيرج (Sternberg, 2000) وجود جوانب إيجابية وأخرى سلبية لمنحى القياس النفسي. ففي الجانب الإيجابي، تتيح هذه الاختبارات المجال للبحث

مع الأشخاص غير المشهورين، وهي أيضاً سهلة الإدارة وتعطي علامات موضوعية. في حين يتمثل الجانب السلبي في كون العلامات الرقمية تخفق في الاستحواذ على مفهوم الإبداع؛ لأنها تستند إلى ورقة مختصرة واختبار بقلم الرصاص. ويدعو الباحثون إلى استخدام مزيد من المنتجات المهمة، مثل العينات الكتابية والرسوم وغيرها من أجل تقويمها تقويماً موضوعيّاً من لجنة خبراء بدلاً من الاعتماد على قياسات رقمية فقط.

المنحى المعرفي

يركز المنحى المعرفي (Cognitive Approach) في دراسة الإبداع على فهم العمليات والتمثيلات العقلية التي تعد أساساً في فكر الإنسان(Sternberg, P 7, 2000). يرى (ويسبيرج Weisberg 1993) أن الإبداع يتطلب استخدام العمليات المعرفية العادية ونتائجها في النتائج الأصلية وغير العادية. وتُعد هذه المنتجات نتائج للعمليات المعرفية التي تقوم على المعرفة المخزنة أصلاً في ذاكرة الفرد. وهناك دراسات كثيرة في مجال معالجة المعلومات (Birkhoff, 1969; Minsky, 1985)، تحاول عزل العمليات المعرفية وتوضيحها بناءً على مجاز الآلة[1] (Machine Metaphors).

المنحى الاجتماعي- الشخصي

يركز المنحى الاجتماعي- الشخصي (The Social-Personality Approach) في دراسة الإبداع على الشخصية والمتغيرات التحفيزية على نحو ما هو الحال في البيئة الاجتماعية والثقافية بصفتها مصادر للإبداع. وذكر ستيرنبيرج (2000) أن كثيراً من الدراسات قد أُجريت على مستوى المجتمع، وأشار إلى أن المستويات المشهورة من الإبداع ترتبط إحصائيّاً مع مرور الزمن بمتغيرات، مثل: الاختلاف الثقافي، والحرب، وتوافر نماذج للأدوار، وتوافر الدعم المالي، إضافة إلى توافر منافسين في مجالٍ ما (ص 9).

---

1) وفقاً لهذا المجاز، يمكن فهم أي كيان من كيانات الواقع وتتبع سلوكه والتحكم فيه بصفته آلة وتجميع لأجزاء متفرقة بغرض إنجاز فعل ما أو بلوغ غاية بعينها. ويضبط تفاعل هذه الأجزاء المتجمعة مع بعضها البعض ويحكم سلوكها قانون صارم يمكن ايجاده وتطبيقه عليها. وهكذا تتحول كيانات الواقع إلى مجرد كيانات آلية يمكن التحكم في سلوكها وتوقّع أفعالها من خلال القانون الذى يربط بين الأسباب والنتائج، مثل توقع ما سيحدث لو ألقينا جسماً حيًّا أو جامداً إلى الأرض، كما يمكن تبسيط دراسة أي كيان أو ظاهرة من خلال تقسيمها إلى أجزاء منفصلة، ما يسهل دراسة كل جزء منها على حدة- المراجع

تـرى معظم الدراسـات الحديثـة المتعلقـة بالإبـداع (Csikszentmihalyi, 1988;, 2000; Gruber & Wallace, 2000; Sternberg & Lubart, 1996) أن الإبـداع ينتـج مـن التقاء واحد أو أكثر من العوامل أو الفئات الست الآنفة الذكر. وقد اكتسب المنحى التجميعي (The Confluence Approach) فـي دراسـة الإبـداع مصـداقية، وتوجـد في دراسـات البحوث كثير من نظريات التجميع من أجل فهم أفضـل لعملية الإبداع، ما يدعو إلى مراجعة نظريات التجميع الأكثر شيوعاً في مجال الإبداع. ويتبع هذا وصف للمنهجية المتبعة في جمع البيانات وتحليلها في هذه الدراسة.

نظريات التجميع في مجال الإبداع

إن أكثـر المناحـي التجميعيـة شـيوعاً فـي دراسـة الإبـداع، هـي: منحـى النظـم (Csikszentmihalyi, 1988, 2000)؛ دراسة الحالة بصفتها منحى نظم متطوراً (Gruber & Wallace, 2000)، وأخيراً منحى نظرية الاستثمار (Sternberg & Lubart, 1996).

منحى النظم

يأخـذ منحـى النظـم (The Systems Approach) في الحسـبان الجوانب الثقافية والاجتماعيـة في الإبـداع، بدلاً من الاكتفاء بتصـوير الإبـداع على أنه عملية فردية نفسـية (سـيكولوجية). يدرس منحى النظـم التفاعل بين الفـرد والمجـال (Domain) والحقل (Field). ويشـتمل الحقـل علـى أشـخاص ذوي أثـر فـي المجـال. مثـلاً، يكـون لمحرري مجـلات بحوث الرياضـيات تأثير في مجال الرياضـيات. ويعد المجال بنيـة ثقافية تحفظ منتجـات الإبـداع وتنقلهـا إلـى أفـراد آخرين في الحقـل. ويرى نمـوذج النظـم أن الإبداع عبـارة عـن عمليـة يمكـن ملاحظتها عنـد (تقاطـع تفاعـل الأفـراد والمجـالات والحقول (Csikszentmihalyi, 2000)، وتعد المكونات الثلاثة، أي الفرد والمجال والحقل، ضرورية لأن الفـرد يعمل ضـمن جانـب ثقافي أو رمـزي (المجال)، إضـافة إلى الجانـب (الحقل) الاجتماعي.

ويعـد المجـال مكونـاً ضـروريّاً للإبـداع نظـراً إلـى اسـتحالة إدخـال متغيـر دون الإشـارة إلـى نمـط قائـم. ويصـبح الجديـد ذا معنـى فقـط عنـد الإشـارة إلـى القديـم (Csikszentmihalyi, 2000). وهكـذا، فـإن الإبداع يحدث عندما يحدث الفرد تغييراً في مجـال معيـن، ويُنقل هذا التغييـر مع مرور الوقت. وعـادة ما تؤثر خلفية الفرد الشخصـية وموقعه في المجال في إمكانية إسهامه. مثلاً، يمكن أن يعمل عالم رياضيات في مجال حافل بثقافة البحث الجامعي في إنتاج أوراق بحثية بسبب توافر الوقت لديه «للتفكير»، إضافة إلى كونـه يعمل في بيئة حافلة بثقافة تزدهر فيها الأفكار. ولم يكن وجود إسـهامات كبيرة مهمة في تاريخ العلوم من قبل رجال الدين، مثل باسكال (Pascal) ومندل (Mendel) مصادفة؛ لأن لديهـم من الوسـائل ووقت الفراغ مـا يعينهم على «التفكير». ويرى تتشـكزينتميهالي أن الأفـكار الجديدة التي يترتب عليها تغييـرات مهمة، لا تحظى بالقبول إلا بعد الموافقة عليها من قبل مجموعة من الخبراء الذين يقررون ما يمكن تضمينه في المجال. و «حراس البوابة» (الخبراء) هؤلاء هم الذين يكوّنون الحقل. فمثلاً، كان رأي عدد قليل جدّاً من كبار الباحثين في الرياضـيات كافياً للشهادة بصدق إثبات أندرو ويلز (Andrew Wiles) نظرية فيرمات (Fermat's Theorem) الرياضية الأخيرة.

هنـاك أمثلـة كثيـرة في حقل الرياضـيات تقع ضـمن نمـوذج النظم. فمثـلاً، عمدت البورباكـي (Bourbaki)، وهـي مجموعـة من علمـاء الرياضـيات الفرنسـيين التي بدأت اجتماعاتهـا في الثلاثينيات من القرن الماضـي، إلى كتابة دليل موحد شـامل للرياضـيات كلها. وقد كانت البورباكي مجموعة من خبراء الرياضـيات حاولت توحيد الرياضـيات كلها، وبذلك تصـبح هذه المجموعة حارس البوابة لهذا الحقل بوضـعها معياراً للدقة والصرامة. وعلى الرغم من أن مجموعة البورباكي قد فشلت في مسعاها، فإن طلاّب مجموعة البورباكي الذين يعملون محررين في بعض المجلات الرياضـية المشـهورة لا يزالون يفرضـون درجة عالية من الدقة والصرامة حتى يومنا هذا على المقالات المقبولة للنشر، لذا، فإنهم يقومون بدور حراس البوابة لهذا الحقل.

وهنــاك مثال آخر مختلف يتمثل فــي دور البرهان، الذي يعدُّ عمليــة اجتماعية يتحقق خلالها مجتمع الرياضيات من صحة العمل الرياضي الإبداعي (Hanna, 1991). وفي هذا الســياق، يرى عالم المنطق الروســي مانن (Manin, 1977) أن البرهان يصبح مقبولاً بعد تقبـل المجتمع له على أنه إثبات، وينطبق هذا على الرياضـيات كمـا في الفيزياء واللغويات والبيولوجيا. وخلاصــة القول، أن نموذج النظم للإبداع يرى أن الإبداع يتطلب نقل مجموعة من القوانين والممارســات من المجال إلى الفرد. وعندئذٍ لا بد للفرد أن ينتج متغيراً جديداً ضمن محتوى المجال، ويجب اختيار هذا المتغير من الحقل من أجل تضمينه المجال.

طريقة جروبر ووالاس في دراسة الحالة بوصفها منحى متطوراً للنظم

على النقيض من حجة تشــكزينتميهالي التي تدعو إلــى التركيز على المجتمعات التي ينتشــر فيهــا الإبداع، فقــد اقترح جروبــر ووالاســ (Gruber & Wallace, 2000) نموذجاً يتعامــل مــع كل فرد بصــفته نظاماً متطــوراً فريداً من الإبــداع والأفكار، وبنــاءً عليه، يجب دراســة كل عمــل إبداعــي للفرد على حدة وبمعــزل عن أعمال الآخرين. وجــاءت وجهة نظر هذين الباحثين بصــفتها نصراً متأخراً لأتباع مدرســة الجشتالت الذين أعلنوا منذ البداية الشــيء نفســه قبل قرن من الزمان تقريباً. ويبدو أن اســتخدام الباحثين المصــطلح الذي يتناغــم مع التوجهات الحالية فــي علم النفس، قد جعل أفكارهما أكثــر قبولاً، حيث اقترحا نموذجاً يدعو إلى تحليل مفصــل أحياناً، وإلى وصــف سردي لكل حالة أحياناً أخرى، إضافة إلــى محاولة فهم كل حالة بصــفتها نظاماً فريداً ذا فاعليــة (Gruber & Wallace, 2000, P.93). ومــن الأهمية بمــكان أن يدرك المرء أن تركيز هذا النموذج لا ينصــب على شــرح أصول الإبداع ولا على شخصية الفرد المبدع، بل على الكيفية التي يحدث من خلالها العمل الإبداعــي (ص. 94). ويمكن القول إن الباحثين أرادا الإجابة عن ســؤالين مهمين، هما: 1) مــاذا يفعل الأشــخاص المبدعون عندما يكونون مبدعين؟ و 2) كيف يســتخدم الأشــخاص المبدعون الموارد المتاحة في تحقيق شــيء فريد؟ وعلى أي حال، فإن العمل الإبداعي وفقاً لهــذا النموذج يُعرف أنه العمل الجديد ذو القيمــة. ويتناغم هذا التعريف مع التعريف الذي يســتخدمه الباحثــون فــي الإبــداع (Csikszentmihalyi, 2000; Sternberg & Lubart, 2000). وكما أشــار جروبر ووالاس إلى أن العمل الإبداعي يكون دائماً نتيجة لسلوك هادف،

وأنــه عادة ما يمثل مهمة طويلة الأمد قد تمتد شــهوراً أو ســنين أو عقــوداً في بعض الأحيان (ص. 94). وعمومــاً، فإن الكاتب لا يتفق في الرأي مع الادعــاء أن العمل الإبداعي دائماً ما يكون نتيجة لســلوك هادف: ولعل أحد الأمثلة التــي تتبادر إلى الذهن وتدحض هذا الإدعاء، هي اكتشــاف البنسلين. إذ يمكن أن يُعزى اكتشاف البنسلين بوضوح إلى محض المصادفة. وفــي الجانب المقابل، فهناك كثير من الأمثلــة التي تدعم الادعاء القائل أن العمل الإبداعي يتطلب أحياناً عملاً قد يمتد سنوات. وهناك كثير من الأمثلة على ذلك في مجال الرياضيات. فمثــلاً، كانــت قوانين كيبلر (Kepler's Laws) للكواكب الســيارة نتيجة عشــرين عاماً من الحســابات الرقمية. وقد امتدت مهمة إثبات أندرو وايل (Andrew Wiles) نظرية فيرمات (Fermat Theorem) الرياضية الأخيرة سبع سنوات. وتفيد فرضية ريمان (Riemann) أن جذر دالة زيتا (Zeta Function) (الأرقام المركبة Z، حيث تســاوي دالة زيتا صــفراً) يقع على الخط الموازي للمحور الوهمي (Imaginary Axis) بنصف وحدة إلى يمينه. وربما تعــد هذه من أكثر المســائل التي بقيت دون حل في الرياضــيات على الرغــم مما لها تبعات كثيرة. وقد أجرى المحلل ليفينســون (Levinson) حســابات وهو على فراش الموت، تزيد من مصداقية نظرية ريمان. ويعد هذا مثالاً آخر على العمل الإبداعي الذي يقع ضمن نموذج جروبر ووالاس.

تعــدُّ العناصــر الآتية من مكونات دراســة الحالة بصــفتها نظاماً متطــوراً؛ أولها، أنها تنظر إلى العمل الإبداعي على أنه متعدد الأوجه. لذا، فعند بناء دراســة حالة لعمل إبداعي، ينبغي للمرء أن يجمّع الوجوه ذات الصلة، ويبني بعد ذلك دراسة الحالة استناداً إلى الوجوه التي اختيرت. وفيما يأتي بعض الأوجه التي يمكن أن يصــار إلى اســتخدامها في بناء نظام متطور لدراســة الحالــة: (أ) تميز العمل وتفرده (ب) ســرد لما حققه المبــدع (ج) أنظمة الاعتقاد (د) المقاييس الزمنية المتعددة (بناء المقياس الزمني المستخدم في إنتاج العمل الإبداعي)؛ (هـ) حل المشكلات و (و) الإطار السياقي (الأسرة، المدرسة، تأثيرات المعلم) (Gruber & Wallace, 2000). وخلاصة القول، إن بناء دراسة حالة لعمل إبداعي بصفته نظاماً متطوراً يتطلب شمول أوجه كثيرة اقترحها جروبر ووالاس. ويمكن للمرء أيضاً أن يقوِّم دراسة حالة تشتمل على عمل إبداعي بالنظر إلى الأوجه المشار إليها آنفاً.

منحى نظرية الاستثمار

ينظر منحى نظرية الاستثمار (The Investment Theory Approach) إلى الأشخاص المبدعين على أنهم مستثمرون جيدون، أي أنهم يشترون بثمن بخس، ويبيعون بثمن باهظ (Sternberg & Lubart, 1996). ويشير السياق هنا بطبيعة الحال إلى عالم الأفكار. ويستحضر الأشخاص المبدعون الأفكار التي تكون إما مكروهة وإما أنها تعامل بازدراء، ولكنهم يمضون وقتاً لا بأس به في محاولة إقناع الآخرين بالقيمة الجوهرية لهذه الأفكار (Sternberg & Lubart, 1996). وبطبيعة الحال، فإنهم يبيعون بثمن باهظ عن طريق إقناع الآخرين بملاحقة أفكارهم، في حين أنهم يكونون في طريقهم وراء فكرة جديدة. وترى نظرية الاستثمار أن هناك ستة عناصر تتجمع معاً لتكون الإبداع. والعناصر الستة، هي: الذكاء والمعرفة وأنماط التفكير والشخصية والدافعية والبيئة. ومن الأهمية بمكان ألا يخلط القارئ بين كلمة الذكاء وعلامة معامل الذكاء. إذ على النقيض من ذلك، اقترح ستيرنبيرج (Sternberg, 1985) النظرية الثلاثية في الذكاء التي تتألف من القدرة التركيبية (القدرة على توليد أفكار جديدة أو أفكار ملائمة لمهام محددة)، والقدرة التحليلية، والقدرة العملية. وتُعرّف المعرفة على أنها المعرفة الكافية في ميدان معين للارتقاء به، في حين تُعرّف أنماط التفكير على أنها تفضيل التفكير بطرق أصيلة يختارها الفرد، والقدرة على التفكير (شمولية/كلية)، إضافة إلى القدرة على التمييز بين الأسئلة المهمة وغير المهمة. وتتمثل السمات الشخصية التي تعزز الأداء الإبداعي في الرغبة في المخاطرة، والتغلب على الصعاب، وتحمل الغموض. وأخيراً، تعد الدافعية والتحفيز إضافة إلى البيئة الداعمة والمكافِئة، عناصر أساسية للإبداع (Sternberg, 1985).

يشتمل الإبداع في نظرية الاستثمار، على التفاعل بين الشخص والمهمة والبيئة. ويُعد هذا المعنى إلى حدٍّ ما حالة خاصة من نموذج النظم. وما قد يترتب على تصوير الإبداع على أنه تفاعل بين الشخص والمهمة والبيئة، هو أن ما يعد جديداً أو أصيلاً قد يختلف باختلاف الشخص والمهمة والبيئة. ويرى نموذج نظرية الاستثمار أن الإبداع أكثر من مجرد مجموع بسيط من مستويات الأداء التي تحققت في كل عنصر من العناصر الستة. وبغض النظر عن مستويات الأداء في العناصر الأخرى، فإن الأمر يتطلب مستوى أو بداية معينة من المعرفة

التي لا يمكن أن يحدث الإبداع دونها. ويمكن للمستويات العالية من الذكاء والدافعية أن تعزز الإبداع بصورة إيجابية، وبذلك تعوض مكامن الضعف في العناصر الأخرى. مثلاً، قد يكون شخص ما في بيئة غير داعمة للجهود الإبداعية، لكن المستوى العالي من الدافعية يمكن أن يتغلب على ذلك، ويجعله يسعى وراء محاولات إبداعية.

وهذا الاستعراض يلخص نظريات الإبداع الثلاث المثالية الشائعة، خاصة منحى النظم، الذي يرى أن الإبداع عبارة عن عملية ثقافية اجتماعية تشتمل على التفاعل بين الفرد والمجال والحقل؛ ونموذج جروبر ووالاس الذي يتعامل مع كل دراسة حالة بصفتها نظام تطور فريداً في الإبداع؛ إضافة إلى نظرية الاستثمار (Sternberg & Lubart, 1996) التي ترى أن الإبداع نتيجة اتحاد العناصر الستة والتقائها، وهي: (الذكاء والمعرفة وأنماط التفكير والشخصية والدافعية والبيئة).

وبعد استعراض دراسات البحوث المتصلة بالإبداع، يتحوّل التركيز إلى المنهجية المستخدمة في دراسة الإبداع في الرياضيات.

المنهجية

أداة المقابلة

تهدف هذه الدراسة إلى اكتساب معرفة متعمقة في طبيعة الإبداع في الرياضيات. وقد انصب اهتمام الكاتب على تعرّف السمات المشتركة المتعلقة بكيفية ابتداع العلماء الرياضيات؛ من أجل تحديد خصائص معينة لعملية الإبداع. وكان الكاتب مهتمّاً أيضاً باختبار إمكانية تطبيق نموذج الجشتالت. وقد كانت المقابلات الشخصية الطريقة الأساسية المستخدمة في جمع البيانات. ولمّا كان التركيز الأساسي للدراسة قد انصب على تأكيد الجوانب النوعية للإبداع، فإنه قد اختيرت منهجية المقابلة الرسمية (Formal Interview). وقد أُعدت أداة المقابلة (الملحق أ) عن طريق تعديل أسئلة استبانة مجلة تدريس الرياضيات (L'enseigement Mathematique) وأسئلة وضعها موير (Muir, 1988). إن الغرض من استخدام الاستبانة المعدلة هو أولاً، أن الأسئلة كانت

عامة بطبيعتها، وهذا ما أتاح لعلماء الرياضيات التعبير عن أنفسهم بحرية، ثانياً، لقد أراد الكاتب أن يختبر إلى حدٍّ ما إمكانية تطبيق نموذج الجشتالت للإبداع ذي المراحل الأربع. وبناءً عليه، فقد عُدّلت الأدوات الموجودة من أجل تفعيل نظرية الجشتالت، وإتاحة المجال أمام تدفق الأفكار لتكوين أساس لفرضية يمكن أن تنبثق من هذا الاستكشاف.

خلفية أفراد الدراسة

اختير خمسة علماء رياضيات من كلية العلوم الرياضية (Mathematical Sciences Faculty) من إحدى الجامعات الكبيرة في الغرب الأوسط من الولايات المتحدة تمنح درجة الدكتوراه. وقد وقع الاختيار على علماء الرياضيات هؤلاء استناداً إلى إنجازاتهم، إضافة إلى تنوع مجالات الرياضيات التي عملوا فيها. وقد قيس ذلك من خلال عدد البحوث المنشورة في مجلات ودوريات بحثية مشهورة، إضافة إلى تنوع ميادين الرياضيات التي أجرى علماء الرياضيات بحوثهم فيها. ومنح أربعة من علماء الرياضيات درجة أستاذ، حيث أمضوا ما يزيد على ثلاثين عاماً بصفتهم علماء رياضيات مبدعين، باستثناء عالم واحد فقط من هؤلاء العلماء كان يحمل رتبة أستاذ مشارك، وهو أصغرهم سنّاً. وأُجريت المقابلات جميعها بصورة رسمية خلف الأبواب المغلقة في مكاتب علماء الرياضيات، وسُجلت على أشرطة، ومن ثم كُتبت خطيّاً.

تحليل البيانات

لمّا كان الإبداع بنية معقدة جدّاً تشتمل على مدى واسع من السلوكات المتداخلة، فإنه يجب دراستها من الناحية التاريخية بحسب وجهة نظر الكاتب. وقد طُبّق مبدأ التحليل الاستقرائي (Patton, 2000) على نصوص المقابلات لاكتشاف الموضوعات البارزة التي تصف السلوك موضوع الدراسة. وبحسب ما يرى باتون (Patton, 2000) فإن «الاستقراء التحليلي، على عكس النظرية المثبتة، يبدأ بافتراضات المحلِّل أو افتراضات مستمدة من النظرية، ويُعد إجراءً للتثبت من النظريات والافتراضات استناداً إلى بيانات نوعية (Taylor & Bogdan, 1984, P. 127). وباتباع مبادئ الاستقراء التحليلي، حُلّلت البيانات بكل عناية ودقة من أجل استخراج العوامل المشتركة، ومن ثم قورنت الخيوط المشتركة بالأفكار

النظرية في الأدب المتوافر، لأغراض واضحة صريحة تهدف إلى تحقق صحة مدى قابلية تطبيق نموذج الجشتالت على هذه البيانات النوعية، إضافة إلى استخراج موضوعات تصف عملية إبداع علماء الرياضيات. وإذا ما تعذّر تصنيف موضوع جديد أو تسميته بسبب تعذّر معرفة خصائصه أو أهميته، لجأ الباحث إلى إجراء مقارنة نظرية. وقد بيّن كل من كوربن وستراوس (Corbin & Strauss,1988) أن «استخدام المقارنات يظهر الخصائص، التي يمكن أن تستخدم بدورها في دراسة الحدث أو الموضوع في البيانات. ويمكن أن تُستخلص الأحداث أو الأشياء أو الأفعال المستخدمة في المقارنات النظرية، من الأدب النظري والدراسات السابقة أو من خلال الخبرة. وهذا لا يعني أننا نستخدم الخبرة أو الكتابات بصفتها بيانات، بل نستخدم الخصائص والدلالات المشتقة من الأحداث المقارَنة في دراسة البيانات المتوافرة بين أيدينا» (ص.80). ومن الموضوعات التي برزت: التفاعل الاجتماعي، والإعداد، واستخدام الاستدلال، والتخيل، والحضانة، والإشراق، والتحقق، والحدس، والبرهان.

وقد أُعيد تناول الرويات القصيرة التي تبرز هذه الخصائص في الجزء اللاحق جنباً إلى جنب مع التعليقات التي تتضمن الحوارات الواسعة ومناقشة الارتباطات بالكتابات الحالية.

النتائج والتعليقات والمناقشات

كان علماء الرياضيات المذكورون جميعهم في هذه الدراسة يعملون أساتذة مثبّتين (Tenured Professor) في كلية علوم رياضية تمنح درجة الدكتوراه. ويمكن وصف محيط عملهم بالأكاديمي، إضافة إلى مهام التدريس والعمل في لجان عمل متخصصة. وكان هؤلاء العلماء يمتلكون الحرية في اختيار مجالات بحوثهم، وكذلك الحال فيما يتعلق بالمسائل والمشكلات التي يعرضونها. وقد عمل أربعة من علماء الرياضيات الخمسة في مشروعات مشتركة أحياناً ونشروا أعمالهم فرادى، في حين أجرى واحد منهم فقط دراسة تعاونية واسعة. ولم يكرس هؤلاء العلماء أوقاتهم لبحوث الرياضيات إلا واحداً منهم؛ والأسباب الرئيسة التي برروا بها هذا التقصير كانت الالتزامات العائلية ومسؤوليات التدريس في

أثناء العام الدراسي. وقد كان من السهل على علماء الرياضيات جميعهم الاهتمام بالبحوث في أثناء الصيف؛ بسبب قلة المسؤوليات المتعلقة بمجال التعليم أو عدم وجودها. وقد أظهر اثنان منهم ميلاً نحو الرياضيات في مراحل الدراسة الثانوية المبكرة، في حين أظهر الآخرون الاهتمام بالرياضيات في مرحلة متأخرة في أثناء تعليمهم الجامعي. ولم يكن لأي من علماء الرياضيات المشاركين في هذه الدراسة أي تأثير عائلي ذي أهمية في تطورهم في الرياضيات. وتذكّر أربعة من علماء الرياضيات أنهم قد تأثروا بمعلمين معينين في مراحل مختلفة من تعليمهم، في حين تأثر أحد علماء الرياضيات من أفراد الدراسة بكتاب مدرسي. وقد بذل علماء الرياضيات الثلاثة الذين عملوا أساساً في التحليل، جهداً للتوصل إلى نظرة واسعة في الرياضيات لا علاقة مباشرة لها باهتماماتهم الأساسية. وقد أبدى عالما الجبر اهتماماً بمجالات أخرى في الرياضيات، لكنهما كانا فاعلين على نحوٍ رئيس في مجالاتهما المختارة.

الإشراف على البحث والتفاعل الاجتماعي

وعلى نحو ما ذُكر سابقاً، كان علماء الرياضيات جميعاً في هذه الدراسة، أساتذة دائمين في جامعة تُعنى بالبحث. وإضافة إلى التدريس والبحث ومتطلبات العمل من خلال اللجان، فقد أدى كثير من هؤلاء العلماء دوراً كبيراً في تدريب الطلاّب الخريجين المهتمين بمجال البحوث. ويعدُّ الإشراف على البحوث جانباً من جوانب الإبداع، إذ إن أي تفاعل بين البشر يُعدُّ البيئة المثالية لتبادل الأفكار، حيث يتعرض عالم الرياضيات في أثناء هذا التفاعل لوجهات نظر متباينة عن الموضوع. وقد أشاد علماء الرياضيات كلهم بالتفاعل بينهم وبين طلابهم الخريجين. وفيما يأتي روايات صغيرة لاستجابات بعض الأفراد.

الرواية الأولى

أ: كان لديّ طالبة خريجة واحدة فقط أنهت للتو شهادة الدكتوراه، ويمكنني القول إنها كانت متفاعلة إلى حدٍّ بعيد، وتبحث عن شخص ما يهتم بموضوعها ويزودها بأفكار جديدة ويشاركها في البحث فيها.

ب: كان لـديّ طالبـان، وكانا قد بدأا دراسـة الدكتوراه لكنهما لم يواصـلا الدراسة، لذا، فإنه لا يمكنني الحديث عنهما، لكن التفاعل كان إيجابيّاً.

ج: حقّـاً، كان لديّ كثير من المتعاونين، هؤلاء هم طلابي السـابقون الذين أعرفهـم... أنـا أعمل في جميـع الأوقات مع الطلاّب، وهذا هو الوضـع الطبيعي.

د: من الصـعوبة الإجابة عن هذا (صمت)... إنه إيجابي؛ لأن التفاعل مع الآخريـن أمر جيد، ولكنه سـلبي؛ لأنه قد يسـتغرق وقتـاً طويلاً. فكلما تقـدم بك العمر، لا يسـتمر دماغـك في العمل كما كان سـابقاً... حيث إن أدمغة صـغار السـن أكثر انفتاحاً، فهناك قليل من الأفكار الفاسدة. لـذا، فإنـه من المثير العمل مع صـغار السـن الذين لا يزالـون في قمة إبداعهم. وعندما يتقدم بك العمر، تكتسـب خبرات أكثر، ولكن عندما تكون صغيراً فإن دماغك يعمل على نحوٍ أسرع.

هـ: نعـم، أعتقد أنه عامل إيجابي؛ لأنه يحفز الأفكار... ويسـمح بالحديث عن الأشياء ويستعرضـها في أثناء العملية أيضاً، ويضع الأشياء ضمن منظور مع المحافظة على الصـورة الكبيرة، وإن من المفيد لبحثك أن تشرف على الطلاّب.

التعليق على الرواية الأولى

تركزت اسـتجابات علماء الرياضـيات في الرواية السابقة على الإشراف على البحث. وعلى الرغم من ذلك، فقد اعترف جميع علماء الرياضـيات بدور التفاعل الاجتماعي بوجه عام بصـفته جانباً مهمّاً في تحفيز العمل الإبداعي. وقد أشـار كثير من علماء الرياضـيات إلى مزيّة القدرة على مراسـلة الزملاء عبر شـبكة الاتصـالات، إضـافة إلى المشـاركة في المؤتمرات التي تقدم فيها البحوث، وغيرها من اللقاءات المهنية. ويبدو هذا أكثر وضـوحاً ضمن الجزء اللاحق تحت عنوان الإعداد.

الإعداد واستخدام الاستدلال

عادة ما تكون هناك مجموعة من البحوث في مجال الموضوع الجديد الذي ينوي علماء الرياضيات بحثه واستقصاءه. ويكمن أحد أهداف هذه الدراسة في معرفة كيف يتناول علماء الرياضيات موضوعاً جديداً أو مسألة جديدة. هل يجربون المنحى الخاص بهم، أم يحاولون أولاً فهم ما يعرفونه أصلاً عن الموضوع فهماً جيداً؟ وهل يعمد علماء الرياضيات إلى استخدام الحاسوب في اكتساب رؤية عن المشكلة وتبصرها؟ وما الطرائق المتعددة المستخدمة في التعامل مع المشكلة؟ وعموماً، فإن الإجابات تشير إلى استخدام طرائق متنوعة.

الرواية الثانية

أ: أتحدث إلى الأشخاص الذين تناولوا هذا الموضوع، وأتعرف أسئلتهم، ثم أعدّ بحثاً أساسيّاً عن الفكرة الرئيسة. حيث تجد أن الحديث إلى الأشخاص يعينك بصورة أكبر من القراءة؛ لأنك تكتشف الدافع الذي يقف وراء كل شيء.

ب: ما الذي يمكن أن يحدث لي، هل عليّ البدء بقراءة شيء ما، وإذا ما تبين لي أن بوسعي أن أتقدم بصورة أفضل، فإنني عندئذٍ أسعى بجد، وحدي. ولكني لا أريد في أغلب الأحيان أن أعيد اختراع كثير مما هو موجود أصلاً. لذا، فإن أكثر ما حفزني على بحثي هذا، الرغبة في فهم المجال. وعليه، فلو أن أحداً ما قد قام بالعمل التأسيسي فإن ذلك سيكون مفيداً. وما زلت أعتقد أن الجزء الأكبر من عمل الباحث يعتمد على قراءة ما فعله الآخرون وكتبوه.

ج: يرتبط الأمر بشيء واحد... وهو ببساطة أن أسلوبي تميز بأنني عملت كثيراً حتى إنني كنت أعمل عندما لم أكن قادراً على ذلك. ببساطة، فإن المشكلات التي أحلها قد جذبتني كثيراً حتى إنني كنت أتساءل:

هل سـنرى من سـيموت أولاً... الرياضـيات أم أنا؟ ولم يكن واضحاً لي من سيموت أولاً.

د: حـاول أن تعـرف ما هو معـروف. لن أقول لـك افهمه كلـه... بل حاول معرفة ما هو معروف، وتوصل إلى نظرة عامة، ودع المسألة تتحدث عن نفسـها... وغالباً ما يكون عن طريق القراءة، حيث إنك تفتقر إلى ذلك التواصـل المباشر مع الأشـخاص الآخرين في الحقل نفسه. ولكن تبين لي أنني أستمع أكثر إلى ما يقوله الآخرون مقارنة بالقراءة.

هـ: حسناً! تعلمت أن أكون عالماً جيداً. إذ يحاول العالم الجيد أولاً أن يعرف ما هو معروف عن شيء ما أو غيره قبل أن يمضي وقته بالبحث عن ذاك الشـيء بنفسـه. وهذا لا يعني أنني لا أحاول أن أتناول موضوعاً آخر في الوقت ذاته.

التعليق على الرواية الثانية

تشـير هذه الإجابات إلى أن علماء الرياضـيات يمضـون وقتاً كبيراً في دراسـة سـياق المشكلة. وعادة ما يحدث هذا من خلال قراءة الأدب النظري أو الدراسات الموجودة، ومن خلال الحديث إلى غيرهم من علماء الرياضـيات في المجال الجديد. وتتناغم هذه النتيجة مع نموذج النظم الذي يرى أن الإبداع عبارة عن عملية حيوية مسـتمرة تشـتمل على التفاعل بين الفرد والمجال والحقل.

ومن المنطقي أن تسـأل في هذه المرحلة: هل يتناول علماء الرياضـيات مسألة واحدة حتى يحدث انفراج، أم أنهم يتناولون أكثر من مسألة في وقت واحد؟ وقد تبيّن أن كل عالم من علماء الرياضيات قد تناول مسائل كثيرة في وقت واحد مستخدماً منحى الذهاب والإياب.

الرواية الثالثة

أ: تناولت أكثر من مسألة مدة طويلة من الزمن... وقد مرت أوقات شعرت فيهـا بأننـي قادر علـى إثبات هذه النتيجـة، ثم أركز على ذاك الشـيء

برهة، ولكن مررت بأوقات أخرى كنت أفكر خلالها في أشياء كثيرة في مرحلة معينة.

ب: ربما أميل إلى تناول كثير من المسائل معاً في آنٍ واحد. هناك كثير من المسائل التي أتناولها، وربما يكون السؤال الحقيقي، كم مرة تغير مجال التركيز؟ هل أتناول مسألتين مختلفتين في اليوم نفسه؟ وهذا عائد إلى ما قد يتبادر إلى ذهنك في ذاك الإطار الزمني. ربما أتناول واحدة بدلاً من الأخرى. ولكني أميل إلى التركيز على مسألة واحدة بعينها أسابيع، ثم أنتقل بعد ذلك إلى شيء آخر. وما يحدث أحياناً أنني أتناول مسألة ما ثم أصل إلى نهاية مسدودة، ثم أبدل الاتجاه نحو مسألة أخرى بعض الوقت وأصل إلى نهاية مسدودة، ثم أعود إلى المسألة الأصلية. وعليه، فتناول المسألة يتراوح بين التقدم إلى الأمام والتراجع إلى الخلف.

ج: يتعين عليّ أن أركز ببساطة على شيء واحد ولا أتحول عنه كثيراً.

د: أجد أنني من المحتمل أن أعمل على مسألة واحدة. ربما يكون هناك شيئان يلوحان في الأفق، لكنني أتناول شيئاً واحداً فقط، وإذا لم أتقدم إلى الأمام، فإنني أعود إلى تناول الشيء الآخر، ثم أعود مرة أخرى هناك.

هـ: عادة ما أتناول شيئين في آنٍ واحد. وعندما أصاب بالوهْن وأنا مشغول في أحدهما، أنتقل إلى الآخر وأراوح بينهما ذهاباً وإياباً. وعادة ما يكون أحدهما موضع اهتمامي في وقت ما، وأمنحه وقتاً أكثر من الآخر، ولكن اعتدت على أن أتعامل مع مسألتين في آن واحد. فعندما أبحث عن مثال في بعض الأحيان ولا أجده، وابدأ بضرب رأسي بالحائط، وأكتشف أن البحث عنه مضيعة للوقت، فأبدأ بتناول مثال آخر؛ لأن هذا يعينني على ابتداع أفكار تجعل الرجوع إلى المسألة الأخرى سهلاً.

التعليق على الرواية الثالثة

تشـير الرواية القصـيرة آنفة الذكر إلى أن علماء الرياضـيات يعمدون إلى تناول أكثر من مسـألة في الوقت نفسـه. هل يتنقل علماء الرياضيات ذهاباً وإياباً بين المسائل بطريقة عشوائية، أم أنهم يستخدمون مجموعة منظمة من الأفكار عن المسألة قبل التحول إلى مسألة أخرى؟ أفاد كثير من علماء الرياضـيات أنهم يسـتخدمون الاسـتدلال المنطقي في سعيهم لإثبات شـيء ما في أحد الأيام، ثم العودة لنقضـه في اليوم التالي، وهم يبحثون عن الأمثلة والأمثلة المضادة، واسـتخدام المعالجة البارعة لتحقيق رؤية واضحة عن المسألة(Polya, 1954). وهذا يشـير إلى أن علماء الرياضـيات يسـتخدمون بعض الاستدلالات التي جاء بها بوليا. وعلى أي حال، لم يتضـح هل اسـتخدم علماء الرياضـيات الحاسـوب للحصـول على رؤية تجريبية أو حسـابية للمسألة. واهتم الكاتب أيضـاً بمعرفة أنماط الصور والمجاز التي يسـتخدمها علماء الرياضـيات في عملهم، حيث تساءلوا عن هذا. وتقدم إلينا الرواية الآتية رؤية عن هذا الجانب من الإبداع في الرياضيات.

الصور المجازية

سئل علماء الرياضيات في هذه الدراسة عن أنواع الصور والمجازات التي استخدموها في التفكير في الأشياء والوقائع الرياضية. وفيما يأتي إجاباتهم التي نأمل أن يحصل القارئ من خلالها على لمحة عن كيفية تفكير علماء الرياضيات في الأشياء. وتشير الإجابات أيضاً إلى صعوبة وصف الصور بصراحة ووضوح.

الرواية الرابعة

أ: نعم، نعم، أميل إلى رسـم كثير من الصـور عند إجرائي البحث، وأميل أيضـاً إلى التلاعب بالأشـياء فـي الهواء من أجل معرفـة كيفية عملها. ولديّ حدس هندسي كبير. وعليه، فإنني أقوم بكثير من اليدويات.

ب: تُعد هذه مشكلة بسبب المجال المحدد الذي أعمل فيه، ولا أستطيع عمل أي رسـوم بيانية، حيث إن الأشـياء غير محدودة، وعليـه، فإنني أتمنى لو كان بوسـعي الحصـول على نوع من رسوم الحاسـوب البيانية لإظهار

تعقيدات حلقة معينة للحصول على شيء يشبه مجموعات جوليا (Julia Sets) أو صور كسرية، أشياء غير محدودة ولكن بوسعك أن تتأمل فيها أكثر فأكثر لتتبين العلاقات الممكنة بينها. فكرت مليّاً في استخدام الإمكانات التي يتيحها الحاسوب. وللتفكير في أكثر الحلقات أهمية، عليك بالتفكير في حلقة الأعداد الصحيحة والعلاقات جميعها من حيث القابلية للقسمة، وكيف تصف هذه الشجرة إلى حد ما من خلال قابلية الأعداد الصحيحة للقسمة... إنها غير محدودة.

ج: العلم هو اللغة، فأنت تفكر من خلال اللغة. ولكن الأمر يتعلق باللغة ببساطة، فأنت تربط النظريات بعضها ببعض منطقيّاً. أنت ترى النظرية في بادئ الأمر في الطبيعة... عليك أن ترى أن هناك شيئاً منطقيّاً، ثم تبدأ بالبحث، وهناك عمل كبير بانتظارك حتى تتوصل إلى نظرية بمعادلات إهليليجية غير خطية.

د: إن كثيراً من الرياضيات، سواء أكنا ندرس أو نعمل، يعني ربط المعنى بما نقوم به، وهذا يعود بنا إلى السؤال المطروح في السابق عندما نتحدث عن كيفية قيامنا بذلك، أي ما نوع الاستدلال الذي تستخدمه؟ وما نوع الصور والمجازات التي تستخدمها؟ وفي الواقع، فإن كثيراً من عمل الرياضيات يتعلق بإيجاد هذه الصور المجردة التي تربط الأشياء بعضها ببعض، ومن ثم تجعلها ذات معنى، لكن ذلك لا يظهر في البراهين كذلك.

هـ: سواء استخدمت الأسلوب التصويري، أو اللغوي، أو الحركي... فجميع هذه المناحي صحيحة! فأحياناً تستخدم أحدها، وأحياناً تستخدم الآخر. وهذا يعتمد فعلاً على المشكلة التي تبحث عن حل لها، وهناك مشكلات كثيرة جدّاً... وغالباً ما أفكر في الاقترانات على أنها حركية على نحوٍ كبير، حيث تنقل الأشياء من مكان إلى آخر. وتتباين المناحي الأخرى من مسألة أو مشكلة إلى أخرى، وأحياناً من يوم إلى آخر.

وأحياناً، أحاول، وأنا أعدّ بحثاً ما، أن أصور الأشياء بطرق متعددة قدر الإمكان لأتبين ما الذي يجري. لذا، فهناك أنواع متعددة من المناحي.

التعليق على الرواية الرابعة

إضافة إلى إظهار صعوبة وصف الصور العقلية، قال علماء الرياضيات جميعاً إنهم لا يستخدمون الحاسوب في أعمالهم. وقد وردت خاصية عمل علماء الرياضيات هذه في استخدام بوانكريه (Poincaré, 1948) **مجاز الخيار** (*Choice Metaphor*)، واستخدام إيرفينك (Ervynck, 1991) **مصطلح اتخاذ القرار غير الحسابي** (*Non–Algorithmic Decision Making*). تعيد الشكوك التي عبر عنها علماء الرياضيات، فيما يتصل بعدم قدرة الآلات على القيام بعملهم، إلى الأذهان كلمات جاريت بيركهوف (Garrett Birkhoff) أحد أعظم علماء الرياضيات التطبيقيين في زماننا، ففي خطابه الذي ألقاه بمناسبة تقاعده من رئاسة جمعية الرياضيات الصناعية والتطبيقية (Society For Industrial And Applied Mathematics, Siam)، تناول بيركهوف(Birkhoff, 1969) دور الآلات في محاولات البشر الإبداعية، وخصص جزءاً من خطابه لمناقشة علم نفس الرياضيات، حيث قال:

> «حققت الإنجازات الأخيرة البارزة في الحاسوب حلماً قديماً بصورة جزئية. وقد قاد هذا بعض الناس إلى الاعتقاد أن حواسيب الغد ستكون أكثر «ذكاءً» من البشر، لا سيما في قواها المتصلة بالمنطق الرياضي... يبدو أن مقدرة علماء الرياضيات على إعطاء معنى للأمور المهمة وتجنب التكرار غير الضروري يصعب حوسبتها؛ ودون هذه المقدرة، يتطلب من الحاسوب أن يتتبع ملايين المسارات عديمة الجدوى التي يقدمها علماء الرياضيات ذوو الخبرة العالية». (Birkhoff, 1969, Pp.430–438).

الحضانة والإشراق

بعد الحديث عن دور الإشراف على البحوث والتفاعل الاجتماعي واستخدام الاستدلال والصور المجازية، التي يمكن أن تُصوَّر على أنها جوانب من مرحلة الإعداد في الإبداع في الرياضيات، فمن الطبيعي أن نتساءل: ماذا يحدث بعد ذلك؟ ويفترض الأدب التربوي

والدراسات المتعلقة بهذا الموضوع، أن عالم الرياضيات الذي يعمل بجد ليتوصل إلى رؤية عن المسألة، عادة ما يمر بمرحلة انتقالية يتوقف فيها الشعور عن العمل فيما يتعلق بالمسألة ليبدأ اللاشعور بالعمل، حين تطرح المسألة جانباً قبل أن يحدث الانفراج. وعلى أي حال، فقد قدّم علماء الرياضيات في هذه الدراسة خبرات تتناغم مع الكتابات ذات العلاقة والدراسات المتوافرة (Hadamard, 1945; Poincaré, 1948).

الرواية الخامسة

ب: تتمثل إحدى المشكلات في أن المرء يعد أولاً شيئاً عن المسألة التي يريد حلها، ثم يضعها جانباً، ويترك التفكير فيها. لا أعتقد أنك تستطيع استخراج الأفكار من فراغ، بل يتعين عليك أن تبني الأساس أولاً، أليس كذلك؟ لذا، يقول الناس: الآن، قد تناولنا هذه المسألة، فدعونا نفكر في الأمر، ونؤجل اتخاذ القرار. إذاً، فأنت تعد لذلك. لذا، فإن جانب اللاشعور أو الحدس قد يتناول المسألة ويأتيك الجواب، ولكنك لا تستطيع أن تحدد متى يحدث ذلك. وعليك بأن تكون واعياً لهذا، فتضع الأساس وتفكر فيه، وعندئذٍ تأتي تلك الومضات من الحدس، وهي بذلك تمثل الجانب الآخر من الدماغ الذي يتواصل معك في أي وقت دون سابق إنذار.

د: لست متيقناً هل يمكنك الفصل بين مرحلتي الإعداد والإشراق في العملية الإبداعية؛ لأنهما مرتبطتان على نحوٍ ما. فقد تمضي بعض الوقت وأنت تبحث في شيء ما، لكنك لا تراوح مكانك... أعتقد أن عقلك بالجهود الموزونة المدروسة يواصل العمل والتنظيم. وربما تظهر الفكرة عندما يتلاشى الضغط، ولكنها ترد نتيجة العمل الدؤوب الجاد.

هـ: عادة ما ترد الفكرة بعد أن أكون قد أظهرت الجد في عمل شيء ما، لكنها قد ترد في وقت غريب قبل أن أذهب إلى الفراش...فماذا أفعل عندئذٍ؟ نعم، أدوّنها (ضاحكاً). أحياناً، وأنا أتجول في مكان ما، أفكر مرة أخرى في المسألة وأقول: ماذا بخصوص هذا الحل؟ لماذا لا

تجربه؟ إن مثل هذا الأمر قد يحدث، إذ خطرت ببالي أفضل فكرة في إحدى الليالي وأنا أعد أطروحتي. وبعد أن عملت في بحثي بعض الوقت، جلست متسائلاً: لماذا لا أراجعه مرة أخرى؟...عندئذٍ قلت في نفسي! ها هي... لقد عرفت أن بوسعي فعل ذلك. غالباً ما تأتي الأفكار إليك من العالم الخارجي، لكنها لا تأتي إلا بعد أن تكون قد فكّرت فيها كثيراً.

التعليق على الرواية الخامسة

يتضح من الرواية القصيرة آنفة الذكر،أن ثلاثة من علماء الرياضيات الخمسة قد أفادوا بوجود خبرات تتناغم ونموذج الجشتالت. حيث عزا عالم الرياضيات (ت) الانفراجات التي حدثت إلى إرادته التي لا تتزعزع، إذ إنه لا ييأس ولا يستسلم، وعزاها أيضاً إلى الإلهام الروحاني، مردداً صدى صوت «باسكال» بطريقة ما. وعلى الرغم من ذلك، فقد عزا عالم الرياضيات (أ) هذه الإنجازات إلى المصادفة. وبعبارة أخرى، فإن الروابط (النفسية) الملائمة تحدث مصادفة، ويترتب على ذلك في نهاية المطاف السعي وراء النتيجة. وتؤدي المصادفة دوراً مهمّاً في الإبداع في الرياضيات. فقد تكون الأفكار والرؤى العظيمة وليدة المصادفة، مثل اكتشاف البنسلين. وفي هذا السياق، قدر أولام(Ulam,1976) الإنتاج السنوي بنحو مئتي ألف نظرية في الرياضيات. وتؤدي المصادفة دوراً مهمّاً في البحوث الرياضية، حيث إن عدداً قليلاً فقط من نتائج ومناحي البحوث المنشورة تخرج عن هذا الإطار. وهنا لا بد من التمييز بين المصادفة من وجهة نظر أتباع داروين (بخصوص البقاء)، والمصادفة من وجهة نظر علم النفس (التي يترتب عليها الاكتشاف/ الاختراع). وقد عالج «موير» دور المصادفة على النحو الآتي:

> «هناك جانبان لإيجاد مجالات جديدة، هما: إيجاد احتمالات جديدة، حيث يمكن لنا أن نجرب وصفاً عشوائيّاً (Stochastic)، ومن ثم نختار منها ما له قيمة. وعلى الرغم من أن الاستعانة بالمجازات البيولوجية لتفسير التطور الثقافي مشكوك فيها، فإن الإيجاد (Creation) والاختيار (Selection) عمليتان تحدثان ضمن سياق اجتماعي.(Muir, 1988 P. 33)

وهكذا، فإن «موير» يرفض تفسير أتباع داروين. وفي الجانب المقابل، لا يعترف نيكول (Nicolle, 1932) في كتاب «**اختراع الأحياء**» (*Biolgie De L'invention*) بدور اللاشعور في العملية الإبداعية، فهو يعزو التقدم الخارق في العلم والبحث إلى المصادفة المحضة:

«ستجد أن المسألة الغامضة حتى حينها، التي لا يبدو أن مصباحاً واهناً قادراً على الكشف عنها، قد فاضت بالضوء. إنها تشبه عملية الإيجاد من العدم. وعلى عكس المكتسبات التدريجية، فإن مثل هذا الفعل لا يدين بشيء للمنطق أو العقل. فعملية الاكتشاف وليدة المصادفة» (Hadamard, 1945, P.19).

رفض «هادمرد» تفسير نيكول (Nicolle) المستند إلى أتباع داروين معللاً ذلك بقوله: تفسيرك لحدوث الإبداع مصادفة يماثل تأكيدنا على وجود آثار (Effects) دون أسباب (Reasons). وناقش هادمرد أيضاً قائلاً :على الرغم من أن «بوانكريه» قد عزا الانفراج الخاص به في الدوال الفوكسية(Fuchsian Function) إلى المصادفة، فإنه اعترف بوجود مقدار لا بأس به من الجهد الواعي السابق تبعته مدة زمنية من اللاوعي. وأضاف هادمرد أيضاً قائلاً: «حتى لو كان إنجاز بوانكريه نتيجة للمصادفة وحدها، فإنها لم تكن كافية لتفسير حجم العمل الإبداعي الكبير المنسوب إلى بوانكريه في كل جانب من جوانب الرياضيات تقريباً». والسؤال الذي يبرز هو: كيف تعمل المصادفة (من الناحية النفسية)؟ يعتقد الكاتب أن العقل ينشر أفكاراً متفرقة، تكون من منتجات الخبرات السابقة. ويمكن لبعض هذه الأفكار العشوائية أن يتجمع بعضها بجانب بعض، ثم تدمج بطريقة ذات معنى. مثلاً، إذا ما قرأ أحدنا برهاناً معقدّاً يتألف من آلاف الخطوات، فقد لا تكون ألف فكرة عشوائية كافية لبناء برهان ذي معنى. وعلى الرغم من ذلك، فإن العقل يعمد إلى اختيار الأفكار المتصلة بعضها ببعض من بين تلك الأفكار العشوائية، ويربطها معاً ويحولها إلى بنية ذات معنى. وتعدّ نظرية ويدربيرن (Wedderburn) عن حلقة الانقسام المحدودة، أحد الأمثلة على توحيد الأفكار العشوائية على ما يبدو؛ لأن البرهان يشتمل على الجبر والتحليل المعقد ونظرية الأعداد.

يعالج «بوليا» دور المصادفة بمعنى احتمالي. وغالباً ما يحدث في الرياضيات أن سلسلة من التجارب الرياضية (تشمل عملية العد) تأتي بأرقام قريبة من مثالية أفلاطون.

والمثـال التقليـدي هو تحقيق «يولر» (Euler) للسلسـلة اللانهائية $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$ حصـل «يولـر» على قيمة رقمية تقريبية لمجموع السلسـلة باسـتخدام تحويلات متعددة للسلسلة. وكان الرقم التقريبي 1.644934، فخمّن بثقة مجموع السلسلة بِ $\pi^2/6$.

وعلى الرغم من أن القيمة الرقمية التي حصـل عليها «يولر» وقيمة $\pi^2/6$ تتوافقان إلى حد سـبع منازل عشـرية، فإن مثل هذا التخمين يمكن أن يعزى إلى المصـادفة. ومع ذلك، وبحساب بسيط، فإنه يتبين أن احتمالية توافق سبع منازل يساوي واحداً لكل عشرة ملايين! وعليه، لم ينسـب «يولر» هذا التخمين إلى المصادفة، وخمّن بجرأة أن مجموع هذه السلسلة كان فـي الواقع، $\pi^2/6$، ناهيك عن حقيقة أنه قد أثبت لاحقاً صـحة تخمينه (Polya, 1954, Pp.95-96).

الحدس والتحقق والبرهان

عندما تحدث لحظة الإشراق (Illumination)، سواء أكان ذلك من خلال المصادفة المحضـة أم من خلال الحضـانة أو من خلال التدخل الروحاني، يحاول علماء الرياضـيات عـادة التحقق أن حدسـهم كان صـحيحاً، ويحاولون بنـاء البرهان. يناقش هـذا الجزء من البحث كيف يتحقق علماء الرياضـيات من حدسـهم وبناء الأدلة علـى ذلك. حيث طُلب إلى علماء الرياضـيات في هذه الدراسة أن يصـفوا كيف يتكوّن الحدس لديهم بخصوص صحة الافتراضـ. وسُـئلوا: هل يعتمـدون على تحقق الدليل الرسـمي مراراً، أم أنهـم يعمدون إلى اسـتخدام البرهان الجزئي التقاربي المتعدد (Multiple Converging Partial Proof)؟ وهـل كانـوا ينظرون أولاً إلى الانسـجام مع نتائـج أخرى في المجـال نفسـه، أم أنهم كانوا ينظرون إلى التطبيقات؟ وعموماً، فقد ذكر غالبية علماء الرياضـيات في هذه الدراسـة أن آخر ما كانوا ينظرون إليه هو الدليل الرسمي. وهذا يتسق مع الكتابات والدراسات المتوافرة عن دور الدليل الرسـمي فـي الرياضـيات (Polya, 1954; Usiskin, 1987). وقد ذكر جُل علماء الرياضـيات أيضـاً الحاجة إلى التناغم مع النتائج الأخرى في المجال، وسـوف نشير إلى إجابات علماء الرياضيات عن هذا التساؤل لاحقاً.

الرواية السادسة

ب: أعتقد أنني سوف أختار التفحص المتكرر للدليل الرسمي... ولكني لا أعتقد أن ذلك كافٍ، إذ لابد من أخذ البقية الباقية في الحسبان. أي، أنك ربما تعتقد أن شيئاً ما صحيح على الرغم من أنك قد لا تفهمه تماماً. هذه هي النقطة التي أشير إليها في المحاضرة التي ألقاها عن سلسلة عالم الرياضيّات الألمانيّ ديريتشليت (Dirichlet). يومئذٍ، قال المحاضر: لقد كان لدينا دليل رسمي في وقت ما، لكن لا يمكننا القول إنه كان مفهوماً تماماً، فماذا كان يعني بذلك؟ ليس الدليل الذي لم يكن مفهوماً، بل تبعات النتائج وارتباطها بغيرها، والتطبيقات، ولماذا تعمل الأشياء في الواقع؟ ولكن ربما يكون أول ما سأفعله هو تفحص الدليل الرسمي لإرضاء نفسي، وبذلك أعتقد أنه صحيح على الرغم من أنني لا أفهم تبعاته ودد عليه عند ذلك الحد...إذ من الأسلم أن تقول إنه الموجه أو المرشد الأكثر ضماناً لي.

ج: أولاً يجب أن تراه في الطبيعة. عليك أن ترى أولاً ان هذه النظرية تتطابق مع شيء في الطبيعة، ثم إذا ما تكون لديك هذا الإنطباع، فمن المنطقي جداً أن تبحث عن البراهين.. ولديّ بالطبع عدة نظريات وبراهين تعتبر غير صحيحة، لكن معظم البراهين والنظريات صحيحة.

د: آخر ما أفكر فيه هو الدليل الرسمي، فأنا أبحث عن مقارنات ونظائر مع أشياء أخرى... وكيف ستضيء نتائجك التي تظن أنها صحيحة، الأشياء الأخرى وتتلاءم مع البنية العامة.

هـ: لمّا كنت أعمل في مجال البحث الأساسي، فإن عملي عادة ما يكون متناغماً مع غيره من الأشياء، وربما يكون هذا أهم شيء آخر لي. نعم، بوسع المرء أن يعود ويتفحص الدليل وهذا النوع من الأشياء، لكن التطبيقات لمّا تأت بعد، حيث إنها غير موجودة. ويمكن القول إن إمكانية التطبيق هي التي توجه عادة اختيار المسألة، حيث إن الجزء

الجيد الذي يمثلها هو إمكانية استخدامها. لذا، فإنك تنظر إلى أهميتها في الإطار الكبير... وهذه هي ظاهرة التماسك والتناغم. وربما تكون التطبيقات هي الأكثر ملاءمة على الأرجح، من بين الخيارات المتاحة جميعها.

التعليق على الرواية السادسة

تشير هذه الرواية القصيرة إلى وجود درجات متفاوتة من الدقة للبراهين الصادقة بين علماء الرياضيات. وبوجه عام، تتفاوت الدقة بين علماء الرياضيات استناداً إلى الوقت والأحوال. وهناك عدد قليل من البراهين في مجالات الرياضيات تنطبق عليها المعايير التي يستخدمها معلمو الهندسة في المدارس الثانوية (حيث يدعم كل برهان بالأسباب). وعموماً، يعمد المرء إلى زيادة الدقة والصرامة عندما لا تبدو النتائج صحيحة (Usiskin, 1987). وتعدُّ البراهين في أغلب الأحيان الخطوة الأخيرة في عملية الاختبار هذه. ومن حيث المبدأ، من الواضح أن الرياضيات تشبه من حيث عملية بنائها أي معرفة بشرية أخرى، حيث يؤدي العمل الإبداعي لعلماء الرياضيات إلى استدلالات توضيحية، وهي كالبراهين، ولكنها تكتشف عن طريق الاستدلال المعقول، من خلال التخمين (Polya, 1954). لقد كانت الطريقة التي تعامل فيها علماء الرياضيات مع البرهان في هذه الدراسة مختلفة جدّاً عن المنحى المنطقي في أغلب الكتب المدرسية. ويعدُّ المنحى المنطقي إعادة بناء مصطنعة للاكتشافات التي أُدخلت عنوة إلى النظام الاستنتاجي، وفي هذه العملية يُفتقد الحدس الذي وجّه عملية الاكتشاف.

الاستنتاجات والمضامين

هدفت هذه الدراسة إلى تحقيق رؤية واستبصار أكثر عمقاً في الإبداع في الرياضيات. وعلى نحو ما اتضح من استعراض الكتابات عن الموضوع والدراسات السابقة، فإن ما يتوافر حاليّاً منها عن الإبداع في الرياضيات ضئيل نسبيّاً. وفي السعي نحو تحقيق فهم أفضل لعملية الإبداع، تبين للكاتب أن نموذج الجشتالت الذي اقترحه هادمرد لا يزال قابلاً للتطبيق في أيامنا هذه. وقد حاولت هذه الدراسة إضافة بعض التفاصيل إلى نموذج هادمرد المتمثل

في الإعداد، الحضــانة، الإشراق، والتحقق، آخذة في الحسبان دور كل من الصور المجازية والحدس والتفاعل الاجتماعي، إضــافة إلى الاستدلال وضرورة استخدام البرهان في عملية الإبــداع. ومــن الجدير بالذكر أن علماء الرياضــيات قــد عملوا في هذه الدراســة في أجواء مواتية للقيام بدراسات بحثية مطولة. حيث توافر لهم التقاء الذكاء بالمعرفة وأنماط التفكير والشخصــية والتحفيــز، وكذلك البيئة التي مكّنتهم من العمل بإبــداع (Sternberg, 2000; Sternberg & Lubart, 1996, 2000). وقد تكونت مرحلة الإعداد للإبداع في الرياضــيات من مناحٍ كثيرة، اســتخدمها عالم الرياضــيات في وضع أســاس للعمل. واشتملت على قراءة الدراســات القائمــة، والحديــث مع علماء رياضــيات آخرين في مجال الرياضــيات المحدد (Csikszentmihalyi, 1988, 2000)، وتجريب مجموعة متنوعة من الاستدلالات (Polya, 1954)، إضافة إلى استخدام منحى الذهاب والإياب (Back And Forth Approach) في التخمين المنطقي. قال أحد علماء الرياضــيات إنه حاول في البداية معرفة هل الســعي وراء العلاقات يستجيب للظواهر الطبيعية.

تناول علماء الرياضــيات جميعهم في هذه الدراســة أكثر من مســألة في الوقت نفسه. وهذا يتفق مع نظرية الاســتثمار في الإبداع (Sternberg & Lubart, 1996)، حيث استثمر علماء الرياضــيات قــدراً مثاليّاً من الوقت حول المســائل كلها التي تناولوهــا، ولكنهم كانوا يتحولون إلى مسألة أخرى عند انقطاع بريق الأمل بانفراج قادم. وقد عدّ علماء الرياضيات جميعهــم في هذه الدراســة أن هــذه المرحلة تعدّ مــن أكثر مراحل الإبداع صــعوبة وأهمية، حيــث كان يتبع العمل المطول مرحلة حضــانة، حيث تطرح المســألة جانباً (ثم تعاد مرحلة الإعداد لمسألة أخرى مختلفة). وهكذا، فقد حدث تحول في العقل من الشعور إلى اللاشعور فــي أثناء تناول المســألة. قال أحد علماء الرياضــيات: إن هذه هي المرحلــة التي تبدأ فيها المسألة بالتحدث إليك، في حين قال عالم رياضيات آخر: إنه في هذه المرحلة يبدأ الجانب الحدســي من الدماغ بالتواصــل مع الجانب المنطقي، وخمّن أن هذا التواصل لم يكن ممكناً في المستوى الشعوري.

يحدث الانتقال من مرحلة الحضانة إلى الإشراق عند اللحظة التي تنعدم فيها التوقعات بحدوث أي انفراج، إذ أفاد عدد من العلماء بأن الانفراج في المسألة قد حدث وهم في طريقهم إلى فراش النوم أو وهم سائرون في الطريق، أو أحياناً وهم يتحدثون إلى شخص آخر عن المسألة. وقد وصف أحد علماء الرياضيات ذلك على النحو الآتي: تتحدث إلى شخص ما ويقول شيئاً ما، ربما كان عاديّاً جدّاً قبل شهر، ولكن عندما يتفوه به في الوقت الذي تكون فيه مستعدّاً لتلقي المعلومة، يتهلّل قائلاً: نعم، بوسعي أن أعملها بهذه الطريقة، أليس كذلك! لكن يجب أن تكون مستعدّاً لذلك. الفرصة تدق بابك، ولكن عليك أن تكون قادراً على فتح الباب.

أما عملية الإشراق، فتحدث بعد تحقق عالم الرياضيات الفكرة التي حدثت من خلال إقامة البرهان. وقد بحث جلّ علماء الرياضيات في هذه الدراسة عن ترابط النتيجة بغيرها من النتائج الموجودة في مجال البحث، وهل اتسقت النتيجة مع النتائج الأخرى، وتناغمت مع التركيبة العامة للمجال، وعندئذٍ يكون بوسع عالم الرياضيات أن يحاول بناء البرهان والبرهان الرسمي. أوضحت الدراسة من حيث معتقدات علماء الرياضيات عن طبيعة الرياضيات وأثرها في بحوثهم، أن أربعة منهم كانوا يميلون إلى الأفلاطونية، لذا، كانوا يسيرون على عكس التيار القائل: إن الأفلاطونية قد أضحت استثناء هذه الأيام. وتجدر الإشارة هنا إلى أن النقاش المفصل عن هذا الجانب يقع خارج نطاق هذا البحث. وعلى الرغم من ذلك، فقد تبين أن المعتقدات المتعلقة بطبيعة الرياضيات قد أثرت في كيفية إجراء علماء الرياضيات هؤلاء البحث، وقد ارتبطت بشدة بمعتقداتهم اللاهوتية (Sriraman, 2004).

وقد أمل علماء الرياضيات أن تلقى نتائج عملهم الإبداعي قبولاً من مجموعة من الخبراء؛ من أجل تضمين عملهم المجال، ولا سيما في صورة نشرة في مجلة علمية مشهورة. وعلى الرغم من ذلك، فإن قبول النتيجة الرياضية التي تعدُّ الإنتاج النهائي للإبداع، لا تضمن البقاء بالمعنى الذي اقترحه داروين (Muir, 1988). وقد لا تجد النتيجة من يتبنّاها من علماء الرياضيات الآخرين، وإذا ما تبنّاها مجتمع علماء الرياضيات بصفتها نتيجة

قابلة للحياة، فمن الأرجح أن تتعرض لطفرة، وتقود إلى رياضيات جديدة. وهذه المسألة على أي حال تقررها المصادفة!

الآثار المترتبة والمضامين

يبدو من الواضح أن من المفيد في مجال تدريس الرياضيات أن نحدد المواهب الإبداعية ونتولى رعايتها في غرفة الصف. وعلى أي حال، فإن الفرق بين عمل الطالب الذي يحاول حل مسألة معقدة في الرياضيات وعمل المخترع (المبتدع)...هو فرق في الدرجة فقط (Polya, 1954). وعموماً، فإن الإبداع بصفته سمة في التفكير الرياضي لا يُعدُّ براءة اختراع لعالم الرياضيات (Krutestskii, 1976). وقد ركزت معظم الدراسات المتعلقة بالإبداع على الأشخاص المشهورين (Arnheim, 1962; Gardner, 1993,1997; Gruber, 1981). يرى المؤلف أنه يمكن تكييف النماذج المعاصرة من بحوث الإبداع لدراسة عينات غير مشهورة، مثل طلّاب المرحلة الثانوية. وستُظهر مثل هذه الدراسات شيئاً كثيراً لمجتمع بحوث تعليم الرياضيات بخصوص الإبداع في غرفة الصف. ويمكن للتربويين أن يسألوا أنفسهم: (أ) هل يظهر الإبداع في الرياضيات في غرفة الصف؟ (ب) كيف يمكن للمعلم أن يحدد العمل الإبداعي؟ من الإجابات المحتملة لمثل تساؤلات كهذه هو إعادة بناء عمل الطلّاب وتقويمه بصفته نظام تطور فريداً من الإبداع (Gruber & Wallace, 2000) عن طريق تضمين بعض الأوجه التي اقترحها جروبر ووالاس. وهذا يستوجب ضرورة إيجاد مسائل مناسبة للمستويات الملائمة تثير الإبداع لدى الطلّاب. ومن السمات الشائعة بين علماء الرياضيات الاعتماد على حالات معيّنة أو إعادة الصياغات المتماثلة، أو المسائل المشابهة التي تحاكي أوضاع المسألة الأصلية وهم يبحثون عن الحل (Polya, 1954; Skemp, 1986). وإن ابتداع رياضيات أصيلة يتطلب مستوى عالياً جدّاً من التحفيز والدافعية والمثابرة إضافة إلى التأمل، التي تعدُّ هذه كلها مؤشرات على الإبداع (Amabile, 1983; Policastro & Gardner, 2000; Gardner, 1993). يتضمن أدب الإبداع والدراسات المتعلقة به أن معظم الأفراد يميلون إلى الانجذاب نحو التعقيد، الأمر الذي لا تستطيع جلّ المناهج المدرسية أن توفره إلا بنسبة قليلة، إذ نادراً

ما تستخدم الممارسات الصفية ومناهج الرياضيات مسائل ذات أسس رياضية، أو تتيح للطلاّب مدة زمنية طويلة ليتفاعلوا معها باستقلالية. ويرى الكاتب أنه لكي يظهر الإبداع في الرياضيات في غرفة الصف، لا بد من إعطاء الطلاّب فرصة معالجة المسائل غير الاعتيادية من حيث التركيب والتعقيد، التي لا تتطلب الدافعية والمثابرة فحسب، بل التأمل والتفكر المتعمقين. وهذا يتطلب أن يتيح المربون الفرصة أمام الطلاّب للتفكر مليّاً في المسائل التي حُلّت سابقاً، وإجراء مقارنات بين مسائل ملبسة متعددة (English, 1991, 1993; Hung, 2000; Maher & Kiczek, 2000; Maher & Martino, 1997; Maher & Speiser, 1996; Sriraman, 2003; Sriraman, 2004B). إضافة إلى ذلك، فإن تشجيع الطلاّب على البحث عن المتشابهات ضمن مجموعة من المسائل يعزز السلوك الرياضي (Polya, 1954)، ويقود الطلاّب إلى اكتشاف بنى وقواعد رياضية معقدة نوعاً ما بطريقة مماثلة لإبداع علماء الرياضيات.

قائمة المراجع

Amabile, T. M. (1983). *Social Psychology Of Creativity: A Componential Conceptu–alization* . Journal Of Personality And Social Psychology, 45, 357–376.

Arnheim, R. (1962). *Picasso's Guernica. Berkeley* : University Of California Press.

Birkhoff, G. (1969). *Mathematics And Psychology* . Siam Review, 11, 429–469.

Burton, L. (1984). *Mathematical Thinking: The Struggle For Meaning* . Journal Forresearch In Mathematics Education, 15, 35–49.

Corbin, J., & Strauss, A. (1998). *Basics Of Qualitative Research* . Thousand Oaks, Ca: Sage.

Csikszentmihalyi, M. (1988). *Society, Culture, And Person* : A Systems View Of Creativity.

In R. J. Sternberg (Ed.), *The Nature Of Creativity: Contemporary Psychological Perspectives* (Pp. 325–339). Cambridge University Press.

Csikszentmihalyi, M. (2000). *Implications Of A Systems Perspective For The Study Of Creativity* . In R. J. Sternberg (Ed.), Handbook Of Creativity (Pp. 313–338). Cambridge University Press.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience* . New York: Hough– ton Mifflin.

English, L. D. (1991). *Young Children's Combinatoric Strategies* . Educational Studies In Mathematics, 22, 451–474.

English, L. D. (1993). *Children's Strategies In Solving Two– And Three–Dimen– sional Combinatorial Problems* . Journal For Research In Mathematics Ed– ucation, 24(3),255–273.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy Of Mathematics Education* , Briston, Pa: Falmer.

Ernest, P. (1994). *Conversation As A Metaphor For Mathematics And Learning* . Proceedings Of The British Society For Research Into Learning Mathemat– ics Day Conference, Manchester Metropolitan University (Pp. 58–63). Not– tingham: Bsrlm.

Ervynck, G. (1991). *Mathematical Creativity* . In D. Tall (Ed.). Advanced Math– ematical Thinking (Pp. 42–53). Kluwer Academic.

Frensch, P., & Sternberg, R. (1992). *Complex Problem Solving* : Principles And Mechanisms. Mahwah, Nj: Erlbaum.

Gallian, J. A. (1994). *Contemporary Abstract Algebra* . Lexington, Ma: Heath.

Gardner, H. (1993). *Frames Of Mind* . New York: Basic Books.

Gardner, H. (1997). *Extraordinary Minds* . New York: Basic Books.

Gruber, H. E.(1981). *Darwin On Man* . Chicago: University Of Chicago Press.

Gruber, H. E., & Wallace, D. B. (2000). The Case Study Method And Evolving Sys– temsapproach For Understanding Unique Creative People At Work. In R. J. Sternberg (Ed.), Handbook Of Creativity (Pp. 93–115). Cambridge Univer– sity Press.

Hadamard, J. W. *(1945). Essay On The Psychology Of Invention In The Mathemati– cal Field* . Princeton University Press.(Page References Are To Dover Edi– tion, New York 1954).

Hanna, G. (1991). *Mathematical Proof* . In D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (Pp. 54–60). Kluwer Academic Publishers.

Hung, D. (2000). *Some Insights Into The Generalizations Of Mathematical Mean– ings* . Journal Of Mathematical Behavior, 19, 63–82.

Krutetskii, V. A.(1976). *The Psychology Of Mathematical Abilities In School Chil–dren* .(J. Teller, Trans. & J. Kilpatrick & I. Wirszup, Eds.). Chicago: University Of Chicago Press.

L'enseigement Mathematique. (1902), 4, 208–211, And (1904), 6, 376.

Lester, F. K. (1985). *Methodological Considerations In Research On Mathemati–cal Problem Solving* . In E. A. Silver, Teaching And Learning Mathematical Problem Solving.Multiple Research Perspectives (Pp. 41–70). Hillsdale, Nj: Erlbaum.

Maher,C. A., & Kiczek R. D. (2000). *Long Term Building Of Mathematical Ideas Related To Proof Making* . Contributions To Paolo Boero, G.Harel, C. Ma–her, M.Miyasaki. (Organisers) Proof And Proving In Mathematics Educa–tion. Icme9– Tsg 12. Tokyo/Makuhari, Japan.

Maher ,C. A., & Speiser M. (1997) *How Far Can You Go With Block Towers? Steph–anie's Intellectual Development* . Journal Of Mathematical Behavior 16(2), 125–132.

Maher, C. A., & Martino A. M. (1996) *The Development Of The Idea Of Mathe–matical Proof: A 5–Year Case Study* . Journal For Research In Mathematics Education, 27(2), 194–214.

Manin, Y. I.(1977). *A Course In Mathematical Logic* , New York: Springer–Verlag,

Minsky, M. (1985). *The Society Of Mind* . New York: Simon & Schuster.

Muir, A. (1988). *The Psychology Of Mathematical Creativity* . Mathematical Intel–ligencer,10(1), 33–37.

Nicolle, C. (1932). *Biologie De L'invention* , Paris: Alcan.

Patton, M. Q. (2002). Qualitative Research And Evaluation Methods. Thousand Oaks : Sage.

Poincaré, H. *(1948). Science And Method* . New York: Dover.

Policastro, E., & Gardner, H. *(2000).* From Case Studies To Robust Generalizations: An Approach To The Study Of Creativity . In R. J. Sternberg (Ed.), Handbook Of Creativity (Pp. 213–225). Cambridge University Press.

Polya, G. (1945). *How To Solve It* . Princeton, Nj: Princeton University Press.

Polya, G. (1954). Mathematics And Plausible Reasoning: Induction And Analogy In Mathematics (Vol. Ii). Princeton, Nj: Princeton University Press.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving* . New York: Academic Press.

Skemp, R. (1986). *The Psychology Of Learning Mathematics* . Penguin Books.

Sriraman, B. (2003). *Mathematical Giftedness, Problem Solving, And The Ability To Formulate Generalizations* . The Journal Of Secondary Gifted Education. Xiv(3), 151–165.

Sriraman, B (2004). *The Influence Of Platonism On Mathematics Research And Theological Beliefs* . Theology And Science, 2(1), 131–147.

Sriraman, B. (2004). *Discovering A Mathematical Principle* : The Case Of Matt. Mathematics In School, 33(2), 25–31.

Sternberg, R. J. (1979). *Human Intelligence: Perspectives On Its Theory And Mea–surement* . Norwood, Nj: Ablex.

Sternberg, R.J. (1985). *Human Abilities: An Information Processing Approach* . New York:w. H. Freeman.

Sternberg, R. J. (2000). *Handbook Of Creativity* . Cambridge University Press. Sternberg. R. J., & Lubart, T. I. (1996). *Investing In Creativity* . American Psychologist, 51, 677–688.

Sternberg. R. J., & Lubart, T. I. (2000). *The Concept Of Creativity : Prospects And Paradigms* . In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook Of Creativity* (Pp. 93–115). Cambridge University Press.

Taylor, S. J., & Bogdan, R. (1984). *Introduction To Qualitative Research Methods: The Search For Meanings* . New York: Wiley.

Torrance, E. P. (1974). *Torrance Tests Of Creative Thinking: Norms–Technical Manual* . Lexington, Ma: Ginn.

Ulam, S. (1976). *Adventures Of A Mathematician* . New York: Scribners.

Usiskin, Z. P. (1987). *Resolving The Continuing Dilemmas In School Geometry* . In M. M.Lindquist, & A. P. Shulte (Eds.) Learning And Teaching Geometry, K–12: 1987 Yearbook (Pp. 17–31). Reston, Va: National Council Of Teachers Of Mathematics.

Wallas, G. (1926). *The Art Of Thought* . New York : Harcourt, Brace & Jovanovich.

Weisberg, R.W. (1993). *Creativity: Beyond The Myth Of Genius* . New York: Free–man.

Wertheimer, M. (1945). *Productive Thinking* . New York: Harper.

Wittgenstein, L. (1978). *Remarks On The Foundations Of Mathematics* (Revised Edition), Cambridge, Massachusetts Institute Of Technology Press

الملحق أ: العُرف المتبع في المقابلات

لقد طوّرت أداة المقابلة بوساطة إجراء تعديلات على الأسئلة المدرجة في الاستبانات الـواردة فـي مجلـة «تدريـس الرياضـيات» (L'enseigement Mathematique, 1902) و (Muir, 1988) :

1. صف موقعك في العمل ودورك فيه.
2. هل تمتلك حرية اختيار المسـألة الرياضـية التي تعالجها، أم أن من يقرر ذلك هو مكان عملك؟
3. هل تعمل وتنشر بصورة رئيسة بصفتك فرداً أم جزءاً من مجموعة؟
4. هل يعدُّ الإشراف على البحث عاملاً إيجابيّاً أم سلبيّاً في عملك؟
5. هل تنظم وقتك في دراسة الرياضيات ؟
6. ما الأنشطة المفضلة التي تمارسها، باستثناء الرياضيات، في أوقات فراغك ؟
7. هل تتذكر أي عوامل ذات تأثير مباشـر، سواء كانت العائلة أو المعلمين أو الزملاء أو الكتب المدرسية، كان لها أهمية كبيرة في تطورك في الرياضيات؟
8. أي المجـالات تعلمتهـا من تلقاء نفسـك؟ وأي المجالات تعمل فيهـا الآن؟ إذا كان المجالان مختلفين، فما أسباب ذلك؟
9. هل تسعى إلى الحصول على نظرة عامة شاملة عن الرياضيات، ليست ذات علاقة مباشرة بمجال بحثك؟
10. هل تفرق بين عمليات التفكير في التعلم والبحث؟
11. عندما تكون على عتبة البدء بموضوع جديد، هل تفضل تجميع ما هو معروف أولاً، أم أنك تجرب المنحى الخاص بك؟
12. هل تركز على مسألة واحدة وقتاً طويلاً، أم على مسائل عدة في آن واحد؟
13. هـل كانت أفضـل الأفكار لديـك وليدة جهود طويلة مقصـودة، أم أنهـا أتت وأنت منشغل بمهام أخرى ليست ذات صلة بالموضوع؟

14. كيف تكوّن حدساً عن حقيقة افتراض ما؟

15. هل يؤدي الحاسوب دوراً في عملك الإبداعي (التفكير الرياضي)؟

16. أي نوع من الصور العقلية تستخدم عندما تفكر في شيء رياضي؟

ملاحظة: حذفت الأسئلة المتصلة بالمسائل الوجودية واللاهوتية في هذه الوثيقة. وقد تناول في سريرمان (Sriraman, 2004) الحديث عن المناقشات التي نجمت عن هذه الأسئلة.

ملاحظات

يشير ضمير المتكلم في جميع الروايات إلى الشخص الذي أجرى المقابلة، في حين تشير الحروف الأبجدية: أ، ب، ت، ث، ج إلى علماء الرياضيات المشاركين في الدراسة.