

# النبوغ في الرياضيات وحل المسائل والقدرة على صوغ التعميمات

## خبرات حل المسائل لدى أربعة من الطلاب الموهوبين

بهاراث سريرامان Bharath Sriraman

جامعة مونتانا



### ملخص

تعدُّ المهام الرياضية المعقدة، مثل حل المسائل، طريقة مثالية لتزويد الطلاب بفرص لتطوير العمليات الرياضية العليا، مثل التمثيل والتجريد والتعميم. طُلب في هذه الدراسة إلى تسعة من طلاب الصف التاسع المبتدئين الذين التحقوا بالصف الخاص بدراسة مادة الجبر المسرَّع، حل مسائل مركبة غير اعتيادية في صحائف مذكراتهم اليومية. وقد حُددت المسائل بحيث تقدم إلى الطلاب على مدار ثلاثة أشهر، بمستوى متزايد من التعقيد. والصورة العامة التي كانت تميز حلول المسائل الخمس هي مبدأ برج الحمام أو مبدأ ديريشلت (Dirichlet Principle)<sup>(1)</sup>. وقد نجح الطلاب الأربعة النابغون في الرياضيات في اكتشاف الصورة العامة التي تميز حلول المسائل الخمس والتعبير عنها لفظياً، في حين أخفق الطلاب غير الموهوبين في اكتشاف خفايا الصورة العامة. وهذا يؤكد فرضية وجود علاقة بين النبوغ الرياضي والقدرة على حل المسائل، وكذلك القدرة على التعميم. ويوضح هذا البحث خبرات حل المسائل لدى الطلاب الموهوبين في الرياضيات، وكيف يصوغون

(1) يعتقد أن عالم الرياضيات الألماني يوهان ديريشلت Dirichlet Johann هو أول من طرح هذه الفكرة في عام 1834. وأطلق عليها اسم مبدأ الجرارور أو الدُرج أو مبدأ الرف. لذا، فإنها غالباً ما يشار إليها بمبدأ صندوق ديريشلت. وقد أصبح هذا المبدأ يسمى مبدأ برج الحمام principle Pigeonhole. لكن الاسم الأصلي لا يزال مستخدماً في اللغات الفرنسية والإيطالية والألمانية-المراجع

التجريد والتعميمات، مع تبعات التسريع والحاجة إلى التمايز في حصص رياضيات المرحلة الثانوية.

### مقدمة

تتمثل أحد الجوانب المثيرة في فكر الإنسان في مقدرته على التعميم من الخبرات الخاصة المحددة، ومن ثم تكوين مفاهيم مجردة جديدة. تدعو مبادئ ومعايير المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات في الولايات المتحدة *The Principles & Standards Of Mathematics* (Nctm, 2000) إلى برامج تعليمية تركز على حل المسائل بهدف مساعدة الطلاب على تطوير درجة التعقيد في العمليات الرياضية، مثل التمثيل والمنطق الرياضي والتجريد والتعميم. وغني عن القول، أن على الطلاب تطوير عمليات رياضية أكثر تطوراً، لا سيما حل المسائل والتمثيل والمنطق، وكذلك مقدرتهم المتزايدة على التفكير التأملي، ومراقبة أعمالهم التي تقود إلى التجريد ومقدرة أكبر على التعميم. وهكذا، فإن المقدرته على التعميم تتجم عن بعض الخبرات الرياضية التي تعدُّ مكوناً مهماً من مكونات القدرة الرياضية، إضافة إلى أن تطوير مثل هذه القدرة يُعدُّ أحد أهداف تعليم/تعلم الرياضيات (Nctm, 2000).

واهتم علماء النفس أيضاً بظاهرة التعميم، وحاولوا ربط القدرة على التعميم بمقاييس الذكاء (Sternberg, 1979)، وقدرات حل المشكلات المعقدة (Frensch & Sternberg, 1992). يرى جرينز (Greenes, 1981) أن الطلاب الموهوبين في الرياضيات يختلفون عن المجموع العام من حيث مقدرتهم على صياغة المسائل بصورة عفوية، والمرونة في معالجة البيانات، والقدرة على التجريد والتعميم. وهناك دليل تجريبي على وجود فروق في التعميم بين الطلاب الموهوبين وغير الموهوبين في مستوى ما قبل المدرسة (Kanevsky, 1990). ويوجد أيضاً عدد قليل من الدراسات على مستوى المرحلة الثانوية توثق وتصف كيف يتعامل الطلاب النابغون مع حل المسائل المجردة، إضافة إلى تعميم المفاهيم الرياضية. وهذا يقود بدوره إلى الأسئلة الآتية:

1. ما نوع سلوكيات حل المشكلات التي يتعامل بها طلاب المرحلة الثانوية؟



## مراجعة الكتابات والدراسات السابقة

يُعدُّ نموذج جورج بوليا، عالم الرياضيات المشهور، واحداً من نماذج حل المشكلات الأكثر شهرة، ويشتمل هذا النموذج على أربع مراحل، هي: الفهم، والتخطيط، والتطبيق، والتأمل والمراجعة. ومن المآخذ على نموذج بوليا أنه كان حسابياً في طبيعته، وأن البحوث الناجمة عنه ركزت أساساً على التجريب. عزالستر (Lester, 1985) إخفاق غالبية الجهود التعليمية الهادفة إلى تحسين أداء الطلاب في حل المسائل، إلى التركيز الزائد عن حده على مهارات التجريب، في الوقت الذي أُغفلت فيه المهارات الإدارية اللازمة لتنظيم نشاط الفرد (مهارات ما وراء المعرفة) (ص. 62). وقد أشير إلى أن نشاط ما وراء المعرفة، أو معرفة عمليات تفكير الشخص، أو التنظيم الذاتي، توفر أرضية لتطبيق التجريب والعمليات الحسابية (Lester, 1985; Schoenfeld, 1985, 1992)؛ لذا، أجرى «لستر» تعديلاً على نموذج بوليا ليشتمل على مكونات المعرفة وما وراء المعرفة. ففي مكون المعرفة، أعاد تسمية المراحل الأربع: الفهم، والتخطيط، والتطبيق، والمراجعة (Understanding, Planning, Implementing, & Looking Back) ، على النحو الآتي: التوجه، والتنظيم، والتنفيذ، والتحقق (Orientation, Organization, Execution, & Verification). وتألّف مكون ما وراء المعرفة من ثلاثة أنواع من المتغيرات، هي: متغيرات الشخص، ومتغيرات المهمة، ومتغيرات الإستراتيجية. وفيما يأتي وصف لفئات المعرفة الأربع:

**التوجه (Orientation)**، يشير إلى السلوك الإستراتيجي نحو تقويم المشكلة (المسألة) وفهمها. ويشتمل على إستراتيجيات شمولية وتحليلية للمعلومات، وتمثيل أولي ولاحق، وتقويم مستوى الصعوبة وفرص النجاح.

**التنظيم (Organization)**، يشير إلى تحديد الأهداف، والتخطيط الشامل، والتخطيط المرحلي.

**فئة التنفيذ (Execution)**، تشير إلى تنظيم السلوك ليتفق مع الخطة. ويشتمل على أداء الأعمال من مرحلة إلى أخرى، ومراقبة التقدم، واتساق الخطط المرحلية، والمفاضلة بين القرارات (السرعة مقارنة بالدقة).

وأخيراً، التحقق (Verification)، ويتألف من تقويم القرارات المتخذة، وتقويم نتائج الخطط المنفذة. ويشتمل على تقويم الإجراءات المتخذة في مستويات التوجه والتنظيم والتنفيذ.

يتألف مكوّن ما وراء المعرفة من وجهة نظر ليستر من ثلاث فئات من المتغيرات، هي: متغيرات الشخص، ومتغيرات المهمة، ومتغيرات الإستراتيجية. تشير متغيرات الشخص إلى نظام معتقدات الفرد، والسمات المؤثرة التي قد تؤثر في الأداء، في حين تشير متغيرات المهمة إلى سمات المهمة، مثل: المحتوى والسياق والتركيب وبناء الجملة والعملية. مثلاً، تؤثر معرفة الفرد بملامح المهمة في الأداء وسماتها. وأخيراً، تشير متغيرات الإستراتيجية إلى معرفة الفرد بالإستراتيجيات التي تعين على فهم الخطط وتنظيمها وتنفيذها وتفحصها وتقويمها. وتربط سلوكيات ما وراء المعرفة هذه بفئات المعرفة الأربع. يكمن هدف نموذج لستر المفاهيمي في محاولة وصف السلوكيات في مراحل المعرفة الأربع، من حيث «نقاط» حدوث أفعال ما وراء المعرفة في أثناء حل المسألة. ويصف الفلاسفة أحياناً فعل ما وراء المعرفة هذا على أنه «التفكير حول التفكير».

وقد اقترح شونفلد (Scheonfeld 1985, 1992) وجوب دراسة حل المسألة ضمن السياق الأوسع لما يعنيه مفهوم تعلم «التفكير الرياضي»، حيث وصف هذا التفكير على أنه تطوير وجهة نظر رياضية، وتقويم عمليات التمثيل والتجريد، وامتلاك الميل، والاستعداد لتعميمها.

وعلى أي حال، فإن التعميم مرتبط ارتباطاً لا ينفصل بعملية التجريد (Davydov, 1990, P, 13). ووفقاً لرأي دافيدوف (Davydov 1990)، فإن عملية تحديد صفة ما بصفتها عامة، وفضلها عن صفات أخرى يتيح للطفل تحويل الفئة العامة إلى أشياء مستقلة ومحددة من الأفعال المتلاحقة، في حين تحدث عملية التجريد عند تركيز الفرد على سمات وخصائص محددة لشيء معيّن، ومن ثم عدّ هذه الخصائص منعزلة عن الأصل. ويمكن اللجوء إلى ذلك لفهم جوهر ظاهرة معيّنّة بهدف تطبيق النظرية نفسها على الحالات التي تنطبق عليها.

وقد ركزت البحوث المبكرة عن التعميم على قدرات طلاب المدارس الابتدائية على تعميم مفاهيم الأعداد (Davydov, 1990; Dienes, 1961; Shapiro, 1965). واهتم الباحثون كثيراً بعملية التعميم في تعليم الرياضيات في الاتحاد السوفييتي سابقاً (Davydov, 1990; Krutetskii, 1976; Shapiro, 1965).

وفي هذا السياق، كتب شاييرو (Shapiro, 1965) الفقرة الآتية عن الطلاب الموهوبين في الرياضيات:

«تحدث عملية تطوير التعميمات من الأمثلة الأولى في مراحل التعلم المبكرة. ومع مرور الوقت، غالباً ما يدمج التحول في الشكل العام مع التعميمات، ويطبق فوراً على مجموعة كاملة من المسائل من نوع واحد. أما لدى الطلاب الأقل قدرة، فإن التعميمات تتضج تدريجياً، وتظهر في مراحل متأخرة، أو أنها لا تتضج أبداً» (ص. 95).

وقد حلّل كروتسكي (Krutetskii, 1976) بدوره، قدرة التعميم لكل من الطلاب العاديين، والطلاب الموهوبين ضمن سلسلة من التجارب، وافترض أن الطلاب ذوي القدرات المختلفة يتسمون بالتباين في درجة التطور، من حيث القدرة على تعميم المادة الرياضية، والقدرة على تذكر التعميمات (ص. 84). وقد أجرى كروتسكي دراسة على تسعة عشر طالباً يتباينون في قدراتهم الرياضية. واستناداً إلى تجاربه مع هؤلاء الطلاب، فقد توصل إلى أنه كان بمقدور الطلاب الأكثر قدرة (الموهوبين) تكوين تعميمات رياضية على نحوٍ أسرع وأوسع. ولاحظ أن هؤلاء الطلاب من «أصحاب القدرة» كانوا قادرين على بيان التركيبة العامة للمسائل وفهمها قبل أن يحلوها، في حين لم يكن بمقدور الطلاب الأقل قدرة إدراك العناصر المشتركة في المسائل، وأخفق الطلاب «غير القادرين» في هذه المهمة. ولكي يتمكن الطلاب من صياغة التعميمات صياغة صحيحة، يتعين عليهم التمكن من التجريد من محتوى معين، وتحديد أوجه الشبه والتراكيب والعلاقات (Krutetskii, 1976).

وفي الواقع أن غالبية الدراسات المتعلقة بعملية التعميم تجري ضمن سياق مفاهيم الأعداد وعلم الحساب والجبر. ويبدو أنه لا توجد بحوث عن التعميم ضمن سياق العمليات

الرياضية العليا، مثل حل المسائل على مستوى المرحلة الثانوية. ولا يوجد على وجه الخصوص بحوث عن التباين في سلوكات حل المسائل بين الطلاب الموهوبين وغير الموهوبين. وتكتسب مثل هذه البحوث قيمة كبيرة بالنسبة إلى التربويين الذين يسعون لتقديم منهاج متمايز في غرفة الصف التي تضم طلاباً متفوقين وغير متفوقين.

### المنهجية

كان الباحث في هذه الدراسة معلماً في مدرسة ثانوية ريفية في الغرب الأوسط من الولايات المتحدة، شاركه فيها تسعة من الطلاب المبتدئين (أربعة ذكور، وخمسة إناث)، ملتحقين بصف مسرّع لمادة الجبر I التي يدرّسها الباحث. وكان الطلاب التسعة الملتحقون بصف الجبر المسرّع راغبين في المشاركة في هذه الدراسة ومستعدين لذلك، وكانوا جميعاً من البيض الذين ينحدرون من خلفية اجتماعية واقتصادية من الطبقة الوسطى. ويتطلب الالتحاق بصف الجبر المسرّع في هذه المدرسة الثانوية توصية من معلمي الصف الثامن، إضافة إلى أداء يفوق المتوسط في متطلبات الجبر السابقة.

لم يطلع الباحث على بيانات اختبار الطلاب التسعة في الصف في أثناء جمع البيانات وتحليلها. وعلى الرغم من ذلك، وبعد الانتهاء من جمع البيانات وتحليلها، فقد اطلع الباحث على بيانات الاختبار الخاصة بالطلاب التسعة، واكتشف أن أربعة منهم قد صُنّفوا على أنهم طلاب متفوقون في الرياضيات في مدارسهم الابتدائية، حيث استند التصنيف إلى مجموعة متنوعة من العوامل، مثل علامات اختبار الذكاء (أكثر من 124)، واختبار ستانفورد التحصيلي (Stanford Achievement Test) (المئين 95)، وتوصيات المعلمين والمرشدين التربويين. ويوضح جدول (1:2) صورة موجزة لتحصيل الطلاب التسعة.

كانت كتابة الصحائف اليومية جزءاً مكماً لدورة الجبر المسرّعة، حيث يعين المعلم بصورة متكررة مسألة غير عادية أو لغزاً كل أسبوعين، ويحل الطلاب هذه المسائل أو الألغاز في صحائف مذكراتهم اليومية. وقد طلب الباحث إلى الطلاب أن يدونوا كل شيء جربوه وفيها «الخرابيش» في هذه المذكرات.

## جدول 2: 1 ملخص تحصيل الطلاب التسعة

| OLSAT  | SAT   | SAT   | اختبار              | الإسم   |
|--|---|---|---------------------|---------|
| غير لفظي العلامة<br>الخام <sup>4</sup> (من 63)                       | تطبيقات<br>الرياضيات<br>العلامة <sup>3</sup> الخام<br>(من 03) | علامة الرياضيات <sup>2</sup><br>العلامة الخام (من<br>09). | الذكاء <sup>1</sup> |         |
| 36   | 30  | 89  | 162                 | إيمي    |
| 32   | 29  | 85  | 124                 | جون     |
| 33   | 30  | 87  | 140                 | مات     |
| 32   | 28  | 85  | 126                 | هانا    |
| المجموعة الفرعية أ: الطلاب النابغون في الرياضيات ممن صاغوا التعميمات |   |   |                     |         |
| 36   | 30  | 89  | 162                 | إيمي    |
| 32   | 29  | 85  | 124                 | جون     |
| 33   | 30  | 87  | 140                 | مات     |
| 32   | 28  | 85  | 126                 | هانا    |
| المجموعة الفرعية ب: الطلاب غير الموهوبين ممن صاغوا تعميمات خاطئة     |   |   |                     |         |
| 22   | 19  | 68  | 100                 | بارت    |
| 25   | 21  | 74  | 120                 | جيم     |
| 22   | 20  | 70  | 05                  | إيزابيل |
| المجموعة الفرعية ج: الطلاب غير الموهوبين ممن لم يصوغوا تعميمات       |   |   |                     |         |
| 20   | 15  | 60  | 98                  | جامي    |
| 21   | 16  | 62  | 102                 | هيدي    |

(1) ستانفورد- بينيه (الطبعة الرابعة). الوسيط = 001؛ الانحراف المعياري = 16؛ البيانات في الأعمدة 2-3 مستخلصة من سلسلة SAT (مطبقة على طلاب الصف الأول) (2) تألف جزء الرياضيات من تسعين بنداً عن مفاهيم الأرقام (34)، الحساب (26) والتطبيق (30). (3) تألف جزء الرياضيات من ثلاثين بنداً عن حل المسائل (12)، الرسوم البيانية (3)، الهندسة (6) والقياس (9). (4) اختبار قدرات مدرسة أوتيس-لينون - Otis-Lennon School Ability Test-OLSAT (الطبعة السابعة، طُبِّق على طلاب الصف السادس. يتألف الجزء غير اللفظي من الامتحان من بنود حول المنطق الرقمي (18)، والمنطق الكمي (18) مفاهيم رياضية

وقد منح الطلاب الذين أتموا التلميحات الثلاثة، وضمّنوا جميع أعمالهم و«خريشاتهم» دفاتر مذكراتهم، علامة كاملة. أما التلميحات الثلاثة التي زوّد بها الباحث الطلاب فهي:

1. أعد صياغة المسألة بكلماتك الخاصة. وبعبارة أخرى، ما المطلوب في هذه

المسألة؟

2. كيف ستبدأ حل المسألة؟

3. حُلَّ المسألة، واكتب ملخصاً عن الأمور التي سارت على نحو جيد، والتي لم تكن كذلك.

كشفت المذكرات التي كتبت على مدار العام الدراسي أن جلَّ الطلاب كان وصفهم إستراتيجيات الحل واضحاً، وكانوا قادرين على معالجة المسائل الرياضية التي لم يتضمنها المنهاج المدرسي. ومن أجل الإبقاء على الدراسة طبيعية، بعيدة عن التدخل قدر الإمكان، مع المحافظة على اتساق الممارسات داخل الغرفة الصفية، حدّد الباحث المسائل المركبة (Combinatorial Problems) الخمس (انظر ملحق أ) للدراسة بصفتها واجبات يحلها الطلاب في صحائف مذكراتهم بدءاً بالمسألة الأقل تعقيداً. وقد حدّدت هذه المسائل بصفتها واجبات خلال ثلاثة شهور.

اختيرت هذه المسائل بكل دقة وعناية على أن تمثل أوضاعاً تسهل عملية التمثيل والمنطق والتجريد، ومن ثم يُتوصل في نهاية المطاف إلى صياغة تعميمات. وقد طُبِّقت المعايير الآتية لتحديد هذه المسائل:

1. يجب أن تعالج المسائل أفكاراً رياضية معمقة، بمعنى ألا تكون عادية متكررة، وأن يتطلب حلها المثابرة والإبداع من جانب الطالب.
2. كانت المسائل مركبة بطبيعتها، ويعود ذلك إلى أن بحوث تعليم الرياضيات المطبقة على طلاب المدارس الابتدائية، قد أشارت إلى أن الأطفال لديهم قدرات حدسية في معالجة المسائل المركبة (English, 1992).
3. مثلت المسائل أوضاعاً متنوعة ومتزايدة في تعقيدها، وكانت خطة زيادة التعقيد في المسائل تدريجياً متسقة مع البحوث الأولى حول عملية التعميم (Davydov, 1990; Dienes, 1961; Krutestskii, 1976).
4. كانت المسائل وطرائق الحل قابلة للتعميم، إضافة إلى ذلك، فقد اتسمت الحلول لفئة من المسائل التي تبدو مختلفة ومشاركة في العمومية، بأنها صعبة جداً، وقد أُطلق عليها اسم مبدأ برج الحمام (Pigeonhole Principle) الذي ينص على ما يأتي: إذا وضعت الحمامات (م) في تجاوزيف برج الحمام (ن)، وكانت (م)

أكبر من (ن)، (م < ن)، فعندئذٍ لا بد من أن يكون في أحد تجاوييف برج الحمام أكثر من حمامة واحدة.

واقترح الباحث أن الإستراتيجيات التي يطورها الطلاب يمكن أن تتطور مع تعقيدات المسألة، وهذا يعتمد على التمرس الرياضي للطلاب، وفي نهاية المطاف يقود بعض الطلاب إلى اكتشاف المبدأ العام الذي يمكن أن يطبق عليها جميعاً.

جمعت البيانات من خلال كتابات الطلاب لمذكراتهم، ومن خلال المقابلات التشخيصية، وكتابات المعلمين في مذكراتهم اليومية في الفصل الدراسي الثاني من العام الدراسي. وقد كُلف الطلاب بخمس مسائل مركبة بدءاً من المسألة الأولى، وكان المسوغ وراء تقديم ثلاثة تلميحات رغبة الباحث في البدء بمراحل حل المشكلات الأربع (Lester, 1985). وقد أعطي الطلاب مدة تراوحت من أسبوع إلى عشرة أيام لحل المسألة، وكان الباحث خلالها يجمع صحائف مذكرات الطلاب الكتابية أسبوعياً للاطلاع على حلولهم، ومن ثم يرصد مجموعة من الأسئلة يطرحها عليهم في أثناء المقابلة.

جرت مقابلة الطلاب بعد أسبوع من تسليم المذكرات التي تضمنت كتاباتهم قبل الدوام الدراسي أو بعده. واتبع الباحث أسلوب المقابلة الإكلينيكية (Clinical Interview) الذي ابتدعه بياجيه (Piaget, 1975)، وطبقه على دراسة عملية التفكير لدى الطلاب. وكانت المقابلات مفتوحة النهاية بهدف إعطاء الطلاب فرصة التعبير عن عملياتهم الفكرية عند حل المسألة. وفي جلسات المقابلات الخمس جميعها التي أجريت مع الطلاب على مدار ثلاثة شهور، وجّهت إليهم الأسئلة الآتية:

1. كيف بدأت التعامل مع المسألة؟
2. كم أمضيت من الوقت في هذه المسألة؟
3. ما وجه المقارنة بين هذه المسألة ومسائل الجبر التي نتعامل معها في الصف الآن؟
4. كيف تتحقق صحة إجابتك؟
5. كيف توضح إجابتك لصديق؟
6. هل استخدمت إجراءً معروفاً في حل المسألة؟

7. وأما فيما يتصل بالمسائل الثانية والثالثة والرابعة والخامسة، فقد سئل الطلاب هل أجروا أي تحسين أو تعديل على إستراتيجية سابقة، وهل توصلوا إلى أوجه شبه في المسائل أو الحلول؟

لقد صيغت هذه الأسئلة أملاً في أن يتمكن الطلاب من التعبير عن إستراتيجيات حلولهم. وأراد الباحث أيضاً من الطلاب أن يبرروا إجاباتهم، ويوضحوا المنطق الذي استخدموه في الحل. وقد وجّه السؤالين «الثالث و السابع» لحث الطلاب صراحة على الوصول إلى تعميمات. وبعد كل جولة من المقابلات، كان الباحث يسجل انطباعاته عن المقابلات في مذكراته الخاصة بهذا الغرض، حيث سُجّلت المقابلات صوتياً على أشرطة، ومن ثم حُوّلت لغوياً بصورة حرفية، ودُققت أيضاً الأخطاء التي فيها. تألفت البيانات من كتابات الطلاب في دفاتر المذكرات الخاصة بهم، ومن مخطوطات المقابلات، إضافة إلى المذكرات التي دوّنها الباحث.

تبع ذلك تحليل لكتابة صحائف الطلاب والبيانات المدونة، باستخدام مناهج مستقاة من نظرية راسخة ومبررة ومثبتة (Glaser & Strauss, 1977) (Grounded Theory). واستخدمت في ذلك طريقة المقارنة الثابتة (Constant Comparative) بهدف البحث عن أنماط في البيانات. ويعدُّ إجراء المقارنات من السمات الأساسية لمنهجية النظرية المثبتة. وفي هذا السياق، جرى تفعيل الفئات الأربع المتمثلة في التوجه والتنظيم والتنفيذ والتحقق المستمدة من نموذج ليستر لحل المشكلات. وقارن أيضاً الباحث سلوكاً بسلوك بهدف تصنيف البيانات وفقاً لنموذج ليستر المفاهيمي، ثم قارن كل سلوك بغيره من السلوكات في المستوى الإعدادي بهدف تحديد أوجه الشبه والاختلاف، ومن ثم يصار إلى وضعها في الفئات، وحُدِّدت الفئة بخصائص أو أفعال حدّد معناها، أو أُعْطيت معنى. وعندما رُمِّزت البيانات وحُلِّلت، حُصِّل على أوجه شبه واختلاف في سلوك حل المشكلات للطلاب التسعة، وفي السلوكات التي تميز صياغة التعميمات للمسائل الخمس المركبة، حيث برزت فئات التعميم والتأمل نتيجة الدراسة.

أما التعميم فقد وصف في هذه الدراسة على أنه العملية التي يشترك الطلاب من خلالها أو يستنتجون مبادئ ونتائج من حالات خاصة. وتتضمن تحديد القواسم المشتركة في بنية المسائل وحلولها. واشتملت أيضاً على مقارنات، إضافة إلى مجموعة أخرى أصغر منها. وبعبارة أخرى، فإن التأمل يتألف من التفكير في أوجه الشبه في المسائل والحلول، ومن ثم تلخيص أوجه الشبه تلك على مدار مدة من الوقت. وأخيراً، تؤدي العاطفة أو الوجدان (*Affect*) دوراً كبيراً، وتؤثر أيضاً في نجاح أو فشل الطلاب في تكوين الصورة العامة التي تميز مجموعة من المسائل المستخدمة في الدراسة. ويشمل البعد الانفعالي الاتجاهات والمعتقدات والآراء والقناعات التي يتبناها الشخص (Burton, 1984; Mandler, 1948).

وتلبيةً لمتطلبات الصدق في هذه الدراسة، عمد الباحث إلى استخدام ثلاث مصادر ن البيانات للتحقق من صدقها، هي: البيانات المستقاة من كتابات الطلاب في صحائف المذكرات، ووثائق المقابلة، إضافة إلى كتابات الباحث في دفتر المذكرات الخاص به، واستخدم الباحث أيضاً إستراتيجية تبادل الذاتية أو البين-ذاتية (*Inter Subjectivity*) عن طريق تكليف زميل بتحليل البيانات المستقاة من المقابلات، مستخدماً أسلوب الترميز الذي وضعه الباحث. وفعلاً، رَمَزَ الزميل ثلاثين صفحة عشوائية من بيانات المذكرات والمقابلات وحلّها، وتوصل إلى النتيجة نفسها التي توصل إليها الباحث. وبحسب شريحة معينة من البيانات التي رَمَزَها زميل للباحث على نحو مستقل، كان هناك توافق ل 89% من السلوكات التي تقع ضمن فئة التوجه، و 86% للسلوكات التي تقع ضمن التنظيم، و 93% للتنفيذ و 96% للتعميم، في حين حاز التأمل على 91%. وهذه النتائج تضيف مزيداً من الصدق على نتائج البحث.

وقد لبّى الباحث متطلبات صدق الدراسة كذلك عن طريق دراسة الطلاب في صف الجبر نفسه للصف التاسع، حيث وثّق ملاحظاته عن الطلاب على مدار العام الدراسي في مذكراته. وكذلك الحال من حيث تخصيص وقت كافٍ في هذا المجال، حيث إن الباحث كان أيضاً معلماً للصف التاسع، وكان ملماً إماماً تاماً بثقافة غرفة الصف. إضافة إلى

ذلك، فقد سُجِّلت المقابلات الشخصية على أشرطة، وُدِّوت حرقياً، وأُعيدت إلى الطلاب بغرض التوضيح أو الحذف أو الإضافة.

### محددات الدراسة

على القارئ أن يدرك أن سياق الدراسة قد أسهم في طبيعة النتائج. ومن هنا، يود الباحث أن يشير إلى المزايا الفريدة لهذه الدراسة النوعية، وعلى هذا، يكون بوسع القارئ الحكم على قابلية تطبيق النتائج في مواقف أخرى أو تعميمها.

كان الطلاب في هذه الدراسة مبتدئين في صف الجبر المسرع في مدرسة ثانوية ريفية. من الناحية الديمغرافية كان الطلاب جميعاً من البيض، وينحدرون من خلفية اجتماعية واقتصادية من الطبقة الوسطى. وكان ثمانية من أصل تسعة طلاب يطمحون إلى إكمال المرحلة الثانوية بدراسة حساب التفاضل والتكامل. وقد شجّع الطلاب، المستهدفون في هذه الدراسة، وحفّزوا على النجاح في المدرسة، وكانوا مستعدين لبذل الجهود المطلوبة في هذا البحث. وهكذا، فقد يكون لاستعداد الطلاب للمشاركة في الدراسة وادافعتهم أثر في مستوى جهودهم والنتائج التي توصل إليها.

كان الطلاب التسعة الذين شاركوا في هذه الدراسة، قد درسوا مقرر ما قبل الجبر (Pre-Algebra) في الصف الثامن، سنة كاملة. ولم يحدث أن تعرض هؤلاء الطلاب في خلفيتهم الرياضية قبل المرحلة الثانوية لبناء البراهين الرياضية، ولم يتوقع منهم أيضاً أن يبنوا حلولاً عامة للمسائل الجبرية وما قبل الجبرية. ولو تعرض الطلاب لمسائل تشتمل على برهان رياضي، لكان من الممكن أن يميزوا بين المسائل التي تتطلب حلولاً موجودة ومحددة (Existence Solutions) (المسائل 1 و 2) مقارنة بتلك التي تتطلب حلولاً عامة (General Solutions) (المسائل 3، 4، 5).

كانت لدى الباحث توقعات كبيرة جداً تتعلق بطلاب صف الجبر المسرع، إذ توقع أن يقضي الطلاب وقتاً أطول وحدهم في حل المسائل في صحائف مذكراتهم. وتشير صعوبة المسائل الخمس المستخدمة في هذه الدراسة إلى أن الباحث توقع قفزات مفاجئة غير

عادية من طلاب مرحلة ثانوية مبتدئين. وكان الباحث ذا فاعلية أيضاً في تشجيع الطلاب على كتابة إستراتيجياتهم وملخصاتهم التأملية بخصوص هذه المسائل على مدار الفصل الأول. لذا، كانت هذه الخلفية متوافرة لدى هؤلاء الطلاب عند إعطائهم المسائل المركبة الخمس في الفصل الثاني. وعلى هذا، فإن الوضوح الموجود في كتابات المذكرات عائد إلى تأثير الباحث في الطلاب.

طلب إلى الطلاب في صف الجبر أن يحلّوا المسائل بأنفسهم دون الرجوع إلى كتب أو أصدقاء أو أشخاص آخرين في الصف. ويشير التنوع في الحلول الواردة في مذكرات الطلاب، والتنوع في التفسيرات في أثناء المقابلات، إضافة إلى إخفاق كثير من الطلاب في التوصل إلى حلول للمسائل الثلاث الأخيرة، إلى أن الطلاب لم يتعاونوا فيما بينهم. وعلى الرغم من ذلك، فهناك احتمال ضئيل أن يكون بعض الطلاب قد تحدثوا إلى غيرهم عن هذه المسائل.

## النتائج

نجم عن التحليل النوعي لدراسات الحالات التسع، ثلاث مجموعات فرعية استناداً إلى سلوكيات حل المشكلة والتعميمات التي طورها الطلاب. ضمت المجموعة الفرعية: (أ) كلاً من (Amy, John, Matt & Hanna) الذين أفلحوا في اكتشاف الصورة العامة التي تميز حلول المسائل، أي مبدأ برج الحمام، حيث تمكنوا من تحديد أوجه الشبه في بنية المسائل وحلولها، وقد تبينوا أن الحلول تتطلب «مطابقة» كميتين غير متساويتين أو المقارنة بينهما، وعندئذٍ يتمكنون من تحديد الدور الذي تؤديه في حل المسألة، أي، أي تجويف (في برج الحمام) قد أكره على أن يحوي أكثر من حمامة واحدة. أظهر هؤلاء الطلاب مثابرة كبيرة نحو الفضول، وحُفَظُوا على تعقب المسائل والتأمل ملياً فيها على مدار مدة طويلة من الوقت. وعلى نحو ما أُشير سابقاً، فقد اطلع الباحث على تفاصيل الاختبارات المتعلقة بالطلاب التسعة بعد جمع البيانات وتحليلها، ليتبين أن الطلاب الأربعة في المجموعة الفرعية (أ) كانوا متفوقين في الرياضيات في مدارسهم الابتدائية.

ضمت المجموعة الفرعية (ب) كلاً من (Bart, Jim & Isabel) الذين كان مخطط تعميمهم العام يتمثل في استخدام عمليات الجبر في الأعداد المعطاة في المسائل. ركز هؤلاء الطلاب على أوجه الشبه الظاهرية في المسائل، وحاولوا تطبيق عمليات من الجبر. وغالباً ما أظهرت مقارناتهم بين المسائل كثيراً من التناقضات، فقد أخفقوا في تعقب تسلسل الأفكار من مقابلة إلى أخرى على مدار المسائل الخمس.

وأخيراً، ضمت المجموعة الفرعية (ج) كلاً من (Jamie & Heidi)، اللذين أظهر مخططهما العام «التوصل إلى كثير من الأمثلة ذات الفائدة»، وقد عدّل ذلك في بعض المسائل ليشمل «كثيراً من الأمثلة عديمة الفائدة»، واستخدم هذا المخطط العام مراراً وتكراراً، وكان هدف الطالبين التمكن من المسألة، إذ كانا مهتمين اهتماماً أساسياً بتنفيذ ما تتضمنه هذه المسألة وتحقق صحته.

تظهر الجداول من (2:2-4:2) أوجه الشبه والاختلاف في سلوكيات الطلاب، ويتبع ذلك جزء توضيحي يركز على بعض الحلول التي قدّمها (Amy, John, Matt & Hanna)، ويشتمل على مقالات قصيرة تظهر إستراتيجيات حل المسائل، إضافة إلى الخبرات الرياضية لهؤلاء الطلاب الأربعة الموهوبين. يقارن جدول (2:2) بين سلوكيات حل المشكلات لدى الطلاب في المجموعات الفرعية الثلاث للحل في مراحل التوجيه والتنظيم والتنفيذ والتأمل، في حين يقارن جدول (3:2) بين الطلاب في سلوكيات التعميم والتأمل ضمن المجموعات الفرعية الثلاث. وأخيراً، يقارن جدول (4:2) بين السلوك الوجداني لطلاب المجموعات الفرعية الثلاث. وتهدف الجداول الثلاثة إلى إتاحة الفرصة أمام القارئ للمقارنة بين سلوك الطلاب الموهوبين في حل المسائل (المجموعة الفرعية ب و ج).

## جدول 2:2 مقارنة سلوك الطلاب في حل المشكلات في مراحل التوجيه والتنظيم والتنفيذ والتحقق

| المجموعة الفرعية أ – الناغون<br>(Amy, John, Matt & Hanna)<br>(إيمي، جون، هنّا، ومات) | المجموعة الفرعية ب –<br>غير الموهوبين<br>(Bart, Jim , Isabel)<br>بارت وجيم وإيزابل   | المجموعة الفرعية ج –<br>العاديون<br>(Jamie, Heidi)<br>(جامي وهيدي)   |   |
|--|--|--|---|
| التوجه   | فهم موقف المسألة على الدوام.<br>تقويم كفاية معطيات المسألة.<br>تحديد فرضيات المسألة.<br>التمييز بين الجملة الاستفهامية والخبرية. | ضعف فهم موقف المسألة وضع الأعداد «المعطاة» في قائمة.<br>صياغة فرضيات للموقف في المسألة المعطاة.<br>تمييز غير واضح بين الجملة الاستفهامية والخبرية. | يسيء فهم موقف المسألة.<br>فهم سطحي لفرضيات الموقف في المسألة المعطاة.<br>عدم التمييز بين الجملة الاستفهامية والخبرية. |
| التنظيم  | التخطيط العام<br>تخطيط متواصل لتحديد «الطريق نحو الأعلى» أو «البدء من نقطة صغيرة   | تخطيط شمولي عشوائي/ مبهم   | تخطيط مرحلي   |
| التنفيذ  | ضبط تقلبات موقف المسألة.<br>تأدية الأفعال المرحلية الصحيحة.<br>مراقبة تقدم الخطط واتساقها على الدوام.                            | عدم ضبط تقلبات موقف المسألة.<br>تأدية الأفعال المرحلية «غير العادية».<br>مراقبة تقدم الخطط واتساقها دون دقة  | عدم ضبط تقلبات موقف المسألة.<br>تأدية الأفعال المرحلية.<br>مراقبة تقدم الخطط واتساقها.                                |

|        |   |                                     |
|--------|---|-------------------------------------|
| التحقق | تفحص نتائج الأفعال المرحلية.                              | تناقض في نتائج الأفعال استخدام حالة |
|        | تحقق اتساق النتائج مع الخطط المرحلية.                     | استخدام حالة خاصة في التحقق.        |
|        | المنفذة.  | تناقض النتائج مع استخدام الأمثلة/   |
|        | استخدام حالات خاصة في فهم سبب حدوث ظاهرة ما على نحو أفضل. | الخطط المنفذة.                      |
|        |   | استخدام حالات خاصة إلى النتائج.     |
|        |   | في تحقق حدوث الظاهرة.               |

### جدول 2: 3 المقارنات بين سلوك الطلاب في التعميم والتفكير

|                                |                      |                               |
|--------------------------------|----------------------|-------------------------------|
| المجموعة الفرعية أ - الموهوبون | المجموعة الفرعية ب - | المجموعة الفرعية ج - العاديون |
| (Amy, John, Matt & Hanna)      | غير الموهوبين        | (Jamie, Heidi)                |
| (إيمي، جون، هنّا، ومات)        | (Bart, Jim, Isabel)  | (جمامي وهيدي)                 |
|                                | (بارت وجيم وإيزابل)  |                               |

|         |                                       |                           |
|---------|---------------------------------------|---------------------------|
| التعميم | تحديد أوجه الشبه في بنية المسألة.     | تحديد أوجه الشبه          |
|         | تحديد أوجه الشبه في حلول المسألة.     | الظاهرية في بنية المسألة. |
|         | استخدام القياس المنطقي.               | الظاهرية في بنية المسألة. |
|         | تحسين الطرائق حيثما يكون ذلك ملائماً. | تناقض في التعبير          |
|         | توسيع مجال الصحة والدقة.              | اللفظي عن أوجه الشبه      |
|         | تفعيل المبادئ المشتركة.               | في حلول المسائل.          |
|         |                                       | فرض الترابطات بالقوة      |
|         |                                       | بمفاهيم الجبر.            |
|         |                                       | توضيح العوائق.            |

|      |   |   |                                       |
|------|---|---|---------------------------------------|
| تأمل | تخمين الأمثلة الممكنة وغير الأمثلة وتحققها.                             | التخمين لكن دون تفحص الحدس.                           | قليل من التخمين أو عدم التخمين.       |
|      | الربط أو العزو إلى خبرة سابقة.  | ضعف في اتخاذ القرار في أثناء التنفيذ والتحقق وبعدهما. | طرح المسألة جانباً بعد الانتهاء منها. |
|      | التفكير في أوجه الشبه في المسائل والحلول.                               | طرح المسألة جانباً بعد الانتهاء منها.                 | عدم القيام بالتجريد                   |
|      | استخلاص أوجه الشبه البنائية في المسائل والحلول على امتداد مدة من الزمن. | استخلاص أوجه الشبه الظاهرية من كلمات المسائل والحلول. |                                       |

#### جدول 2: 4 مقارنات السلوك الوجداني

|                                |                                    |   |   |
|--------------------------------|------------------------------------|---|---|
| المجموعة الفرعية أ - الموهوبون | المجموعة الفرعية ب - غير الموهوبين | المجموعة الفرعية ج - العاديون                               |   |
| (Amy, John, Matt & Hanna)      | (Bart, Jim, Isabel)                | (Jamie, Heidi)  |   |
| (إيمي، جون، هانا، ومات)        | (بارت وجيم وإيزابل)                | (جامي وهيدي)  |   |
| الوجدان والانفعال              | الثقة/ انعدام الثقة                | انعدام المثابرة   | انعدام المثابرة   |
| الفضول                         | الثقة/ انعدام الثقة                | انعدام الثقة  | انعدام الثقة  |
| إثارة                          | الرضا                              | انعدام المثابرة   | انعدام المثابرة   |
| الإحباط                        | انعدام الرغبة في الاتصال والتواصل  | الرضا   | الرضا   |
| يقدر الاتصال والتواصل          | الرياضيات بصفقتها «طريقة للتفكير»  | انعدام الرغبة في الاتصال والتواصل                           | انعدام الرغبة في الاتصال والتواصل                           |
|                                | «عمليات على الأعداد».              | فكرة مسبقة عن حل المسائل من الكتب المدرسية للمرحلة المتوسطة | فكرة مسبقة عن حل المسائل من الكتب المدرسية للمرحلة المتوسطة |

## الخبرات الرياضية للطلاب الموهوبين

### المسألة الأولى: عُلب المشروبات الغازية (الصودا Soda)

بدأت «هنّا» (Hanna) المسألة بإعادة صياغتها باستخدام كلماتها الخاصة، فكتبت: «هناك ستة أنواع من المشروبات الغازية مدرجة في القائمة، فإذا طلب أحد الطلاب الحصول على علبه واحدة منها، فكم طالباً يجب أن يطلب مشروبات غازية، بحيث يطلب أحد الأنواع الستة اثنان من الطلاب على الأقل؟ وبعبارة أخرى، كم طالباً سيطلب علبه واحدة من المشروبات الغازية، بحيث تُطلب علبه واحدة على الأقل مرتين؟»

كانت خطة هنّا في حل المسألة على النحو الآتي: «عمل قائمة بأنواع المشروبات الغازية الستة المختلفة، عندئذٍ سوف تكتب» الطالب الأول، الطالب الثاني... إلخ لترمز إلى طالب واحد لكل طلب... وهكذا لأنواع المشروبات الغازية الستة. «وأخيراً تكوّن حلُّ هنّا من قائمة ضمت أنواع المشروبات الغازية الستة، حيث حدّدت طالباً واحداً لكل علبه من أنواع المشروبات الغازية الستة المختلفة، وبعدئذٍ عيّنت الطالب السابع لعبه الزنجبيل ليرمز إلى الطالب الثاني لواحدة من أنواع المياه الغازية الستة». وتوصلت من خلال هذا العمل «إلى أن الأمر يتطلب سبعة طلاب ليطلبوا الصودا، بحيث تكون علبه صودا واحدة لكل طالب لضمان طلب علبه صودا واحدة في الأقل، من بين أنواع الصودا الستة من طالبين على الأقل». وقد دُهِش الباحث من صحائف مذكرات هنّا، حيث أعادت كتابة المسألة بكلماتها وأعدت خطة ونفذتها، وتوقفت عندما تحققت من أن حلها قد لبّى جميع شروط المسألة.

### المسألة الثانية: مسألة الأسبرين (Aspirin)

بدأ «مات» (Matt) بحل المسألة حيث كتب: «تتلخص المسألة بالعثور على تسلسل لتناول الأسبرين في ثلاثين يوماً، ومن ثم معرفة هل سيتناول أربع عشرة حبة من الأسبرين في عدد من الأيام المتتالية». لقد فهم هذه المسألة على النحو الآتي: «لا بد من وجود طريقة ما ليتناول الشخص أربع عشرة حبة من الأسبرين في أي عدد من الأيام المتتالية»، وتحقق حبات الأسبرين الخمس والأربعين التي سيتناولها في غضون ثلاثين يوماً. وطلباً لحل

المسألة، تكونت إستراتيجية «مات» من إعداد قائمة بالأيام الثلاثين، وكتابة عدد حبات الأسبرين على الجانب الآخر (انظر شكل: 1:2).

بدأ «مات» بتنفيذ خطته بعمل جدول بحيث كتب على أحد جانبيه ثلاثين يوماً، وكتب على الجانب الآخر منه عدد حبات الأسبرين. «سأحاول كتابة حبة دواء واحدة على الأقل في يوم واحد وأكتب حبتي دواء في بعض الأيام حتى أكمل الحبات الخمس والأربعين، وأعتقد أن هذه الطريقة سوف تتكلم بالنجاح.» حدّد «مات» حبة دواء واحدة لكل يوم من الأيام الثلاثين، ومن ثم أضاف حبة دواء أخرى إلى الأيام بدءاً من الخامس عشر وحتى التاسع والعشرين. وكتب عندئذٍ قائلاً: «الأمر ممكن، إذ إن أقل عدد من الأيام يستغرقه تناول أربع عشرة حبة أسبرين هو سبعة أيام». لم يفكر «مات» في أي شيء بعد ذلك، ولم يشر إلى حقيقة وجود أي حلول أخرى ممكنة، ويبدو أنه كان مقتنعاً أن الجواب كان سبعة أيام استناداً إلى حله. وعلى الرغم من ذلك، فإن الرواية الآتية تظهر أن «مات» كان على دراية بحلول أخرى للمسألة، إضافة إلى مقدرته على تحديد أوجه الشبه البنيوية في المسألتين الأولى والثانية.

| اليوم | حبة الدواء | اليوم | حبة الدواء | اليوم | حبة الدواء |
|-------|------------|-------|------------|-------|------------|
| 1     | 1          | 11    | 1          | 21    | 2          |
| 2     | 1          | 12    | 1          | 22    | 2          |
| 3     | 1          | 13    | 1          | 23    | 2          |
| 4     | 1          | 14    | 1          | 24    | 2          |
| 5     | 1          | 15    | 2          | 25    | 2          |
| 6     | 1          | 16    | 2          | 26    | 2          |
| 7     | 1          | 17    | 2          | 27    | 2          |
| 8     | 1          | 18    | 2          | 28    | 2          |
| 9     | 1          | 19    | 2          | 29    | 2          |
| 10    | 1          | 20    | 2          | 30    | 1          |

شكل 1:2 تمثيل «مات» لمسألة الأسبرين

## الرواية الأولى

الباحث: هل تعتقد أن هذه هي الطريقة الوحيدة للحل؟

الطالب: أعتقد ذلك.

الباحث: إذاً، لا توجد طريقة أخرى للحل.

الطالب: هل تقصد أن هذا النوع فقط من الأعداد، هو الذي يمكن

استخدامه؟

الباحث: نعم

الطالب: لا، لأنه يمكنك استخدام زوج من الثلاثيات، أو وضع يوم واحد

معها جميعاً، وأما بقية الأيام فيمكنك وضع واحدة فقط.

الباحث: حسناً، كم أمضيت من الوقت في حل المسألة؟

الطالب: أمضيت فيها يومين قبل الحل، وفكرت فيها برهة من الزمن، ومن

ثم كتبت المهمتين الأولى والثانية في قاعة الدراسة. وبعد ذلك،

عدت إلى البيت، وفي اليوم التالي أمضيت نصف ساعة من الزمن

وأنا أفكر في طريقة حلها.

الباحث: أعني أنك قد أمضيت وقتاً أطول في حل هذه المسألة مقارنة بما

سبقتها؟

الطالب: نعم، فقد كانت المسألة الأولى سهلة نوعاً ما.

الباحث: هل ترى ثمة أوجه شبه بين المسألتين؟

الطالب: ما لاحظته هو أنني كنت أمضي قُدماً وأضع واحدة، ومن ثم أضيف

أخرى في بضعة أيام، ومن ثم توصلت إلى الإجابة.

الباحث: حسناً.

الطالب: هذا كل ما فعلته في المسائل جميعها (مشيراً إلى مسألة الصودا)،

كان ينبغي لأحد الطلاب أن يحصل على علبتين، وبذلك، وضعت

اثنتين لأحدهم.

الباحث: وماذا عن المسألة الثانية؟

**الطالب:** وضعت واحدة منها في كل يوم من الأيام، ومن ثم وضعت حبتين في نصف الأيام.

### المسألة الثالثة : مسألة مجموع العدد

كتبت إيمي (Amy) أفكارها عن المسألة المعطاة في صحيفة مذكراتها، قائلة:

تتلخص المسألة في معرفة كيفية حدوث شيء ما. عليّ بأن أفكر كيف يحصل هذا، وأبرهن لِنفسي ولكم أن هذا يحصل دائماً. قد يبدو هذا غير ممكن، ولكنه سيحصل دائماً. إنه أمر مثير إلى حد بعيد، عليك أن تفكر في أن ذلك لا يفيد مع بعض مجموعة الأعداد، ولكنه ينجح مع كل مجموعة من الأعداد وفي كل منها.

ولكي تبدأ المسألة، فقد دارت خطة إيمي (Amy) حول عمل مجموعة من عشرة أعداد بين الواحد والمئة. عندئذٍ ستعمد إلى استخدام هذه المجموعة: لتتوصل إلى طريقتين للحصول على المجموع نفسه، ثم تعمل بعد ذلك مجموعة أخرى، وتستمر في تكرار هذه العملية. وكتبت قائلة: «أمل أن أكتشف النمط، عندئذٍ أستطيع إثبات كيفية حدوث هذا.»

كانت مجموعة «إيمي» الأولى على النحو الآتي: {3, 12, 23, 29, 53, 61, 70, 79, 81, 94}. وكان المجموعان:  $(3+12+79=94)$  وهو عدد من ضمن المجموعة. وبعبارة أخرى، فإن المجموع الثاني هو  $(94=94)$ . ومما تجدر الإشارة إليه، أن طريقتها في التوصل إلى هذا كانت عن طريق طرح تسعة وسبعين من أربعة وتسعين لتحصل على خمسة عشر، وبعدها لاحظت أن  $3+12=15$ ، ومن هنا، فإن  $3+12+79=94$ .

أما مجموعتها الثانية فكانت على النحو الآتي: {9, 12, 29, 41, 45, 71, 73, 88, 97, 98}. وكان المجموع الذي توصلت إليه هذه المرة على النحو الآتي:  $(54+12+41=98)$ . وعند هذا الحد، قررت أن تجرب أمراً آخر مختلفاً. إذ ستبدأ بمجموعة من عشرة أعداد، ولكن ستتحققها هذه المرة بطريقة ما، أيّ تغيير بعض العناصر أملاً في الحصول على «نتائج مختلفة». وقالت إنها كانت تجرب في هذه المرحلة أملاً في اكتشاف شيء ما. وبدأت بالمجموعة الآتية: «{5, 14, 16, 29, 44, 46, 53, 61, 80, 89}»، واخذت تبحث عن طرائق مختلفة للتوصل إلى حل، وبعبارة أخرى، فإن المجموع يساوي عدداً من ضمن

المجموعة، أو مجموعين يكونان متساويين. وتوصلت إلى حلول مختلفة على النحو الآتي:  
 $(5+14+61=80)$ ؛  $(46+5+29=80)$ . عندئذٍ قررت «استبدال» بعض الأعداد و«التوصل إلى نتائج جديدة»؛ وعليه، استبدلت بالأعداد 5، 14، 29، 46، 80 أعداداً أخرى مختلفة. وبدأت مع المجموعة: {5, 14, 16, 29, 44, 46, 53, 61, 80, 89} التي سميتها المجموعة «الأصلية»، وغيرتها إلى {6, 7, 16, 21, 44, 49, 53, 61, 82, 89}، وأطلقت عليها اسم المجموعة «المنقحة». واستبدلت بالأعداد 82، 49، 21، 7، 6 الأعداد 80، 46، 29، 14، 5؛ لتري هل سينتج من هذا مجموعة لا تعطي أي حلول. وعلى الرغم من ذلك، فقد وجدت مزيداً من المجاميع على جناح السرعة، وهذا ما أثار دهشتها بأن هذه الطريقة لا تزال ناجعة. « $7+82=89$ ؛ يا للروعة! لقد توصلت إلى إجابة صحيحة في المرة الأولى» وقررت العثور على مزيد من المجاميع، وقد نجحت؛ ومثال ذلك:  $7+21+61=89$ ، وهو عدد من ضمن المجموعة المنقحة؛  $16+49=21+44$ ؛  $16+21=82$ ؛  $61+21=82$ ، و  $7+16+21=44$ . وعندما وصلت إلى نهاية مسدودة أخرى، قررت تجربة شيء جديد. وكتبت قائلة: «سأضع بعض الأفكار في اختيار الأعداد العشرة.»

وأخيراً، توصلت إلى مجموعة الأعداد، وكانت على النحو الآتي: {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64...} «بدأت بالعدد واحد، ثم اختارت العدد اثنين. لم أكن أهدف إل الحصول على حل آنذاك، لذا، لم اختر العدد ثلاثة عندئذٍ، واخترت العدد أربعة بدلاً من ذلك؛ لأن  $1+2=3$ ، وبذلك يكون الحل قد ظهر فوراً، وواصلت العمل على هذا النسق. سيكون العدد الأكبر الآتي هو سبعة؛ لأن  $1+2+4=7$ ، لذا، لم أختار العدد سبعة، واخترت العدد ثمانية بدلاً منه.» استمرت بهذا النمط مع اختيار الأعداد بكل دقة وعناية، حتى وصلت إلى العدد أربعة وستين، كما لاحظت أنها كانت تضاعف العدد السابق لتحصل على العدد الآتي.» لم يكن هناك ثمة حل ممكن، ولكن إذا ضاعفت العدد أربعة وستين، فسوف أحصل على العدد مئة وثمانية وعشرين في الوقت الذي تشترط فيه المسألة أن تكون الأعداد محصورة بين الواحد والمئة، لذا، تعذر عليّ استخدام العدد مئة وثمانية وعشرين. يتبقى لديّ ثلاثة أعداد أخرى يتعين عليّ إيجادها. «إذا انتقيت أي عدد عشوائي، فانظر ما سيحدث.» اختارت

(Amy) عدداً من الأعداد العشوائية بين أربعة وستين ومئة، مثل الأعداد 87، 99، 68، 71، 84، 92، وكانت دائماً تجد مجاميع مساوية لأعداد من ضمن المجموعة، منها مثلاً:  $4+1+2+61+46=78$ ، ثم اختارت بعد ذلك أعداداً من ضمن مجموعة أعدادها التي اختارتها بكل دقة وعناية، مثل: 5، 17، 45، 50، 9، 29، ووجدت مجاميع مساوية لتلك الأعداد، وكان تخمينها بأن أكبر عدد من الأعداد يمكن أن يكون ضمن المجموعة لا يوصل إلى حل هو سبعة أعداد، أي مجموعين متساويين. فتوصلت إلى نتيجة مفادها بأن المرء يستطيع اختيار سبعة أعداد صحيحة دون أن يتوصل إلى حلول، ولما كانت المسألة تتطلب اختيار عشرة أعداد صحيحة، فإن الحل موجود دائماً.

وخلاصة القول أن الذهاب بعيداً أعلى من العدد الأكبر، ينجم عنه ظاهرة معينة تفي بشروط المسألة. ففي المسألة الأولى، أدى زيادة عدد الطلاب فوق العدد ستة إلى طلب الصودا مرتين. وأما في المسألة الثانية، فقد أدت زيادة عدد حبات الدواء على ثلاثين حبة فأكثر، إلى إجبار الشخص على تناول أكثر من حبة في اليوم، وترتب على ذلك سلسلة من الأيام المتعاقبة حيث استهلكت أربع عشرة حبة دواء تماماً. وفي هذه المسألة، في حالة العشرة أعداد، فإن قدرة «إيمي» على تكوين مجموعة عظمى من الأعداد لم تتجاوز السبعة، قد اختيرت بدقة وعناية، نجم ذلك الحصول على مجموعين متساويين عند اختيار عنصر ثامن. وهذه هي النقطة التي جعلت «إيمي» تفكر ملياً بحلها، وكتبت قائلة: «لما كنت قد حاولت الحصول على أكثر الأبدال الممكنة في المجموعة {1, 2, 4, 8, 16, 64, ...}، فقد ذكرني ذلك بالمسألة الأولى عندما حاولت الحصول على أكبر عدد ممكن من متغيرات الطلبات، حيث حُدد كل شخص بعلبة صودا. وبعد كل هذا، فإن هاتين المسألتين متشابهتان! هل خططت لهذا؟»

بدا واضحاً أن إيمي «كانت قد بدأت بتطوير نقطة حدسية حول التعميم المخفي في المسائل، أي مبدأ برج الحمام، فقد كانت قادرة على تحديد التشابه البنيوي في المسائل الثلاث في أثناء المقابلة، وكانت قادرة على التعبير عن مبدأ برج الحمام لفظياً».

### المسألة الرابعة: مسألة المعارف (الأصحاب)

فهم جون (John) مسألة المعارف (الأصحاب) هذه (Acquaintance Problem) (The) على النحو الآتي: «أستطيع أن آخذ عشرين شخصاً، وأثبت هل يوجد للشخص نفسه عدد الأصدقاء ذاته، كأى شخص آخر». ولكي يحل هذه المسألة، قال إنه سيعطي أعداداً لعشرين شخصاً، ومن ثم يستخدم إستراتيجية «التخمين والتحقق». ومن أجل حل المسألة، رسم الشكل الآتي (شكل 2:2):

|     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10  | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 210 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

|      |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 20   | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 1-19 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |

شكل 2:2 تمثيل جون لمسألة المعارف

شرح جون الشكل أعلاه على النحو الآتي: يمثل الصف الأعلى الأشخاص في الغرفة، أي العدد 1 يشير إلى الشخص رقم 1 وهكذا، في حين يمثل الصف الثاني عدد الأصدقاء. مثلاً ووفقاً للجدول، فإن الشخص رقم 1 لديه صديق واحد، والشخص رقم 2 لديه صديقان وهلمّ جرّاً. كتب جون قائلاً: «فكرت قليلاً، وقررت هل الرقم 1 يعرف صديقاً واحداً، ومن ثم هل الرقم 2 يعرف صديقين وهكذا. حاولت ألا يكون الصديق نفسه مكرراً مرتين».

وخمن الباحث أن جون قد فكر ملياً في المسألة، قبل أن يقرر المضي في الحل بعدم تحديد العدد نفسه من الأصدقاء للأشخاص في الغرفة. وعند سيره عبر الخطوط ووصوله إلى الشخص رقم (20) في الغرفة، عرف ذلك الشخص؛ لأن الشخص رقم (20) لا يمكنه أن يعرف (20) شخصاً في الغرفة، إذ إنه يمكن أن يعرف شخصاً واحداً في الأقل، أو تسعة عشر شخصاً، ومن هنا سينتهي المطاف بوجود شخصين لهما العدد نفسه من الأصدقاء.

وجد الباحث أن هذه الحجة قوية؛ لأنها تنطبق ضمناً على مبدأ برج الحمام، ولكي يتمكن من التوصل إلى أن شخصين سينتهي بهما الأمر بالعدد نفسه من الأصدقاء، طلب

الباحث إلى جون شرح إستراتيجية حله المسألة، ومن ثم طلب إليه أن يوضح ما إذا كان هناك أي أوجه شبه في المسائل أو حلول المسائل التي تقود في نهاية المطاف إلى توضيح مبدأ برج الحمام، والصورة العامة التي اتسم بها حلّ المسائل الأولى والثانية والرابعة. وتوضح الرواية الآتية اكتشاف جون لمبدأ برج الحمام.

### الرواية الثانية

**الطالب:** لقد رسمت جدولاً لهم جميعاً، وأدرجت الأشخاص والمجموعات الممكنة جميعها، وحللتها بوضع الأعداد في مكانها الصحيح.

**الباحث:** إذاً، كيف كان الحل؟

**الطالب:** رسمت الجدول، ووضعت قائمة بأسماء الأشخاص، وخمنت العدد لكل شخص على حدة.

**الباحث:** هل هذا هو الشيء الوحيد المشترك؟

**الطالب:** نعم، فالمسائل الأولى والثانية والثالثة جميعها تتطلب كمية محددة، مثل الأشخاص أو أنواع الصودا، كأن تشترط وجود عدد محدد يمكن أن يكون ممكناً. وبخصوص هذه المسألة (مشيراً إلى مسألة الأسبرين) يمكن أن تكون الكمية المعينة عشرين.

**الباحث:** هل تعتقد أن هناك معادلة من نوع ما، أو قانوناً مشتركاً بين هذه المسائل تحدثت عنه في السابق؟

**الطالب:** هناك ست علب صودا وسبعة أشخاص، وثلاثون يوماً، وخمس وأربعون حبة أسبرين؛ لذا، فإني أجزئ الأعداد.

**الباحث:** إذاً، ما الذي يجري؟

**الطالب:** كان عدد الأشخاص أكبر من عدد علب الصودا، وعدد حبات الأسبرين أكبر من عدد الأيام، فهناك عدد أصدقاء معروفين أكبر من عدد الأشخاص.

**الباحث:** عدد أصدقاء معروفين أكبر من عدد الأشخاص؟

الطالب: نعم... واحد منهم أصغر.

الباحث: ماذا تعني بالأصغر؟

الطالب: عدد أشخاص أكبر من عدد الأصدقاء، لم يكونوا متساوين أبداً.  
هناك شيء ما أكبر أو أكثر.

الباحث: كيف يساعدك ذلك كله على حل المسألة؟

الطالب: توضح المسائل شيئاً واحداً في الأقل، وبذلك عرفت أنه لا بد من أن يكون عدد الأشخاص أكبر من عدد علب الصودا.

الباحث: وماذا حدث نتيجة ذلك؟

الطالب: (صمت). (يكتب الأعداد)... يمكن أن تحل المسألة عندي.

عند هذه النقطة من المقابلة، حدد جون تحديداً صحيحاً أوجه الشبه في بنية المسائل الأولى والثانية والرابعة. وعبر عن هذا بقوله: إن المسائل جميعها كانت تتطلب كمية معينة، أو هل أن كمية معينة كانت ممكنة؟ لاحظ أنه عمل جدولاً لحلّ المسائل الأولى والثانية والرابعة، وأنه قارن بين كميتين، بحيث كانت إحدى الكميتين «أقل» من الأخرى. وقال أيضاً: إن هذا قد سمح بإيجاد حلول للمسائل، حيث إنه قد أفاد ضمناً منه، الأمر الذي مكّنه من إيجاد حل للمسألة، وأعني مبدأ برج الحمام، فقد اتخذ الباحث قراراً تربوياً تعليمياً باستخدام أعداد جون في تسهيل عملية التعبير لفظياً عن مبدأ برج الحمام. ومن المهم أن يلاحظ القارئ أن الباحث اتخذ هذا القرار فقط بعد أن صاغ الطالب مبدأ برج الحمام ضمناً بكلماته. وأما فيما يتعلق بحالة جون، فقد بدا ذلك واضحاً بعد تحديده الكميتين اللتين قورن بينهما، حيث إن إحدهما أقل من الأخرى، الأمر الذي أعان على حل المسألة. وكانت هذه طريقتة في التعبير عن مبدأ برج الحمام، وسوف يتضح هذا كله للقارئ من خلال الرواية الآتية:

## الرواية الثالثة

الباحث: لمّا كنت قد زوّدتني بالأعداد (20, 19, 45, 37, 6)، فإنني أود أن أسألك السؤال الآتي: ماذا لو استخدمت هذه الأعداد للحمام، وتلك الأعداد لبيوتها؟

الطالب: (ضاحكاً) ستكون هناك حمامة زائدة على الدوام.

الباحث: أين؟

الطالب: سيكون هناك اثنتان في بيت واحد.

الباحث: إذن، أخبرني ما الذي يجري هنا؟

الطالب: عندئذٍ سيمكنك أن تضع خمس عشرة حمامة في واحدة، وتضع البقية في الأخرى (مشيراً إلى الأعداد 30 و 45). وسيكون هناك أكثر من حمامة واحدة في بعض بيوت برج الحمام.

الباحث: وماذا عن هذين العددين (مشيراً إلى العددين 19 و 20)؟

الطالب: أحد بيوت الحمام سيحتوي على اثنتين هنا.

الباحث: حتى الآن لم تخبرني بمعادلتك.

الطالب: (برهة من الصمت). عدد الحمام أكثر من عدد البيوت. دعنا نقول إن  $s$  ترمز إلى البيوت، عندئذٍ سيكون عدد الحمام أكثر من عدد البيوت.

الباحث: كيف يمكنك قول ذلك باستخدام الرمز  $s$ ؟

الطالب:  $s + 1$

الباحث: إذا أنت أشرت إلى أن لديك بيوتاً بعدد  $s$ ، وحمامات بعدد  $s + 1$ ، فماذا بعد؟

الطالب: عندئذٍ سوف تمتلئ البيوت جميعها، وسيمتلئ أحدها أكثر من مرة واحدة. كنت مندهشاً كيف نجح ذلك في المسألة الأخيرة (مسألة المعارف أو الأصحاب)... لقد نجحت.

وهكذا، فقد توصل جون إلى الصورة العامة التي تصف حلَّه المسائل الأولى والثانية والرابعة. وفي أثناء رحلته، لاحظ الباحث أن جون قد فكَّر ملياً في «معادلة» ممكنة مدة ثلاثة أسابيع. وعلى عكس إيمي (Amy) التي تعثرت في التوصل إلى الصورة العامة في أثناء محاولتها إيجاد حل للمسألة الثالثة، فقد فكر جون تفكيراً واعياً في شيء ما يعين على تحويل المسائل إلى معادلة. لاحظ أن جون كان سريعاً في تعبيره عن مبدأ برج الحمام، وهذا مرده استخدامه الضمني هذا المبدأ في حله ثلاث مسائل من المسائل الأربع.

### المسألة الخامسة: مسألة الفرقة الموسيقية (The Band Problem)

لم يفلح أي من الطلاب التسعة في حل مسألة الفرقة الموسيقية. لقد بنت إيمي و«مات» تفسيرات معقولة لإجراء التوافيق والتباديل، لكنهما أخفقا في تطبيق مبدأ برج الحمام على حل هذه المسألة.

ملاحظة: حلول المسائل الخمس موجودة في الملحق ب.

وبهذا ينتهي السرد الوصفي لخبرات حل المسائل للطلاب الأربعة الموهوبين. لقد اكتشفت إيمي مصادفة مبدأ تجاوير برج الحمام بعد حل المسائل الثلاث الأولى، وتمكنت من تطبيقه على حل المسألة الرابعة، في حين تمكن جون من التعبير لفظياً عن مبدأ برج الحمام، بعد محاولاته حل المسائل الأربع الأولى، بعد تفكيره ملياً، وتحديد أوجه الشبه في المسائل ذوات الأرقام الأولى والثانية والرابعة. وأخيراً، تمكن كل من «مات» وهنّا من اكتشاف مبدأ برج الحمام بعد إجراء محاولات على المسائل الخمس بتحديد أوجه الشبه بين المسائل الأولى والثانية والرابعة. وقد كانت إيمي الطالبة الأكثر نجاحاً في المجموعات الفرعية. وقد عدّها كثير من أساتذة الرياضيات في جامعة مجاورة، رائعة رياضياً؛ نظراً إلى ابتداعها المجموعة العظمى في محاولتها حل المسألة الثالثة.

### النتائج والمضامين

تشير النتائج إلى نجاح كل من الطلاب الأربعة الموهوبين إيمي وجون و«مات» وهنّا في صياغة التعميمات. وعموماً، يكمن الفرق الرئيس بين هؤلاء الطلاب وغيرهم في مراحل

حل المسائل الأربع المتمثلة في: التوجه، والتنظيم، والتنفيذ، والتحقق. ويستثمر الطلاب النابغون قدراً كبيراً من الوقت في محاولة فهم موقف المسألة، وتحديد الفرضيات بوضوح، واستنباط خطة شمولية ذات طبيعة كلية. وعلى الرغم من أن هؤلاء الطلاب لم يتوصلوا إلى حلول عامة للمسائل الخمس البتة، فإنهم عملوا قدماً على نحو مستمر عن طريق البدء بحالات أكثر بساطة تعين على نمذجة موقف المسألة. ولتحقيق ذلك، كانوا يضبطون متغيرات المسألة. وبعبارة أخرى، فقد لاحظوا أن الكميات في المسائل المعطاة لم تكن ثابتة، مثلاً: ضببت إيمي في المسألة الثالثة المتغيرات عن طريق انتقاء الأعداد الصحيحة في المجموعات بعناية فائقة، ولم يقيدوا أيضاً أنفسهم بمجموعة من عشرة أعداد فقط، بل حاولوا مع مجموعات تحتوي على أقل من عشرة أعداد صحيحة. وطبق هؤلاء الطلاب في أثناء مرحلة التنفيذ من مراحل حل المسألة إجراءات مرحلية (يدويات) باستمرار، وراقبوا تقدمهم. وعند الحصول على نتائج الإجراءات المرحلية، فُحصت لتحقق دقتها واتساقها. وفي مرحلة تحقق المسائل الثلاث الأخيرة، كان هؤلاء الطلاب يستفيدون على الدوام من حالات خاصة للتوصل إلى رؤية تفسر حدوث ظاهرة ما. أما من حيث صياغة التعميمات لهذا الصنف من المسائل، فقد أفلح الطلاب بتحديد أوجه الشبه في بنية ثلاث مسائل فأكثر على نحو صحيح، وكذلك أوجه الشبه في حلولهم. لقد كانوا ماهرين في استخدام القياسات في أثناء توضيحهم وجه الشبه في المسائل، وكانوا قادرين أيضاً على الاتصال والتواصل على نحو فاعل، والتعبير عن المبدأ المشترك الذي اعتقدوا أنه يصف ثلاثاً من المسائل أو أكثر. وفي كثير من الحالات، خصصوا مجموعة فرعية أصغر من مجموعة من الأشياء متضمنة في المجموعة المعطاة.

وقد أظهرت سلوكيات التعميم التي أبدتها الطلاب الأربعة كلهم كثيراً من أنماط الاتساق، مع كثير من الدراسات القائمة، إذ توصل كروتسكي إلى نتيجة مفادها أنه كي يتمكن الطلاب من صوغ تعميمات يتعين عليهم الاستخلاص من محتوى معين، وأن يحددوا أوجه الشبه والبنى والعلاقات. وقد نجحت إيمي وجون و«مات» وهنّا في الوصول إلى هذا بدرجات متفاوتة. وتضمن سلوك الطلاب التفكير في أوجه الشبه في المسائل والحلول، واستخلاص أوجه الشبه تلك على امتداد مدة من الزمن، وترتب أيضاً على هذه النتيجة تحقق التخمين،

وهذا يتفق مع ما أشار إليه بياجيه (Piaget, 1971) ودوبنسكي (Dubinsky, 1991) اللذان صوّرا التعميم على أنه عملية «تجريد تأملي». في حين ينظر دوبنسكي إلى التعميم بصفته مزيجاً من الأشياء والعمليات التي تشتمل على درجة عالية من المعرفة الخاصة بالموضوع. وفي هذه الدراسة، كانت المسائل الخمس هي الأشياء، وحلول تلك المسائل الخمس هي العمليات، والصورة العامة التي وصفت مجموعة المسائل والحلول، هي مبدأ برج الحمام.

وأظهر الطلاب النابغون أيضاً سلوكيات تفكير أخرى لم يقل الباحث بصراحة في دراسته إنها ساعدت على عملية التعميم. وفي سياق دراسة البحث هذه، فقد لوحظ قدر كبير من سلوك اتخاذ القرار لدى الطلاب الموهوبين في أثناء مراحل التنفيذ وبعدها، وتحقق حل المسألة. يمكن أن يصور اتخاذ القرار على أنه سلوك تفكير «سريع» في أثناء عملية حل المسألة، يوجّه الطلاب إلى الحلول الصحيحة. وهناك سلوك تفكير آخر ظهر في التخمين والحُدس بعد محاولة حل مسألة ما. فبعد محاولة الطلاب حل مسألة ما، فإنهم غالباً ما يخمنون، ومن ثم يتابعون تخميناتهم بتفحص الأمثلة المعقولة. لقد كان هذا أسلوباً مميزاً لكتابات إيمي في دفتر مذكراتها، ولوحظت أيضاً هذه السمة لدى الآخرين. مثلاً، قال جون إنه كان يبحث عن معادلة تعين على حل المسائل، وأخيراً توصل إليها بعد حل المسألة الرابعة.

أشار الباحث في وقت سابق إلى وجود فروق بسيطة تتصل بنوعية التعميمات التي كوّنوها الطلاب النابغون. فقد كانت إيمي الطالبة الأكثر نجاحاً في هذه المجموعة الفرعية؛ لأنها اكتشفت التعميم بعد المسألة الثالثة، وتمكنت أيضاً من حل المسألة الرابعة باستخدام التعميم الذي كوّنته. بعد ذلك، حاولت تصنيف المسألة الخامسة ضمن الطريقة العامة، لكنها لم تنجح في ذلك. وقد كانت بطريقة أو بأخرى، تعمل في مستوى عالم رياضيات. وسيكون بوسع عالم الرياضيات أن يصور مخطط تعميم إيمي على النحو الآتي: اشتقت طريقة عامة في المرحلة الأولى من المسائل 1 و 2 و 3، ثم صيغت الطريقة بوضوح (برج الحمام)، وعُدّت كياناً قائماً بذاته، وحُللت بنيتها، ثم استخدمت هذه البنية لتضمين نوع مختلف من المسائل (المسألة 4)، دون إجراء أي تغييرات على الطريقة الأصلية

(Skemp, 1986). وتمكّن أيضاً جون ومات في الجانب المقابل من التوصل إلى التعميم بعد حل المسألتين 4 و 5 على التوالي، ولكنهما أخفقا في تصنيف المسألتين 3 و 5 ضمن التعميم. وفي حالة «حنا»، فقد توصلت إلى فهم حدسي تخميني للتعميم عن طريق استخلاص أوجه الشبه في المسائل 1 و 2 و 4، وعن طريق استبعاد المسألتين 3 و 5 على نحو متعمد من هذه العملية. ولما كان التجريد يُعدُّ فرضية للتعميم (Davis & Hersh, 1981; Davydove, 1990) فإن سلوكيات التجريد لهؤلاء الطلاب شبيهة بتلك التي يظهرها علماء الرياضيات، وتعين على نجاح تكوين تعميمات صادقة.

تتسق السلوكيات الوجدانية للطلاب الموهوبين في صياغة التعميمات مع دراسات كثيرة بهذه الخصوص (Burton, 1984; Mandler, 1984). ووفقاً ل بيرتون (Burton, 1984) فإن نشاط المعرفة يرسم بوساطة الاستجابات الوجدانية التي يمكن ملاحظتها في أثناء استعراض المراحل الثلاث: الدخول (Entry) والهجوم (Attack) والمراجعة (Review). وتسمى المرحلة التي يتعامل فيها مع المسألة بمرحلة الدخول، وتُثار فيها الدهشة، أو الفضول، أو التوتر بوصفه حاجة وجدانية تُحل من خلال مرحلة الاستكشاف (الهجوم)، التي تلي بدورها حاجة المعرفة للتوصل إلى النمط الأساسي، الذي كان في هذه الدراسة مبدأً برج الحمام. وأما في حالة الطلاب الموهوبين، فقد لاحظ الباحث العواطف الإيجابية القوية التي تلازم بناء الأفكار الجديدة غالباً (Glaserfeld, 1987). وتتسق هذه النتيجة مع الكتابات والدراسات البحثية التي ترى أن جلّ العوامل الوجدانية التي تبرز من الاستجابات العاطفية، يمكن أن تعيق الخطط أو السلوكيات المخططة (Burton, 1984; Mandler, 1984, Schoenfeld, 1985). إضافة إلى ما أظهره الطلاب من دهشة وفضول على مدار المسائل الخمس، فقد أظهروا أيضاً مثابرة رائعة، ونوبات من الإحباط. لقد قدرُوا الاتصال والتواصل، وصوروا الرياضيات على أنها «طريقة تفكير».

امتلك الطلاب النابغون الأربعة قابلية طبيعية (Shapiro, 1965) للانتظام في سلوكيات حل المسألة وبناء التعميمات. وعلى الرغم من أنهم لم يحظوا بأي فرص للإثراء أو التسريع في أثناء المرحلة المتوسطة من سني الدراسة، فإنهم أظهروا مستوى عالياً من التفكير

التأملي، إضافة إلى الاهتمام بالتوجه والتنظيم في موقف حل المسألة. وعلى العموم، ينبغي لهذه النتيجة أن تحظى بدرجة عالية من الأهمية لدى كل من المعلمين والمرشدين. ويلاحظ أن الطلاب الموهوبين قد أظهروا فهماً عميقاً، حيث إنهم كانوا قادرين على استخلاص أوجه الشبه، ومن ثم تكوين روابط مفاهيمية صحيحة. وقد أدى الوجدان دوراً رئيساً في كيفية تعاملهم مع موقف المسألة، ولا سيما أن معتقداتهم بخصوص مكونات الرياضيات، قد أثرت في كيفية معالجتهم للمسألة. وربما وجد الطلاب النابغون أن المسألة تأسرهم بما يكفي لدرجة أنها توجد حاجة وجدانية لديهم؛ ليتوصلوا إلى النمط الأساسي الذي يميزها (Burton, 1984; Mandler, 1984, Schoenfeld, 1985).

وهكذا، فإذا ما أراد المعلمون أن يكون الطلاب ماهرين في صياغة التعميمات، فإن التحدي الأول والأخير يتمثل في إيجاد فئات متنوعة من المسائل لها حلول عامة، تمكن الطلاب من الوصول إليها وتستحوذ على اهتمامهم. وأخيراً، تشير النتائج إلى مقدرة الطلاب الموهوبين على استخلاص أوجه الشبه في بنية المسائل والأوضاع بطريقة تماثل ما يحدث في الرياضيات، وكذلك تكوين تعميمات رياضية صحيحة وصادقة. وهذا يتطلب من معلمي المرحلة الثانوية إيجاد فرص تعلم تتيح المجال أمام الطلاب الموهوبين في الرياضيات لتطوير مواهبهم واستخدامها.

### قائمة المراجع

- Birkhoff, G. (1969). *Mathematics And Psychology*. *Siam Review*, 11, 429–469.
- Brownell, W. A. (1942). *The Place And Meaning In The Teaching Of Arithmetic*. *Theelementary School Journal*, 4, 256–265.
- Burton, L. (1984). *Mathematical Thinking: The Struggle For Meaning*. *Journal Forresearch In Mathematics Education*, 15, 35–49.
- Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. New York: Hough–ton Mifflin.
- Davydov, V. V. (1990). *Type Of Generalization In Instruction*: Soviet Studies In Mathematics Education. Reston, Va: National Council Of Teachers Of Mathematics.

- Dienes, Z. P. (1961). *On Abstraction And Generalization* . Harvard Educational Review, 31, 281–301.
- Dreyfus, T. (1991). *Advanced Mathematical Thinking Processes* . In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (Pp. 25–40). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Dubinsky, E. (1991). *Constructive Aspects Of Reflective Abstraction In Advanced Mathematics* . In L. P. Steffe (Ed.) *Epistemological Foundations Of Mathematical Experience* (Pp. 160–187). New York: Springer–Verlag.
- English, L. D. (1992). *Problem Solving With Combinations* . *Arithmetic Teacher*, 40(2), 72–77.
- Ervynck, G. (1991). *Mathematical Creativity* . In D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (Pp. 42–53). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Frensch, P. & Sternberg, R. (1992). *Complex Problem Solving: Principles And Mechanisms* . Mahwah, Nj: Erlbaum.
- Gardner, M. (1997). *The Last Recreations*. New York: Springer–Verlag.
- Glaser, B & Strauss, A. (1977). *The Discovery Of Grounded Theory: Strategies For Qualitative Research*. San Francisco, Ca: University Of California San Francisco.
- Glaserfeld, E. Von. (1987). *Learning As A Constructive Activity* . In C. Janvier (Ed.), *Problems Of Representation In The Teaching And Learning Of Mathematics* (Pp. 3–18), Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum Associates.
- Greenes, C. (1981). *Identifying The Gifted Student In Mathematics* . *Arithmetic Teacher*, 28, 14–18.
- Kanevsky, L. S. (1990). *Pursuing Qualitative Differences In The Flexible Use Of A Problem Solving Strategy By Young Children*. *Journal For The Education Of The Gifted*, 13, 115–140.
- Kilpatrick, J. (1985). *A Retrospective Account Of The Past Twenty–Five Years Of Researchon Teaching Mathematical Problem Solving* . In E. A. Silver (Ed.) *Teaching And Learning Mathematical Problem Solving. Multiple Research Perspectives* (Pp. 1–16). Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum And Associates .

- Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology Of Mathematical Abilities In School Children* .(J. Teller, Trans. And J. Kilpatrick & I. Wirszup, Eds.). Chicago: University Of Chicago Press.
- Lester, F. K. (1985). *Methodological Considerations In Research On Mathematical Problem Solving* . In E. A. Silver (Ed.), *Teaching And Learning Mathematical Problem Solving. Multiple Research Perspectives* (Pp. 41–70). Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum And Associates.
- Mandler, G. (1984). *Mind And Body: Psychology Of Emotion And Stress* . New York: Norton.
- National Council Of Teachers Of Mathematics. (2000). *Principles And Standards For School Mathematics*. Reston, Va: Author.
- Piaget, J. (1971). *Biology And Knowledge*. *Edinburgh University Press* .
- Piaget, J. (1975). *The Child's Conception Of The World*. Totowa , Nj: Littlefield, Adams.
- Polya, G. (1945). *How To Solve It*. *Princeton, Nj* : Princeton University Press.
- Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving* . New York: Academic Press.
- Schoenfeld, A.H. (1992). *Learning To Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, And Sense Making In Mathematics*. In D.A. Grouws (Ed.). *Handbook Of Research On Mathematics Teaching And Learning* (Pp. 334–368). New York: Simon And Simon Schuster.
- Shapiro, S.I. (1965). *A Study Of Pupil's Individual Characteristics In Processing Mathematical Information*. *Voprosy Psikhologii*, 2, 1–113.
- Skemp, R. (1986). *The Psychology Of Learning Mathematics* . Penguin Books.
- Sternberg, R. J. (1979). *Human Intelligence : Perspectives On Its Theory And Measurement*. Norwood, Nj: Ablex.

## ملحق أ - المسائل

### المسألة الأولى

يوجد ستة أبدال لاختيار مشروب الصودا: الكولا، وكولا الحمية، والليمون، والزنجبيل، والشعير، والفراولة.

كم طالباً يجب أن يطلب الصودا، على أن يكون لكل طالب علبة صودا، كي نتحقق أن طالبين في الأقل، قد طلبا أحد أنواع الصودا الستة المدرجة؟

### المسألة الثانية

يتناول الشخص حبة أسبرين واحدة في الأقل مدة ثلاثين يوماً. لنفترض أنه يتناول خمسة وأربعين حبة أسبرين طوال هذه المدة، فهل يمكن أن يتناول أربع عشرة حبة أسبرين تماماً، في تسلسل معين لأيام متتابعة؟ فسر إجابتك.

### المسألة الثالثة (مقتبسة من Gardner, 1997)

اختر مجموعة (س) مؤلفة من عشرة أعداد صحيحة موجبة بحيث تكون أقل من مئة.

مثلاً: اختر المجموعة  $S = 3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76$

فهناك اختاران مختلفان تماماً من المجموعة (س) لهما المجموع نفسه.

مثلاً، في المجموعة (س)، يمكن أن أختار أولاً 14 و 63، ومن ثم أختار 35 و 42. لاحظ

أن مجموع الاثنين يساوي سبعة وسبعين. ( $14+63=77$ ;  $35+42=77$ ).

ويمكنني أيضاً أن أختار أولاً 3 و 9 و 14، ومن ثم أختار 26. لاحظ أن مجموعهما يساوي

$26$  و  $(3+9+14=26)$

وأيّاً كانت طريقة اختيارك لمجموعة مؤلفة من عشرة أعداد صحيحة موجبة أقل من

مئة، فسيكون لديك خياران مختلفان محتملان يعطيان المجموع نفسه.

لماذا يحدث هذا؟ برهن على أن هذا يحدث دائماً.

### المسألة الرابعة

يوجد عشرون شخصاً في الغرفة يعرف بعضهم عدداً من هؤلاء الأشخاص، في حين

لا يعرف بعضهم الآخر أحداً. أثبت أنه يوجد شخصان في الغرفة لهما العدد نفسه من

المعارف.

### المسألة الخامسة (مقتبسة من Gardner، 1997)

يتألف المستطيل من صفوف وأعمدة. انظر إلى فرقة موسيقية يسير أعضاؤها على صورة مجموعة مستطيلات، بحيث تكون الصفوف (م) والأعمدة (ن)، ويمكن أن يكون (م) و (ن) أي عدد طبيعي. إذا نظرنا إلى الفرقة الموسيقية من الجانب الأيسر، يلاحظ قائد الفرقة الموسيقية أن بعض أعضاء الفرقة قصار القامة، مختلفون في النسق. يُعالج هذا الخلل الجمالي بترتيب الموسيقيين في كل صف بحسب الطول من اليسار إلى اليمين، بحيث يكون كل واحد منهم أطول من الشخص الذي يقف عن يساره أو بالطول نفسه (من وجهة نظر قائد الفرقة الموسيقية). وعلى الرغم من ذلك، عندما يستدير قائد الفرقة الموسيقية إلى الأمام، يجد مرة أخرى أن بعض أعضاء الفرقة الموسيقية قصار القامة لا يمكن رؤيتهم؛ بسبب وقوف طوال القامة أمامهم. فيشرع عند ذلك بتغيير ترتيب الموسيقيين داخل عمودهم بحسب أطوالهم، بحيث يكون الأطول قامته في الخلف.

يتردد عند هذه النقطة، في العودة مرة أخرى إلى الجانب الأيسر؛ ليرى نتائج التعديلات التي أجراها بعناية على صفوفه المرتبة. وعلى أي حال، عندما يذهب يفاجأ أن الصفوف لا تزال مرتبة بحسب الطول من اليسار إلى اليمين. إن إعادة خلط النسق داخل الأعمدة بهذه الطريقة لا يلغي الترتيب بحسب الطول في الصفوف. فلماذا يحدث هذا؟ برهن على أن الأمر يكون هكذا دائماً.

### ملحق ب - الحلول

#### المسألة الأولى

حل مسألة الصودا كان الأكثر وضوحاً، إذ يطلب سبعة طلاب الصودا، بحيث يكون أسوأ موقف هو طلب كل واحد من الطلاب الستة الأوائل شراب صودا مختلفاً عن الآخر، لذا، يجبر الطالب السابع على طلب مشروب طلب سابقاً.

### المسألة الثانية

تحل مسألة الأسبرين عموماً من خلال افتراض تناول الشخص حبة أسبرين واحدة على الأقل في اليوم. وبناءً عليه، يكون الشخص قد استهلك ثلاثين حبة أسبرين تماماً في غضون ثلاثين يوماً، وبذلك يبقى هناك فائض بمقدار خمس عشرة حبة يستطيع الشخص تناولها عشوائياً على مدار الثلاثين يوماً.

### المسألة الثالثة

يمكن حل مسألة مجموع الأعداد على النحو الآتي: هناك  $(2^{10} = 1,024)$  مجموعة فرعية من مجموعات الأعداد الصحيحة، ولكن هناك (901) حل ممكن فقط يعبر عن عدد الأعداد الصحيحة بين أقل مجموع وأكبر مجموع. وبوجود عدد مجموعات فرعية أكبر من المجاميع الممكنة، يوجد مجموع واحد في الأقل يقابل مجموعتين فرعيتين في الأقل. ومن هنا، يوجد دائماً اختياران مختلفان تماماً، يعطيان المجموع ذاته.

### المسألة الرابعة

يمكن حل مسألة المعارف على النحو الآتي: إذا وجد شخص في الغرفة ليس له أي معارف على الإطلاق، فإن كل واحد من الأشخاص الآخرين في الغرفة يمكن أن يعرف 1 أو 2 أو 3،...، أو 18 شخصاً، أو ألا يكون له معارف على الإطلاق. وبناءً عليه، لدينا 19 «حفرة أو موقعاً» معداً على النحو الآتي: 0, 1, 2, 3, ..., 19، وعلينا بتوزيع عشرين شخصاً فيما بينها. افترض بعد ذلك، أن لكل شخص في الغرفة شخصاً يعرفه. ومرة أخرى، لدينا 19 موقعاً 19, 3, 2, 1، وعشرين شخصاً. وهكذا، سيضطر شخصان إلى أن يكون لهما العدد نفسه من المعارف.

### المسألة الخامسة

يمكن إثبات مسألة الفرقة الموسيقية بوساطة (البرهان بالتناقض). افترض أن الأعمدة جميعها قد رُتبت، ولكن يوجد هناك صف فيه الموسيقي (A) (العمود I) وضع أمام (أو إلى يسار) موسيقي قصير القامة (B) (العمود J). ولما كانت الأعمدة قد رُتبت،

بحيث يكون كل موسيقي في القطعة (X) من (A)، وإلى الخلف في العمود I على الأقل بطول (A) نفسه، وكل موسيقي في القطعة (Y) من (B) فصاعداً في العمود «J» ليس أطول من (B)، ولما كانت (A) أطول من (B)، فهذا يعني أن الأعضاء في القطعة (X) أطول من الأعضاء في القطعة (Y). والآن انظر إلى نقطة الوسط، حيث رُتبت الصفوف، وليس الأعمدة. ووصولاً إلى هذه النقطة لا بد من تحريك الموسيقيين من القطعة (C) إلى أماكنهم السابقة على امتداد العمود (I)، والعودة إلى القطعة (Y) إلى أماكنهم عبر العمود (J). ويجب توزيع الأعضاء في القطعتين (Y و C) بين الصفوف  $1, 2, \dots, m$ . وبحسب مبدأ برج الحمام، سينتهي المطاف بموسيقيين اثنين في الصف نفسه، لا يمكن أن يأتيا من القطعة نفسها. لذا، فسيكون في بعض الصفوف عضو (C) من القطعة (X)، قبل العضو (D) من القطعة (Y). ولما كانت (C) أطول من (D)، فإن هذا الترتيب يخالف الترتيب التصاعدي الموجود للصفوف. وعلى هذا، تتبع النتيجة البرهان بالتناقض.

