

مفاهيم البرهان لدى طلاب الصف التاسع الموهوبين

استقصاء التشابه في مناحي الطلاب الموهوبين في الرياضيات وعلماء

الرياضيات المختصين

بهاراث سريرامان Bharath Sriraman

جامعة مونتانا



ملخص

يتعلم طلاب المرحلة الثانوية عادة دراسة البرهان أو البرهان الرسمي واستخدامه ضمن مجال الهندسة الإقليدية. وغالباً ما يستخدم علماء الرياضيات المختصون طريقة المحاولة والخطأ غير الرسمية في حل المسألة، إلى أن يقودهم حدسهم إلى التوصل إلى حقيقة الفكرة. ويتبع البرهان الرسمي فقط بعد أن يحصل الاقتناع الحدسي لدى علماء الرياضيات فيما يتصل بحقيقة الفكرة. ولكن، هل يُعدُّ استخدام الحدس في التوصل إلى منطقية الحقيقة الرياضية فريداً لدى علماء الرياضيات المختصين؟ كيف يكون الطلاب الموهوبون في الرياضيات حقيقة الفكرة؟ في هذه الدراسة، كُفِّ أربعة طلاب من المبتدئين والموهوبين في الرياضيات ممن لم يسبق لهم التعرض للبرهان أو الهندسة في المرحلة الثانوية، بمهمة إثبات صدق أو زيف مسألة هندسية غير عادية، يشار إليها أحياناً بمسألة المثلث المحصور (Circumscribing Triangle Problem). وتتناول هذه المسألة ما يأتي: هل صحيح أن هناك دائرة تحيط بكل مثلث وتمر من خلال كل رأس من رؤوسه؟ ويصف هذا البحث ويفسر العمليات التي يستخدمها الطلاب الموهوبون في الرياضيات في بناء حقيقة، ومقارنة هذه العمليات بتلك التي يستخدمها علماء الرياضيات المختصون.

وأشارت النتائج إلى أن الطلاب الأربعة كانوا قادرين على التفكير بمرونة، على نحو ما هو مثبت من خلال مقدرتهم على عكس اتجاه العملية العقلية، ومن ثم التوصل إلى الاستنتاج الصحيح. ويتحقق هذا البحث من صدق استخدام أبنية كروتسكي (Krutesskiian Constructs) ذات العلاقة بمرونة العمليات العقلية وقابليتها للانعكاس (Reversibility) في تعليم الموهوبين بصفتهما من خصائص الطلاب الموهوبين في الرياضيات.

مقدمة

ترسم مبادئ الرياضيات المدرسية والمعايير التي نشرها المجلس الأمريكي لمعلمي الرياضيات، صورة للغرف الصفية التي يضع فيها الطلاب التخمينات ويصقلونها ويستكشفونها استناداً إلى الأدلة، واستخدام مجموعة متنوعة من الاستدلالات وأساليب البرهان، لتأكيد تلك التخمينات أو إثبات بطلانها» (Nctm, 2000, P. 3). يصور المجلس الطلاب في مختلف مراحلهم المدرسية وهم يتناولون الرياضيات، بطريقة مماثلة لتلك التي يستخدمها علماء الرياضيات المختصون. مثلاً، يُشجّع المعلمون في المراحل الابتدائية الأولى على إيجاد خبرات تعليمية تتيح الفرصة أمام الطلاب لتطوير مهارات تمييز الأنماط المعرفية وتصنيفها، وتحفيز الطلاب على تبرير إجاباتهم من خلال استخدام الأدلة التجريبية، وسلسلة قصيرة من الاستدلالات الاستنتاجية المستندة إلى الحقائق المقبولة سابقاً. ومع تقدم الطلاب في المرحلة المتوسطة، يتوقع منهم امتلاك خبرات متعددة في صياغة التعميمات والتخمينات، وتقويمها وبناء البراهين الرياضية. وأخيراً، يتوقع من الطلاب في المرحلة الثانوية أن يصبحوا ماهرين في التعامل رسمياً مع التعريفات والبهيات والفرضيات، وقادرين على كتابة البراهين.

جاءت التوصيات الواردة في هذه المبادئ والمعايير عامة، ويقصد منها أن تنطبق على الطلاب جميعاً. وعلى الرغم من ذلك، فهناك عدد كبير من البحوث عن تعليم الموهوبين تشير إلى أن الطلاب الموهوبين في الرياضيات يختلفون عن أقرانهم في جوانب كثيرة، من حيث مقدرتهم على التعلم بسرعة أكبر. مثلاً، يختلف الطلاب النابغون في الرياضيات عن أقرانهم من حيث مقدرتهم على التعلم بسرعة أكبر، وفضولهم لفهم الأفكار المفاهيمية.

وقدرتهم على التجريد والتعميم وقدرتهم على معالجة المعلومات وإدارة البيانات، ومرونتهم وقدرتهم على عكس العمليات، وثباتهم وقدرتهم على اتخاذ القرار في مواقف حل المسائل. وقد أظهرت الدراسات التربوية في جامعة ستانفورد أن الطلاب الموهوبين يستطيعون من خلال التعليم إتقان مبادئ الاستدلال والقياس المنطقي الافتراضي، التي تعدُّ متطلبات قبلية للبرهان بدءاً بمستوى الصف الخامس الأساسي.

وقد قاد هذا الأمر الباحث إلى افتراض مفاده أنه قد يكون لدى الطلاب الموهوبين في الرياضيات مفهوم حدسي للبرهان ولدوره في الرياضيات، حتى إن لم يكن لديهم أي معلومات سابقة عن البرهان. وبعبارة أخرى، هل يمتلك الطلاب النابغون في الرياضيات قدرة طبيعية للتوصل إلى البرهان بطريقة مماثلة لتلك التي يستخدمها علماء الرياضيات؟ عادة ما يكون علماء الرياضيات اعتقاداً شخصياً بخصوص حقيقة الفكرة، ويستخدمونه دليلاً يوجههم نحو طرائق تحليل رسمية لبناء الحقيقة. مثلاً، قد يتوصل عالم الرياضيات بالحدس إلى نتيجة النظرية، ولكنه يدرك أن الاستنتاج ضروري لبناء الحقيقة علانية. وهكذا، فإن الحدس يقنع عالم الرياضيات بصحة الفكرة، في الوقت الذي ينظم فيه الاتجاه نحو مزيد من الطرائق الرسمية، خاصة بناء البرهان لتحقيق صدق النتائج علنياً.

وهذا يقود إلى الأسئلة الآتية:

1. كيف يتوصل الطلاب النابغون في الرياضيات إلى الحقيقة، بالحدس؟
2. كيف يقنع الطلاب النابغون في الرياضيات أنفسهم، والآخرين، بخصوص حدسهم للحقيقة؟
3. هل تماثل المناحي التي يستخدمها الطلاب النابغون تلك التي يستخدمها علماء الرياضيات المختصون؟ وإذا كان الأمر كذلك، فما أوجه التشابه؟

الخلفية النظرية

يرى إب (Epp, 1990) أن نوع التفكير الذي يتبعه علماء الرياضيات في أعمالهم يختلف اختلافاً كبيراً عن الاستدلال الاستنتاجي الراقى المتوافر في متن كتب الرياضيات (ص. 257). وتضع هذه العبارة الطلاب في منظور التحديات التي يواجهونها عندما يتوقع

منهم بناء برهان استنتاجي عند البدء بالهندسة في المرحلة الثانوية للمرة الأولى. وعندما يتحدث أحد ما إلى عالم رياضيات عن اكتشاف في الرياضيات، يعترف علماء الرياضيات باتباعهم خطوات غير منطقية في البراهين (Lambert, 1990)، حيث يجربون التخمينات (Davis & Hersh, 1981; Poincaré, 1984)، ويبحثون عن أمثلة مشابهة (Fawcett, 1938; Polya, 1954) لتساعدهم على الحل، ومع ذلك، فإن النتيجة النهائية لا توفر للطلاب رؤية عميقة للصراع المرير من أجل الوصول إلى البراهين.

درس جازان (Ghazan, 1993) تبريرات طلاب المرحلة الثانوية في الهندسة فيما يتصل بوجهات نظرهم عن الأدلة التجريبية والبراهين الرياضية، وأورد النتائج التي توصل إليها في المقابلات المعمقة مع سبعة عشر طالباً في صفوف الهندسة من طلاب المرحلة الثانوية التي تستخدم الأدلة التجريبية. وقد تركّز تحليله على الأسباب التي تؤدي بالطلاب إلى تصوير الأدلة التجريبية بصفتها براهين رياضية تماماً كالأدلة. وطلب إلى الطلاب في الجزء الأول من المقابلة أن يقارنوا بين البراهين استناداً إلى قياس الأمثلة والبرهان الاستنتاجي، في حين ركّز الجزء الثاني من المقابلة على البرهان الاستنتاجي في الكتاب المدرسي، وحاول توضيح هل يعتقد الأشخاص الذين قولوا أن البرهان الاستنتاجي يثبت صحة النتيجة للأشياء جميعها، وفيها ذلك المسائل المعطاة. وطلب إليهم أيضاً التوصل إلى أمثلة مضادة قدر الإمكان. وقد توصلت الدراسة إلى أن لدى الطلاب سبباً مقنعاً يجعلهم يعتقدون أن الدليل (Evidence) هو البرهان (Proof) في عالم المثلاث، حيث تتوافر أدلة كافية لدعم هذا الادعاء. وقد عبّر هؤلاء الطلاب عن شكوكهم في مقدرة البرهان الاستنتاجي على ضمان عدم وجود أمثلة مضادة تدحض البراهين.

انبثق نموذج فان هيلي (Van Hiele, 1986) في التفكير الهندسي من أعمال الدكتورة لكل من دينا فان هيل-جيلوف وبيير فان هيل (Dina Van Hiele-Gelof & Pierre Van Hiele) في هولندا. يتكون هذا النموذج من خمسة مستويات من الفهم، هي: التصور (Visualization)، والاستقراء (Induction)، والاستنتاج غير الشكلي (Induction With Informal Deduction)، والاستنتاج الشكلي

(Formal Deduction)، وأخيراً البرهان (Proof). وتصف هذه المستويات خصائص التفكير، وسماته في كل مرحلة. ويتسم المستوى الأول بقدرة الطلاب على تمييز الأشكال بمظهرها العالمي، أو رؤية الأشكال الهندسية بصرياً بصورة كلية. يكون بمقدور الطلاب في المستوى الثاني (التحليل) وضع خصائص الأشكال الهندسية في قائمة؛ بحيث تصبح خصائص الأشكال الهندسية وسيلة للتحديد والوصف. ويبدأ الطلاب في المستوى الثالث بربط الخصائص، ودمجها في مجموعات كافية للأشكال الهندسية. أما في المستوى الرابع، فيطور الطلاب سلسلة لفظية من الكلمات لاستنتاج جملة من الأخرى. ويظهر الدليل الشكلي الاستنتاجي أول مرة في هذا المستوى من التفكير، في حين يصبح الطلاب في المستوى الخامس قادرين على تحليل أنظمة الاستنتاج المختلفة والمقارنة بينها. وتعد مستويات فان هيل للتفكير الهندسي متسلسلة أو متتابعة (Sequential) ومتوالية (Discrete)، أكثر من كونها متصلة، وتعد أيضاً بنية المعرفة الهندسية فريدة في كل مستوى ومرتبطة بالعمر الزمني. اعتقد فان هيل أن التعليم يؤدي الدور الأكبر في انتقال الطلاب من مستوى تفكير هندسي إلى المستوى الذي يليه. ورأى أيضاً أنه، دون التعليم، ربما يمكث الطلاب في مستوى معين إلى أجل غير مسمى. لا يتفق الباحث مع ادعاء فان هيل أن المستويات منفصلة ومرتبطة بالعمر الزمني. ويرى أن هذا الادعاء قد يكون صحيحاً للطلاب غير النابغين، ولكن مما لا شك فيه أنه لا ينطبق على الطلاب النابغين في الرياضيات، وسيثبت أيضاً في الفقرة الآتية. وإضافة إلى ذلك، فإن هذا النموذج لا يأخذ في الحسبان النظرة الكلية للقدرة الرياضية، ويقتصر تماماً على عالم الهندسة.

لقد أُجريت تجارب كثيرة في الاتحاد السوفييتي سابقاً في المدة الممتدة من 1950-1970 (Ivanistsyna, 1970; Krutestskii, 1976; Menchinskaya, 1959; Shapiro, 1965;) على الطلاب النابغين في الرياضيات، وأظهرت أن الطلاب النابغين يمتلكون حصيلة من القدرات لا يمكن ترتيبها في خانات أو تصنيفات ضمن مستويات منفصلة داخل مجالات فرعية ضيقة من الرياضيات كالهندسة الإقليدية مثلاً. وتصف هذه البحوث بدلاً من ذلك، القدرات الرياضية للأطفال النابغين على نحو كلي، حيث تتألف من مكونات تحليلية (Analytic) وهندسية (Geometric) وتوافقية (Harmonic)، وبحث

في تفضيل الأطفال الموهوبين عادة مكوناً على المكونات الأخرى. يتميز النمط التحليلي بقدرة عقلية رياضية مجردة، في حين يتميز النمط الهندسي بالقدرة العقلية التصويرية، أما النمط التوافقي فيمتاز بأنه مزيج من النوعين الهندسي والتحليلي. مثلاً، لو أعطي الطلاب المسألة نفسها لوجدنا أن طفلاً متفوقاً قد يستخدم المنحى التحليلي، في حين قد يذهب آخر إلى أبعد من المنحى الهندسي. قدم سترنز (Strunz, 1962) تصنيفاً مختلفاً لـ «الأنماط» المتصلة بالنابعين في الرياضيات، واقترح النمط التجريبي (Empirical Type) والنمط المفاهيمي (Conceptual Type)، وفي هذا التصنيف يحظى النمط التجريبي بالتفضيل في الحالات التطبيقية والعلاقات والاستنتاجات التي تلاحظ فوراً، في حين يحظى النمط المفاهيمي بالتفضيل في الحالات النظرية والاستنتاجية. وقد لاحظ كروتسكي أن إحدى سمات الطلاب النابعين في الرياضيات هي القدرة على الانتقال من اتجاه إلى اتجاه معاكس في سلسلة التفكير (أو القابلية للانعكاس)، التي يعمل فيها الطلاب النابعون بسهولة نسبية. أما السياق الذي لوحظت فيه القابلية للانعكاس، فقد كان في التحول من البرهان العادي إلى البرهان بالتناقض (Proof Via Contradiction)، أو عند الانتقال من نظرية إلى ضدها. يعترف الباحث في هذه الفقرة باستخدام القدرة الحدسية لدى الأطفال النابعين. ووفقاً لمعرفة الكاتب، لا توجد دراسات بحثت في طريقة استخدام الطلاب النابعين حدسهم في الرياضيات. وعلى الرغم من ذلك، فإن هناك عدداً محدوداً من الدراسات أجريت على علماء رياضيات، في محاولات لزيادة مدى فهمنا أسلوب استخدامهم للحدس في الرياضيات (Fischbein, 1980; Kline, 1976; Sriraman, 2004).

قال كايلن (Kilne 1976): إن مجموعة من علماء الرياضيات أفادوا بأنهم بدؤوا باستخدام منحى المحاولة والخطأ غير الرسمي بتوجيه من الحدس. وكانت هذه العملية هي التي ساعدتهم على إقناع أنفسهم بصحة الفكرة الرياضية. وبعد القناعة الأولية اتبعوا الطرائق غير الرسمية:

عادة ما يكون المنحى المنطقي لأي فرع من فروع الرياضيات عملية إعادة بناء معقدة ومصطنعة للاكتشافات التي تجري إعادة تشكيلها مرات عدة، ومن ثم تجميعها في نظام

الاستنتاج. عندئذٍ لا تعود البراهين طبيعية أو موجهة بالحدس. ومن هنا، لا يكون بوسع المرء فهمها حقيقةً بوساطة التمثيل المنطقي (ص. 451).

اعتقد فيتشبين (Fischbein 1980) أن الحدس يُعدُّ مكوناً أساسياً في مستويات البراهين جميعها. وأشار إلى استخدام الحدس بصفته توقعياً (Anticipatory)، وقال: «عند محاولة حل المسألة، يشعر المرء فجأة بأنه قد أمسك بالحل، حتى قبل أن يكون بوسعه تقديم تبرير واضح كامل لذلك الحل» (Fischbein, 1980, P. 10).

وأجرى سريرامان (Sriraman 2004) مقابلات مع خمسة من علماء الرياضيات ليحدد السمات النوعية للسلوك الإبداعي. وفي هذه الدراسة، سُئل علماء الرياضيات عن كيفية تكوين الحدس حقيقة الافتراض. وأشار علماء الرياضيات جميعهم في هذه الدراسة إلى أن آخر ما كانوا يلتفتون إليه هو البرهان الرسمي، وذهبوا إلى تكوين الحدس الخاص بالحقيقة عن طريق محاولتهم بناء أمثلة، وأمثلة مضادة (Sriraman, 2004). وبعبارة أخرى، فقد كانوا يتعاملون مع المسألة من ناحيتين؛ بناء أمثلة لتحقيق صحتها، والبحث عن أمثلة مضادة تقود إلى إثبات بطلانها، وبذلك يستخدمون منحى الذهاب والإياب في الحدس الواعي (Bell, 1976; Lambert, 1990; Polya, 1954; Usiskin, 1987). يُعد مصطلح عالم الرياضيات المثالي (Ideal Mathematician)، مصطلحاً خرافياً أوجده ديفز وهرش (Davis & Hersh 1981) عندما سألهما طالب في قسم الفلسفة: «ما البرهان الرياضي؟»، حيث أجابا بعدد كبير من الأمثلة، مثل: «النظرية الأساسية لهذا، والنظرية الأساسية لذلك... إلخ» وعند سؤاله من طالب الفلسفة، استسلم عالم الرياضيات أخيراً، وكشف السر بقوله: «نادراً ما يستخدم المنطق الشكلي (Formal) في إثبات النظريات، حيث إن الحقيقة الفعلية للمسألة تتمثل في كون البرهان مجرد حجة مقنعة، عندما يصدر محكمون مؤهلون الحكم عليها» (Hersh, 1993, P.389). وهذا يقودنا مرة أخرى إلى الأسئلة التي طرحت سابقاً على الطلاب الموهوبين في الرياضيات.

كيف يتوصل الطلاب الموهوبون في الرياضيات إلى تخمين الحقيقة؟ وكيف يقنعون الطلاب أنفسهم وغيرهم بخصوص تخمينهم الحقيقة؟ وهل تماثل المناحي التي يستخدمها الطلاب النابغون تلك التي يستخدمها علماء الرياضيات المختصون؟

المنهجية

المشاركون

لمّا كان أحد أهداف الدراسة يتمثل في تحديد هل يمتلك الطلاب الموهوبون في الرياضيات مفاهيم حدسية بخصوص البرهان، فقد كان من الأهمية بمكان اختيار طلاب لم يتعلموا أساليب البرهان. لذا، اختير المشاركون الأربعة في هذه الدراسة من المبتدئين في مدرسة ثانوية في الغرب الأوسط من منطقة ريفية واسعة، وكانوا ملتحقين بأقسام مختلفة من الرياضيات المتكاملة (1) (منهاج تموله مؤسسة العلوم الوطنية (National Science Foundation Nsf)، متسق مع معايير المجلس الأمريكي لمعلمي الرياضيات، طُوّر في جامعة ميتشيغان الغربية). وكان الكاتب معلماً لمادة الرياضيات بدوام كامل، ومنسقاً للمتفوقين في هذه المدرسة الثانوية في المنطقة الريفية من الغرب الأوسط. وكان الطلاب الأربعة ملتحقين بالمنطقة نفسها التي توجد فيها المدرسة، وهي تضم صفوفاً من الروضة حتى الصف الثامن K-8، وهي إحدى المدارس الرافدة للمدرسة الثانوية. وقد حددت المنطقة الطلاب النابغين استناداً إلى علاماتهم في اختبار ستانفورد للتحصّل عند (المئين 95)، إضافة إلى ترشيح معلمهم لهم. زوّدت إدارة المنطقة الباحث بهذه المعلومات. ويقدم جدول 1:3 تفاصيل التحصيل للطلاب الأربعة، ويظهر أنهم كانوا في قمة المئين الأول في اختبار ستانفورد للتحصّل.

جدول 1:3 تفاصيل اختبار الطلاب الأربعة

الدرجة المئانية (على المستوى الوطني)	اختبار ستانفورد للتحصّل (الصف الثامن) علامة الرياضيات الخام ^ب (من 82 بنداً)	اختبار ستانفورد للتحصّل (الصف الأول) علامة الرياضيات الخام ^أ (تبدأ من 90)	الاسم
99	82	90	جيل
99	80	89	يوري
99	81	89	يوري
99	80	88	سارة

(أ) يتكون قسم الرياضيات في الطبعة الثامنة من 90 موضوعاً، وزّعت بدورها إلى مواضيع فرعية تقيس فكرة العدد (34)، والحساب (26)، والتطبيق (30).
(ب) يتكون قسم الرياضيات في الطبعة التاسعة من 82 موضوعاً وزّعت بدورها إلى مواضيع فرعية تقيس حل المسائل (52) والإجراءات (30).

يضاف إلى ذلك أن معلمي مادة الرياضيات في الصف التاسع هم الذين حددوا هؤلاء الطلاب مع نهاية الفصل الدراسي الأول في المرحلة الثانوية، ورشحوهم لبرنامج النابغين في المرحلة الثانوية. وتؤكد ملفات اختبار التحصيل في الرياضيات، إلى جانب ترشيح معلمي الرياضيات لهم في المنطقة، تفوق هؤلاء الطلاب الأربعة في الرياضيات.

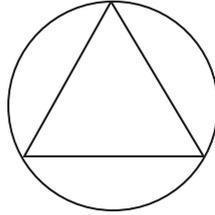
لم يلتحق الطلاب الأربعة بأي من دورات الرياضيات التي يُدرّسها الباحث. وقد دُعوا إلى المشاركة في هذه الدراسة عبر رسالة كتب فيها أن الباحث (منسق النابغين) يرغب في دراسة التفكير الرياضي لدى الطلاب النابغين. وافق الطلاب الأربعة على المشاركة في هذه الدراسة، وإجراء مسح تام لأعمالهم في الرياضيات بدءاً من مرحلة الروضة حتى الصف الثامن، وكذلك الإجابة عن أسئلة محددة حول معرفتهم بالهندسة والبرهان. أشارت المسوح إلى أن دراستهم السابقة في الرياضيات كانت في مادة الجبر مع بعض الإثراء. وأشار الطلاب الأربعة جميعهم إلى دراستهم لتصنيف الأشكال الهندسية استناداً إلى الخصائص في الصنفين الرابع والسادس. وذكر أحد الطلاب اهتمامه بالبنى الهندسية، لكنه لم يتلق أي تعليم عن هذا في المدرسة. ولا تشتمل مناهج الصنفين السابع والثامن على أي تعليم للهندسة الإقليدية أو البرهان. كان المحتوى الوحيد الذي يتعلق بالهندسة والبرهان على التوالي، عبارة عن وحدة صغيرة تتعلق باستخدام الصيغ؛ لتحديد المساحات السطحية وحجوم الأشكال الهندسية، إضافة إلى وحدة إثرائية حول تكوين معادلات متطابقة في النسبة والتناسب.

المسألة

يشار أحياناً إلى المسألة التي اختيرت لهذه التجربة باسم مسألة المثلث المحصور داخل الدائرة. (Circumscribing A Triangle Problem) وقد أشارت دراسة دقيقة لكتب مدرسية، تُستخدم عادة في المدارس الثانوية، إلى أن هذه المسألة تعدُّ مسألة إثرائية في الهندسة يتناولها المعلمون مع قرب نهاية العام الدراسي. وقد عثر على هذه المسألة في كتب الهندسة التحليلية، حيث إنها يمكن أن تحل باستخدام أدوات التحليل و/أو الجبر.

تنص المسألة على ما يأتي:

انظر إلى المثلث أدناه. تمر الدائرة في كل رأس من رؤوس المثلث.



- هل صحيح أن لكل مثلث دائرة تمر من كل رأس من رؤوسه؟
 - إذا كان الجواب نعم (فلماذا؟). وإذا كان الجواب لا، فكيف ستتحقق ذلك؟
- عُدَّت هذه المسألة مناسبة لبحث مطول، وذلك للأسباب الآتية:
1. سهولة طرح المسألة وسهولة فهمها، ولم يعهد أيضاً الطلاب الأربعة مثلها من قبل. وبذلك، فقد كانوا يواجهون مهمة جديدة.
 2. تقدم المسألة معلومات بصرية يمكن بناءً عليها التوصل إلى استدلالات خاطئة.
 3. يمكن التعامل مع المسألة من وجوه عدة، هي: الجبرية والتحليلية والتجريبية والمنطقية، وبوساطة البناء الهندسي. ومن ثم تعطي فرصة لظهور أنماط مختلفة من الحلول.
 4. طرحت المسألة بصورة عامة على الرغم من وجود حالة خاصة في الشكل.

إجراءات جمع البيانات

اتبع أسلوب المقابلة التشخيصية المنسوب إلى بياجيه (Piaget 1975)، الذي يُعدُّ رائد دراسة عمليات التفكير لدى الطلاب. وقد أُجريت مقابلات مع كل طالب على حدة بعد انتهاء دوام المدرسة، استندت إلى المهمة، ودارت حول المسألة المشار إليها آنفاً. وكانت المقابلات مفتوحة بهدف إتاحة الفرصة أمام الطلاب للتعبير لفظياً عن عمليات التفكير التي يقومون بها في أثناء حل المسألة. واستغرقت كل مقابلة من المقابلات الأربع التي

أجريت ساعة تقريباً. وقد استجوب الباحث الطلاب مطولاً، وطلب إليهم أن «يفكروا بصوت عال»، حيث سأل الأسئلة الآتية:

1. كيف يمكنك إقناع فرد يعتقد أن العبارة (عكس ما قاله الطالب)؟
2. كيف يمكن للشخص تحديد مركز ونصف قطر الدائرة التي تحيط بالمثلث، أو أحدهما؟
3. إذا بنى الطالب استدلاله استناداً إلى الشكل المعطى، يُسأل لماذا قام بذلك؟
4. ممّ يتكون البرهان في الرياضيات؟

طلب إلى الطلاب أن يفسروا تعليلاتهم بتفصيل تام. وسجل الباحث المقابلات على أشرطة، ومن ثم فرغها كتابياً بكل دقة (حرفياً)، ودقق الأخطاء فيها. وقد زوّد الطلاب بنسخة من المقابلة، وطلب إليهم تقديم التوضيحات التي يرونها ضرورية. لم يكن الهدف من ذلك إساءة فهم ما قاله الطلاب أو تفسيره، بل الحصول على مخطوطة مقابلة دقيقة كاملة، وتحقق التوافق بين ما قاله الطلاب وما عنوه. إضافة إلى ذلك، سجل الباحث انطباعاته بعد كل مقابلة مباشرة. وقد تألفت البيانات من أعمال الطلاب، ومخطوطات المقابلات، وملاحظات الباحث.

ترميز البيانات وتحليلها

جرى ترميز البيانات التي جمعت وتحليلها باستخدام مناح من نظريات مثبتة (Glaser & Strauss, 1977). وبدأت عملية الترميز بقراءة المخطوطة سطراً سطراً، وذكر الكلمات التي تصف العمليات العقلية المستخدمة من الطلاب الأربعة تلقائياً. وقد تمثل هدف الترميز بتصوير العمليات بدقة، وبناء الفئات (Strauss & Corbin, 1998). واستقصى الباحث على نحو هادف، الأفعال التي تقابل العمليات، ملاحظاً تطورها من خلال استجابات الطلاب للمسألة. وطبقت طريقة المقارنة الثابتة للمقارنة بين أفعال الطلاب الأربعة، وتحديد أوجه الشبه في عمليات تفكيرهم على نحو ما هو مبين في البيانات. فبرزت الفئات الآتية نتيجة لترميز البيانات وتحليلها:

برزت فئة التصور (Visualization) عندما عبّر الطلاب تعبيراً متكرراً عن المعلومات البصرية المعطاة، مشيرين إلى أن المثلث المحاط بدائرة كان متساوي الأضلاع. وكان هناك نحو من مئة وثمانين كلمات، وأشياء جمل ترددت مثل «يبدو متساوي أضلاع»، تبدو الزوايا والجوانب متساوية»، «يبدو كأنه مثلث تام»، إلخ.

في حين برزت فئة الحدس نتيجة لتردد (137) كلمة تقريباً، مثل: «يبدو أنه صحيح، لا أعرف لماذا!» «يبدو واضحاً»، «أنا متيقن من وجود طريقة...»، إلخ. وبعبارة أخرى، تشير تلك الكلمات كلها إلى توكيد الدليل الذاتي (Self-Evidence). وقد كان هناك (212) مدونة تقريباً لكلمات تكررت تشير إلى القياس، واستخدام أمثلة محسوسة، قادت إلى إيجاد فئة تجريبية (Empiricism).

وأخيراً، كان هناك (82) ملاحظة تقريباً لتعبيرات تشير إلى عكس العملية في التعامل مع المسألة، مثل: «كيف يمكن وضع النقاط في الداخل...»، «ماذا لو بدأت بالدائرة...»، إلخ، قادت إلى فئة القابلية للانعكاس (Reversibility). وبذلك، تم الآن تحديد الفئات الأربع.

التعريفات

- التصور (Visualization): العملية التي يعمل الطلاب من خلالها استنتاجات عن طريق تحويل الصور أو تفتيشها (Hershkowitz, 1989).
- التجريبية (Empiricism): تشير إلى الاستخدام المتكرر للأمثلة التي تقدم أدلة مطابقة أو (غير مطابقة) بهدف دعم صحة الفكرة. وتتضمن أيضاً استخدام مقاييس محددة لعمل الاستنتاجات (Chazan, 1993; Polya, 1954; Strunz, 1962).
- الحدس (Intuition): المزاج الوجداني المرتبط بالإمساك بالحل في أثناء محاولة حل المسألة «قبل أن يستطيع الشخص أن يقدم تبريراً كاملاً وواضحاً لذلك الحل». (Fischbein, 1980; Kline, 1976). ويشتمل أيضاً على التعليل غير الرسمي، واستخدام المصطلحات اليومية، وتذكر الأمثلة التجريبية لأغراض التبرير (Poincaré, 1984; Polya, 1954).

- القابلية للانعكاس (Reversibility): العملية (أو القدرة) على التحول من سلسلة تفكير مباشر إلى سلسلة معاكسة، أي القدرة على عكس العمليات العقلية (Krutestskii, 1976). وتشتمل هذه القدرة على حل المسألة، أو التفكير في حلها بطرائق مختلفة.

الصدق

استخدم الباحث إستراتيجية تبادل الذاتية أو البين- ذاتية ((Inter-Subjectivity (Rubin & Babbie, 1997)) بالطلب إلى زميل له؛ لتحليل البيانات الواردة في المقابلات باستخدام أسلوب الترميز الذي طُوِّر. فرمَّز زميله وحلَّ ستّاً وثلاثين شريحة عشوائية من بيانات المقابلات، وتوصل إلى النتيجة ذاتها التي توصل إليها الباحث. وأما ما يتعلق بشرائح البيانات التي رمَّزها الزميل وحده، فقد كان هناك توافق بنسبة 93% بخصوص العمليات التي تشير إلى التصور، ونسبة 91% للتجريبية، و 92% للحدس، و 96% إلى القابلية للانعكاس. وتقدم هذه البيانات دليلاً على تلبية الباحث متطلبات صدق نتائج البحث.

النتائج

قدمت النتائج في المقام الأول تحت الفئات التي برزت نتيجة لترميز البيانات وتحليلها. وظهرت الفئات التي استخدمت بصفقتها عمليات في بناء «البرهان»، في التصور والحدس والتجريب والقابلية للانعكاس. وقدم الباحث مسارات الطلاب نحو «البرهان» على صورة جدول يلخص الأنماط في كل فئة. وتبع ذلك تفسير وتعليق موسعان عن الأنماط التي لوحظت وتبين تماثلها مع المناحي الرياضية المستخدمة من علماء الرياضيات المختصين. وأخيراً، بنى الباحث صدق النتائج باستخدام التثليث بالنظرية (Triangulation By Theory)، وتطبيق تفسيرات متنوعة من دراسة البيانات المتوافرة، واختيار أكثرها معقولة لتوضيح نتائج البحث وتفسيرها.

توصل الطلاب الأربعة جميعاً إلى نتيجة مفادها أن الجملة الرياضية كانت صحيحة لكل مثلث من خلال عملية الاستقراء المبنية على التجربة والخطأ. بدأت عملية إثبات الجملة بالحدس أن الجملة كانت صحيحة بالنسبة إلى المثلث المتساوي الأضلاع فقط (استناداً

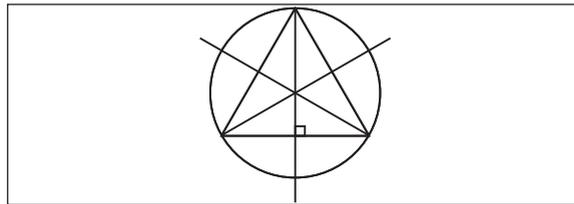
إلى المعلومات البصرية). وبعدئذٍ، أكد الطلاب هذه الحقيقة للمثلثات متساوية الأضلاع ببناء المركز حدسيّاً، وصياغة أمثلة مضادة؛ لإثبات صحة تخمينهم أن الجملة كانت خطأ بصورة عامة. وأخيراً، أثبتوا صحة الجملة عن طريق قلب تفكيرهم على نحوٍ كبير. يظهر الشكل (1:3) الصورة الكاملة لهذه العملية.

التصور

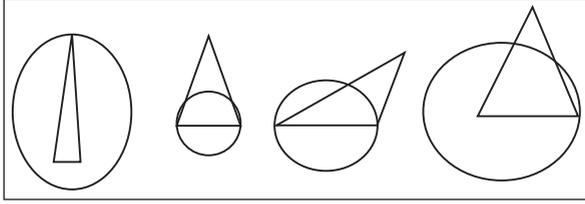
لعب التصور دوراً مهماً في عملية إثبات مصداقية الجملة الرياضية وصحتها. وأصر الطلاب الأربعة كلهم على أن المثلث متساوي الأضلاع؛ لأنه بدأ هكذا. وعلى الرغم من أن الجملة سألت بوضوح: هل يمكن إحاطة كل مثلث بدائرة، فإن الطلاب لم يستطيعوا تجاهل الشكل المرئي، وقادهم ذلك إلى التخمين بأن الجملة الرياضية المعطاة تنطبق على المثلثات متساوية الأضلاع فقط أو مثلثات «خاصة». ويقدم الجدول (2:3) أمثلة على تصور الطلاب لتخميناتهم، استناداً إلى المعلومات البصرية.

الحدس

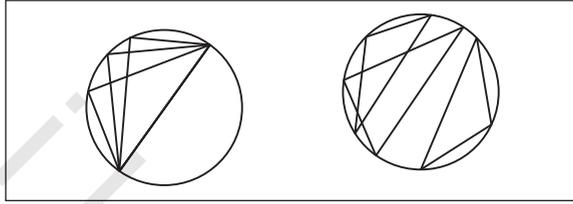
انساق الطلاب الأربعة وراء حدسهم الأولي بانطباق العبارة فقط على المثلثات متساوية الأضلاع. وقد تمكن ثلاثة منهم من تحديد البناء الصحيح لتحديد مركز الدائرة المحيطة بالمثلث متساوي الأضلاع. وقد كان ذلك رائعاً؛ لأنه لم يسبق لهم أن تعلموا بناءً كهذا. وعلى الرغم من ذلك، فقد قادهم حدسهم إلى اكتشاف البناء. ومما تجدر ملاحظته أنه لم يكن لدى الطلاب مسطرة أو فرجار، حيث عملت الهياكل جميعها يدوياً (انظر الشكل 1:3). يقدم الجدول 3:3 لمحة سريعة عن حدس الطلاب المستخدم في بناء مركز الدائرة.



بناء حدسي لتحديد مركز الدائرة المحيطة بالمثلث متساوي الأضلاع



علل ابتكرها الطلاب لمخالفة العبارة المعطاة



قلب العملية العقلية (البدء بدائرة أولاً)

شكل (1:3) نماذج من نتائج المقابلات

جدول 3، 2: الرؤية خير برهان

الطالب	أمثلة على العملية	الفتنة
جيل	ينجح هذا عند استخدام المثلثات متساوية الأضلاع فقط (مشيراً إلى الشكل الذي يشبه المثلث متساوي الأضلاع).	التصور
يوري	لديك الآن مثلث متساوي الأضلاع. يبدو كأنه مثلث واحد في الأقل.	
كيفن	ينجح هنا لأنه مثلث متساوي الأضلاع.	
سارة	يبدو كأنه مثلث متساوي أضلاع بمسافات متساوية.	

جدول 3، 3: يتطابق مركز الدائرة مع المثلث متساوي الأضلاع... أنا متيقن

الطالب	أمثلة على العملية	الفتنة
--------	-------------------	--------

الحدس
 أرسم الخطوط العمودية التي تمر من خلال نقاط المنتصف، وعندما
 أصل إلى المركز يمكن أخذ المسافة من أحد الرؤوس بوصفها نصف
 قطر، ومن ثم أصلها. يبدو ذلك صحيحاً.. لا أدري لماذا؟
 أرسم ارتفاع زاوية لكل جانب في المثلث، حيث تتقاطع... يبدو واضحاً
 أن هذا سيعطي المركز.
 أعرف أن هناك ثمة طريقة ما للقيام بذلك. من الواضح أن هناك طريقة
 ما لعملها.
 سوف أرسم المثلث متساوي الأضلاع، والخط العمودي، وخطاً عمودياً سارة
 آخر، وحيث يتقاطعان يكون المركز.

التجريبية

سُئل الطلاب هل ينطبق البناء الذي توصلوا إليه على المثلثات متساوية الأضلاع فقط؟
 الأمر الذي قادهم إلى بناء أمثلة مضادة (انظر الشكل 1:3) لإثبات حدسهم أن العبارة
 تنطبق فقط على المثلثات متساوية الأضلاع، وأنها كانت غير صحيحة بوجه عام. يقدم
 الجدول (4:3) لمحات عن هذه العملية التجريبية في بناء أمثلة مضادة استخدمها الطلاب
 الأربعة.

القابلية للانعكاس

عند هذه المرحلة، كان كل واحد من الطلاب الأربعة مقتنعاً إلى حد ما، أن العبارة
 كانت غير صحيحة بوجه عام. ومن الجدير بالذكر أنهم لم يكونوا تواقين للالتزام بالقول أن
 الجملة كانت خاطئة على الرغم من الأمثلة المضادة التي بنوها. أراد الطلاب تجريب منحى
 مختلف، الأمر الذي يقدم دليلاً على مرونتهم في التفكير، وهي سمة من سمات الطلاب
 النابغين في الرياضيات (Krutetskii, 1976). يبين (الجدول 5:3) أوجه الشبه في قلب
 الطلاب تفكيرهم على نحو كبير، عن طريق البدء بدائرة عشوائية أولاً بدلاً من المثلث.
 وبقلب مسار تفكيرهم، كانوا قادرين على إقناع أنفسهم أن الجملة كانت صحيحة.

جدول 3:4 انظر الى هذه المثلثات الغريبة كلها

الطالب	أمثلة على العملية	الفتنة
جيل	إذا كان لديك مثلث كهذا (ارسم مثلثاً غير متساوي الأضلاع) .. فلا يمكنك إيجاد دائرة تمر من خلال هذا المثلث، وستكون أشبه بالشكل البيضوي.	التجريبية
يوري	لا يمكنك استخدام الارتفاع دائماً في تحديد المركز. دعني أرسم مثلثاً يوري آخر.	
كيفن	وإذا أخذت مثلثاً آخر مختلفاً فعندئذٍ لن ينجح ذلك، إليكم هذا المثلث وكيفن وهو لا يصلح لهذا الغرض.	
سارة	نعم، حاول رسم دائرة حول المثلثات الأخرى، مع أن ذلك لن ينجح.	

جدول 3:5 دعنا نبدأ بالدائرة أولاً!

الطالب	أمثلة على العملية	الفتنة
جيل	انتظر قليلاً... أعتقد أنها كانت صحيحة. يمكنك دائماً رسم دائرة، ومن ثم رسم مثلث بداخلها. (يرسم مثلاً) يمكنك رسمه ما دام داخل الدائرة.	القابلية للانعكاس
يوري	لقد وجدت بناءً جديداً، ما الذي يمنعني من تثبيت النقطة المركزية في مكان آخر؟ أستطيع أن أثبت النقطتين في مكان آخر (يرسم حبالاً)، ومن ثم أختار النقطة الثالثة. نعم، الجملة صحيحة	
كيفن	دعني أجرب شيئاً آخر. سوف أرسم مثلثاً غريباً حقاً، وسأجعله يبدو على النحو الآتي (يرسم مثلثاً غير متساوي الأضلاع منفرج الزوايا). هل سينجح ذلك؟ ولكن إذا حدّدت النقاط الثلاث هذه على الدائرة، يبدو أن الأمر سينجح... نعم! يمكنك تحديد النقاط دائماً، ومن ثم ترسم المثلث.	

أحاول التفكير هنا (بمزق محبباً الورقة). ماذا لو تتبعنا الدائرة وحددت سارة النقاط؟ (صمت) نعم، أحاول النظر إلى المثلث بالعين المجردة، وأعتقد... أنه بصرف النظر عن أي نوع من المثلثات التي أرسمها، إذا كان بوسعي رسم دائرة أولاً، يجب أن أفعل ذلك أولاً، ومن ثم أرسم أي مثلث داخلها (يجرب أمثلة أخرى). يجب أن أرسم الدائرة أولاً. نعم، هذا صحيح، إنها جملة صحيحة.

التفسير والتماثل

في الجداول والأشكال السابقة، أُعيد بناء أوجه الشبه في مسارات الطلاب نحو «البرهان». ويؤكد الباحث أن عمليات التفكير للطلاب الأربعة تظهر تماثلاً رائعاً بالعمليات التي يستخدمها علماء الرياضيات المختصون كما سيظهر في هذا الجزء. ينظر إلى الرياضيات غالباً على أنها نشاط إيجاد العلاقات، التي يستند بعضها إلى الصور البصرية (Casey, 1978; Presmeg, 1968). أدت الصورة المقدمة للطلاب الأربعة مباشرة إلى تكوين المعلومات الأولية للتخمين أن المثلث المعطى كان متساوي الأضلاع. وهذا بدوره قاد إلى السؤال المتعلق بتحديد مركز الدائرة المحيطة، وأدى أيضاً إلى اكتشاف الطلاب أن مركز الدائرة يتطابق مع نقطة تقاطع الأعمدة المنصّفة للقواعد. من الأهمية بمكان أن تدرك أنه من المستحيل التوصل مباشرة إلى كيفية إيجاد الطلاب (وكذلك علماء الرياضيات) الصور، وعلى الرغم من ذلك، يمكن دراسة الطريقة التي يستخدمون فيها الصورة من إجراءاتهم المتبعة في حل مسألة بعينها (Inhelder & Piaget, 1971). وغالباً ما رأينا بصفتنا يافعين، الأطفال وهم يعملون أشياء غريبة عند تعاملهم مع مهمة رياضية. ونحن أحياناً ما نرى ردود فعل لمعلمين يصورون أعمال الطالب الحدسية على أنها غريبة (Kamii & Declark, 1985). وينعكس هذا النوع من ردود الفعل انعكاساً أكبر على عجز المعلمين عن تصور الأشياء من منظور الأطفال. لذا، فعندما يقرأ شخص البرهان المجرد يكون في موقفٍ مشابهٍ؛ لعدم القدرة على تصور البرهان من المنظور الإبداعي لعالم الرياضيات، وعدم إدراكه الصور التي يستخدمها عالم الرياضيات في إيجاد البرهان. وقد تمكّن الطلاب الأربعة من تحديد السمات (أضلاع متساوية وزوايا متساوية) التي عدّوها

مهمة لتكوين التخمين الأولي بخصوص صحة الجملة المعطاة (Hersh-Kowitz, 1989). وبعبارة أخرى، يعمل الشكل عمل نقطة مرجعية بصرية تحفز عملية البرهان الرياضية.

يتخذ علماء الرياضيات الحدس دليلاً لإقناع أنفسهم بصدق الفرضية (Burton, 2004; Kline, 1976; Sriraman, 1999). بدأت عملية البرهان للطلاب الأربعة بالحدس المستند إلى أن الجملة صحيحة فيما يتعلق بالمثلثات متساوية الأضلاع. وقد فسّر الباحث هذا بصفته إجراءً حدسياً لتخصيص الجملة الرياضية المعطاة للمثلثات متساوية الأضلاع. وغالباً ما يتصف التفكير الرياضي بالعمليات الأربع، وهي: التخصيص (Specializing)، والتخمين (Conjecturing)، والتعميم (Generalizing)، والإقناع (Convincing) (Burton, 1984; Burton, 1999)، فعندما لجأ الطلاب إلى التخصيص والتخمين بأن المسألة صحيحة فيما يخص المثلثات متساوية الأضلاع، سألهم الباحث هل يعني ذلك أن الجملة تنطبق على المثلثات جميعها. وقد قاد هذا إلى منحى شبه تجريبي للإثبات (Ernest, 1991; Lerman, 1983) يحاول الطالب من خلاله بناء تعليقات رياضية (Mathematical Pathologies) (Lakatos, 1976) (الشكل 1:3)، على صورة مثلثات تناقض الفرضية المعطاة. وتظهر العملية شبه التجريبية مرة أخرى، أوجه شبه بارزة لوجهة نظر التفكير المقدمة من فيلسوف الرياضيات المشهور، إيمري لاکاتوس (Imre Lakatos)، التي يصور الرياضيات فيها على أنها نموذج من الاحتمالات خاضع للتخمين والبرهان والحدس. وبعبارة أخرى، تُصوّر الرياضيات بصفتها معرفة ثابتة مطلقة غير قابلة للتغيير، ولكنها تخضع للعملية العلمية المتمثلة في مراجعة الفرضية الأولية وتنقيحها باستمرار. وبحسب وجهة النظر هذه في علم الرياضيات، ليس هناك ثمة نظرية أو برهان يتسم بالكمال، بل هناك إمكانية تنقيح واردة على الدوام. وتعد العملية شبه التجريبية في بناء العلل التي استخدمها الطلاب الأربعة سمة مشتركة بين علماء الرياضيات عند محاولتهم إيجاد حل للمسائل. وتؤدي العلل إلى إعادة النظر في المسألة، وتنقيح الفرضيات أو الافتراضات.

قادت العملية شبه التجريبية التي استخدمها الطلاب الأربعة إلى التخمين المعدل الذي يفيد أن الجملة ربما كانت خاطئة عموماً. ومع ذلك، لم يكونوا ميالين عند هذا التخمين للاعتراف أن الجملة كانت خاطئة، على الرغم من الأمثلة المضادة التي كانوا قد بنوها. وهناك سمة مشتركة تجمع بين علماء الرياضيات المختصين، وهي انكبابهم على حل المسألة مدة طويلة من الزمن، وإذا لم يحدث أي انفراج، فغالباً ما يهدأ علماء الرياضيات ويؤجلون التفكير في الحل. وبعبارة أخرى، يتركون المسألة في مرحلة حضانة أملاً في حدوث انفراج في نهاية المطاف. وهذه هي وجهة النظر الجشتالتية (Gestalt) في التفكير الرياضي. وغالباً ما يصف علماء الرياضيات المرحلة هذه على أنها المرحلة التي «تتحدث فيها المسألة معك The Problem Talks To You». ويؤكد الباحث أن هذا حدث بطريقة مصغرة مع الطلاب الأربعة، إذ بعد مضي ساعة كاملة من الوقت مع المسألة، وضعوا أفلامهم وتعاملوا مع المسألة بصمت وهدوء بضع دقائق. ومما يلفت النظر، سيطرة عمليات قلب التفكير على هؤلاء الطلاب (جدول 5:3). وهناك كثير من التفسيرات لهذه العملية، حيث يمكن تصوير التفكير الرياضي الاستبصاري والإبداع بصفتها عملية صنع قرار غير خوارزمية. فقد تكون القرارات التي يتخذها علماء الرياضيات ذات طبيعة تباعدية، ودائماً ما تشتمل على خيار حاسم. ومن المثير، أن علماء الرياضيات يصورون أحد الجوانب المهمة من مهنتهم، على أنه عملية اتخاذ قرار غير خوارزمية في هذا العصر الذي أصبح فيه استخدام قوة الحوسبة في التبصر في النتائج، طريقة تتسم بالمصدقية. لقد كانت تلك المرحلة هي الأكثر توتراً وإحباطاً للطلاب الأربعة، حيث حدث النشاط المفاهيمي، وظهر على صورة إشراق أيّ قرار أو خيار يقلب بنية المسألة.

ومن الشائع بين علماء الرياضيات أن ينكبوا على حل مسألة هذا اليوم، ومن ثم على نقيضها في اليوم اللاحق، أو ينكبوا على المسألة نفسها بالطريقتين للتوصل إلى رؤية. وتصور هذه العملية الانعكاسية جانباً من جوانب المرونة في التفكير، وسمة من سمات الطلاب النابغين في الرياضيات، وترتبط ارتباطاً كبيراً بمنحى الذهاب والإياب الذي يستخدمه علماء الرياضيات عند معالجتهم المسألة.

وبعد أن يكون الطلاب قد أقنعوا أنفسهم بأن الجملة صحيحة للمثلثات جميعها، سُئِلوا كيف يمكن إقناع الآخرين بهذه الحقيقة. وبعبارة أخرى، فقد سُئِل الطلاب عن الطرائق التي سوف يستخدمونها لإثبات الحقيقة علناً. ومن الواضح أن الطلاب الأربعة جميعاً كانوا يعرفون حدسياً أن مثلاً مضاداً واحداً يكفي لإثبات بطلان الجملة، وعلى الرغم من ذلك، فإن إثبات الحقيقة اشتمل على مزيد من العمل، وتطلّب دليلاً جوهرياً. اعتمد الطلاب على الأدلة التجريبية لشرح الحقيقة، وكانوا مقتنعين بأن الأمثلة البصرية المتعددة كانت كافية لإقناع الآخرين بصحة الجملة. وبعبارة أخرى، فقد كان البرهان بالنسبة إليهم هو التفسير والإقناع (Bell, 1976; Kline, 1976). وعموماً، فإن هذه النظرة تعدُّ طبيعية جداً للبرهان حتى بين علماء الرياضيات المختصين. وتمثل النظرة المنطقية الشكلية للإثبات موضوعاً مثيراً لدراسة المنطق... ولكنها ليست صورة صادقة للبرهان الرياضي الواقعي (Hersh, 1993, P. 391). لقد كانت وجهات النظر التي عبّر عنها الطلاب الأربعة عن دور البرهان معقدة بالنسبة إلى الطلاب في الصف التاسع. وأظهرت مرة أخرى تماثلاً في وجهات النظر التي يظهرها علماء الرياضيات المختصون وبعض فلاسفة الرياضيات. وسوف يستخدم الباحث بعض الاقتباسات في توضيح هذا الأمر للقارئ:

أنا أبحث عن أمثلة تدعمها وأخرى لا تدعمها. سأبحث عن أمثلة تدحض الجملة، وبخلاف ذلك فسوف أضيع وقتي سدى... فالبرهان توضيح مكتوب أو أمثلة توضيحية استناداً إلى أشياء سابقة أعتقد أنها صحيحة (يوري).

يحمل هذا الاقتباس من كلام «يوري» تماثلاً مذهلاً لوجهة نظر البرهان التي عبّر عنها أحد علماء الرياضيات المختصين، وهو محلل بارع:

في البداية تتولد لديّ فكرة أن شيئاً ما بحسب طريقة معيّنة، يجب أن يكون صحيحاً، وبعد ذلك أبدأ بمحاولة إثباته، وفي خضم معركة البرهان أواجه بعض الصعاب، وعندئذ أقول: هل أستطيع أن أبني مثلاً من هذه الصعاب؟ وإذا واجهتني صعاب في بناء المثال... عندئذ أقول: هل يمكن وضع هذه الصعاب في هذا البرهان الذي تعرفه؟ وبذلك أبدأ بالتفكير، وأتحرك ذهاباً وإياباً، وعادة ما يتولد لديّ اعتقاد في بعض المسارات الضيقة أن شيئاً ما بحسب هذه الطريقة يجب أن يكون صحيحاً. ولا يكون الحدس دائماً صحيحاً، ولكنه صحيح بما يكفي في كثير من الأحيان...

وأنا قادر على إثبات شيء ما أشك في صحته (اقتباس من عالم رياضيات محترف من كتاب (Sriraman, 2004).

ويظهر أيضاً الاقتباس الآتي من أقوال «كيفين» أوجه شبه مذهلة لفرضية لাকاتوس (Lakatos, 1976) في الرياضيات، بصفتها عملية تطوّر متواصلة لتخمين البرهان والتفنيد:

يمكن العثور دائماً على حالة لا يمكن أن تنجح معها أي طريقة. ولكي تثبت أن شيئاً ما صحيح، حتى كما في العلوم، قد يكون لديك نظرية يمكن أن تنجح، ولكنك لا تستطيع أن تجزم أنها ستنجح على الدوام... لم تثبت أن شيئاً ما صحيح. يمكنك أن تأخذ مجموعة كبيرة من الحالات وترى إن كانت ستنجح، وبعد ذلك تُقبل عموماً على أنها صحيحة... ما لم يأت أحد ما ويثبت بطلانها. هناك أشياء كان يُعتقد أنها صحيحة على مدى مئتي عام، وسوف يأتي أحد ما بحالة تثبت بطلانها. لا تنمو الرياضيات غير الشكلية وشبه التجريبية من خلال زيادة منتظمة في عدد النظريات الثابتة غير المشكوك فيها، ولكن عبر التطورات المتواصلة من التخمينات بوساطة التأمل والنقد ومنطق البرهان والدحض (Imre Lakatos (1976), *From Proofs and Refutations*).

وأخيراً، فإن استخدام البراهين البصرية، من قبل الطلاب، لإقناع الآخرين بحقيقة الجملة وصحتها، قد عُرف تاريخياً في الرياضيات الهندية. والاقتباسات الآتية من أقوال سارة توضح هذا التماثل:

أعتقد أن بوسعك البدء بمثل هذه الصورة البصرية، ثم حصر الحجج وصوغها على صورة كلمات. أتذكر أنني في مرات كثيرة بدأت الحل بصرياً، أنظر وأعمل فقط، وتمكنت من صياغته على صورة إثبات... (ضاحكة)، وأحياناً لم أكن أفهم المقصود. فمثلاً، لو كنت أعرف أن الحل صحيح، لما كان يتعين عليّ أن أتعقب ست عشرة خطوة لإثباته. إن طريقة فهم الحل بالأمثلة البصرية يبدو أكثر فاعلية.

تأثرت الرياضيات في أوروبا عموماً بالرياضيات اليونانية، في حين وضعت الرياضيات الهندية، على الرغم من تأثرها بالرياضيات اليونانية والعربية، تقليداً فريداً... حيث لم يكن ثمة تناقض بين البرهان البصري والحساب العددي من ناحية، وبين البرهان عن طريق الاستنتاج من ناحية أخرى (Almeida, 2003).

وخلاصة القول أن مفهومنا المتوارث للإثبات الدقيق ليس منحوتاً في الرخام. وسوف يستطيع الناس تعديل ذلك المفهوم، ويسنح للحساب الآلي، والبرهان الرقمي، والخوارزميات الاحتمالية،

إذا ما تبين لهم أنها ذات فائدة. ومن ثم، فنحن نضلل طلابنا إذا تعاملنا مع البرهان الدقيق بصفته محرّمات (مقتبس من قبل ألميدا؛ التعبير الأصلي المذكور في هيرش، (Hersh, 1993, P. 395).

التثليث من ناحية النظرية والآثار

في هذه الدراسة، أعطيت مهمة إثبات صحة جملة أو بطلانها لأربعة من طلاب الصف التاسع الموهوبين في الرياضيات ممن لم يسبق لهم أن تعلموا الإثبات أو الهندسة الإقليدية رسمياً. وقد وثّق الباحث الإستراتيجيات التي استخدمها الطلاب في بناء «البرهان» ورمّزها وحلّلها. وتبيّن للباحث أن هؤلاء الطلاب قد اعتمدوا على التصور والتجريب، مستخدمين الأمثلة والأمثلة المضادة أو التخمين الواعي إضافة إلى القابلية للانعكاس بهدف التوصل إلى الحقيقة. وقد اهدت هذه العملية كلها بحدسهم القوي على نحو ما هو ثابت من قدراتهم على صياغة التخمينات، واستنباط بنى لإثبات صحة تخمينهم الأولي بخصوص المثلثات متساوية الأضلاع. ومن الجدير بالذكر، أنه على الرغم من أن الطلاب الأربعة قد واجهوا أدلة غير مطابقة على صورة مثلثات «غريبة»، بدت كأنه لا يمكن رسم دوائر حولها، فإنهم لم يرغبوا في القول ببطلانها حينئذٍ. إن من السهل القول إن هناك شيئاً خاطئاً استناداً إلى مثال مضاد ضعيف كما نلمسه في هندسة المرحلة الثانوية، في حين يتطلب القول إن عبارة ما في الرياضيات صحيحة، الاقتناع بأن المسألة تحتمل حالات كثيرة غير محدودة. وقد كان الطلاب النابغون الأربعة على دراية بهذا الفرق، في حين يعتقد جل طلاب المرحلة الثانوية في الهندسة عكس ذلك، ويعتقدون صحة الجملة لشكل معيّن (Mason, 1996; Senk, 1985).

يدرك علماء الرياضيات عمومية الجملة عن طريق التمييز بين «البحث السريع أو التصفح بعجالة» (Looking Through) و«التدقيق في» (Looking At). يُعدّ «البحث السريع أو التصفح بعجالة» مشابهاً للتعميم من خلال الخاص، في حين يماثل «التدقيق في» تخصيص (تحديد) حالة خاصة من الحالة العامة. ويحضرني مثال مبسط سبق أن استشهد به ماسون (Mason, 1996)، يرتبط بدرس هندسة في المرحلة الثانوية عندما

يرسم المعلم مثلثاً (معيناً) على السبورة، ويقول إن مجموع زوايا المثلث يساوي 180 درجة. وغالباً ما يُركز في هذه الحالة على الحقيقة التجريبية، أي 180 درجة. حقيقة الجملة مخفية في أن المثلث غير مُعرّف، ويرى الطالب الذي يبحث من خلال هذه الجملة العام في الخاص، ويدرك أن جوهر الجملة يكمن في ثبات مجموع الزوايا في المثلثات جميعها. ويشمل «النظر من خلال» إدراك سمة الثبات في المجال الضمني للعمومية. وقد استطاع الطلاب النابغون الأربعة النظر من خلال الجملة المفترضة في المسألة، وإدراك سمة الثبات، وهذه تعدُّ إحدى مزايا علماء الرياضيات المختصين. وكان الطلاب النابغون على دراية بالفرق بين إقناعهم أنفسهم وإقناع الآخرين. وقد بدا ذلك واضحاً عندما أشاروا إلى أن إقناع الصف يتطلب تنظيم الأدلة المقنعة، ومن ثم بناء حجة بطريقة متماسكة. لقد أظهروا مرونة في التفكير في المسألة بطرائق متباينة، وهذا جلي من الطريقة الفذة التي عكسوا بها إستراتيجيتهم ليستنتجوا أن الجملة كانت صحيحة (Krutetskii, 1976).

أمّا فيما يتعلق بتصنيف سترنز (Strunz, 1962) لأنماط النبوغ الرياضي، فقد أظهر الطلاب النابغون الأربعة تفضيلاً للعلاقات والاستنتاجات المباشرة، ولكنهم كانوا يدركون أن إثبات العبارة يتطلب الحالات المحتملة جميعها.

وإذا ما استخدم المرء التصنيف الكلي للباحثين السوفييت، فإن تفوق الطلاب الأربعة في الرياضيات يُعدُّ نمطاً من الأنماط المتماسكة، أيّ مزيجاً من الأنماط التحليلية والهندسية. لقد كانوا قادرين على استخدام تمثيلهم التصوري في استقراء صحة العبارة بصورة تحليلية.

وأخيراً، لقد أظهر الطلاب النابغون قدراً كبيراً من التماسك والمثابرة، وتمسكوا بالمسألة حتى اقتنعوا تماماً بالنتيجة التي توصلوا إليها. وكانت طريقة البرهان التي طبّقوها في هذه الدراسة مختلفة تماماً عن المنحى المنطقي الموجود في البرهان في جُلّ الكتب المدرسية، ويشبه إلى حدٍّ بعيد الطريقة التي يستخدمها علماء الرياضيات المختصون. وقد أظهرت العمليات التي استخدمها هؤلاء الطلاب النابغون في الرياضيات في إثبات صحة

الجملة تماثلاً كبيراً بطريقة علماء الرياضيات المختصين على نحو ما أشرنا في الجزء السابق.

يمكن القول باختصار إن المنحى المنطقي يُعدُّ إعادة بناء مصطنع للاكتشافات التي جرى دمجها عنوة في أي نظام استنتاج، وبذلك يضيع الحدس الذي وجّه عملية الاكتشاف في هذه العملية. ويظهر الأثر هنا في أن كثيراً من المعلمين يستخدمون المنحى المنطقي في الإثبات داخل غرفة الصف، ومن ثم يكتبون حدس الطلاب النابغين وطرقهم الطبيعية في التفكير في المسألة. قد يدرس هؤلاء الطلاب الأربعة في نهاية المطاف الهندسة من وجهة نظر حدسية في السنة الثانية من البحث، استناداً إلى معايير تتوافق ومساق الرياضيات المتكاملة (Integrated Mathematics) التي تُعرّف الهندسة من خلالها من منظور الحدس والاستقراء في سياق التحويلات. وضمن هذا التسلسل، تزداد الحاجة إلى البرهان الشكلي على نحوٍ تدريجي. وعلى الرغم من ذلك، فقد واجه الطلاب النابغون الملتحقون بدورة الرياضيات دراسة الهندسة الإقليدية والبرهان الاستنتاجي، الذي حرّمهم من استخدام غرائزهم الطبيعية في إثبات الحقيقة على نحو ما يفعل علماء الرياضيات. يظهر التضمين فيما يتعلق بتربية الموهوبين في تطوير مناهج رياضيات تتيح فرصاً للطلاب النابغين لتطوير حدسهم بخصوص البرهان، والإفادة من المهام الرياضية الصعبة الجديرة بالاهتمام التي تستحق العناء.

محددات الدراسة

كان مجتمع هذه الدراسة من الطلاب المبتدئين الملتحقين بأقسام مختلفة للرياضيات المتكاملة في مدرسة ثانوية ريفية. فمن الناحية الديمغرافية، كان الطلاب جميعاً من اللون الأبيض، وينتمون إلى الطبقة الوسطى، وقد مروا بالخبرة التعليمية نفسها من الروضة حتى الصف الثامن. وكان لدى الطلاب الأربعة جميعاً تطلعات دراسية عالية جداً، وكانوا ينوون دراسة مساق الرياضيات المتكاملة الرابع، ومساق تسريع في التفاضل والتكامل في وقت واحد في السنة الدراسية الأخيرة. وتمتع هؤلاء الطلاب بميل إيجابي نحو الرياضيات، وتكللت جميع تجاربهم السابقة في الرياضيات بدرجة كبيرة من النجاح. لم يتعرض هؤلاء

الطلاب لبناء البرهان الرياضي من قبل، ولم يدرسوا أيضاً الهندسة بصورة رسمية. ويمكن أن تعزى نتائج هذه الدراسة إلى السمات الفريدة لفئة الدراسة والمسألة المحددة المختارة وتصميم المقابلة. وقد أظهرت العمليات التي استخدمها الطلاب النابغون في الرياضيات في بناء البرهان ومفاهيم الحدس المتصلة به، تشابهاً بالعمليات التي يستخدمها علماء الرياضيات المختصون. وإن الأمر يتطلب مزيداً من البحث على مستوى بداية المرحلة الثانوية؛ لكي يتمكن من تعميم هذه النتائج على الطلاب الموهوبين في الرياضيات ممن يلتحقون بالمرحلة الثانوية، ولديهم الخبرة ذاتها في المدرسة المتوسطة. فمن المعقول جداً تكرار هذه التجربة بأنماط مشابهة من المسائل مفتوحة النهاية التي تتطلب إثبات صحة الجمل الرياضية أو بطلانها.

يرى الباحث أن الطلاب الموهوبين في الرياضيات يمتلكون الميول الحدسية الطبيعية لعلماء الرياضيات. لذا، على مجتمع العناية بالموهوبين بذل جهد للتوصل إلى فهم أكثر عمقاً لهذه الميول؛ بهدف تطوير منهاج للمرحلة الثانوية ومناحي تدريس تتمي هذه المواهب الطبيعية وترعاها.

قائمة المراجع

- Almeida, D. (2003) *Numerical And Proof Methods Of Indian Mathematics For The Classroom* . Mathematics In School, 32(2), 7–10.
- Bell, A. W. (1976). *A Study Of Pupils' Proof Explanations In Mathematical Situations* .Educational Studies In Mathematics, 7, 23–40.
- Birkhoff, G. (1969). *Mathematics And Psychology* . Siam Review, 11, 429–469.
- Burton, L. (1984). *Mathematical Thinking: The Struggle For Meaning* . Journal Forresearch In Mathematics Education, 15, 35–49.
- Burton, L. (1999). *The Practices Of Mathematicians : What Do They Tell Us About Comingto Know Mathematics?* Educational Studies In Mathematics, 37(2), 121–143.
- Casey, E. S. (1978). *Imaging: A Phenomenological Study* . Penguin Books.
- Chang, L. L. (1985). *Who Are The Mathematically Gifted Elementary School Children?* Roeper Review, 8(2), 76–79.

- Chazan, D. (1993). *High School Geometry Students' Justification For Their Views Ofempirical Evidence And Mathematical Proof*. Educational Studies In Mathematics, 24, 359–387.
- Corbin, J., & Strauss, A. (1998). *Basics Of Qualitative Research*. Thousand Oaks, Ca: Sage.
- Diezmann, C., & Watters, J. (2003). The Importance Of Challenging Tasks For Mathematically Gifted Students. *Gifted And Talented International*, 17(2), 76–84.
- Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. New York: Houghton Mifflin.
- Dubinsky, E. (1991). *Constructive Aspects Of Reflective Abstraction In Advanced Mathematics*. In L. P. Steffe (Ed.) *Epistemological Foundations Of Mathematical Experience* (Pp. 160–187). New York: Springer–Verlag.
- Epp, S. S. (1990): *The Role Of Proof In Problem Solving*. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking And Problem Solving*. (Pp. 257–269). Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum Associates.
- Ernest, P. (1991). *The Philosophy Of Mathematics Education*. The Falmer Press.
- Ervynck, G. (1991). *Mathematical Creativity*. In D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (Pp. 42–53). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Fawcett, H. P. (1938). *The Nature Of Proof*. New York: Teachers College, Columbia University.
- Fischbein, E. (1980, August). *Intuition And Proof*. Paper Presented At The 4Th Conference Of The International Group For The Psychology Of Mathematics Education, Berkeley, Ca.
- Frensch, P., & Sternberg, R. (1992). *Complex Problem Solving: Principles And Mechanisms*. Mahwah, Nj: Erlbaum.
- Glaser, B., & Strauss, A. (1977). *The Discovery Of Grounded Theory: Strategies For Qualitative Research*. San Francisco: University Of California San Francisco.
- Goldberg, A., & Suppes, P. (1972). *A Computer Assisted Instruction Program For Exercises On Finding Axioms*. Educational Studies In Mathematics, 4, 429–449.

- Greenes, C. (1981). *Identifying The Gifted Student In Mathematics* . Arithmetic Teacher, 28(6), 14–17.
- Hadamard, J. W. (1945). *Essay On The Psychology Of Invention In The Mathematical Field* . Princeton University Press.
- Heid, M. K. (1983). *Characteristics And Special Needs Of The Gifted Student In Mathematics*. The Mathematics Teacher, 76, 221–226.
- Hersh, R. (1993). *Proof Is Convincing And Explaining*. Educational Studies In Mathematics, 24, 389–399.
- Hershkowitz, R. (1989). *Visualization In Geometry—Two Sides Of The Coin* . Focus On Learning Problems In Mathematics, 11, 61–76.
- Hoyles, C. (1997). *The Curricular Shaping Of Students' Approaches To Proof* . For The Learning Of Mathematics, 17(1), 7–16.
- Inhelder, B. & Piaget, J. (1971). *Mental Imagery In The Child* . Basic Books Inc.
- Ivanitsyna, E. N. (1970). *Achieving Skill In Solving Geometry Problems* . In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), Soviet Studies In The Psychology Of Learning And Teaching Mathematics (Vol. 4). Stanford: School Mathematics Study Group .
- Johnson, M. L. (1983). *Identifying And Teaching Mathematically Gifted Elementary School Children* . Arithmetic Teacher, 30(5), 25–26; 55–56.
- Kamii, C., & Declark, G. (1985). *Young Children Re–Invent Arithmetic* : Implications Of Piaget's Theory. New York: Teachers College Press, Columbia University.
- Kanevsky, L. S. (1990). *Pursuing Qualitative Differences In The Flexible Use Of A Problem Solving Strategy By Young Children* . Journal For The Education Of The Gifted, 13, 115–140.
- Kline, M. (1976). *Nacome: Implications For Curriculum Design* . Mathematics Teacher, 69, 449–454.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology Of Mathematical Abilities In School Children*. (J. Teller, Trans. And J. Kilpatrick & I. Wirszup, Eds.). Chicago: University Of Chicago Press.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs And Refutations*. Cambridge, Uk : Cambridge University Press.

- Lampert, M. (1990). *When The Problem Is Not The Question And The Solution Is Not The Answer* : Mathematical Knowing And Teaching. American Educational Research Journal, 27, 29–63.
- Lerman, S. (1983). *Problem–Solving Or Knowledge Centered* : The Influence Of Philosophy On Mathematics Teaching. International Journal Of Mathematics Education, 14(1), 59–66.
- Manin, Y. I. (1977). *A Course In Mathematical Logic*, New York : Springer–Verlag.
- Mason, J. (1996). *Expressing Generality And Roots Of Algebra* . In N. Bednarz, C.Kieran, &L. Lee (Eds.), *Approaches To Algebra* (Pp. 65–86) . The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically* . London: Addison– Wesley.
- Menchinskaya, N. A. (1959). *Psychology Of The Mastery Of Knowledge In School*. Moscow : Apn Press. National Council Of Teachers Of Mathematics. (2000). *Principles And Standards For School Mathematics*. Reston, Va: Author.
- Piaget, J. (1975). *The Child's Conception Of The World*. Totowa, Nj : Littlefield, Adams.
- Poincaré, H. (1948). *Science And Method*. New York : Dover.
- Polya, G. (1954). *Mathematics And Plausible Reasoning* : Induction And Analogy In Mathematics (Vol.1). Princeton, Nj: Princeton University Press.
- Presmeg, N. C. (1986). *Visualization And Mathematical Giftedness* . Educational Studies In Mathematics, 17, 297–311.
- Rubin, A., & Babbie. E. (1997) *Research Methods For Social Work* (3Rd Ed.) , Pacific Grove, Ca: Brooks/Cole Publishing Company.
- Senk, S. (1985). *How Well Do Students Write Geometry Proofs?* Mathematics Teacher, 78, 448–456.
- Shapiro, S. I. (1965). *A Study Of Pupil's Individual Characteristics In Processing Mathematical Information* . Voprosy Psikhologii, No. 2.
- Sheffield, L. J. (1999). *Developing Mathematically Promising Students* . Reston, Va: National Council Of Teachers Of Mathematics.
- Sriraman, B. (2002). *How Do Mathematically Gifted Students Abstract And Generalize Mathematical Concepts* . Nagc 2002 Research Briefs, 16, 83–87.

- Sriraman, B. (2003A). *Mathematical Giftedness, Problem Solving, And The Ability To Formulate Generalizations* . The Journal Of Secondary Gifted Education, Xiv(3), 151–165.
- Sriraman, B. (2004). *The Characteristics Of Mathematical Creativity* . The Mathematics Educator, 14(1), 19–34.
- Strunz, K. (1962). *Pädagogische Psychologie Des Mathematischen Denkens* . Heidelberg: Quelle & Meyer.
- Suppes, P., & Binford, F. (1965). *Experimental Teaching Of Mathematical Logic In The Elementary School* . The Arithmetic Teacher, 12, 187–195.
- Usiskin, Z. P. (1987). *Resolving The Continuing Dilemmas In School Geometry* . In M. M. Lindquist, & A. P. Shulte (Eds.) *Learning And Teaching Geometry, K–12: 1987 Yearbook* (Pp. 17–31). Reston, Va: National Council Of Teachers Of Mathematics.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure And Insight* . Orlando, Fl: Academic Press.
- Wallas, G. (1926). *The Art Of Thought* . New York : Harcourt Brace.
- Wertheimer, M. (1945). *Productive Thinking*. New York: Harper.
- Yakimanskaya, I. S. (1970). *Individual Differences In Solving Geometry Problems On Proof* . In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.). *Soviet Studies In The Psychology Of Learning And Teaching Mathematics* (Vol. 4), Stanford: School Mathematics Study Group.

ملاحظات

تشير سارة إلى تمارين في النسبة والتناسب التي تعطي تتابع خطوات وصولاً إلى التماثلات الأساسية.

