

هل الموهبة والإبداع في الرياضيات مترادفان؟

تحليل نظري لهذين المفهومين

بهاراث سريرامان Bharath Sriraman

جامعة مونتانا



ملخص

يفترض المرء أن الطلاب الموهوبين في الرياضيات في مرحلة الروضة وحتى الصف الثاني عشر (K-12) الذين يجري تصنيفهم بوساطة اختبارات خارج المستوى⁽¹⁾ (Out Of Level)، هم أيضاً طلاب مبدعون في أعمالهم. ويكوّن علماء الرياضيات «المبدعون» مجموعة فرعية صغيرة في ميدان الرياضيات التخصصية (Professional Mathematics). إذ لا تعني الموهبة في الرياضيات عند هذا المستوى الإبداع بالضرورة، ولكن مما لا شك فيه أن العكس صحيح. هل يعد مصطلحا النبوغ والإبداع مترادفين في مجال الرياضيات؟ طُوّر مفهوم الإبداع والموهبة في الرياضيات من خلال تركيب وتحليل الكتابات العامة المتعلقة بالإبداع والموهبة وتحليلها. وفي هذا الإطار يُقارن بين مفهومي الإبداع، والنبوغ في مستويات الـ (K-12)، والمستويات الاحترافية بهدف وضع مبادئ، ونماذج «تحقق أقصى قدر ممكن» من التوافق بين هذين المفهومين. وتُناقش كذلك علاقة هذه النماذج بمستوى الروضة-الصف 12، ومستويات الاحتراف مع الأخذ في الحسبان

(1) يستخدم مصطلح يشير إلى ممارسة تقييم طالب باستخدام اختبار طور الطلاب في متسوى آخر (غالباً في مستوى رأس أقل). ولكن يستخدم

المصطلح انضمامه الاختبارات المتحررة من المستوى والتي يمكن أن تستخدم للكشف عن المواهب في اللغة والرياضيات.

الاعتبارات العملية الخاصة بغرفة الصف. ويوسع هذا البحث نطاق الأفكار التي قدّمها يوسيسكين (Usiskin, 2000) على نحو كبير.

مقدمة

غالباً ما ينظر إلى الرياضيات بصفتها مجالاً مقتصراً على علماء الرياضيات المختصين. أما كلمة الإبداع، فتعد «ضبابية» وتخضع لكثير من التفسيرات. والسؤال الآن هو: ماذا يعني الإبداع في الرياضيات؟ هل هو مجرد اكتشاف نتيجة أصيلة؟ وإذا كان الأمر كذلك، فهل يصبح الإبداع عندئذٍ مجالاً مقتصراً على علماء الرياضيات المختصين؟ وهل يعدُّ اكتشاف الطلاب نتيجة أو إستراتيجية رياضية معروفة مسبقاً عملاً إبداعياً؟ في هذا السياق، يرى علماء رياضيات بارزون من أمثال جاك هادمر (Jacques Hadamard, 1945) وجورج بوليا (George Polya, 1954) أن الفرق الوحيد بين عمل علماء الرياضيات والطلاب النابغين هو مجرد فرق في الدرجة. أي أن كلاً منهم يعمل بما يتوافق ومستواه، وعلينا بأن ندرك أن الطلاب قادرون على أن يكونوا مبدعين. وعموماً، فإن وجهة النظر هذه تبدو جلية لمعلمي الطلاب النابغين في الرياضيات، الذين يتوقعون من طلابهم أن يظهروا سمات الإبداع. وبعبارة أخرى، هل يعني اختيار الطلاب بصفتهم متفوقين في الرياضيات، أن يكونوا كذلك مبدعين فيها؟ وهل يعني النبوغ الرياضي الإبداع في الرياضيات؟

يرى كاجاندار (Kajander, 1990) أن الإبداع حتى بين الموهوبين في الرياضيات الذين يظهرون سمات إبداعية كالتفكير التباعدي (Divergent Thinking)، يكون عبارة عن نوع خاص من أنواع الإبداع، ولا يمت بالضرورة للتفكير التباعدي بصلة (ص. 254). وتتضمن هذه الجملة السؤال الآتي: هل الإبداع في الرياضيات يقتضي ضمناً الموهبة. مما لا شك فيه، أن هذه الجملة صحيحة على مستوى بحوث الرياضيات، إذ بوسع المرء أن يجادل بسهولة في أن علماء الرياضيات المختصين الموهوبون، استناداً إلى حقيقة حصولهم على شهادة الدكتوراه في الحقل، وأنهم أيضاً ذوو فاعلية في مجال البحث العلمي. وعلى الرغم

من ذلك، حتى عند هذا المستوى، فإن علماء الرياضيات المختصين يصنفون حفنة صغيرة فقط من زملائهم على أنهم «مبدعون» بمعنى الكلمة (Usiskin, 2000).

قد تساعد هرمية يوسيسكين ذات المستويات الثمانية على توضيح درجات الموهبة والنبوغ فيما يتصل بعلماء الرياضيات. وقد وضع هذه الهرمية لتصنيف الموهبة الرياضية التي تتراوح بين مستوى (صفر - 7). حيث يمثل مستوى صفر (انعدام الموهبة) في هذا التسلسل الهرمي الطلاب اليافعين الذين يعرفون القليل جداً من الرياضيات، في حين يمثل المستوى الأول (مستوى الثقافة) اليافعين الذين لديهم معرفة أولية بالأرقام بصفتها جزءاً من الاستخدام الثقافي، وتماثل معرفتهم الرياضية معرفة طلاب الصفوف من السادس حتى التاسع. ومن الواضح أن نسبة كبيرة جداً من الناس العاديين تقع ضمن المستويين الأول والثاني.

وهكذا، يتوزع بقية مجتمع الموهبة في الرياضيات ضمن المستويات الثاني إلى السابع على أساس الموهبة الرياضية. ويمثل المستوى الثاني طلاب صفوف الشرف (الإحلال المتقدم) للمرحلة الثانوية القادرين على التخصص في الرياضيات الذين يصبحون في نهاية المطاف معلمي رياضيات في المرحلة الثانوية. يمثل المستوى الثالث «الطلاب الرائعين» الذين يكونون من بين من يحصلون على علامة من 750-800 في اختبار التحصيل المدرسي 1 أو الذين يأتون في المركز الرابع أو الخامس في اختبار المقررات المتقدمة (Advanced Placement AP) في التفاضل والتكامل. يتمتع هؤلاء الطلاب بقدرات القيام بعمل الخريجين المبتدئين في الرياضيات. ويمثل المستوى الرابع (الطالب الاستثنائي) الطلاب الذين يتميزون في مسابقات الرياضيات، ويقبلون في المخيمات الصيفية للعلوم/الرياضيات و/أو الكليات بسبب موهبتهم. إن هؤلاء الطلاب قادرون على بناء البرهان الرياضي ومناقشة علماء الرياضيات في الرياضيات. ويمثل المستوى الخامس علماء الرياضيات المنتجين. وعلى الرغم من أن وصف يوسيسكين لهذا المستوى غامض ومبهم، فإن المرء يستطيع أن يستدل على أنه يمثل الطلاب الذين أتموا درجة الدكتوراه في الرياضيات بنجاح، أو علوم أخرى ذات صلة بالرياضيات، وأنهم قادرون أيضاً على الكتابة والنشر في هذا الحقل. أما المستوى السادس فهو «المنطقة التي أُجيزت» أو

أُجمع عليها (The Ratified Territory) في مجال علماء الرياضيات المتميزين الذين تقدموا بمجالهم إلى الأمام بإنجازات بارزة؛ ومثل هؤلاء العلماء تجدهم في كل زمان، في مختلف المجالات التي يعملون فيها. وهؤلاء هم زملاء رجل الأعمال ألفرد سلون (Alfred P. Sloan) الذين كانوا الأفضل ضمن فئتهم العمرية في الولايات المتحدة. وأخيراً، يمثل مستوى السابع العظماء في جميع العصور؛ الفائزين بجوائز الحقل في الرياضيات 2. ويقتصر هذا المستوى على العمالقة أو العباقرة أمثال ليونارد يولر (Leonard Euler)، وكارل فريدريك جوس (Karl Friedrich Gauss)، وبيرنهارد ريمان (Bernhard Riemann)، وسرينيفاذا رمانوجان (Srinivasa Ramanuja)، وديفيد هيلبرت (David Hilbert)، وهنري بوانكاريه (Henri Poincaré).

ويلاحظ أن علماء الرياضيات المختصين ظهوروا في المستوى الخامس في هرمية يوسيسكين للموهبة الرياضية ذات المستويات الثمانية، في حين ظهر علماء الرياضيات المبدعون في المستويين السادس والسابع. وبناءً عليه، فإن الإبداع في الرياضيات في المجال الاحترافي يشير إلى النبوغ والموهبة الرياضية، ولكن العكس ليس بالضرورة أن يكون صحيحاً. أما الطلاب الموهبة والنبوغ في الرياضيات فقد جاؤوا في المستويين الثالث والرابع في هذا التصنيف الهرمي للموهبة الرياضية. وتتلخص النقطة التي ركز عليها يوسيسكين في أن هؤلاء الطلاب يمتلكون إمكانات التقدم عبر المجال الاحترافي (المستوى الخامس) بوجود المساندة التدريسية والوجدانية الملائمة عندما ينتقلون من مرحلة الروضة إلى الصف الثاني عشر ثم إلى الجامعة.

الدافع لهذا البحث

تشير دراسات كثيرة مثل (Gramond, 1994; Davis, 1997; Smith, 1966;)، إلى أن السمات السلوكية للأفراد المبدعين تتعارض في كثير من الأحيان مع السلوك المقبول في المدارس الرسمية. فمثلاً، عادة ما يترتب على السلوك السلبي، مثل اللامبالاة بقوانين غرفة الصف وإظهار السأم والسخرية والنشاط المفرط، إجراءات تأديبية بدلاً من التدخلات الوجدانية الملائمة. وأما الطلاب الذين يمتلكون

لقواعد السلوك، فإنهم يميلون في الأغلب إلى إخفاء قدراتهم العقلية لأسباب اجتماعية، وينظرون إلى موهبتهم الأكاديمية بصفتها مصدراً للحسد. يزخر التاريخ بكثير من الأمثلة لأشخاص مبدعين، وصفوا بالمصطلحات الدارجة بالمنتكسين (Deviants). وقد أورد بروور (Brower, 1999) ما يربو على خمسين مثلاً لكتاب مشهورين ومبتكرين وعلماء وفنانين وممثلي مسرح ممن أودعوا السجن بسبب مخاوف المجتمع من أفكارهم القادرة على إحداث تحولات جذرية في التفكير العام.

وغالباً ما يكون التبرير الجماعي لكبت الإبداع في مستويات مرحلة الروضة إلى الصف الثاني عشر تحت غطاء فعل ما يعتقد أنه لمصلحة معظم الطلاب، والتعلل بحجة «العدالة والإنصاف»، هذا المفهوم الذي يُساء استخدامه، والتستر وراء خطط المناهج وأهداف التحصيل المدرسي وما إلى ذلك. وقد أثار إقرار قانون «عدم إهمال أي طفل» (No Child Left Behind, Nclb) تحت ستار «العدالة والإنصاف»، جدلاً كثيراً حول ما يجب فعله مع الطلاب النابغين والمبدعين في غرفة الصف. وقد بلغ هذا الجدل الحد الذي وصف فيه مارشاك (Marshak, 2003) دعوة قانون «عدم إهمال أي طفل» إلى المساءلة استناداً إلى الاختبارات المقننة لمهارات القراءة والكتابة والحساب التقليدية التي يثمنها المجتمع الصناعي، بالخطوة العملاقة للوراء، أي إلى أربعينيات القرن الماضي. وقال أيضاً: بعيداً عن المهارات «التقليدية» الثلاث (القراءة والكتابة والحساب)، فإن هناك كثيراً من المهارات الأخرى، مثل حل المشكلات والتفكير الإبداعي، تعدُّ ضرورية للنجاح في المجتمعات العالمية في القرن الحادي والعشرين، وقد كان هناك انتقاد مستمر من جهات كثيرة، ومنها مؤسسات التعليم العالي، للقيود المبالغ فيها التي يفرضها الأكاديميون على الالتحاق بفروع الدراسة، إضافة إلى «الاتجاهات الغربية الضيقة والمتأصلة» (Crème, 2003, P. 273). ويلقى مثل هذا النقد صدىً خاصاً في عالم الرياضيات، لا سيما في مستوى مرحلة الروضة- الصف الثاني عشر، حيث نادراً ما يُشجّع الطلاب النابغون من غير العرق الغربي، على التعبير بأساليب رياضية معقولة قد تكون مألوفة لهم من ثقافتهم. ويُعلّمون تبني الاتجاهات الغربية بدلاً من ذلك. وخلاصة القول أن الدراسات تشير إلى أن النبوغ في الأغلب يكون مرتبطاً بالانصياع للتقاليد السائدة، في حين يُصوّر الإبداع على أنه

سلعة مهمشة يراها ويغذيها بعض المعلمين، ولكنه لا يحظى بالتشجيع في العادة. وعلى أي حال، يبدو أن هناك انفصاماً بين قيمة الإبداع في مستوى الروضة-الصف الثاني عشر وقيمتها في المجالات المهنية، وهذا ما يجعلنا نفكر ملياً في كيفية تلافي هذا الانقسام. وقد ناقشنا هذه القضية في الفصل الحالي تحت سؤال: ماذا عن حل المسائل؟

يلاحظ أن المسائل التي يعالجها علماء الرياضيات مليئة بالشكوك وعدم اليقين. وعلى الرغم من ذلك، فإنه نادراً ما تقدم غالبية مناهج الدراسية والتدريسية للطلاب وجهة النظر المفتوحة هذه عن الرياضيات. وفي الحقيقة، نادراً ما تستخدم الممارسات الصفية ومناهج الرياضيات المسائل المطروحة مفتوحة النهاية، ولا تسمح أيضاً للطلاب باستخدام مدة زمنية طويلة في التعامل مع تلك المسائل، أو التعامل معها على نحو مستقل. والجانب المشجع في هذه الأجواء، هو أن عملية حل المشكلات في دروس الرياضيات قد حظيت بتركيز زائد، منذ انطلاق المجلس الوطني لمعلمي معايير الرياضيات (The Original National Council of Teachers of Mathematics Standards, 1989). وعلى الرغم من ذلك، وبعد مرور مدة طويلة، فقد أصبح حل المشكلات شعاراً عقائدياً وذريعة يُحتج بها كأنه الدواء الشافي لعلاج علل المناهج. ويدعم هذا القول نتائج الدراسات المتعلقة بحل المشكلات. مثلاً، وصف شوينفيلد (Schoenfeld, 1993) في دليل البحث عن تعليم الرياضيات وتعلّمها (*The Handbook For Research On Mathematics Teaching And Learning*)، كيف أصبح حقل تعليم الرياضيات في الولايات المتحدة عرضة للتقلبات طوال عشر سنوات تقريباً، متأرجحاً بين المهارات الأساسية وحل المشكلات. وقد أعرب عن تفاؤله باستمرار الحركة التي أشار إليها كثيرون في ذلك الوقت بـ «عقد حل المشكلات» في تعليم الرياضيات. وعلى الرغم من ذلك، ومنذ نشر الدليل في عام 1993، «فقد بشّر التركيز العام على الاختبارات المصيرية (High Stakes Tests) بالعودة غير المأمونة للمهارات الأساسية» (Lesh & Sriraman, 2005, P. 501).

إضافة إلى ذلك، دعنا ننظر إلى الحقائق الآتية: حظي نمط بوليا الاستكشافي لحل مسائل الرياضيات (Polya-Style Problem Solving Heuristics)، - مثل ارسام صورة،

عكس العملية، ابحث عن مسألة مشابهة، أو حدد المعطيات والأهداف، بتاريخ طويل من المناصرة بصفة هذه القدرات مهمة لتطور الطلاب (Polya, 1945). ولكن ماذا يعني أن تفهم هذه الإستراتيجيات؟ من الواضح أن لمثل هذه الإستراتيجيات قوة وصفية. أي، غالباً ما يستخدم الخبراء مثل هذه المصطلحات عند تقديم توضيحات لسلوكهم، بعد حلهم فعلاً المسائل، أو لسلوكات الأشخاص الآخرين الذين يلاحظونهم في أثناء حلهم هذه المسائل. ولكن، هناك أدلة قليلة على أن العمليات العامة التي يستخدمها الخبراء في وصف سلوكياتهم السابقة في حل المسائل، يمكن أن تمثل وصفات لتوجيه الخطوات الآتية للمبتدئين في أثناء الجلسات المتواصلة لحل المسألة. ويوجد أيضاً لدى الباحثين الذين يجمعون البيانات عن حل المسائل، نزعة طبيعية للتدقيق في البيانات المتوافرة لهم من منظور نماذج بديهية لحل المسائل. وعلى الرغم من القيمة الكبيرة لمثل هذه الطريقة، فإننا نتساءل: هل يزيد هذا المنحى فعلاً من تقدم بحوث حل المسائل؟ وإذا ما تفحص المرء تاريخ بحوث حل المسائل، فقد مرت مناسبات مهمة جداً أدرك فيها الباحثون وجهة النظر الاستكشافية (Heuristic View) المقيدة لحل المسائل التي توفرها الأدوات الحالية لبحوث حل المسائل، ونجحوا في إعادة تصميم النماذج القائمة بعمليات أكثر وصفاً. وعلى الرغم من ذلك، تبقى لدينا مشكلة وهي أن العمليات الوصفية أشبه ما تكون بمسميات لفئات كبيرة من المهارات أكثر من كونها مهارات بحد ذاتها. وبناءً عليه، ففي محاولات الذهاب إلى ما وراء «القوة الوصفية» (Prescriptive Power) لتحويل هذه العمليات إلى «قوة توجيهية» أكبر (Prescriptive Power)، فقد عمد الباحثون والمعلمون إلى وسيلة تقوم على تحويل كل «عملية وصفية» إلى قائمة أكبر من العمليات الأكثر تقييداً، ولكنها في الوقت ذاته أكثر وضوحاً. وعلى الرغم من ذلك، فإذا ما اعتمد هذا المنحى، فإن معظم ما يعنيه فهم هذه العمليات سوف يشتمل على معرفة وقت استخدامها. لذا، فلا بد من إدخال قوانين الترتيب الأعلى (Higher Order) ومبادئه الإدارية التي تحدد متى وكيف ستستخدم عمليات الترتيب الأدنى (Lower Order) التوصيفية.

إن المعضلة الواضحة التي تبرز في هذه القوائم القصيرة للعمليات الوصفية، هي أنها بدت عامة جداً لتكون ذات معنى. ومن جهة أخرى، تميل القوائم الطويلة للعمليات التوجيهية

إلى التعدد، بحيث تصبح معروفة وقت استخدامها من خلال فهمنا لها. وزيادة على ذلك، فإن إضافة المزيد من القوانين والمعتقدات فوق المعرفية يؤدي فقط إلى مضاعفة هاتين الصعوبتين الأساسيتين. وبعد مرور هذه المدة الطويلة على نشر كتاب شونفيلد، أفاد ليستر وكيلي (2003) Lester & Kehle، في مراجعة واسعة أخرى للدراسات، بوجود تقدم ضئيل في بحوث حل المشكلات، وقالوا إن ما يمكن أن يقدمه منحى حل المشكلات للمدارس لا يزال قليلاً. أي أن على حقل تعليم الرياضيات أن يذهب إلى «ما هو أبعد من تسلسل خطوات العملية والوثائق المرمّزة» في منهجيات وطرائق البحوث، و«نماذج الأداء الحاسوبية البسيطة القائمة على الإجراء» لتطوير طرائق لوصف حل المسألة، من حيث النظم المفاهيمية التي تؤثر في أداء الطلاب (Silver, 1985, P. 257). وهكذا، فإن استخدام حل المسألة في غرفة الصف يثير تساؤلات كثيرة عن هدفه وفعالته.

الإبداع في الرياضيات: ندرة التعريفات المحددة بالمجال في الرياضيات

بعد هذه المقدمة عن الموهبة والإبداع ومدلولاتهما في المجتمع، سوف نركز اهتمامنا بصورة أكثر تحديداً وعمقاً على مجال الرياضيات؛ بهدف إيجاد تعريفات مناسبة لهذين المصطلحين. لقد استخدمنا الدراسات الموجودة في استقصاء المعاني الكثيرة، وتحديد ملامتها وعلاقتها بمستوى مرحلة الروضة- الصف 12 ومستوى المختصين. تتسم معظم التعريفات الحالية للإبداع في الرياضيات الموجودة في مؤلفات الرياضيات وكتب تدريسها، بأنها ضبابية أو مربكة ومحيرة. وربما يعود سبب وجود هذا الغموض إلى صعوبة وصف هذا المفهوم المعقد. فمثلاً، عُرّف الإبداع في الرياضيات عبر استخدام مجازات متنوعة، مثل القدرة على التمييز والاختيار، والتمييز بين الأنماط المقبولة وغير المقبولة، والانهماك في اتخاذ قرار بطريقة لاخوارزمية (Non-Algorithmic). وأن الدراسات المتعلقة بالطلاب المبدعين رياضياً في مرحلة الروضة- الصف 12 يكتنفها أيضاً الغموض والضبابية. لقد ارتبطت القدرة الرياضية الاستثنائية في هذه المرحلة (مستوى 4 للموهبة) بمتلازمة آينشتاين the Einstein syndrome، ومتلازمة أسبيرجر The Asperger Syndrome. تتميز متلازمة آينشتاين بالقدرة الرياضية الاستثنائية مع تأخر في تطور النطق، في حين

توصف متلازمة أسبيرجر بأنها اضطراب الطيف الذي يمتاز «بضعف شديد في التفاعل الاجتماعي المتبادل، والانغماس في اهتمامات ضيقة أو الهوس بموضوع معين... وأحياناً انعدام الرشاقة/ عدم الاتزان الحركي» (Clumsiness James, 2003, P. 62). وتستدعي قلة التعريفات المحددة للإبداع في الرياضيات في مؤلفات الرياضيات وكتب تدريسها، الابتعاد عن الرياضيات المحددة بالمجال إلى الكتابات العامة عن الإبداع بهدف بناء تعريف ملائم.

الإبداع: تعريفات عامة في علم النفس / علم النفس التربوي

يمكن العثور على كثير من التعريفات في الكتابات العامة. فقد استخدم كرافت (Craft, 2002) مصطلح «إبداع الحياة الواسعة» (Life Wide Creativity) في وصف السياقات المتعددة للحياة اليومية التي تتجلى فيها ظاهرة الإبداع. في حين وصف باحثون آخرون الإبداع على أنه استجابة «البقاء أو التكيف» (Survival Or Adaptive) الطبيعية للبشر في بيئة دائمة التغير. وأشار كرافت إلى ضرورة التمييز بين الإبداع اليومي، مثل ارتجال وصفه من «الإبداع الاستثنائي» الذي يؤدي إلى تحولات جذرية في جسم المعرفة في مجال محدد. ومن المقبول عموماً أن أعمال «الإبداع الاستثنائي» يمكن الحكم عليها فقط من خبراء ضمن مجال المعرفة المحدد. فمثلاً، يمكن الحكم على برهان أندرو وايلز (Andrew Wiles) لنظرية فيرمات الأخيرة (Last Theorem) من عدد قليل من علماء الرياضيات ضمن مجال فرعي محدد جداً لنظرية الأعداد (Number Theory) (1).

(1) تقول نظرية الأعداد Number Theory إنه لا توجد ثلاثة أعداد صحيحة موجبة، a و b و c ، تحقق المعادلة $an + bn = cn$ حيث n أكبر أو تساوي 2. في عام 1637، اعتقد الفرنسي بيير فيرمات (Pierre De Fermat) أنه حصل على برهان، وذكر ذلك في تعليق على كتاب ديوفانتيس عالم الرياضيات الذي عاش في مدينة الإسكندرية في العام 250 ق.م، لكنه قال إنه لا يستطيع أن يكتب البرهان لضيق الهامش. وبعد ذلك مات فيرمات وسميت هذه النظرية بنظرية فيرمات الأخيرة. حاول أعظم رياضيين العالم برهان نظرية فيرمات بلا جدوى، وهكذا ظلت تلك المسألة دون حل أكثر من 350 عاماً. وفي نهاية المطاف، جاء عالم الرياضيات الإنجليزي أندرو وايلز (Andrew Wiles) الذي جعل حلم حياته حل نظرية فيرمات، حيث قضى سبع سنوات في حلها، وأعلن ذلك في عام 1993، لكن جاء من اكتشاف وجود خطأ في البرهان، مما اضطره إلى قضاء عام آخر لتصحيح هذا الخطأ- المراجع

ويمكن للمرء أن يجد، على نحو أكثر تحديداً، في مجال علم النفس التربوي عدداً من التعريفات للإبداع. مثلاً، ارتأى ويسبيرج (Weisberg, 1993) أن الإبداع يقتضي استخدام عمليات المعرفة العادية والنتائج في النتائج الأصلية غير العادية. وزيادة على ذلك، عرّف ستيرنبرج ولوبارت (Sternberg & Lubart, 2000) الإبداع أنه القدرة على إنتاج عمل أصيل غير متوقع، يكون مفيداً وسهل التكيف. في حين تفرض تعريفات أخرى متطلب التجديد أو الابتكار أو الشذوذ والغرابية (Novelty, Innovation Or Unusualness) في الإجابة عن أي مسألة (Torrance, 1974). وعرّف كثير من نظريات التجميع (Confluence Theory) الإبداع على أنه التقاء المعرفة والقدرة وأسلوب التفكير والمتغيرات الدافعية والبيئية، وتطور أفكار المجال المحدد التي ينجم عنها منه نتائج إبداعية. مثلاً، ارتأى شيكزنتميهالي (Csikszentmihalyi 2000) أن الإبداع أحد الطفرات التي تنجم عن التفاعل المناسب بين الفرد والمجال والحقل. وأخيراً، قدم بلاكر وبيغيتو (Plucker And Beghetto, 2004) تعريفاً تجريبياً للإبداع استناداً إلى نتائج مجموعة من الدراسات التجريبية في الحقل، حيث عرّف الإبداع بصفته «تفاعلاً بين القدرة والعمليات التي يستطيع الفرد أو الجماعة من خلالها تقديم مُخرج أو منتج يتميز بالجدة والفائدة، على نحو ما هو محدد ضمن بعض السياقات الاجتماعية» (ص. 156).

تطبيق التعريفات العامة للإبداع على الرياضيات

لا يتوقع المرء عادة عملاً إبداعياً غير عادي على مستوى مرحلة الروضة-الصف 12. وعلى الرغم من ذلك، فمن الممكن أن يقدم الطلاب رؤى جديدة في مسألة رياضيات، أو تفسيراً جديداً أو تعليقاً أو شرحاً لدراسة أو عمل تاريخي. ومما لا شك فيه أن الطالب في هذا المستوى يكون قادراً على الإتيان بشيء أصيل. ويمكن أن يؤدي تركيب التعريفات المتعددة للإبداع إلى تعريف عملي للإبداع في الرياضيات في كلا المستويين- المختصين ومستوى مرحلة الروضة-الصف 12. ويمكن أن يعرف الإبداع في الرياضيات على المستوى

الاحترافي ب (أ) القدرة على إنتاج عمل أصيل يوسع المعرفة على نحوٍ كبير و/أو (ب) ذلك الذي يفتح الطريق لأسئلة جديدة لعلماء الرياضيات الآخرين.

مثلاً، قاد بحث هويت (Hewitt, 1984) عن حلقات الدوال المتصلة إلى احتمالات وأسئلة جديدة غير مكتشفة في حقل التحليل وعلم المكان «الطوبولوجيا» (Topology)، وتناولها علماء الرياضيات الآخرون عقوداً عدة. وخير إيضاح معاصر على تأثيرات بحث هويت بعيدة المدى، هي أن تبحث عن عنوان البحث على «جوجل» لترى أن ما يزيد على مئة وعشرين ألف مشاهد يبحثون عنه.

ومن جانب آخر، يمكن أن يعرف الإبداع في الرياضيات على مستوى مرحلة الروضة-الصف 12 أنه: (أ) العملية التي ينجم عنها شيء جديد غير عادي، و/أو حل/حلول مذهلة لمسألة ما أو مسائل مشابهة و/أو (ب) صياغة أسئلة جديدة، و/أو احتمالات تتيح النظر في مسألة قديمة من زاوية جديدة تتطلب التخيل والتصور (Einstein & Inheld, 1938; Kuhn, 1962). ويلاحظ أن الجزء الثاني يشبه تعريفات الإبداع في الرياضيات الاحترافية إلى حدٍ بعيد.

وتشير البحوث أيضاً إلى أن الأفراد المبدعين في المستويين الاحترافي ومستوى مرحلة الروضة-الصف 12 يميلون إلى إعادة صياغة المسألة أو البحث عن مسألة مشابهة. وأنهم أيضاً يختلفون عن أقرانهم من حيث كونهم مفكرين مستقلين إلى حدٍ بعيد، وميالين إلى المثابرة، والتأمل كثيراً.

الظروف التي تعزز الإبداع في الرياضيات على المستوى الاحترافي

بعد أن أصبح لدينا تعريفات عملية للإبداع في الرياضيات، فمن الطبيعي أن نستكشف الظروف التي يظهر فيها الإبداع. ولتوضيح الظروف التي تعزز ظهور الإبداع على الصعيد الاحترافي، أجرى سريرامان (C Sriraman, 2004) دراسة نوعية مع خمسة من علماء الرياضيات المختصين المبدعين المشهورين، هدفت إلى التوصل

إلى فهم أفضل للظروف التي بموجبها يظهر الإبداع في الرياضيات. تحدّث علماء الرياضيات الخمسة عن عمليات التفكير المتضمنة في ابتكار الرياضيات. وأشارت النتائج إلى أن العملية الإبداعية لعلماء الرياضيات قد اتبعت بصورة عامة نموذج الجشتالت ذا المراحل الأربع المتمثلة في الإعداد والحضانة والإشراق والتحقق *preparation–incubation–illuminationverification*. وتبيّن أيضاً أن عمليات التفاعل الاجتماعي والتصور والاستدلال والحس كانت من بين خصائص الإبداع في الرياضيات. ومن الخصائص الأخرى التي أسهمت في إنتاج بحثهم، إتاحة الوقت لهم في الكليات لمتابعة البحوث وحرية الحركة والإغراء الجمالي للرياضيات، إضافة إلى الحافز على حل المسائل وما يترتب عليه من نتائج هائلة في عالم الواقع. وقد تحدّث علماء الرياضيات الخمسة جميعهم مطولاً حول لحظة «أها» أو «وجدتها» (Eureka)، التي منحتهم رؤية جديدة للمسألة قادتهم إلى بناء البرهان بنجاح.

النبوغ الرياضي

كشفت دراسة تركيبية لأدبيات البحوث عن النبوغ الرياضي وسمات التفكير الرياضي أن الباحثين عرّفوا مفهوم الموهبة الرياضية من حيث قدرة الفرد في العمليات الرياضية مثل: (أ) القدرة على استخلاص البنى الرياضية وتعميمها وفهمها؛ (ب) القدرة على إدارة البيانات؛ (ج) القدرة على إتقان مبادئ التفكير المنطقي والاستنتاج؛ (د) القدرة على التفكير القياسي والتجريبي، ومناقشة المسائل ذات الصلة؛ (هـ) المرونة والقدرة على قلب العمليات والأفكار الرياضية؛ (و) المعرفة البديهية بالبرهان الرياضي؛ (ز) القدرة على اكتشاف المبادئ الرياضية على نحوٍ متسق؛ (ح) القدرة على اتخاذ قرارات في مواقف حل المسائل؛ (ط) القدرة على تصور المسائل أو العلاقات أو كلّ منها؛ (ي) القدرة على استنتاج السلوك الذي يستخدم لفحص صحة البنية الرياضية أو بطلانها؛ (ك) القدرة على التمييز بين المبادئ التجريبية والنظرية؛ و (ل) القدرة على التفكير المعاود أو المتعدد

(Recursive Thinking)

إضافة إلى ذلك، ارتبط النبوغ على الدوام بالقدرة على التعلم بوتيرة أسرع (Chang, 1985; Heid, 1983). تعد معظم العمليات الرياضية المدرجة أعلاه ذات سمة معرفية، وتُدرس في أثناء مرحلة الروضة-الصف 12. وتجدر ملاحظة أن كثيراً من هذه الدراسات تشتمل على أدوات مستندة إلى مهمة تحديد المفاهيم / الأفكار الرياضية التي تعرض لها الطالب بعض الشيء. وهناك ملاحظة أخرى لا تقل أهمية عن سابقتها، وهي أنه على الرغم من أن كثيراً من هذه السمات تؤدي دوراً مهماً، وتعد أيضاً ضرورية في الرياضيات الاحترافية، فإنها ليست كافية لإظهار الإبداع جلياً. وبعبارة أخرى، كي تؤدي دور عالم رياضيات محترف (المستوى 5)، وتبتكر رياضيات جديدة، فإن هناك قدرات أكثر أهمية من غيرها. وعند اتخاذ القرارات المحددة، تؤدي القدرة على التجريد والتعميم والاستدلال وبناء المبادئ النظرية والتفكير المعهود دوراً مهماً في ابتكار الرياضيات على المستوى الاحترافي. وتؤدي أيضاً عمليات الاستدلال، وبناء المبادئ النظرية، والتفكير التكراري دوراً حيوياً في كيفية ابتكار الرياضيات الجديدة. ويمكن تصوير هذه العملية ببساطة على النحو الآتي: يحاول عالم الرياضيات التطبيقي أن يبتدع نماذج رياضية تحاكي العالم الفعلي، في حين يميل عالم الرياضيات البحتة إلى استخدام هذه النماذج ليرى تأثيراتها. وفي أثناء عملية النمذجة، تواجه عالم الرياضيات التطبيقي بعض الأوضاع المادية، فيحاول تحديد المبادئ الأساسية، في حين يتراجع عالم الرياضيات إلى الوراء، ويستخلصها ليحصل على وضع تدوم فيه هذه المبادئ الأساسية، ويرى الآثار المترتبة على ذلك. ويعمل عالم الرياضيات البحتة الذي يتعامل مع الآثار بطريقة رسمية؛ ليتبين ما ينطبق منطقياً على هذه المجموعة المعينة من الفرضيات، دون أن يلقي بالاً أيكون هذا النموذج مناسباً أم لا.

حاول واسون وجونسون- ليرد معرفة هل يكون الشباب اليافعون قادرين على تقدير التبعات المنطقية عند إعطائهم مجموعة من الافتراضات. وقد اهتم الباحثان على وجه الخصوص بتحديد السياقات التي قادت اليافعين 3 إلى التوصل إلى استنتاجات مضللة. ووفقاً لرأي واسون وجونسون- ليرد، فإن الفرد الراشد (The Rational Individual) هو القادر فقط على عمل استدلالات؛ وقد لا يكون راشداً بأي معنى آخر للكلمة (ص. 2). ونظراً إلى أن عملية الاستدلال يمكن أن تقود إلى تعميمات رياضية (Mathematical

(Generalizations) ، فقد درس الباحثان كيفية اكتشاف الراشدين القوانين العامة، بإعطائهم تجارب منظمة تحتوي على فرضية، وطلبوا إليهم أن يقرروا عناصر البرهان ذات الصلة باختبار هذه الحقيقة. وهكذا، فقد استقصى الباحثان طريقة اكتشاف الراشدين القوانين، بوضع تجارب بنوية يصار بموجبها إلى «عرض الموضوعات بفرضية، وعليهم أن يقرروا بنود الأدلة ذات الصلة باختبار هذه الحقيقة. لقد صُممت التجارب لاستقصاء ميل الأفراد إلى تقديم حلول غير متسعة استناداً إلى دليل مطابق» (ص. 202). وتوصل الباحثان إلى كثير من النتائج المثيرة. أولها، ميل أفراد العينة إلى التوصل إلى استدلالات مضللة عند تقديمها مع عبارات توكيدية مثبتة. ونتيجة أخرى، تمثلت في أن معظم أفراد الدراسة كانوا ميّالين إلى محاولة تحقق التعميمات بدلاً من محاولة إثبات بطلانها. وزيادة على ذلك، فقد لاحظ الباحثان أن محتوى المواد التي أُجري عليها الاستدلالات، كان مهماً. حيث عمد أفراد الدراسة إلى إجراء تحويلات غير مشروعة (Illicit Conversions)، وكانوا متحيزين إلى التحقق عند مصادفة مادة ذات طبيعة مجردة، مثل المسائل الرياضية حول فضاء عدد أبعاده «ن» (N-Dimensional Space) الذي يمكن تمثيله بالرموز فقط. وعلى الرغم من ذلك، عندما كانت المادة ملموسة، وتوصل أفراد الدراسة إلى تحديد روابط متنوعة بينها، فقد عمدوا إلى إيجاد روابط فرضية بين الحقائق ثم قياسها. وبعبارة أخرى، يختلف سلوك الاستدلال الرياضي عن سلوك الاستدلال اليومي العادي، وأن الأفراد النابغون في الرياضيات ماهرون في الربط المنطقي الصحيح بين الأفكار المجردة بطريقة مختلفة عن الأفكار اليومية. وقد درس فيجوتسكي (Vygotsky, 1962, 1978) هذا التمييز بين المفاهيم اليومية (أو التجريبية) المجردة (أو النظرية) في بحثه الاستقصائي حول تكوين المفاهيم، وتابع أيضاً دافيدوف (Davydov, 1988, 1990) هذا الموضوع لاحقاً.

استكشف فيجوتسكي في البداية مفهوم التعميمات العلمية في أثناء تقصيه كيفية تكوين المفهوم، وميز بين نوعين من المفاهيم، وأعني المفاهيم العنوية أو اليومية، والمفاهيم العلمية والنظرية. أما دافيدوف (Davydov, 1988)، الذي واصل هذا البحث في تكوين المفاهيم، فأكد أن الفرق المهم بين المفاهيم اليومية (التجريبية) والمفاهيم

النظرية يتمثل في طريقة تكوينها. وفقاً لرأي دافيدوف، يتمثل الفرق بين المفاهيم اليومية والمفاهيم النظرية أيضاً في نوع التجريد الذي يتعامل معه المرء؛ أي التجريد التجريبي مقابل التجريد النظري، إذ يشتمل الأول على مقارنات سطحية لفهم أوجه الشبه والاختلاف، في حين يشتمل الآخر على مقارنات بنيوية. وهكذا، تتطلب التعميمات التجريبية استخلاص أوجه الشبه بين مجموعة من الأشياء التي قد تمثل بذاتها وظائف وبنى متفاوتة. وقد ذكر دافيدوف، مثلاً، أن مفهوم الاستدارة (Roundness) يمكن استخلاصه من مفهوم الطبق (Dish) أو العجلة (Wheel) وهلمّ جرّاً. وعلى الرغم من ذلك، لا يُظهر مفهوم الاستدارة المحتوى الموضوعي الفعلي الذي يمثل مركز النقاط على بعد مسافة محددة من النقطة الثابتة. ولا يكون هذا المحتوى واضحاً من مجرد شكل الاستدارة ومظهرها. وقد ادعى دافيدوف أن استثمار التعميم التجريبي المفيد فقط في تكوين المفاهيم اليومية غير كافٍ لصياغة التعميمات النظرية التي تميز الرياضيات. وبعيداً عن سلوك الاستدلال في الأوضاع النظرية، فإن التفكير الرياضي يتميز أيضاً بـ «التفكير المعاد» وهو مصطلح استعير من عمليات معالجة البيانات الحاسوبية.

ووفقاً لرأي فاتايل (Vatile, 1989)، تُعدّ المعادة النموذج الذي عالج البشر بموجبه المسائل. ويقول كيرين وبيري (Kieren And Pirie, 1991) إن التفكير المعاد عبارة عن مجاز ملائم «للتدقيق في الظاهرة المعقدة كلياً من منظور معرفة الشخص للرياضيات وفهمه لها». (ص. 79). وقد دعم المؤلفان هذا الادعاء بإثبات أنه يوجد في مسار حياة الأطفال ذوي المرجعية الذاتية عدد من «الاحتمالات السلوكية». وبناءً عليه، لما كان الأطفال ذوي مرجعية ذاتية، فإن المعادة تُعدّ إحدى وسائل المعرفة لديهم، إذ تتكوّن معرفتهم من خلال «الأفعال الفكرية التي تقتضي أن تكون المدخلات نتائج أفعال التفكير السابقة» (ص. 79). ونظراً إلى أن الأطفال ذوو مرجعية ذاتية، فإن إحدى الوسائل المعرفية الرئيسة لديهم تكرارية بطبيعتها، وتتكوّن معرفتهم «من خلال الأفعال الفكرية التي تقتضي استخدام نتائج أفعال التفكير السابقة بصفحتها مدخلات» (ص. 79). ويرتبط هذا الجانب المعرفي بالرياضيات بصورة خاصة؛ لأن بناء المعرفة والفهم الرياضيين عملية حيوية ترتبط فيها معرفة المرء الحالية والفهم المبني عليها بالمعرفة السابقة. وقد حلّل كيرين

ويبيري المعاودة في أفعال الطلاب وأفكارهم في خبرة حل المشكلات. وقد طرحا «مسألة المصافحة» المشهورة: «كم عدد المصافحات المطلوبة في صف عدد طلابه خمسة وثلاثون طالباً، بحيث يصافح كل شخص في الغرفة كل شخص مرة واحدة فقط؟»

إحدى إستراتيجيات الحل التي استخدمتها إحدى المجموعات تمثلت أولاً في تخصيص المسألة التي تشمل ثلاثين شخصاً إلى مسألة تشمل المجموعة كلها. وابتكر الطلاب إستراتيجية بحيث يوضع الأشخاص في صفوف، ويصافح الشخص الأبعد عن الباب بقية الأشخاص جميعاً، ويبلغ آخر شخص يصافحه بعدد المصافحات، وبعد ذلك يغادر الغرفة. ثم يكرر الشخص الثاني الأبعد عن الباب العملية نفسها، ويغادر الغرفة، وبعد تكرارات عدة، يجمع آخر شخص عدد المصافحات؛ أي: $1 + 2 + 3 + \dots + 32 + 33 + 34$ ، ويغادر الغرفة. لاحظ أنه يمكن تعميم الحل السابق بسهولة لحالة واحدة على أشخاص عددهم «ن». وتتمثل إحدى نتائج هذه الدراسة في عدم اكتراث معظم الطلاب بحساب الحل لخمس وثلاثين شخصاً، حيث إنهم ابتكروا إستراتيجية ناجحة لهذا الغرض.

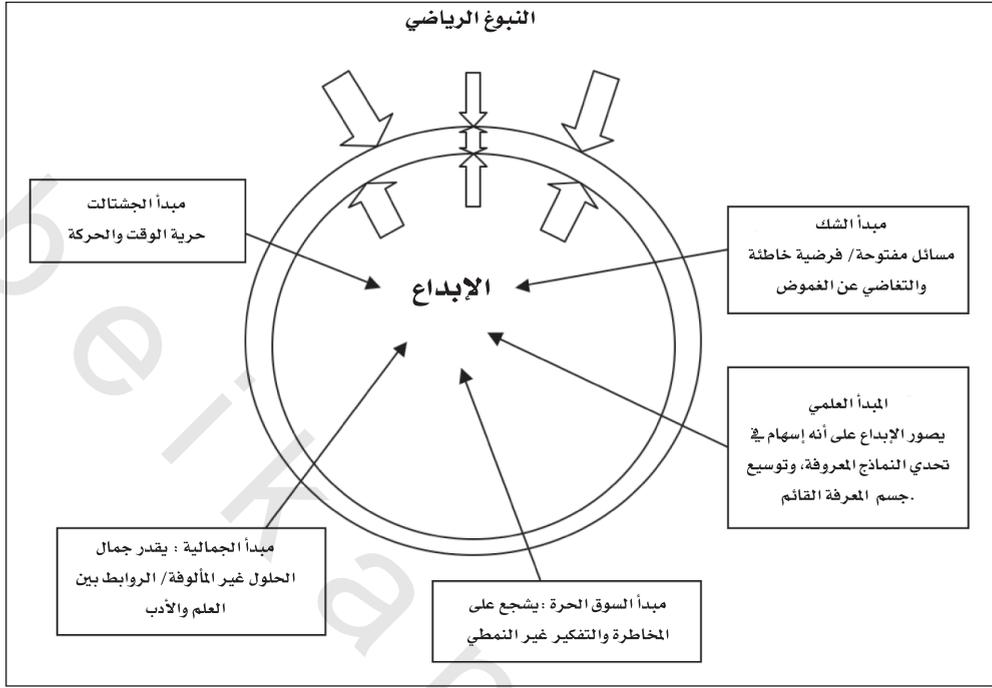
وتدل حقيقة أن المسألة لم تُحل بأي صورة، على أن الطلاب ارتأوا أن حلها لا يختزل إلى إجابة أو نتيجة حالة خاصة، بل «يتطلب» بنية تلك الحالة الخاصة أو يستخدمها. وتحوي «بنية» هذه الحالة الخاصة فكرة رياضية جوهرية صحيحة (سلسلة مصافحات غير متكررة)، إضافة إلى شكل يمكن وصفها إجرائياً من خلاله.

تصور الباحثان هذه البنية المعاودة بيانياً بصفحتها مثلثاً من الأنشطة، يشتمل على التخصيص وإيجاد النتائج، ومن ثم التعميم من خلال التفسير وتحقق الصدق. وتعد عملية التخصيص لحالات معينة والتخمين، ومن ثم التعميم بوساطة التفسير، وتحقق الصدق، سمة شائعة بين الطلاب النابغين في الرياضيات. وتظهر هذه العملية أيضاً أوجه الشبه بخصوص كيفية تفسير علماء الرياضيات المختصين النتائج في حقلهم ونقلها (Sriraman, 2004c).

مناقشة للصفوف من الروضة حتى الصف الثاني عشر؛ الآثار والتوصيات

توضح المناقشات السابقة أنه على الرغم من امتلاك الطلاب النابغين في الرياضيات الخصائص المعرفية المطلوبة للعمل على المستوى الاحترافي، فإن بعض السمات المعرفية تعدُّ أكثر أهمية من غيرها. ويقتضي هذا الهرم استخدام مسائل تستدعي استخدام مستوى عالٍ من الاستدلال وابتكار/اكتشاف المبادئ والتفكير المعاود.

وتشير مناقشة الإبداع في الرياضيات إلى أن كثيراً من خصائصه التي يصفها علماء الرياضيات بصفتها جوانب ذات قيمة كبيرة في مهنتهم، مثل حرية اختيار المسائل ومتابعتها في وضع تعليمي، وحرية الحركة المطلوبة في أثناء العمل، ومعرفة الفرق بين التعلم والإبداع، والإغراء الجمالي للرياضيات وفاعلية التحرك نحو حل مسائل ذات آثار عالمية هائلة، قد تكون على درجة عالية من الصعوبة لتحاكي غرفة الصف التقليدية. ويوضح الشكل (1:4) نموذجاً يشتمل على استخدام المبادئ الخمسة لتحقيق أقصى قدر ممكن من الإبداع بين النابغين في الرياضيات في مستوى الصف الثاني عشر. لقد لخصت خمسة مبادئ عامة مستمدة من الدراسات حول الإبداع في الرياضيات التي يمكن تطبيقها في غرفة الصف يومياً لزيادة إمكانية تفتح الإبداع في الرياضيات في غرفة الصف.



شكل 1:4 تناغم الإبداع والنبوغ في مستوى الصف الثاني عشر

المبادئ الخمسة الشاملة للارتقاء بالإبداع

كما هو واضح من الشكل 1:4، فقد سُمّيت المبادئ الخمسة الشاملة التي برزت من تركيب دراسات تعزيز الإبداع في الرياضيات وتحليلها، على النحو الآتي: (أ) مبدأ الجشطات، (ب) المبدأ الجمالي، (ت) مبدأ السوق الحرة، (ث) المبدأ العلمي، (ج) مبدأ الشكل.

مبدأ الجشطات (The Gestalt Principle): صور عالما الرياضيات البارزان هادمر (Hadamard) ويوانكريه (Poincaré) الإبداع على أنه عملية يجري فيها عالم الرياضيات خيارات بين الأسئلة التي تقود إلى الفائدة مقارنة بتلك التي لا تقود إلى جديد. لقد تأثر هذان العالمان بعلم نفس الجشطات في زمانهما، ووصفا الإبداع في الرياضيات بصفته عملية تتكون من أربع مراحل، هي: الإعداد، والحضانة، والإشراق، والتحقق (Wallas, 1926). وعلى الرغم من أن علماء النفس انتقدوا نموذج الجشطات في الإبداع؛

لأنه يعزو جزءاً واسعاً من الإبداع «المجهول» إلى محركات اللاشعور في أثناء مرحلة الحضانه، فإن كثيراً من الدراسات التي أجراها علماء الرياضيات أكدت على الدوام صحة هذا النموذج (Burton, 1999A, 1999B; Davis & Hersh, 1981; Shaw, 1994; Sriraman, 2004c). وقد ظهر في هذه الدراسات جميعها، أن الفرد بعد أن يتناول حل المسألة مدة من الوقت (الإعداد) دون حدوث أي انفراج، فإنه يطرح المسألة جانباً ويبدأ بالتفكير في مسألة أخرى، فتقود مدة الحضانه هذه إلى رؤية حل المسألة، ثم إلى لحظة «وجدتها! أو أهأ!» أو «اليورिका» من الإشراق. ولا شك في أن جل الناس قد مروا بهذه اللحظة السحرية. وعلى الرغم من قيمة مفهوم الجشالت القديم هذا، فإنه يعاني الإهمال والتجاهل في غرفة الصف. وقد اكتشف كروتسكي (Krutetskii, 1976) أن الأطفال النابغين في الرياضيات، قد مروا ببهجة الفرحة الناجم عن الاكتشاف؛ هذا الفرحة «الذي» يشتمل على شعور بالرضا من معرفة الصعاب التي تغلب عليها، وأن جهود المرء نفسها قد حققت الهدف (ص. 347). وهذا يقتضي أن يشجع المعلمون الطلاب النابغين في الرياضيات على التعامل مع مسائل ذات صعوبة ملائمة على مدار مدة ممتدة من الوقت، وبذلك يوجدون فرص اكتشاف الرؤية، والبصيرة والمرور بخبرة نشوة لحظة اليورिका.

المبدأ الجمالي (The Aesthetic Principle): غالباً ما تحدّث علماء الرياضيات عن الإغراء الجمالي لوضع نظرية «جميلة» تجمع الأفكار المتباينة بعضها مع بعض، أو تربط بين الأفكار من مجالات الرياضيات المختلفة، أو تستخدم أسلوب إثبات غير نمطي (Birkhoff, 1956, 1969; Dreyfus & Eisenburg, 1986; Hardy, 1940). وتعدُّ نظرية ويدربيرن (Wedderburn Theorem)، التي تعدُّ حلقة القسمة المنتهية مثلاً على توحيد أفكار عشوائية؛ لأن البرهان يشتمل على الجبر والتحليل المركب ونظرية الأعداد. وإن حجة كانتور (Cantor) أيضاً المتعلقة بلا معدودية مجموعة من الأرقام الحقيقية، غالباً ما يستشهد بها بصفاتها مثلاً لأسلوب الإثبات الرياضي الذكي وغير النمطي. وقد شبّه عالم الرياضيات الإنجليزي المشهور هاردي (G.H. Hardy, 1940) عالم الرياضيات المحترف بالفنان، فهو كالفنان صانع أنماط في عالم الأفكار المجردة. ومما قاله:

«إن عالم الرياضيات كالرسام أو الشاعر، فهو صانع أنماط. وإذا ما كانت أنماطه أكثر ديمومة من أنماطهم، فمرد ذلك إلى أنها مصنوعة من الأفكار... يجب أن تكون أنماط عالم الرياضيات، كأنماط الرسام أو الشاعر، جميلة؛ ويجب أن تتناغم الأفكار كالألوان أو الكلمات بعضها مع بعض. الاختبار الأول هو الجمال: لا مكان للرياضيات البشعة في العالم». (P.13)

أظهرت الدراسات الحديثة التي أجريت في أستراليا وألمانيا على طلاب المرحلتين المتوسطة والثانوية، أن الطلاب كانوا قادرين على تقدير «الجمال» في الحلول البسيطة للمسألة الرياضية المعقدة، إذ وجد برنكمان (Brinkmann, 2004) أن ذوي التحصيل المتدني أيضاً يقدر الكفاح من أجل التوصل إلى الرؤية التي تفتح باب الحل للغز الرياضي. وارتأى بارنز (Barnes, 2000) أن اختيار المعلم مسألة من واقع الحياة، و«الإخراج المسرحي» الدقيق للحظة الاكتشاف، يُعدّان عنصرين حاسمين في نقل صورة محبة للرياضيات إلى غرفة الصف.

مبدأ السوق الحرة (The Free Market Principle): يخاطر علماء الرياضيات المختصون كثيراً عندما يعلنون إثباتاً لمسألة رياضية طال حلها كثيراً، إذ غالباً ما يضع علماء الرياضيات سمعتهم على المحك إذا ما اكتُشف خلل ما في برهانهم. مثلاً، تعرّض إعلان لويس دي برانغيس (Louis De Brangs) لبرهان فرضية ريمان (Riemann) لتفحص دقيق من الخبراء⁽⁴⁾. وقد قاد هذا الأمر لاحقاً إلى تجاهل ادعائه للبرهان اللامع لحدسية بيبرباخ (Bieberbach Conjecture). وقد انتبه مجتمع الرياضيات في الغرب لبرهان لويس لتخمين بيبرباخ فقط، عندما دعمت مجموعة مشهورة من علماء الرياضيات في الاتحاد السوفييتي برهانه. وفي الجانب المقابل، تقبل مجتمع الرياضيات ادعاءات رامانوجان (Ramanujan) البديهية المتعددة التي تفتقر إلى الإثبات على نطاق واسع، بسبب دعم عمالقة لها من أمثال هاردي (G.H. Hardy) وليتيل وود (J.E. Littlewood)، ويتمثل تأثير هذه الحكايات من علماء الرياضيات المختصين في غرفة الصف بتشجيع المعلمين الطلاب على المخاطرة. فعلى وجه الخصوص، يتعين عليهم تشجيع الطلاب الموهوبين/المبدعين على عرض حلولهم المسائل الرياضية في المسابقات، أو اللقاءات

الطلابية المفتوحة، سواء كانت إقليمية أو على مستوى الدولة، متيحاً لهم فرصة اكتساب الخبرة في الدفاع عن أفكارهم عند تفحص أقرانهم لها بكل دقة.

المبدأ العلمي (The Scholarly Principle) : يتعين على معلمي مرحلة الروضة- الصف الثاني عشر أن يتبنوا فكرة الانحراف الإبداعي (Creative Deviance) ⁽¹⁾ خلال إسهامهم في بناء جسم المعرفة الرياضية، ويتعين عليهم أيضاً أن يكونوا مرنين ومنفتحين على المجالات البديلة التي يستخدمها الطلاب في حل المسائل. وإضافة إلى ذلك، ويتعين عليهم أن يوجدوا بيئة صافية مناسبة، ويشجعوا الطلاب على الحوار والتدقيق في مصداقية المناحي المستخدمة من الطلاب والمعلمين الآخرين في حل المسائل. ويتعين عليهم أيضاً تشجيع الطلاب الموهوبين على تعميم المسألة و/أو الحل، إضافة إلى افتراض مجموعة من المسائل المماثلة في سياقات أخرى. إذ تساعد إتاحة الفرص للطلاب على افتراض المسائل وفهمها وتصميمها، ومساعدة الطلاب على التمييز بين المسائل الرياضية وغير الرياضية، والمسائل القوية من الضعيفة، والمسائل القابلة للحل من غير القابلة للحل. إضافة إلى ذلك، يمكن استثمار التفكير المستقل عن طريق تقديم فرص للطلاب لاستقصاء حالات المسألة دون أي تعليمات صريحة (English, In Press; Sriraman & English, 2004). ويُشجّع المعلمون أيضاً على الانتظام في تسريع المنهاج وتكثيفه؛ حتى يصل الطلاب الموهوبون في الرياضيات إلى المفاهيم المتقدمة بسرعة تعينهم على الارتقاء بالنشاط العلمي المستقل. ولدت الدراسة الطولية للشباب ذوي النضج المبكر في الرياضيات (Study Of Mathematically Precocious Youth – Smpy) التي بدأتها جوليانا ستانلي (Julian Stanley) وجون هوبكنز (Johns Hopkins) عام (1971)، كمية كبيرة جداً من البيانات التجريبية جمعت على مدار ثلاثين عاماً، نجم عنها كثير من النتائج عن أنواع المناهج والتدخلات الوجدانية التي تعزز من متابعة الدورات المتقدمة في الرياضيات، وقد أنتج على

(1) يُعرّف علماء الاجتماع الانحراف بالسلوك الذي ينتهك القوانين والتقاليد الصريحة والضمنية السائدة في المجتمع. ويشير مصطلح الانحراف عادة إلى السلوك غير المشروع. أما أن يكون الانحراف إبداعياً فعندما يطرح الفرد أفكاراً جديدة ويرفض الانصياع للقوانين السائدة. فما الذي سيحدث، مثلاً، عندما يطرح أحد الموظفين، فكرة جديدة ويطلب تنفيذها لكن مديره يطلب إليه التخلي عن الفكرة. قد يلجأ الموظف إلى تجاهل تعليمات المدير ويطبّق الفكرة بطريقة غير قانونية، وهذا ما يسمّى الانحراف أو التمرد الإبداعي creative deviance - المراجع

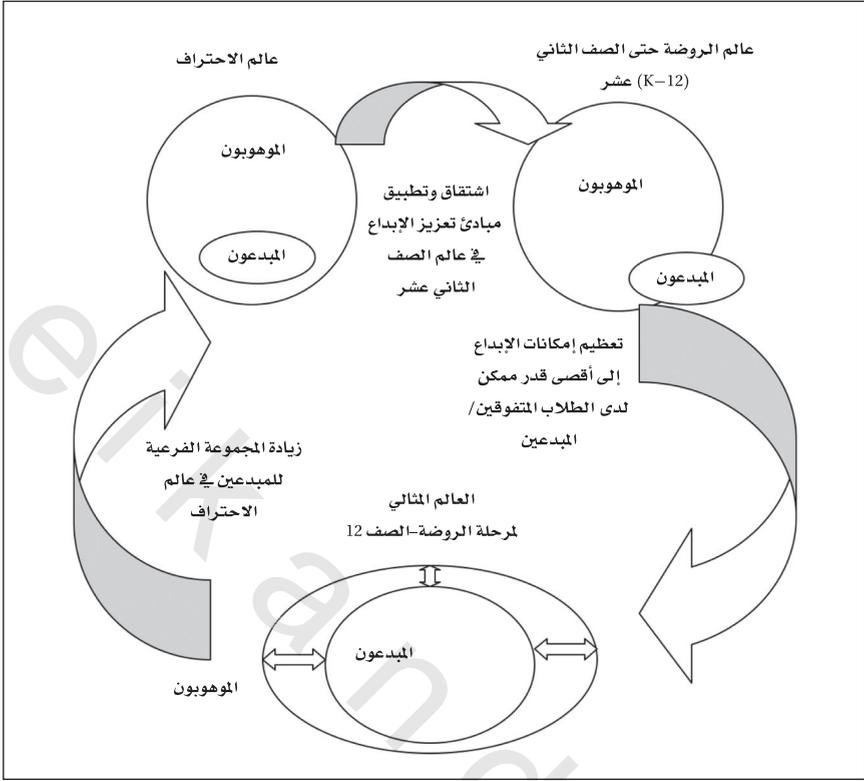
إثرها ما يربو على مئتين وخمسين ورقة بحثية قدمت دعماً تجريبياً متميزاً تتعلق بفاعلية تسريع منهاج الرياضيات وتكثيفه (Benbow, Lubinski, & Sushy, 1996).

مبدأ الشك (**The Uncertainty Principle**): تُعدّ الرياضيات، على المستوى الاحترافي، مليئةً بالشك والغموض كما اتضح من الاقتباسات المقدمة سابقاً. يتطلب الإبداع، بعكس التعلم، أن يتعرض الطلاب للشك إضافة إلى صعوبة ابتكار الرياضيات. وتتطلب هذه القدرة من المعلم تقديم دعم وجداني للطلاب الذين يعانون الإحباط إذا لم يقدروا على حل مسألة صعبة. وينبغي لك تعريض الطلاب دورياً لأفكار من تاريخ العلوم والرياضيات التي تطورت عبر قرون من الزمن، واستنفدت جهود أجيال من علماء الرياضيات إلى أن توصلوا إلى حل المسألة في نهاية المطاف. سيفيد استثمار هذه السمة في النهاية الطلاب الموهوبين في الرياضيات في المسار الاحترافي. ففي عام (1992)، طوّر كيسوتير (Kieswetter) ما يسمى بنموذج هامبورج (*Hamburg Model*) في ألمانيا الذي تركز تركيزاً أكبر على إتاحة المجال أمام الطلاب الموهوبين في الرياضيات للمشاركة في نشاط طرح المسائل، يتبع ذلك مرحلة استكشاف للإستراتيجيات المجدية وغير المجدية في حل المسائل المطروحة. وقد استحوذ هذا المنحى على جوهر الطبيعة الاحترافية للرياضيات، حيث تؤدي المهمة الأكثر صعوبة في الأغلب إلى صياغة النظرية (Theorem) صياغة صحيحة. وعلى النقيض من ذلك، تميل بعض النماذج الموجودة داخل الولايات المتحدة كالنماذج المستخدمة في مركز الشباب الموهوبين (Centre For Talented Youth) إلى التركيز على تسريع تعلم المفاهيم والعمليات من المنهاج العادي، وبذلك تُعدّ الطلاب لدورات متقدمة ضمن الرياضيات (Barnet & Corraza, 1993).

وبعد عرض المبادئ الخمسة التي تحقق أقصى قدر ممكن من الإبداع في غرفة الصف من مرحلة الروضة - الصف 12، سأعرض النموذج (شكل 2:4) الذي يستحوذ على الجوهر الأساس لهذا البحث، ويوضح العلاقة والتوافق لبنى النبوغ والإبداع في الرياضيات بين مستوى الروضة - الصف 12 والمسارات الاحترافية للرياضيات.

النموذج المفاهيمي

يوضح النموذج المقدم في الشكل (2:4) الطبيعة النشطة للعلاقة بين الإبداع في الرياضيات والنبوغ الرياضي، ويوضح أيضاً إمكانات جسر الهوة بين مستوى الروضة وحتى الصف الثاني عشر، والمسارات الاحترافية للرياضيات. يوضح مستوى الروضة حتى الصف الثاني عشر الموجود في أعلى يسار الشكل، أن الإبداع في الرياضيات يظهر في «هامش» المجموع العام للطلاب الموهوبين في الرياضيات. وفي الجانب المقابل، يوضح العالم الاحترافي للرياضيات أن الرياضيات سلعة نادرة. والسؤال المطروح الآن، كيف يمكن جسر الهوة بين هذين العالمين المنفصلين - الاحتراف والإبداع؟ يشير النموذج إلى إمكانية جسر الهوة بين هذه المسارات المنفصلة للرياضيات الاحترافية، وغرفة صف رياضيات في مستوى الروضة حتى الصف الثاني عشر، عبر مزيد من التركيز للإرتقاء بالقدرة الإبداعية لدى الطلاب الموهوبين في الرياضيات في غرفة الصف «المثالية». ويمكن تحقيق ذلك من خلال تطبيق المبادئ الخمسة (شكل 1:4) التي ينجح في استخدامها علماء الرياضيات المبدعون في غرفة الصف في مستوى الروضة وحتى الصف الثاني عشر. ومما لا شك فيه أن البيئة الصفية، ولا سيما تلك التي تضم طلاباً متفوقين رياضياً، التي تكون فيها مبادئ الجشتالت والسوق الحرة والعلمية والشك جزءاً من العملية التعليمية، تزيد من إمكانية الإبداع إلى أقصى حدٍّ ممكن بين الموهوبين في الرياضيات. وتساعد الزيادة في الإبداع هؤلاء الطلاب وهم يشقون طريقهم إلى مرحلة ما بعد الثانوية، ومرحلة إجراء البحوث في الرياضيات، أو ينتقلون من المستوى الرابع إلى الخامس أو السادس. ومن الجدير بالذكر أن التقدم نحو المستوى السادس يزيد من المجموعة الفرعية لعلماء الرياضيات المبدعين.



شكل 4، 2: تحقيق أقصى قدر ممكن من التوافق بين الإبداع والنبوغ

وعلى الرغم من أن النموذج المفاهيمي ثلاثي تكاملي (Triadic) في طبيعته، فإنه يختلف عن النماذج العامة التي اقترحها رينزولي (Renzulli, 1978-1986) وستيرنبرج (Sternberg, 1997)، من حيث إنه يوضح العلاقة بين الإبداع والنبوغ في مجالات محددة من الرياضيات. ويحتوي النموذج على عناصر مفهوم رينزولي ثلاثي الحلقات للتفوق، ووجهة نظر ستيرنبرج الثلاثية للتفوق. يشير مفهوم رينزولي ثلاثي الحلقات إلى أن النبوغ تفاعل بين القدرات التي هي أعلى من المعدل، والسلوك الملتزم بالتركيز على المهمة، والإبداع. يتميز عالم الرياضيات الاحترافي (المستوى 5) بقدرات رياضية فوق المعدل بين علماء الرياضيات، والالتزام بالبحث. ومع ذلك، يبقى الإبداع في الرياضيات عند هذا المستوى سلعة بعيدة المنال تظهر بين مجموعة ضئيلة من مجموع علماء الرياضيات. يمكن توكيد مفهوم رينزولي للالتزام بالمهمة في العالم المثالي لمرحلة الروضة- الصف 12 تحت مبدأ

الشك، الذي يرى أن المسائل الصعبة تستغرق وقتاً طويلاً ونضالاً مضنياً حتى تُحل. وترى وجهة نظر ستيرنبرج الثلاثية في الإبداع أن الأفراد الموهوبين يمتلكون مزيجاً متفاوتاً من النبوغ التحليلي والتركيبي (الإبداعي) والعملي. وقد لقيت وجهة النظر هذه صدى خاصاً في عالم الرياضيات، إذ يمتلك علماء الرياضيات (المستوى 5) المنتجون في مجال بحوثهم مستوى عالياً من القدرات التحليلية والعملية، حيث تظهر القدرات العملية في اختيار مسائل يمكن حلها ونشرها. ويمتلك أيضاً علماء الرياضيات المبدعون (المستويان 6 و 7) مستويات أعلى من قدرات التركيب، مقارنة بعلماء الرياضيات في المستوى 5، من حيث إن البحوث التي ينشرونها تفتح آفاقاً جديدة للبحث لدى علماء الرياضيات الآخرين. وخير مثال على ذلك البحث الذي قام به «هويت» (Hewitt) عام (1948). وربما تجري مقايضة هذه المستويات العالية من قدرات التركيب بمستويات أقل من القدرات العملية. مثلاً، غالباً ما يعتمد علماء الرياضيات في (المستويين 7/6) إلى ترك البرهان في المنتصف، أو حتى أنهم يهملون نشر أعمالهم أحياناً.

هناك كثير من الأمثلة في تاريخ الرياضيات التي تظهر فيها مثل هذه النزعات بين علماء الرياضيات المبدعين جداً. مثلاً، ترك عالم الرياضيات الهندي سرينفازا رامانوجون (Srinivasa Ramanujan, 1887–1920)، مذكرات كتبت بخط اليد مليئة بالنظريات غير المثبتة، التي لا تزال تسهم في التوجهات الخصبة لنمو نظرية الأعداد التحليلية والدوال الإهليجية (Elliptic Functions) والسلاسل اللانهائية (Infinite Series) والكسور المستمرة (Continued Fractions). وأسهمت أيضاً قائمة ديفيد هيلبيرت (David Hilbert, 1900) المكونة من ثلاث وعشرين مسألة، التي قدمها لعلماء الرياضيات في المؤتمر الذي عقد عام 1900 في باريس، في ظاهرة نمو الرياضيات، والاتجاه الخاص الذي نمت فيه (Rowe & Gray, 2000). ولا تزال فرضية «ريمان» مسألة مفتوحة تعكس آثاراً عميقة على مجالات كثيرة من الرياضيات. وخير مثال حديث على هذا، هو مثال بول إردوس (Paul Erdos) وهو عالم رياضيات معاصر عبقرى غامض، اشتهر بإعطاء علماء الرياضيات الآخرين تخمينات، و/أو مسائل بتلميحات وحلول جزئية أو دون حلول. وقد اتسم علماء الرياضيات الذين حلوا تلك المسائل وكتبوا النتائج، باللطف حيث أدرجوا اسم

إردوس بصفته مشاركاً في تأليف بحوثهم. وفي الحقيقة أن زملاء إردوس في التأليف أعطوا لأنفسهم رقماً أسموه (إردوس رقم 1، Erdos Number 1)، وأطلق علماء الرياضيات الذين شاركوهم في البحوث على أنفسهم (إردوس رقم 2، Erdos Number 2) وهكذا.

يمكن أيضاً رؤية وجهة نظر ستيرنبرج الثلاثية للموهبة في النموذج في الشكل 4: 2. ولكي نزيد إمكانات الإبداع في الظهور إلى حدها الأقصى في حصة الرياضيات، يمكن أن يشجع المعلمون الطلاب المبدعين رياضياً على المشاركة في تقديم رؤاهم التركيبية في الربط بين المسائل المتنوعة مع بقية الطلاب في الصف (Sriraman, 2004a). ويمكن أيضاً استخدام الأمثلة التاريخية في التفكير التركيبي (Synthetic Thinking) في الرياضيات، التي يبدو كأنها تربط الأفكار والمفاهيم المتنوعة في الصف، لإضفاء مزيد من الإيضاح على قوة هذه الرؤى وقيمتها. تحوي المبادئ العلمية والسوق الحرة والجمالية على جوانب من وجهة نظر ستيرنبرج الثلاثية في النبوغ.

وتشتمل المبادئ الخمسة على أفكار لباحثين متنوعي الثقافات، يمكن أن تعزز الإبداع بوجه عام عن طريق ربط مفاهيم الآداب والعلوم بالرياضيات وبالعكس. وتتمثل السمات المشتركة لمئات الباحثين متنوعي الثقافات (قدامى ومعاصرين)، كما حلّها روبرت روت-بيرشتاين (Root-Bernstein 1989, 1996, 2000, 2001, 2003) وآخرون غيره، في: (أ) التفكير الهندسي البصري و/أو التفكير في المبادئ الهندسية، (ب) الانتقال المتكرر في وجهات النظر (ج) التفكير في التشبيهات (Analogies) (د) الوعي المعرفي أو معرفة قيود المجال، (هـ) الاهتمام باستقصاء المفارقات التي غالباً ما تظهر التفاعل بين اللغة والرياضيات والعلوم، (و) الاعتقاد بموسى أوكام (Occam's Razor)، أو الاعتقاد أن الأفكار البسيطة السهلة أفضل من المعقدة، (ز) الاعتراف بدور المصادفة (ح) النزعة نحو التأثير في الجدول الزمني (Sriraman, 2005).

موسى⁽¹⁾ أو مقص أو كام (Occam's Razor) مبدأ وضعه الإنجليزي وليام الأوكامي (1288-1347)، من الأمثلة الحديثة التي ساقها روت-بيرشتاين، مدى تأثير لوحات الرسام الهولندي ماوريتس كورنيليس إيشر (Escher Maurits Cornelis) المستوحاة رياضياً، في الفيزيائي الرياضي البريطاني روجر بنروز (Roger Penrose)، الذي زار أحد معارض الفنان في العام 1954. وبتحفيز من الزوايا التي رسمها إيشر في بعدين وبدت مستحيلة، بدأ بنروز بإيجاد أشياءه المستحيلة، مثل المثلث «المستحيل» الشهير الذي يظهر مثلثاً ثلاثي الأبعاد ينعطف إلى الأمام وإلى الخلف ببعدين. وكتب روت - بيرشتاين عن ذلك:

«عرض روجر بنروز المثلث على والده ليونيل بنروز Lionel S. Penrose وهو عالم أحياء اشتغل بالفن، واخترع السلم المستحيل (Impossible Staircase) الذي يبدو فيه السلم بصورة حلزونية إلى الأعلى وإلى الأسفل في آن معاً، وبعث بنسخة منه إلى إيشر، الذي طور الجوانب الفنية للسلم المستحيل بطرق باتت مشهورة حتى يومنا هذا.» (ص. 274).

ومن التأثيرات المشهورة لفن إيشر في الرياضيات مسألة التبليط (Tiling Problem) الدورية واللا دورية (Periodic And Aperiodic) التي اشتهرت بوساطة روجر بنروز ومارتن جاردنر (Martin Gardner)، وساعدت دارسي خصائص البلورات (Crystallographers) على فهم بنية كثير من السبائك المعدنية اللادورية (Root-Berstein, 2003).

الطبيعة المتغيرة للرياضيات

يتمثل الجانب المهم الآخر في هذه المناقشة في السؤال المتصل بالتوازن بين الرياضيات البحتة والتطبيقية. حيث تشير الدراسات إلى أن طبيعة الرياضيات ذات الصلة بهذا العصر قد تغيرت كذلك. وعلى الرغم من الجذور الغنية والقديمة، فقد ارتأى ستين (Steen, 2001) أن على علماء الرياضيات في زماننا هذا أن يدينوا بالعرفان إسهامات الباحثين في فروع المجالات المعرفية الخارجية كالأحياء والفيزياء والمال والعلوم

(1) وينص على أن: أبسط الفرضيات هي أصحها. ويعتمد المبدأ على أن شرح أي ظاهرة يجب أن يقوم على أقل عدد من الفرضيات من خلال ترك أي

المعلوماتية والاقتصاد والتربية والطب وما إلى ذلك، الذين استخدموا الرياضيات بنجاح في إيجاد نماذج كان لها تطبيقات عميقة ومؤثرة في عالمنا هذا. وفي الواقع أن حقل الرياضيات نجم عن هذه الدراسات البيئية متعددة التخصصات، والتطبيقات التي انبثقت عنها وازدهرت مع بزوغ القرن الحادي والعشرين.

ومع ذلك، فإن حل المسائل على نحو ما هو مطبّق في غرفة الصف لا يشتمل على هذا المنحى البيئي متعدد التخصصات ونمذجة ما يحصل في العالم الحقيقي. أما في المرحلة الجامعية في الولايات المتحدة، فيتركز الاهتمام بصورة متزايدة على الإسراع في إعداد طلاب اليوم في المجالات المناسبة للمستقبل. ويعلق «ستين» على ذلك قائلاً: يعتمد علم الأحياء على البيانات والحساب والنماذج اعتماداً كبيراً، فقد أصبحت أقرب إلى الرياضيات في كل جانب من جوانبها (ص. Xi). وفي هذا السياق، يمول مجلس البحوث الوطني ومؤسسة العلوم الوطنية الجامعات على نحو كبير للبدء ببرامج دكتوراة متعددة التخصصات (Interdisciplinary Doctoral Programs) تجمع بين الرياضيات وغيرها من العلوم، بهدف تأهيل علماء ماهرين في تحويل الحقائق إلى «رياضيات». وعادة ما تكون الرياضيات في المرحلة الثانوية بوابة للعبور إلى عالم الموضوعات الرياضية الواسع العميق. ومع ذلك، لا تزال معظم مناهج الرياضيات التقليدية تعامل بالمعالجة التقليدية للرياضيات، مقارنة بالمنحى النموذجي والمنحى متعدد التخصصات المستخدم في العالم الحقيقي. وقد اشتكى شيفيلد، بينيت، بيريوزابيل، ديرموند، وويرثيمر (Sheffield, Bennett, Berriozabal, Dearmond, And Wertheimer, 1995) من عدم إحداث تغيير كثير في مناهج الرياضيات منذ ذلك الحين، وأشاروا إلى أن الطلاب النابغين في الرياضيات كانوا الأقل إفادة من التغيير، وغير قادرين على استخدام موهبتهم التي يمكن تصويرها على أنها مورد اجتماعي ثمين للمحافظة على القيادة في عالم متغير تقنياً. وزيادة على ذلك، تفيد رياضيات المرحلة الثانوية أيضاً بصفتها حارساً على بوابة الدراسات المتقدمة في كثير من المجالات (Kerr, 1997).

ويمكن القول أن التعامل التقليدي مع الرياضيات له أثر قليل أو معدوم في الأنشطة المستندة إلى نمذجة تتطلب القدرة على التواصل والعمل بروح الفريق. إضافة إلى ذلك، فقد حالت الرياضيات التقليدية تاريخياً بين الطالبات المتفوقات ومتابعة أربع سنوات من رياضيات المرحلة الثانوية. ويصعب معالجة مثل هذا العجز في مستوى الجامعة، ويترتب عليه وجود عدد قليل من الطلاب القادرين على العمل بمستوى الخريجين في الحقول متعددة التخصصات، مثل البيولوجيا الرياضية والمعلوماتية الحيوية (Steen, 2005). وفي ضوء ذلك، يمكن لأي عالم تربوي يقرأ التاريخ أن يتنبأ بأثر كرة الثلج أو دورة اللوم (Cycle Of Blaming) لعدم الإعداد الكافي في المرحلة الثانوية مروراً بالمرحلة المتوسطة وانتهاءً بالمرحلة الابتدائية، وهذا يعني أن علينا أن نعمل من الأسفل إلى الأعلى. أي، يتعين علينا البدء من مراحل الدراسة المبكرة بدراسة النظم المعقدة التي تحدث في واقع الحياة. وأشار ليش وكابوت وهاميلتون (Lesh, Kaput And Hamilton, 2006) إلى تلك المشروعات، كالتي تقدمها جامعة بيردو (Purdue University) للمساواة بين الجنسين في مشروع الهندسة، التي تقاس فيها قدرات الطلاب وتحصيلهم باستخدام مهمات صُممت لتحاكي واقع الحياة في حل المسائل. وقالوا إن كثيراً من أوجه الفهم والقدرات التي تبرز في هذه المشروعات بصفتها أساسية للنجاح، لا يُركز عليها في الكتب المدرسية أو الاختبارات التقليدية. وإن ما يثير الدهشة، أن هؤلاء الطلاب ينحدرون من مجتمعات ممثلة بنسبة ضئيلة جداً، ولا سيما الإناث والأقليات العرقية، في مجالات تؤكد على الرياضيات والعلوم والتقانة، وهم محرومون بسبب عدم تعرّف قدراتهم في السابق (Lesh & Sriraman, 2005A, 2005B; Sriraman, 2005).

وهكذا، فقد يكون من المفيد بصورة أكثر أن ينتظم الطلاب في أنشطة استنباط نماذج تعرضهم لنظم حياة واقعية معقدة بدلاً من التركيز على استنباط حل المسائل. وهناك احتمال كبير أن يتابع الطلاب الموهوبون في الرياضيات النظم المفاهيمية الرياضية الناجمة عن هذه الاستقصاءات، من حيث تطبيقاتها على وجه التحديد، إضافة إلى كونها توجد أفكاراً بدئية يمكن اكتشاف النظريات من خلالها، وهذا يماثل تماماً ما يفعله علماء الرياضيات الحقيقيون (Sriraman & Strzelecki, 2004).

ملاحظات ختامية

ختاماً، لا يقتصر هدف مجتمع تعليم الموهوبين على ضمان تحقيق الطلاب الموهوبين في الرياضيات قدراتهم ليصبحوا علماء رياضيات منتجين وعمليين، بل يشمل التحقق أيضاً من عدم إهمال الطلاب المبدعين في الرياضيات من بين الموهوبين فيها، فقد يكون هؤلاء في المحصلة هم الطلاب القادرين على التقدم بهذا الحقل إلى الأمام من خلال طرائقهم ورؤاهم غير العادية وغير التقليدية. وفي نهاية المطاف، يؤدي أثر الفراشة (Butterfly Effect) الناجم عن إهمال إحدى هذه القدرات لدى طلاب المستوى 6 (علماء الرياضيات المبدعين) في غرفة الصف، إلى التأثير فعلاً في حياة آلاف الطلاب من المستوى 5 (علماء الرياضيات المنتجين). والحالة التي توضح هذه التأثيرات بعيدة المدى لأثر الفراشة هذا يتمثل في قائمة مسائل هيلبرت الرياضية (Hilbert, 1900) التي عززت كلاً من الرياضيات البحتة والتطبيقية، وكذلك ملاحظات رامانوجان المدونة في دفاتر مذكراته.

قائمة المراجع

- Barnes, M. (2000). *Magical Moments In Mathematics: Insights Into The Process Of Coming To Know*. For *The Learning Of Mathematics*, 20(1), 33–43. Barnett, L.
- B., & Corazza, L. (1993). *Identification Of Mathematical Talent And Programmatic Efforts To Facilitate Development Of Talent*. *European Journal For High Ability*, 4, 48–61
- Behr, M., & Khoury, H. (1986). *Children's Inferencing Behavior*. *Journal For Research In Mathematics Education*, 17(5), 369–381.
- Benbow, C. P., Lubinski, D. & Sushy, B. (1996). *The Impact Of Smpy's Educational Programs From The Perspective Of The Participant*. In C. P. Benbow & D. Lubinski(Eds), *Intellectual Talent* (Pp. 266–300). Baltimore: Johns Hopkins University Press.
- Birkhoff, G. D. (1956). *Mathematics Of Aesthetics*. In J. R. Newman (Ed.), *The World Of Mathematics*, Vol. 4 (7Th Ed., Pp. 2185–2197). New York: Simon And Schuster.

- Birkhoff, G. D.(1969). *Mathematics And Psychology* . Siam Review, 11, 429–469.
- Brinkmann, A. (2004). The Experience Of Mathematical Beauty. In Contributions To P. C. Clarkson, M. Hannula (Organizers), Tsg 24: Students' Motivation And Attitudes Towards Mathematics And Its Study. Proceedings Of The 10Th International Congress Of Mathematics Education, Copenhagen, Denmark.
- Brower, R. (1999). *Dangerous Minds : Eminently Creative People Who Spent Time In Jail*. Creativity Research Journal, 12(1), 3–14.
- Burton, L. (1999A). *The Practices Of Mathematicians : What Do They Tell Us About Coming To Know Mathematics?* Educational Studies In Mathematics, 37(2), 121–143.
- Burton, L. (1999B). *Why Is Intuition So Important To Mathematics But Missing From Mathematics Education ?* For The Learning Of Mathematics, 19(3), 27–32.
- Chambers, J. A. (1964). Relating Personality And Biographical Factors To Scientific Creativity. Psychological Monographs, 78(7), 584.
- Chang, L. L. (1985). *Who Are The Mathematically Gifted Elementary School Children ?* Roeper Review, 8(2), 76–79.
- Craft, A. (2003). *The Limits To Creativity In Education : Dilemmas For The Educator*. British Journal Of Educational Studies, 51(2), 113–127.
- Craft, A. (2002). *Creativity In The Early Years: A Lifewide Foundation* . London: Continuum.
- Cramond, B. (1994). *Attention–Deficit Hyperactivity Disorder And Creativity—What Is The Connection?* Journal Of Creative Behavior, 28, 193–210.
- Crene, P. (2003). *Why Can't We Allow Students To Be More Creative?* Teaching In Higher Education, 8(2), 273–277.
- Csikszentmihalyi, M. (1988). *Society, Culture, And Person : A Systems View Of Creativity*. In R. J. Sternberg (Ed.), *The Nature Of Creativity: Contemporary Psychological Perspectives* (Pp. 325–339). Cambridge University Press.
- Csikszentmihalyi, M. (2000). *Implications Of A Systems Perspective For The Study Of Creativity* . In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook Of Creativity* (Pp. 313–338). Cambridge University Press.

- Davis, G. A. (1997). *Identifying Creative Students And Measuring Creativity* . In N. Colangelo & G. A. Davis (Eds.), *Handbook Of Gifted Education* (Pp. 269–281). Boston: Allyn Bacon.
- Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience* . New York: Houghton Mifflin.
- Davydov, V. V (1988). *The Concept Of Theoretical Generalization And Problems Of Educational Psychology* . *Studies In Soviet Thought*, 36, 169–202.
- Davydov, V. V. (1990). *Type Of Generalization In Instruction : Logical And Psychological Problems In The Structuring Of School Curricula*. In J. Kilpatrick (Ed.), *Soviet Studies In Mathematics Education*, Vol. 2, Reston, Va: National Council Of Teachers Of Mathematics.
- Diezmann, C., & Watters, J. (2003). *The Importance Of Challenging Tasks For Mathematically Gifted Students* . *Gifted And Talented International*, 17(2), 76–84.
- Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1986). *On The Aesthetics Of Mathematical Thought. For The Learning Of Mathematics* , 6(1), 2–10.
- Einstein, A., & Inheld, L. (1938). *The Evolution Of Physics*. New York: Simon And Schuster .
- English, L. D. (In Press). *Problem Posing In The Elementary Curriculum* . In F. Lester, & R. Charles (Eds.), *Teaching Mathematics Through Problem Solving*. Reston, Virginia: National Council Of Teachers Of Mathematics.
- Ervynck, G. (1991). *Mathematical Creativity*. In D. Tall (Ed.) . *Advanced Mathematical Thinking* (Pp. 42–53). Kluwer Academic Publishers.
- Frensch, P., & Sternberg, R. (1992). *Complex Problem Solving: Principles And Mechanisms* . Mahwah, Nj: Erlbaum.
- Goldberg, A., & Suppes, P. (1972). *A Computer Assisted Instruction Program For Exercises On Finding Axioms* . *Educational Studies In Mathematics*, 4, 429–449.
- Greenes, C. (1981). *Identifying The Gifted Student In Mathematics* . *Arithmetic Teacher*, 28(6), 14–17.
- Gruber, H. E. (1989). *The Evolving Systems Approach To Creative Work* . In D. B. Wallace & H. E. Gruber, *Creative People At Work: Twelve Cognitive Case Studies*. Oxford: Oxford University Press.

- Gruber, H. E. (1981). *Darwin On Man*. Chicago: University Of Chicago Press .
- Gruber, H. E., & Wallace, D. B. (2000). *The Case Study Method And Evolving Systems Approach For Understanding Unique Creative People At Work* . In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook Of Creativity* (Pp. 93–115). Cambridge University Press .
- Hadamard, J. W. (1945). *Essay On The Psychology Of Invention In The Mathematical Field*. Princeton, Nj: Princeton University Press.
- Hardy, G. H. (1940). *A Mathematician's Apology* . London.
- Heid, M. K. (1983). *Characteristics And Special Needs Of The Gifted Student In Mathematics* . *The Mathematics Teacher*, 76, 221–226.
- Hershkowitz, R. (1989). *Visualization In Geometry—Two Sides Of The Coin* . *Focus On Learning Problems In Mathematics*, 11, 61–76.
- Hewitt, E. (1948). *Rings Of Real-Valued Continuous Functions* . *Transactions Of The American Mathematical Society*, 64, 45–99.
- Hilbert, D. (1900). *Mathematische Probleme* : Vortrag, Gehalten Auf Dem Internationalen Mathematiker-Congress Zu Paris 1900. *Gtt. Nachr.* 253–297.
- Jackson, L. (2002). *Freaks, Geeks And Asperger Syndrome* : A User Guide To Adolescence. London: Jessica Kingsley.
- James, I. (2003). *Austism In Mathematicians* . *The Mathematical Intelligencer*, 25(4), 62–65.
- Kajander, A. (1990) *Measuring Mathematical Aptitude In Exploratory Computer Environments* . *Roeper Review*, 12(4), 254–256.
- Kanevsky, L. S. (1990). *Pursuing Qualitative Differences In The Flexible Use Of A Problem Solving Strategy By Young Children* . *Journal For The Education Of The Gifted*, 13, 115–140.
- Kerr, B. A. (1997). *Developing Talents In Girls And Young Women* . In N. Colangelo & G. A. Davis (Eds.), *Handbook Of Gifted Education (2Nd Ed., Pp. 483–497)* . Boston: Allyn & Bacon.
- Kieren, T., & Pirie, S. (1991). *Recursion And The Mathematical Experience* . In L. P. Steffe (Ed.) *Epistemological Foundations Of Mathematical Experience* (Pp. 78–102). New York: Springer-Verlag.
- Kiesswetter, K. (1985). *Die Frderung Von Mathematisch Besonders Begabten Und Interessierten Schülern—Ein Bislam Vernachlässigtes Sonderpädagogisches*

- Problem* . Der Mathematische Und Naturwissenschaftliche Unterricht, 38, 300–306.
- Kiesswetter, K. (1992). *Mathematische Begabung* . Ber Die Komplexitt Der–
phnomene Und Die Unzulnglichkeiten Von Punktbewertungen. Math–
ematik– Unterricht, 38, 5–18.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology Of Mathematical Abilities In School Chil–
dren* . (J. Teller, Trans. & J. Kilpatrick & I. Wirszup, Eds.). Chicago: Univer–
sity Of Chicago Press.
- Kuhn, T. S. (1962). *The Structure Of Scientific Revolutions*. Chicago : University Of
Chicago Press.
- Lesh, R., Kaput, J., & Hamilton, E. (Eds.) (2006, In Press), *Foundations For The
Future: The Need For New Mathematical Understandings & Abilities In The
21St Century*. Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R., & Sriraman, B. (2005A). *John Dewey Revisited– Pragmatism And The
Models– Modeling Perspective On Mathematical Learning* . In A. Beckmann,
C. Michelsen & B. Sriraman (Eds). *Proceedings Of The 1St International
Symposium On Mathematics And Its Connections To The Arts And Sci–
ences*. (Pp. 32–51). May 18–21, 2005, University Of Schwaebisch Gmuend:
Germany. Franzbecker Verlag,
- Lesh, R., & Sriraman, B. (2005B). *Mathematics Education As A Design Science* .
*International Reviews On Mathematical Education (Zentralblatt Für Dida–
ktik Der Mathematik)*, 37(6), 490–505.
- Lester, F. K., & Kehle, P. E. (2003). *From Problem Solving To Modeling : The Evo–
lution Of Thinking About Research On Complex Mathematical Activity*. In
R. Lesh & H. Doerr (Eds.) *Beyond Constructivism: Models And Modeling
Perspectives On Mathematics Problem Solving, Learning And Teaching* (Pp.
501–518). Mahwah, Nj: Erlbaum.
- Marshak, D. (2003). *No Child Left Behind : A Foolish Race Into The Past*. Phi Delta
Kappan, 85(3) 229–231.
- Massé, L., & Gagné, F. (2002). *Gifts And Talents As Sources Of Envy In High School
Settings* . *Gifted Child Quarterly*. 46(1), 15–29.
- Minsky, M. (1985). *The Society Of Mind* . New York: Simon & Schuster Inc.
National Council Of Teachers Of Mathematics (1989). *Curriculum And
Standards For School Mathematics*, Reston, Va: Author.

- Nickerson, R. S. (2000). *Enhancing Creativity*. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook Of Creativity* (Pp. 392–430). *Cambridge University Press*.
- Plucker, J., & Beghetto, R. A. (2004). *Why Creativity Is Domain General*, Why It Looksdomain Specific, And Why The Distinction Does Not Matter. In R. J. Sternberg, E. L. Grigorenko & J. L. Singer (Eds.), *Creativity: From Potential To Realization* (Pp. 153–168). Washington Dc: American Psychological Association.
- Policastro, E., & Gardner, H. (2000). *From Case Studies To Robust Generalizations : An Approach To The Study Of Creativity*. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook Of Creativity* (Pp. 213–225). Cambridge University Press.
- Poincaré, H. (1948). *Science And Method*. New York: Dover.
- Polya, G. (1945). *How To Solve It*. Princeton, Nj: Princeton University Press.
- Polya, G. (1954). *Mathematics And Plausible Reasoning : Induction And Analogy In Mathematics* (Vol. Ii). Princeton University Press.
- Presmeg, N. C. (1986). *Visualization And Mathematical Giftedness*. *Educational Studies In Mathematics*, 17, 297–311.
- Renzulli, J. S. (1978). *What Makes Giftedness ? Reexamining A Definition*. *Phi Delta Kappan*, 60, 180–184, 261.
- Renzulli, J. S. (1986). *The Three–Ring Conception Of Giftedness: A Developmental Model For Creative Productivity*. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), *Conceptions Of Giftedness* (Pp. 332–357). New York: Cambridge University Press.
- Ripple, R. E. (1989). *Ordinary Creativity*, *Contemporary Educational Psychology*, 14, 189–202.
- Root–Bernstein, R. S. (1989). *Discovering*. Cambridge, Ma : Harvard University Press.
- Root–Bernstein, R. S. (1996). *The Sciences And Arts Share A Common Creative Aesthetic*. In A. I. Tauber (Ed.), *The Elusive Synthesis: Aesthetics And Science* (Pp. 49–82). Netherlands: Kluwer.
- Root–Bernstein, R. S. (2000). *Art Advances Science*. *Nature*, 407, 134.
- Root–Bernstein, R. S. (2001). *Music, Science , And Creativity*. *Leonardo*, 34, 63–68.

- Root–Bernstein, R. S. (2003). *The Art Of Innovation : Polymaths And The Univer–sality Of The Creative Process*. In L. Shavanina (Ed.), *International Hand–book Of Innovation* , (Pp. 267–278), Amsterdam: Elsevier.
- Rowe, D., & Gray, J. (2000). *The Hilbert Challenge* . Oxford University Press.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Lawrence Erlbaum & As–sociates Schoenfeld, A. H. (1993). *Learning To Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, And Sense Making In Mathematics*. In D. Grouws (Ed.) *Handbook of Research On Mathematics Teaching And Learn–ing* (Pp. 334–370). New York: Mc– Millan.
- Shapiro, S. I. (1965). *A Study Of Pupil's Individual Characteristics In Processing Mathematical Information* . *Voprosy Psikhologii*, No. 2.
- Shaw, M. P. (1994). *Affective Components Of Scientific Creativity* . In M. P. Shaw & M. A. Runco (Eds.), *Creativity And Affect* (Pp. 3–43), Norwood, Nj: Ablex.
- Sheffield, L. J., Bennett, J., Berriozabal, M., Dearmond, M., & Wertheimer, R. (1995). *Report Of The Task Force On The Mathematically Promising*. Res–ton, Va: National Council Of Teachers Of Mathematics.
- Silver, E. A. (Ed.) (1985). *Teaching And Learning Mathematical Problem Solving : Multiple Research Perspectives*. Hillsdale, Nj: Erlbaum.
- Smith, J. M. (1966). *Setting Conditions For Creative Teaching In The Elementary School* . Boston: Allyn And Bacon.
- Sowell, T. (2001). *The Einstein Syndrome* . New York: Basic Books.
- Sriraman, B. (In Press). *Implications Of Research On Mathematics Gifted Educa–tion For The Secondary Curriculum*. To Appear In C. Callahan & J. Plucker (Editors) *What The Research Says: Encyclopedia On Research In Gifted Ed–ucation*. Prufrock Press.
- Sriraman, B. (2002). *How Do Mathematically Gifted Students Abstract And Gen–eralize Mathematical Concepts*. *Nagc 2002 Research Briefs*, 16, 83–87.
- Sriraman, B. (2003). *Mathematical Giftedness , Problem Solving, And The Ability To Formulate Generalizations*. *The Journal Of Secondary Gifted Education*. 14(3), 151–165. Sriraman, B. (2004A). *Reflective Abstraction, Uniframes And The Formulation Of Generalizations*. *The Journal Of Mathematical Be–havior*, 23(2), 205–222.

- Sriraman, B. (2004B). *Discovering A Mathematical Principle*: The Case Of Matt. *Mathematics In School*, 33(2), 25–31.
- Sriraman, B. (2004C). *The Characteristics Of Mathematical Creativity*. *The Mathematics Educator*, 14(1), 19–34.
- Sriraman, B. (2004D). *Gifted Ninth Graders' Notions Of Proof*. Investigating Parallels In Approaches Of Mathematically Gifted Students And Professional Mathematicians. *Journal For The Education Of The Gifted*, 27(4), 267–292.
- Sriraman, B. (2005). Philosophy As A Bridge Between Mathematics Arts And The Sciences. In A. Beckmann, C. Michelsen, & B. Sriraman Et Al (Eds.), *Proceedings Of The 1St International Symposium On Mathematics And Its Connections To The Arts And Sciences* (Pp. 7–31). May 18–21, 2005, University Of Schwaebisch Gmuend, Germany: Franzbecker Verlag.
- Sriraman, B., & English, L. (2004). *Combinatorial Mathematics*: Research Into Practice. *The Mathematics Teacher*, 98(3), 182–191
- Sriraman, B., & Strzelecki, P. (2004). *Playing With Powers*. *The International Journal For Technology In Mathematics Education*, 11(1), 29–34.
- Steen, L. A. (2001). *Revolution By Stealth*. In D. A. Holton (Ed). *The Teaching And Learning Of Mathematics At University Level* (Pp. 303–312). Kluwer Academic Publishers: Dodrecht.
- Steen, L. A. (2005). *Math & Bio 2010: Linking Undergraduate Disciplines*. *Mathematical Association Of America*.
- Sternberg, R. J. (1997). A Triarchic View Of Giftedness: Theory And Practice. In N. Colangelo & G. A. Davis (Eds.), *Handbook Of Gifted Education* (Pp. 43–53). Boston: Allyn Bacon.
- Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (1996). Investing In Creativity. *American Psychologist*, 51, 677–688.
- Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (2000). *The Concept Of Creativity*: Prospects And Paradigms. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook Of Creativity* (Pp. 93–115). Cambridge University Press.
- Suppes, P., & Binford, F. (1965). *Experimental Teaching Of Mathematical Logic In The Elementary School*. *The Arithmetic Teacher*, 12, 187–195.

- Torrance, E. P. (1981). *Non-Test Ways Of Identifying The Creatively Gifted* . In J. C. Gowan, J. Khatena, & E. P. Torrance (Eds.), *Creativity: Its Educational Implications* (2Nd Ed., Pp. 165–170). Dubuque, Ia: Kendall/Hunt.
- Torrance, E. P. (1974). *Torrance Tests Of Creative Thinking: Norms-Technical Manual*. Lexington, Ma: Ginn.
- Usiskin, Z. (2000). The Development Into The Mathematically Talented. *Journal Of Secondary Gifted Education*, 11(3), 152–162.
- Vitale, B. (1989). *Elusive Recursion : A Trip In A Recursive Land*. *New Ideas In Psychology*, 7(3), 253–276.
- Vygotsky, L. (1962). *Thought And Language*. Cambridge , Ma: Mit Press.
- Vygotsky, L. (1978). *Mind In Society: The Development Of Higher Psychological Processes*. Cambridge, Ma: Harvard University Press.
- Wallas, G. (1926). *The Art Of Thought* . New York: Harcourt Brace.
- Wason, P. C., & Johnson-Laird, P. N. (1972). *Psychology Of Reasoning*. Cambridge, Ma: Harvard University Press .
- Wertheimer, M. (1945). *Productive Thinking* . New York: Harper.
- Weisberg, R.W. (1993). *Creativity : Beyond The Myth Of Genius*. New York: Free–man.
- Yakimanskaya, I. S. (1970). *Individual Differences In Solving Geometry Problems On Proof* . In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.). *Soviet Studies In The Psychology Of Learning And Teaching Mathematics* (Vol. 4), Stanford: School Mathematics Study Group.
- Ypma, E.G. (1968). *Predictions Of The Industrial Creativity Of Research Scientists From Biographical Information* . *Dissertation Abstracts International*, 30, 5731B– 5732B.

ملاحظات

1. تضع هذه العلامات الطلاب ضمن مجموعة المئين 95–99 تقريباً.
2. جون تشارلز فيلدز (John Charles Fields, 1863–1932) هو الذي أسس جوائز ميداليات فيلدز التي تعادل جائزة نوبل لحقل الرياضيات. توزع هذه

الميداليات سنوياً بين علماء الرياضيات دون سن الأربعين عاماً في المؤتمر الدولي للرياضيات.

3. وجد بهر وكوري (Behr And Khoury, 1986) أن سلوك الاستدلال لطلاب المدارس الصغار كان مماثلاً لما وجدته واسون وجونسون-ليرد (Wason And Johnson-Laird, 1972).

4. تنص فرضية ريمان (Riemann Hypothesis) على أن دالة أصفار ريمان زيتا (The Zeros Of Riemann's Zeta Function) تكوّن جميعها جزءاً حقيقياً من نصف واحد. وكان هذا تخميناً من ريمان في العام 1859، ومنذ ذلك الحين، لم يثبت أحد هذا التخمين أو يثبت بطلانه. وربما تكون هذه المسألة حالياً من أكثر المسائل في الرياضيات التي لم يتسنّ للعلماء حلها منذ زمن بعيد.

5. من السهل أن يفهم الطلاب الجامعيون تخمين بيبرباخ (Bieberbach) مع بعض التعرض للتحليل المعقد بسبب الطبيعة الأولية للعبارة. تحول الدالة وحيدة التكافؤ f نقطة في قرص الوحدة إلى النقطة الممثلة بالعدد المركب $f(z)$ المعروف بسلاسل لانهائية $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + \dots$ ، حيث المعاملات a_2, a_3, a_4, \dots أعداد مركبة ثابتة تحدد f . وفي العام 1916، خمن بيبرباخ أنه بصرف النظر عن أي f نأخذها، فإن: $|a_n| \leq n$ ، وقد أثبت لويس برانجيز هذا في العام 1985.

