

عمليات حل المسائل الرياضية لدى الطلاب التايلانديين الموهوبين

معهد تطوير تدريس العلوم والتقنية

سوباترا باتتيزان Supattra Pattivisan

بانكوك، تايلاند مارغريت نيس Margaret L. Niess

جامعة ولاية أوريغون



ملخص

هدفت هذه الدراسة إلى فحص عمليات حل المسائل التي يستخدمها الطلاب التايلانديون الموهوبون في حل المسائل الرياضية غير الاعتيادية. وقد شارك في هذه الدراسة خمسة طلاب تايلانديين موهوبين، حيث مارس كل واحد منهم طريقة التفكير بصوت عالٍ قبل الشروع في حل ثلاث مسائل غير اعتيادية تركز على نظرية الأعداد (Number Theory) والتوافيق (Combinatorics) والهندسة (Geometry) على التوالي. واشتملت بيانات الدراسة على أشرطة فيديو للتفكير بصوت عالٍ، ومقابلات، وحل الطلاب المكتوبة، إضافة إلى الملاحظات الميدانية للباحثة. نجم عن هذه النتائج نموذج تايلاندي لعملية حل المسائل التي فصلت السلوك المتبع في كل مرحلة من المراحل الأربع، وهي: الفهم والتخطيط والتنفيذ والتحقق. وأسهمت السلوكات فوق المعرفية في أنشطة المشاركين في كل مرحلة من هذه المراحل، وقدمت النتائج أيضاً خمس فئات للأدلة ذات صلة بعمليات حل المسائل لدى الطلاب تمثلت في: المعرفة الرياضية المتقدمة، الاستعداد

لاستخدام طرائق حلول بديلة متعددة، تُذكر المعارف والخبرات السابقة والاستعداد لأخذها في الحسبان، والاعتماد على الوجدان، ودعم الآباء والمعلمين.

خلفية الدراسة

يُعدُّ حل المشكلات أحد أشكال التعلم الاستقصائي، حيث تطبق المعرفة الموجودة في موقف جديد أو غير مألوف من أجل اكتساب معرفة جديدة (Killen, 1996; Sternberg, 1995). وتتطلب المشاركة في حل المسائل تنسيق عمليات المعرفة وما فوق المعرفة، واختيار الإستراتيجيات المناسبة وتطبيقها، إضافة إلى تعديل السلوك ليتواءم ومطالب المهام المتغيرة (Montague, 1991). وقد اقترحت مجموعة متنوعة من النماذج لوصف العمليات التي يستخدمها من يحلُّون المسائل منذ البداية إلى أن يتمكنوا من حل مهامهم. مثلاً، يتألف نموذج بوليا من أربع مراحل، هي: فهم المسألة، وضع خطة، تنفيذ الخطة، والنظر إلى الوراء (Polya, 1957). وقد عدل كاروفالو وليستر (Carofalo And Lester, 1985) أخيراً نموذج بوليا، بإضافة مكونات المعرفة وما فوق المعرفة موضحة في أربع مراحل على النحو الآتي: التوجه، التنظيم، التنفيذ، والتحقق. وقدم مونتغو وأبلجيت (Montague And Applegate, 1993) نموذجاً يركز على سبع عمليات معرفية، هي: (القراءة، إعادة الصياغة، التصور، الافتراض، التقدير، الحساب، والتحقق، إضافة إلى ثلاث عمليات فوق معرفية، هي: (التعليم الذاتي، والاستجواب الذاتي، والمراقبة الذاتية). وقد أكد نموذجان فقط، هما نموذج غاروفالو وليستر (Garofalo And Lester) ونموذج مونتاج وأبلجيت، على استخدام الطلاب الموهوبين العمليات فوق المعرفية في الأدب. وقد أشارت البحوث التي أجريت على هذه النماذج إلى استخدام الطلاب الموهوبين إستراتيجيات فوق معرفية في حل المسائل. وأشارت أيضاً إلى استخدام جوهرى للتعليم الذاتي (Self-Instruction) على امتداد المسألة، إضافة إلى الاستجواب الذاتي (Self-Questioning) على نحوٍ متكرر في أثناء قراءة المسألة وبعد قراءتها، وكذلك أنشطة التقويم والمراقبة الذاتية الفاعلة.

يُعرّف الطلاب الموهوبون في الرياضيات أنهم الطلاب القادرون على القيام بعمليات رياضية تماثل تلك التي يقوم بها الطلاب الكبار، حيث يستطيعون استخدام عمليات تفكير نوعية مختلفة في حل المسائل (Sowell, Zeigler, Bergwell, & Cartwright, 1990). وفي الوقت ذاته، تتطلب عملية الحل الناجحة للمسائل الرياضية قدرة الطلاب على اختيار الإستراتيجيات المعرفية الملائمة، واستخدام فهم المسألة وتمثيلها وحلها (Mayer, 1992; Schoenfeld, 1985). تتضمن هذه القدرات المعرفة فوق المعرفية التي تعدُّ ضرورية للتعلم وحل المسائل عالية المستوى (Brown, 1978). وقد أثبتت البحوث أن المعرفة والعمليات فوق المعرفية تساعد من يحلون المسائل ليصبحوا أكثر كفاية في تناول المسائل من جوانب ثلاثة، هي: (أ) تحديد المسألة وتكوين تمثيل عقلي لعناصرها، (ب) اختيار خطط وإستراتيجيات معرفية ملائمة لتحقيق الهدف، (ج) تحديد العوائق التي تعيق عملية التقدم والسيطرة عليها (Davidson & Sternberg, 1998). وتشتمل العملية فوق المعرفية لحل المسائل على عمليات تخطيط مسائل محددة ومراقبتها وتقويمها لا سيما في تكوين التمثيلات العقلية، واختيار الإستراتيجيات الملائمة (Flavell, 1992; McCormick, 2003). يؤدي استخدام العمليات فوق المعرفية إلى دعم من يحلون المسائل في أثناء عملية الحل، ويحسن قدراتهم نحو تحقيق الهدف، إذ كلما زادت سيطرتهم على الإستراتيجيات التي يستعملونها ومراقبتها، أصبحت قدرتهم على حلها أفضل (Furtunano, Hecht, 1990; Tittle, & Alvarez, 1991; Kapa, 1998; Swanson, 1990).

تُعرّف المسائل غير الاعتيادية أنها تلك المسائل التي لا يكون الطلاب فيها على معرفة بمواقف المسألة، ولا يتوقع أن يكونوا قد حلّوها في الماضي، أو صادفوها في المنهاج بانتظام. وتستلزم المسائل غير الاعتيادية مرونة في التفكير وامتداداً للمعرفة السابقة، ويمكن أيضاً أن تشتمل على مفاهيم وأساليب ستُدْرَس بوضوح في مراحل متأخرة، وقد تتضمن اكتشاف روابط بين الأفكار الرياضية. واكتشف الباحثون أن المسائل الأكثر صعوبة تحتوي على إمكانات تفعيل وتنشيط الأداء فوق المعرفي إلى حد يتمكن فيه من يحلون المسائل من تنظيم عملياتهم المعرفية وضبطها على نحوٍ واعي. وإضافة إلى ذلك، يجبذ الطلاب الموهوبون حل المسائل غير الاعتيادية؛ لما تحويه من صعاب في التعامل معها.

وهكذا، فمن المرجح أن تساعد المسائل غير الاعتيادية على تنشيط الطلاب الموهوبين لإظهار قدراتهم العالية في حل المسائل.

درس الباحثون كيفية حل طلاب الثانوية الموهوبين المسائل الرياضية غير الاعتيادية. وأشارت النتائج التي توصلوا إليها إلى أن الطلاب الموهوبين يقضون وقتاً أطول في قراءة مسائل الرياضيات، وإعادة صوغها بمفردهم الخاصة، حيث تعينهم قدرة إعادة الصياغة هذه على فهم المسألة، وتشير أيضاً إلى إحدى السمات التي يتميزون فيها عن الآخرين في حل المسائل؛ فهم أكثر قدرة على التعبير اللفظي من غيرهم، وتزداد قدرتهم هذه عند مواجهتهم مسألة أكثر تعقيداً. إنهم يتذكرون النظريات لتوليد معلومات جديدة، ويطبّقون أيضاً المعرفة السابقة على المسألة، ويستعملونها بهدف الوصول إلى معرفة إضافية ذات صلة بالمسألة (Lawson & Chinnappan, 1994; Sriraman, 2003). ويحدد الطلاب الموهوبون فرضياتهم في المسألة، وكثيراً ما يضعون معادلة أو حلوّاً حسابية بعد قراءة المسألة، وعادة ما يلجؤون إلى تقسيم المسألة إلى مسائل فرعية. ويحددون أيضاً الهدف قبل وضع خطة لحل المسألة، ويحلونها بطريقة منتظمة، ويستعملون إستراتيجيات فاعلة. ويعيدون أيضاً حل المسألة من خلال قراءتها كلها، ويعيدون عمليات الحساب، ويفحصون الخطوات والعمليات ويتحققونها.

وعلى أي حال، فالمشاركون في كتابة الدراسة هم من أصحاب الثقافة الغربية التي تختلف عن الثقافة الآسيوية ولا سيما الثقافة التايلاندية، ويقولون إن الطلاب الآسيويين يتعرضون للرياضيات في المدرسة والبيت على نحو يفوق ما يتعرض له طلاب الولايات المتحدة (Geary, 1996)، ويؤدي أيضاً الجانب الاجتماعي، مثل الثقافة واللغة، دوراً في القدرة على حل المسألة، ولا سيما من حيث إدراكها وفهمها وتعريفها وتمثيلها. وارتأوا أيضاً أن الجانب الاجتماعي ربما يعين على تسهيل فهم المسألة والتفكير التباعدي في الحلول الممكنة (Pretz, Naples, & Sternberg, 2003). ومن المنطقي أن نفترض أن الاختلافات الثقافية قد تقود الطلاب إلى الأداء بطرق متباينة عند انهماكهم في حل مسألة رياضية.

وإذا نظرنا إلى وضع تربية الموهوبين في تايلاند، فإننا نلاحظ عدم توافر معرفة أو مصادر كافية لتعزيز تطور قدرات النابغون ورعايتها. وينجم عن هذه المشكلات وجود نظام فاشل وغير مجدٍ في رعاية الطلاب الموهوبين (Office of The National Education Commission – Onec, 2004). يُضاف إلى هذه الصعاب عدم إجراء عددٍ كافٍ من البحوث تتعلق بحل المسائل الرياضية لدى الطلاب التايلانديين الموهوبين، حيث إن هناك دراستين فقط ركزت على تطوير برنامجٍ إثرائي، بدلاً من فهم عملية حل المسألة لدى هؤلاء الطلاب (Klaimongkol, 2002; Thipatdee, 1996). وبناءً على ذلك، فإننا نرى أن هناك حاجة إلى دراسة كيفية تفكير طلاب الثانوية التايلانديين، ومعرفة الإستراتيجيات التي يستخدمونها عند حل مسائل غير اعتيادية. أما هدف هذه الدراسة فيتلخص في تفحص سؤالي الدراسة، وهما:

1. ما طبيعة عمليات حل المسألة التي يستخدمها الطلاب التايلانديون عند حلهم مسائل رياضية غير اعتيادية؟
2. ما السلوكات فوق المعرفية التي يظهرها الطلاب التايلانديون عند حلهم مسائل رياضية؟

خلفية البحث

من الطرق المستخدمة في تايلاند لتعزيز قدرات الطلاب الموهوبين في الرياضيات، مشاركتهم في أولمبياد الرياضيات الدولي (International Mathematical Olympiad, Imo). ويُعدُّ هذا الأولمبياد بطولة عالمية في الرياضيات تُعقد سنوياً لطلاب المرحلة الثانوية. وينظر إلى هذا الحدث بصفته إستراتيجية لتعزيز الموهبة الرياضية وتقويتها (Wieczerkowski, Cropley, & Prado, 2000). وقد خولت الحكومة التايلاندية معهد تعزيز التدريس في العلوم والتقانة صلاحية اختيار الممثلين التايلانديين لهذه المسابقة السنوية منذ عام 1989. وفيما يتعلق بمشروع أولمبياد تايلاند للرياضيات (Thai Mathematical Olympiad, Tmo)، يتعيّن على طلاب المرحلة الثانوية النابغين في الرياضيات من أنحاء البلاد جميعها إتمام جولتين من الاختبارات كل سنة للمشاركة

في المشروع. يركز الاختباران على المسائل الرياضية غير الاعتيادية التي يتضمنها كتاب الصف الحادي عشر وفقاً للمنهاج الوطني. وقد تقدم إلى مشروع أولمبياد تايلاند للرياضيات في شهر يونيو عام 2005 ما مجموعه سبعة آلاف وتسعمئة واثنان وثمانون طالباً متفوقاً، تقدم منهم ما مجموعه ستة آلاف وثمانمئة وواحد وستون طالباً للجولة الأولى من الاختبار، الذي تضمن فحص قدراتهم على حل المسائل الرياضية من خلال أسئلة من نوع اختيار من متعدد، وأسئلة ذات إجابات قصيرة. وقد وقع الاختيار على اثنين وأربعين منهم فقط من الجولة الأولى للاختبار ليتقدموا للجولة الثانية، وكانت أسئلة الرياضيات جميعها مفتوحة النهاية، حيث يطلب إلى المشاركين إظهار حلولهم المكتوبة خطياً. وأخيراً، اختير أربعة وعشرون طالباً ممن اجتازوا الاختبار الثاني ليشاركوا في مشروع أولمبياد تايلاند للرياضيات. وألحق هؤلاء الطلاب بمشروع أولمبياد تايلاند للرياضيات في المعسكر التدريبي في معهد تعزيز تدريس العلوم والتقانة (Institute For The Promotion Of Teaching In Science And Technology, Ipst). وفي أثناء التدريب، اختير ستة طلاب ليمثلوا تايلاند في أولمبياد الرياضيات الدولي. وقد أجريت هذه الدراسة البحثية عندما كان أربعة وعشرون طالباً موهوباً يشاركون في المعسكر التدريبي لمشروع أولمبياد تايلاند للرياضيات.

المشاركون

استخدم الباحث العينة القصدية في اختيار المشاركين من مجموع الطلاب الموهوبين الأربعة والعشرين داخل المعسكر. وعلى الرغم من اختيارهم بموجب اختبار القبول، حيث كان محتوى المنهاج مخصوصاً بالصف الحادي عشر، فإن صفوفهم تفاوتت من الثامن حتى الثاني عشر. وهكذا، فقد تباينت مستويات الطلاب من حيث الخلفية الرياضية. وعلى الرغم من ذلك، فهم يمتلكون خبرات سابقة في حل المسائل الرياضية غير الاعتيادية عبر امتحان القبول الذي طلب إليهم في حينه أن يكتبوا حلولاً مكتوبة. وبالنظر إلى التعريف المستخدم للطلاب الموهوبين في هذه الدراسة، فقد اقتصر مشاركة الطلاب على الصفوف الثامن والتاسع والعاشر، مع أن هؤلاء الطلاب كانوا قادرين على حل مسائل

رياضية كتلك التي يحلها عادة الطلاب الأكبر سنّاً (Sowells, Et Al., 1990). واستخدم الباحث أيضاً معايير أخرى في تحديد الطلاب ذوي الخلفية المماثلة في الرياضيات، حيث أُخذ في الحسبان ما يأتي: (أ) حصول الطلاب على العلامات نفسها في الجولة الثانية من امتحان القبول بمشروع أولمبياد تايلاند للرياضيات، (ب) عدم مشاركتهم بالمعسكر التدريبي في العام السابق، و (ج) كونهم في مستوى الصف العاشر أو أقل. وبذلك، فقد اختير خمسة طلاب ممن انطبقت عليهم المعايير من الطلاب السبعة مع ضمان التنوع في المدارس، والصفوف، والنوع الاجتماعي، والعمر. وكان المشاركون أربعة ذكور وفتاة واحدة، تراوحت أعمارهم حين مشاركتهم بين ثلاثة عشر عاماً وثلاثة شهور، وستة عشر عاماً وستة شهور، وكانوا ملتحقين بأربع مدارس وصفوف مختلفة (الثامن والتاسع والعاشر). كانت ثلاث مدارس منها في العاصمة التايلاندية، بانكوك، في حين كانت مدرسة واحدة خارج العاصمة. وقد أُعطي المشاركون أسماءً مستعارة، مثل: براديا، سيرا، وودي، نيبا وساكداء (Pradya, Sira, Wude, Nipa, Sakda) لغرض إعداد تقرير النتائج.

اختيار المسألة

تألّفت المسائل الرياضية لهذه الدراسة من ثلاث مسائل غير اعتيادية، اختيرت وُعدّلت من مصادر متعددة، منها: مجلات الرياضيات، والكتب المدرسية، واختبارات المسابقات (Appsimon, 1991; Covington, 2005; Gardiner, 1987; Krantz, 1996; Posamenteir & Schulz, 1996; Posamenteir & Salkind, 1996; Schoenfeld, 1985). ودرس الباحث أيضاً منهاج التدريب قبل وضع مجموعة من المسائل وفقاً للمعايير الآتية:

- تكون المسائل غير اعتيادية، أي لا تكون مألوفة لدى الطلاب، ولم يسبق لهم أن حلّوها من قبل، ولم يسبق لهم أيضاً أن وجدوا مثلها في منهاج الرياضيات. تتطلب المسائل غير الاعتيادية مرونة في التفكير، وتوسيعاً للمعرفة السابقة، وقد تشمل أيضاً على مفاهيم وأساليب ستُدرس صراحة في مرحلة لاحقة، إضافة إلى أنها قد تتضمن اكتشاف الروابط بين الأفكار الرياضية.

- تشمل المسألة مجالات المحتوى الرياضي فيما يتصل بنظرية الأعداد والتوافقيات (Combinatorics) والهندسة، التي تمثل الموضوعات الرئيسة لتدريب الطلاب على أولمبياد الرياضيات الدولي.
- تتحدى المسائل عمليات تفكير الطلاب، أي أنها يجب أن تختبر المستويات العليا لمجال المعرفة وفقاً لتصنيف بلوم المتمثل في: التحليل والتركيب والتقييم (Bloom, Et Al., 1956).
- لا تتطلب الحلول مهارات ومفاهيم رياضية لم يسبق للطلاب تعلمها بموجب المنهاج الوطني.

تألّفت مجموعة المسائل من ثلاث عشرة مسألة: ست منها عن نظرية الأعداد، وثلاث منها عن التوافقيات، في حين كانت المسائل الأربع الأخرى عن الهندسة. اختبرت مجموعة المسائل من حيث الصدق من سبعة خبراء ضالعين في الرياضيات وفي تدريسها. اختار الخبراء مسألة في كل مجال، واقترحوا تغذية راجعة مهمة للدراسة. أما المسائل الثلاث التي استخدمت في الدراسة فهي موضحة في الشكل (1:8).

- **المسألة الأولى:** هل يأتي يوم الجمعة الثالث عشر Friday the 13th كل عام؟
وضح ذلك.
- **المسألة الثانية:** هناك 15 فريقاً يشاركون في بطولة ما. ويلعب كل فريق مع كل فريق من الفرق الأخرى مرة واحدة فقط. ويحصل الفريق على ثلاث نقاط للفوز، ونقطتين للتعادل، ونقطة واحدة للخسارة. وعند انتهاء المباراة، يحصل كل فريق على مجموع نقاط يختلف عن الآخر. وتكون مجموع نقاط الفريق الذي يحصل على أقل مجموع للنقاط 21 نقطة. اشرح لماذا يكون لدى الفريق صاحب أعلى مجموع نقاط تعادل واحد على الأقل.
- **المسألة الثالثة:** مثلث متساوي الساقين، حيث الضلع $AB = AC$. والزاوية AB تساوي 20 درجة. D نقطة على الساق AB ، حيث الزاوية ACD تساوي 60 درجة. E نقطة على الساق BC ، حيث الزاوية EAC تساوي 50 درجة. جد مجموع الزاوية CDE .

جمع البيانات

جُمعت البيانات على أساس فردي بين المشاركين والباحث. وحدد كل مشارك موعداً لثلاثة لقاءات لحل واحدة من ثلاث مسائل باستخدام طريقة التفكير بصوت عالٍ، تبعها مقابلة شخصية. وكانت مواعيد المقابلات أسبوعية في أثناء عملية التدريب، وكانت هذه المقابلات تتم قبل التدريب أو بعده. وعرض الباحث في المقابلة الأولى صورة عامة للمشارك عن الإجراءات الواجب اتباعها ولا سيما طريقة التفكير بصوت عالٍ. حيث يتأمل كل طالب في التعليمات، وي طرح أي سؤال قبل البدء بحل عينة من المسائل. وتستغرق عملية التدريب على طريقة التفكير هذه مدة خمس عشرة دقيقة. وقد أعاد الباحث تشغيل شريط الفيديو، وناقش إستراتيجيات تطوير مهارات المشارك لإتقان هذا الأسلوب.

ومن ثم أُعطي المشاركون المسألة الأولى وبدؤوا بقراءتها بصوت عالٍ، وطرحوا أسئلة ليتحققوا فهم الكلمات الواردة فيها قبل البدء بحلها. ولم يطرح الطلاب جميعهم أسئلة في هذه المرحلة. وتحديث المشاركون بصوت عالٍ موضحين تفكيرهم وهم يكتبون الحل على الورقة، وقد أعطوا الوقت الذي يريدون لحل كل مسألة. وكان معدل الوقت الذي استغرقه المشاركون نحو عشرين دقيقة لكل مسألة، تبعها مقابلة مدتها خمس عشرة دقيقة. ومع نهاية كل لقاء، كان الباحث يصرّ على كل مشارك عدم الإفصاح عن طبيعة المسائل للمشاركين الآخرين.

النتائج

حللت البيانات المدونة لتكوّن في مجموعها نموذجاً لعملية حل المسألة لدى الطلاب التايلانديين. وقد اتُخذ لهذه الغاية نموذج كاروفالو وليستر ونموذج مونتاغيو وأبلجيت مرجعين لتحليل الجوانب فوق المعرفية، حيث يركز النموذجان على السلوكيات فوق المعرفية، إضافة إلى استعمالهما وصف عمليات حل المسألة في الدراسة لدى الطلاب النابغين. ولما كان تصنيف السلوكيات بصفاتها معرفية وفوق معرفية على نحو دقيق، يُعدُّ أمراً صعباً، فقد استخدم بعض الباحثين مصطلح معرفي- ما وراء معرفي. ولأغراض هذه الدراسة، فقد ربطت هذه السلوكيات بمراحل حل المسألة، وحددت على أنها عمليات فوق معرفية. وقد نجح

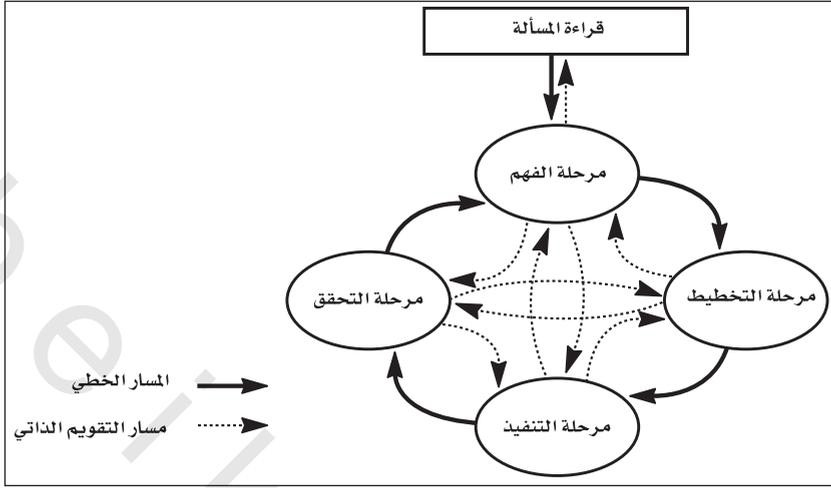
الطلاب النابغون في هذه الدراسة عموماً في عرض عملياتهم لحل المسائل الرياضية غير الاعتيادية، إذ قد حلوا المسألتين الأولى والثانية دون أدنى تردد، على الرغم من أن بعضهم لم يحل المسألة الأولى بصورة كاملة (حيث نسوا أن يأخذوا في الحسبان السنة الكبيسة في حلولهم). ومع أن اثنين من الطلاب قد واجها صعوبة في التوصل إلى إجابة للمسألة الثالثة في بداية الأمر، فإنهما قد أفلحا في حلها في نهاية المطاف.

نموذج الطلاب التايلانديين لحل المسألة

جرى تصوّر سلوكات الطلاب التايلانديين التي نوقشت ضمن نموذج من أربع مراحل موضحة في شكل (2:8)، أُطلق عليها اسم: الفهم والتخطيط والتنفيذ والتحقق، طوّرت من دراسة غاروفالو وليستر. وكانت مرحلة الفهم من أهم المراحل في توجيه الطلاب الموهوبين نحو النجاح في حل مجموعة المسائل. بعد قراءة تفهم المسألة قراءة جهرية، حدد الطلاب الأسئلة التي ينبغي طرحها. وقد ذكر الطلاب معطيات المسألة وفسروها ومثّلوها في صور أو جداول، إضافة إلى تنظيمها تنظيمًا منهجيًا. واستخدم الطلاب أسلوب إعادة قراءة المسألة بهدف تحقق صحة تمثيلاتهم. ولوحظ أن معرفة الطلاب المسبقة كانت ضرورية عند تفسيرهم المعطيات، وعادوا إلى أي مفهوم ذي صلة قبل تطوير خطة الحل، وتضمنت هذه المرحلة أيضاً التأمل في صعوبة المسألة ومألوفيتها.

كانت المرحلة الثانية هي مرحلة التخطيط، حيث توصل الطلاب إلى معطيات جديدة، ومثّلوا المسائل بصور أو رموز أو جداول، إضافة إلى تنظيمها على صورة خطة، واستخدموا الإستراتيجيات الفاعلة، منها: رسم الصور، أو عمل الجداول، أو البحث عن أنماط عن طريق تطبيق المفاهيم الرياضية ذات الصلة بنظرية الأعداد وأساسيات العد والهندسة في حل المسائل، وقد أُعيد تقويم الخطط وتحقق صدقها، واشتقت خطة جديدة عندما تبين عدم صدق الخطط الحالية.

أما المرحلة الثالثة فكانت مرحلة التنفيذ، حيث اقترح الطلاب جواباً نهائياً عن طريق إجراء حساباتهم في هذه المرحلة، وكتابة جمل رياضية منطقية تدعم خطتهم، وأخيراً كتابة النتائج التي توصلوا إليها.



شكل 8:2 نموذج الطلاب التايلانديين لحل المسألة

كانت المرحلة الأخيرة هي مرحلة التحقق التي تشتمل على تحقق الطلاب إجاباتهم المكتوبة. وربما يكونون في هذه المرحلة قد أعادوا قراءة المسألة ليتحققوا حلولهم.

عندما كان الطلاب منمهمكين في حل المسائل، لم تسر عملية تفكيرهم بترتيب خطي بدءاً من مرحلة الفهم وصولاً إلى مرحلة التحقق، حيث أظهرت أعمالهم أنهم، وهم ينفذون كل مرحلة من مراحل الحل، لم يكونوا يتقدمون بطريقة خطية من المرحلة الأولى إلى الأخيرة، ومن ثم، فقد كان من أهم ما توصلت إليه هذه الدراسة هو أن هذا النموذج ليس خطياً. وقد استخدم مصطلح التقويم الذاتي المقتبس من مونتاغو وأبلجيت في كل مرحلة؛ لمعرفة متى يراقب المشارك تفكيره وأعماله، ويظهر سلوكاً وجدانياً في أثناء حله المسألة. وبعبارة أخرى، فقد أثر التقويم الذاتي في أفعال المشاركين في كل مرحلة من مراحل النموذج.

المرحلة: الفهم**1. تحديد المسألة**

- قراءة/إعادة قراءة/ إعادة كتابة المسألة والمعطيات والسؤال.

2. تحليل المسألة

- تمثيل المسألة بصور أو جداول.
- توضيح/تفسير/تنظيم المعطيات.
- الربط بالخبرات السابقة.
- التأمل في المسألة.

3. التقويم الذاتي**المرحلة: التخطيط****1. وضع خطة**

- معالجة المعطيات وتوليدها.

2. قياس الخطة

- تطبيق المعرفة السابقة/المفاهيم الرياضية، والنظريات.
- استخدام الإستراتيجيات (البحث عن الأنماط/عمل جداول).
- التنبؤ بالإجابات الصحيحة/ استخدام التقديرات.

3. مراجعة الخطة

- تحديد هل كانت الخطة ذات معنى.
- تغيير الخطة إذا لم تنجح.

4. التقويم الذاتي**المرحلة: التنفيذ**

- تنفيذ الحسابات
- بناء جمل رياضية منطقية
- كتابة النتائج/ الإجابة
- التقويم الذاتي

المرحلة: التحقق

- تفحص معقولية النتائج.
- أعد قراءة المسألة والحلول لكي تتحققها.
- انتقل إلى خطة جديدة بناءً على تحقق النتائج.
- التقويم الذاتي .

وصف عمليات حل الطلاب التايلانديين المسألة

يظهر الطلاب في أثناء مرحلة الفهم سلوكاً محدداً في محاولتهم لفهم المسألة بعد قراءتها بصوت جهوري. تشتمل أعمالهم على قراءة المسألة، وكتابة و/أو إعادة كتابة المعطيات، وكتابة السؤال باستخدام بعض الكلمات الواردة فيه، وإعادة كتابته. ولما كانت المسألة الأولى على صيغة سؤال قصير جداً، فقد أعادوا كتابة السؤال باستخدام بعض الكلمات الواردة فيه. وعندما واجه المشاركون معلومات كثيرة في المسائل الطويلة، حاولوا كتابة المعطيات من خلال فهمهم المسألة. أما في المسألة الثانية، فاستعرض الطلاب معطيات كل جزء على حدة في أوقات مختلفة. وأظهرت تصرفاتهم أنهم لم يأخذوا في الحسبان المعطيات جميعها في وقت واحد. وفكر الطلاب أيضاً في المطلوب في المسألة، ولماذا طُرح.

وود (Wude): عمّ تسأل المسألة؟ تسأل عن أعلى مجموع للنقاط.

ساكدا (Sakda): لماذا يحصل الفريق الأقل نقاطاً على 21 نقطة؟ ولماذا

يجب أن يكون لدى الفريق الأعلى نقاطاً تعادل واحد على

الأقل؟

وأما ما يخص المسألة الهندسية كالمسألة الثالثة، فقد كتب الطلاب المعطيات جميعها، في حين كانوا يرسمون صورة لتحقيق حصولهم على كل شيء تعرضه المسألة قبل مواصلة حلولهم. وفي الوقت ذاته، أشارت الأشكال التي رسمها الطلاب إلى استعمالهم تمثيلاتهم في عمليات الحل. ولم يكن التمثيل بالصورة مهماً لفهم المسألة الهندسية فحسب، بل ساعدهم أيضاً على وضع خطة للحل. ورسم بعض الطلاب أكثر من صورة، وكانوا يكررون رسم الصور إذا أخفقوا في التوصل إلى طريقة لحل المسألة، إذ اعتقدوا أن الصورة الكبيرة تزودهم بتصور أفضل للمسألة وحلها. وأظهرت الدلائل أيضاً تمثيلات أخرى استخدمها الطلاب في عملياتهم لمساعدتهم على فهم المسألة، كعمل جداول أو كتابة تقويم (مفكرة).

نيبا (Nipa): أفكر في التقويم، هناك سبعة أيام في التقويم، أنا أكتب تقويماً الآن.

براديا (Pradya): أعمل أولاً جدولاً للسنة.

حاول الطلاب بعد كتابتهم المعطيات، توضيحها إلى أكبر قدر ممكن، وفي الواقع، كانت إيضاحاتهم مستندة إلى معرفتهم السابقة بالرياضيات. وعلى نحو ما هو الحال في المسألة الثانية، فقد فكروا جميعاً في عبارة «يلعب كل فريق مع الفريق الآخر مرة واحدة فقط». وأشارت تفسيراتهم إلى أنهم يمتلكون فكرة حول أساسيات العدّ.

براديا: حسناً يلعب كل فريق أربع عشرة مرة.

سيرا: خمسة عشر فريقاً يلعبون مع كل فريق آخر، مرةً واحدة. وهذا يعني أن الفريق الأول سيلقي الأصدقاء الأربعة عشر الأخرى.

نيبا: يلعب كل فريق أربع عشرة مرة.

وودي: دعونا نرى الفريق الأول. يجب أن يلقي الفريق الأول الفرق الأربع عشرة الأخرى.

ساكدا: أي أن كل فريق يلقي الأصدقاء الأخرى أربع عشرة مرة. وبذلك، يلعب الفريق أربع عشرة مرة.

كتب الطلاب في المسألة الثالثة المعطيات جميعها، كل جزء على حدة، عندما كانوا يرسمون الصورة. وفي الوقت ذاته، دمجوا معرفتهم السابقة فيما يخص المثلث المتساوي الساقين بالمعطيات والحسابات لمعرفة الزوايا الأخرى وطول الضلعين في أثناء عملية الرسم.

ويلاحظ خلال مرحلة الفهم، أن الطلاب فكروا في المسائل من حيث مألوفية معرفتهم المسألة والصعاب التي واجهوها في أثناء عملهم لفهم المسألتين الأولى والثالثة.

ساكدا: أما ما يتعلق بهذه المسألة، فلم أر مثلها من قبل، الجمعة الثالثة عشرة.

سيراً: كيف نحل هذه المسألة؟ أنا مرتبكة. الجمعة الثالثة عشرة.
 نيبا: لا أستطيع حلها.

التخطيط: بحث الطلاب التايلانديون في أثناء مرحلة التخطيط عن خطط حل عن طريق المعطيات، والإتيان بمعلومات جديدة. وعندما وضعوا خططهم للمسألة الثانية، ركزوا على جملة معينة، ألا وهي: «يحصل الفريق على ثلاث نقاط للفوز، ونقطتين للتعادل، ونقطة واحدة للخسارة.» ساعدتهم هذه الجملة على الإتيان بالمعلومات نفسها، كل لعبة تنتج أربع نقاط.

ثم انتقل الطلاب إلى الجملة الآتية، وهي: (عند انتهاء المباراة، يحصل كل فريق على مجموع نقاط يختلف عن الآخر. ويكون مجموع نقاط الفريق الذي يحصل على أقل مجموع للنقاط 21 نقطة)، وكوّنت هذه الجملة قيماً على خطتهم. وقادت عملية التلاعب في المعطيات، والمعلومات الجديدة، هؤلاء الطلاب نحو تحديد الخطط الآتية لمعرفة المجموع الكلي للمباريات المنجزة، ومجموع النقاط التي حصل عليها أعلى فريق قبل إثبات السؤال المطروح (أي، لماذا يجب أن يكون لدى الفريق الأعلى نقاطاً تعادل واحد على الأقل؟).

أوضح الطلاب الأسباب الكامنة وراء خطتهم للمسألة الأولى على النحو الآتي: بدأت خطة وودي بتحديد يوم الجمعة في الأول من يناير، وبحث بعد ذلك عن الجمعة الثالثة عشرة في العام نفسه. استمر في بحثه بتحريك الأول من يناير إلى السبت فالأحد وهلم جرّاً، إلى أن حدد سبع حالات للسنة (السنة التي يكون فيها عدد أيام شهر فبراير ثمانية وعشرين يوماً)، وعلى نحو مماثل للحالات السبع الأخرى للسنوات التي يكون عدد أيام شهر فبراير فيها تسعة وعشرين يوماً. وخطت نيبا في البداية لحل هذه المسألة مستخدمة التناقضات كما قالت، «كيف سأحلها؟» أعتقد أن يوم الجمعة الثالث عشر يحدث سنوياً، أو أفترض عدم حدوثه سنوياً، وعندئذٍ أجد التناقض. «بينما لم ينته بها الأمر إلى استخدام هذه الطريقة، فقد درست مجموعة متنوعة من المسائل الرياضية لتحديد طريقة حل المسألة، حيث قالت: «أعدّ هذه المسألة مسألة توافقيات أم مسألة نظرية أعداد؟» لقد وجدت الآن طريقة للحل.

واجه بعض الطلاب صعوبة في وضع خطط للمسألة الثالثة. وفي الوقت ذاته، أشارت الأدلة إلى محاولة بحثهم عن طرق متعددة لحل هذه المسألة. إذ حاول ساكدا حلها باستخدام الهندسة الإقليدية وعلم المثلثات. وقد بحث عن طرق متعددة لحل المسألة، كرسم خط ورسم دائرة واستعمال قانون الجيوب (Law of Sines). وقام أيضاً باستحضار ما تعلمه في اليوم السابق عندما توصل إلى خطة حل تستخدم الفرجار في رسم الدائرة التي تمر بالنقطتين (G, D)، وتلتقي مع الساق (BC) عند النقطة (F). وواجهت نيبا صعوبة وهي تدرس كثيراً من الخطط للمسألة الثالثة، حيث رسمت خطأ عمودياً وخطاً موازياً، لكن هذين الخطين لم يؤديا الغرض. وأخيراً، تمكنت من التوصل إلى طريقة لحل المسألة، حيث رسمت الخط (C, F) وحصلت على الجواب.

تنبأ الطلاب بالحل عندما وضعوا خطة للمسألة الأولى. مثلاً، اعتقد كل من نيبا وسيرا وبراديا أن يوم الجمعة الثالث عشر يحدث كل سنة، وكان سكاذا يعرف من خبرته السابقة أن ذلك يحدث كل عام.

أشار الطلاب عندما وضعوا الخطط إلى المفاهيم الرياضية التي اعتقدوا أنها يمكن أن تستعمل في خططهم، فقد فكّر سكاذا في مبدأ برج الحمام، لكنه لم يستخدمه في خطة الحل، في حين استخدم وودي نظرية الباقي للعدد 7 للمسألة الأولى، وعلم المثلثات للمسألة الثالثة. وأشارت هذه المناحي إلى استخدام الطلاب معرفتهم الرياضيات في الحلول التي قدموها.

ساكدا: أو ربما نحتاج إلى استخدام مبدأ برج الحمام.
 وودي: أخذت التاريخ في الحسبان باستخدام نظرية الباقي للعدد 7.
 وودي: أفكر في كيفية استخدام علم المثلثات في حل هذه المسألة.

عند تقويم الطلاب لخطة ما، طبّقوا معرفتهم السابقة بنظرية الأعداد وأساسيات العد والهندسة، حيث استخدموا مفهوم الباقي في المسألة الأولى؛ ليظهروا أن يوم الجمعة الثالث عشر (Friday 13) يحدث كل عام، حيث وضع وودي الأول من يناير بصفته يوم الجمعة، ثم أخذ يبحث عن يوم الجمعة الثالث عشر في العام نفسه، وأي جمع أخرى في العام نفسه لا

يصادف فيها يوم الجمعة الثالث عشر، وواصل هذه العملية بنقله اليوم الأول من يناير إلى السبت فالأحد وهلمَّ جرًّا، إلى أن حصل على سبع حالات للسنة التي يكون عدد أيام شهر يناير فيها ثمانية وعشرين يوماً، وسبع حالات أخرى للسنوات التي يكون عدد أيام شهر يناير فيها تسعة وعشرين يوماً.

تمثّل هدف الطلاب في المسألة الثانية في محاولة إثبات، لماذا يجب أن يكون لدى الفريق الحاصل على أعلى عدد من النقاط تعادل واحد على الأقل. ومع أنهم أثبتوا حلولهم بطريقة البرهان المستندة إلى التناقضات، فإن استدلالاتهم قد تباينت. وقد عدَّ براديا أن الفريق الحاصل على أعلى عدد من النقاط قد لعب أربع عشرة مرة، وحصل على خمس وثلاثين نقطة، وعلّل ذلك بقوله أنه إذا لم يحصل هذا الفريق على أي تعادل، فسيكون لدى الفريق فوز وخسارة فقط، ومن ثم، يجب أن يكون عدد النقاط فردياً؛ لوجود ثلاث نقاط للفوز أو نقطة واحدة للخسارة. وعندما ضرب العدد الزوجي في العدد الفردي تبين له أن الناتج كان عدداً زوجياً. ولما كان العدد 14 هو عدداً زوجياً، فإن مجموع النقاط النهائي يجب أن يكون زوجياً، لكن العدد 35 عدد فردي.

في حين اعتقدت سيرا أنه إذا لم يحصل هذا الفريق على أي تعادل، فعندئذٍ يجب أن يفوز الفريق إحدى عشرة مرة، ويخسر ثلاث مرات بحيث تكون النتيجة على النحو الآتي: $36 = 3 + 33$. وتعني هذه النتيجة أن الفريق الحاصل على أعلى نقاط دون أي تعادل يجب أن يحصل على ست وثلاثين نقطة على الأقل، لكن هذا الفريق حصل على خمس وثلاثين نقطة فقط. أمّا نيبا، فقد افترضت أن الفريق لم يحصل على أي تعادل، فوضعت المعادلة الآتية التي تمثل النقاط عندما يلعب الفريق أربع عشرة مرة ويفوز بـ (x) من المرات: $3x + (14 - x) = 14 + 2x = 2(7 + x)$. ولاحظت أن $2(7 + x)$ عدد زوجي، وأن 35 عدد فردي.

افترض وودي أن القيم x, y تشير إلى عدد مرات الفوز والتعادل. وبعد أن حل المعادلات تبين له أن قيم $y = 21 - 2x$ ، وأن $21 - 2x$ عدد فردي، وأن قيمة x كانت أكبر من صفر؛ وبذلك، توصل إلى أن $(y \geq 1)$. في حين عدَّ سكاذا أن مجموع نقاط الفريق الكلية ستكون

اثنتين وأربعين إذا فاز في المباريات جميعها. وفي كل مرة يخسر فيها الفريق ينقص عدد نقاطه بواقع نقطتين من أصل اثنتين وأربعين نقطة، لكن مجموع نقاطه كان خمسة وثلاثين. وعلى هذا، تكون هذه النتيجة مستحيلة، أي حصول الفريق على خمس وثلاثين نقطة إذا نقص رصيده بواقع نقطتين من مجموع النقاط الاثنتين والأربعين مع كل خسارة.

طبّق وودي قانون الجيوب على المسألة الثالثة. وبهذا التطبيق، توصل إلى معادلة المتثلثات، وحاول معرفة قيمة الزاوية (CDE) ومع ذلك، لم يحل هذه المعادلات. ولجأ إلى استخدام طريقة التجربة والخطأ، بدلاً من ذلك. وظل يغيّر قيمة الزاوية في المعادلة إلى أن توصل إلى الحل.

يلاحظ في مرحلة التخطيط، استعمال الطلاب إستراتيجيات ذات كفاية كبيرة، مثل: عمل الجداول، واستخدام الرموز، والبحث عن أنماط لتمثيل المعلومات، حيث افترض براديا في المسألة الأولى اليوم الخاص بتاريخ 13 يناير واستخدم المتغير x ليمثله، حيث مثل المتغير x الأحد أو الاثنين أو الثلاثاء أو الأربعاء أو الخميس أو الجمعة أو السبت، ووضع الباقي الذي وجدته في الجدول. أما سكادا، فرسم جدولاً يحتوي على الشهور وعدد الأيام في ذلك الشهر، والباقي لحل المسألة الأولى.

استخدم ثلاثة طلاب، هم: سيرا، وودي ونيبا الرموز عند وضع معادلات للمسألة الثانية، واستخدم الطلاب أيضاً متغيرات لتمثيل قيمة الزاوية التي كانوا يحاولون معرفتها في المسألة الثالثة. وعندئذ بدؤوا بمقارنة هذه الزاوية بغيرها من الزوايا، وبحثوا أيضاً عن أنماط عندما حلوا المسألة الأولى. مثلاً، بحث وودي عن نمط يوم الجمعة الثالث عشر بعد أن وضع الأول من يناير بصفته يوم جمعة، وبحث عن أيام الجمع الأخرى في شهر يناير بعد الأيام يوماً يوماً، وأوضح الأربع عشرة حالة التي يقع فيها الأول من يناير في يوم الجمعة، السبت، الأحد..... الخميس، وذلك للسنوات التي يكون فيها عدد أيام شهر فبراير ثمانية وعشرين يوماً، والسنوات التي يكون عدد أيام شهر يناير فيها تسعة وعشرين يوماً.

وتبيّن وجود أدلة تثبت أن الطلاب قد تحققوا جدوى خططهم، وأنهم بحثوا عن خطط فاعلة، وأنهم كانوا يغيرون من خططهم في أثناء هذه المرحلة.

ساكدا: أربع عشرة حالة فقط. هل من المفيد كتابة مفكرة؟ ليس بالأمر الجيد فعل ذلك.

وودي: ثمة طرق أخرى أسهل من هذه الطريقة؟

براديا: في الخطوط يتعين عليّ أن أمدها؟ هل هو الخط الممدود الذي يُعدُّ الأكثر فائدة للحصول على الإجابة؟ أي الخطوط أفضل؟ حسناً، قد يكون هذا الخط جيداً.

التنفيذ: نُذ الطلاب في أثناء هذه المرحلة العمليات الحسابية عن طريق تطبيق الصيغ الرياضية للوصول إلى الجواب النهائي. وكما هو الحال في المسألة الثانية، فقد كتب ثلاثة طلاب «جمع 15 و 2» عندما حسبوا عدد المباريات في هذه المسابقة. وتشير هذه الجملة إلى معرفتهم المعادلة ذات الحدين $C_{(15,2)}$. ويلاحظ أن نيبا لم تذكر هذه الكلمات، لكنها حسبت النتيجة بالطريقة ذاتها. فيما حسب سيرا النتيجة عن طريق إيجاد مجموع تسلسل المباريات التي أقيمت، وهو $105 = (14 \times 15) / 2 = 1 + 2 + 3 + \dots + 12 + 13 + 14 =$ مرات. واستخدم الطلاب كافة مجموع صيغة التسلسل الحسابي لحساب مجموع التسلسل 21, 22, 23, ..., 35 في حلهم هذه المسألة. وحل بعض الطلاب معادلات للتوصل إلى متغير غير معروف كما فعل كل من وودي وسيرا في المسألة الثانية.

وودي: نحصل من هاتين المعادلتين على: $2x + y = 21$

سيرا: نطرح المعادلة الثانية من المعادلة الأولى فنحصل على:

$2a + b \geq 21$. آه... لحظة من فضلك، إذا افترضنا أن الفريق صاحب أعلى نقاط ليس لديه أي تعادل، فهذا يعني أن $B=0$. وعندئذٍ نحصل على: $3a + c \geq 35$ و $a+c=14$. ولما كانت $2a \geq 21$ ، فإن $a \geq 10.5$.

عادةً ما استخدم الطلاب عبارات رياضية منطقية تدعم خطتهم قبل كتابة النتيجة أو الجواب النهائي.

نيبياً: إنها تحدث كل عام، لأنني أعتقد أن الثالث عشر من يناير يصادف يوم الجمعة، في حين يقع الثالث عشر من الأشهر الأخرى في بقية الأيام الستة. وبناءً عليه، هناك يوم جمعة يقع في الثالث عشر في كل سنة.

سيراً: إذا لم يحصل هذا الفريق على أي تعادل، يجب أن يفوز إحدى عشرة مرة ويخسر ثلاث مرات كي يحصل على النتيجة $36 = 3 + 33$ نقطة. وهذا يعني، أن الفريق الحاصل على أعلى النقاط دون أي تعادل، يجب أن يحصل على مجموع نقاط يساوي 36 في حده الأدنى، لكنه حصل على 35 فقط، وهذا تناقض واضح. وبناءً عليه، يجب أن يكون لدى الفريق صاحب أعلى نقاط تعادل واحد على الأقل.

التحقق: فحص الطلاب التايلانديون في أثناء المرحلة الأخيرة وهي مرحلة التحقق، عملياًتهم ونتائجهم أحياناً، للتحقق أن الحل ذو معنى. وكانوا عادة يراجعون خطط الحل عندما لا تنجح هذه الخطط، وأعادوا فحص ما عملوه، وكانوا قادرين على توضيح أسباب الحلول التي قدموها. وعندما تحققوا صحة الحلول، أعادوا قراءة المسألة، وتحققوا صحة الحلول المكتوبة باستخدام عمليات دورية للثبوت من الخطة الموضوعية من حيث فائدتها في حل المسائل. وكانت نيبيا الطالبة الوحيدة التي أولت اهتماماً بتحقيق إجابة المسألة الثانية. وقد توقفت عن الكلام في أثناء هذه المرحلة ثلاث دقائق إلى أربع. لذا، طلبت إليها الباحثة أن تتحدث بصوت عالٍ بما كانت تفكر فيه.

الباحثة: بمَ تفكرين؟

نيبياً: أتفحص إجابتي، أتفحص ما كتبت، أهو صحيح أم خطأ؟ عاودت قراءة السؤال، ثم قرأت إجابتي مرة أخرى، والآن انتهيت من كل ذلك.

ومع أن الطلاب الآخرين لم يظهروا أنهم تحققوا إجاباتهم على نحو مباشر، فإن من الواضح أن نيبيا قد فعلت ذلك، وتحقق الطلاب أيضاً ما فعلوه في الخطة قبل تأكيد إجاباتهم.

وودي: لقد سبق لي أن تحققت الحالات كلها، أربع عشرة حالة، تحدث الجمعة الثالثة عشرة في الحالات جميعها، وبناءً عليه، فهي تحدث كل عام.

براديا: حصلنا عليها جميعاً، لدينا اثنا عشر شهراً في السنة.

وتثبتت وودي أيضاً من عملياته الحسابية مرة أخرى بعد حصوله على النتيجة باستخدام صيغة المعامل ذي الحدين لمعرفة مجموع المباريات التي أُقيمت، ثم أعاد كتابة النتيجة لتتحقق صحتها.

وودي: هل هي صحيحة؟ صحيحة. هل هي مجموع المباريات البالغ عددها 105 مباريات؟

بعد تنفيذ سكاذا حساباته لمعرفة عدد المباريات التي أُقيمت، لاحظ أن النتيجة أكبر كثيراً مما قاله: «إنها كبيرة جداً، هل أخطأت في مكان ما؟ هناك 105 مباريات لخمسة عشر فريقاً». عند هذه النقطة، تحقق الأمر ليتأكد أن إجابته ذات معنى. ومع ذلك، لم يظهر أي طريقة محددة لتحقيق الإجابة.

التقويم الذاتي: إضافة إلى المراحل آنفة الذكر جميعها، أظهر الطلاب مراراً عبارات تشير إلى التقويم الذاتي، تعينهم على مواصلة حل المسألة، إلى أن تمكنوا من إنجاز المهمة. لقد استخدم مصطلح «التقويم الذاتي» (Self-Evaluation) بصفته فئة للترميز في دراسة مونتاغ وأبليجيت عندما قوّم الطلاب أنفسهم بصفتهم قادرين على حل المسائل، أو عندما استخدموا جملة المتكلم عند الحديث عن أدائهم. ولأغراض هذه الدراسة، قُسمت عبارات التقويم الذاتي إلى نوعين: أولاً، أظهر الطلاب المراقبة الذاتية لأعمالهم وهم يحلّون المسألة، إلى أن توصلوا إلى الحل كاملاً. وثانياً، استخدم الطلاب جملاً وجدانية عند تقويمهم أنفسهم بوصفهم قادرين على حل المسائل، من حيث مدى ثقتهم بأنفسهم والصعاب والإحباطات التي واجهوها، إضافة إلى ما يبذلونه من جهد في أثناء حلهم المسائل. يمثل جدول 8: 1 مجموعة من الأمثلة على عبارات التقويم الذاتي في كل فئة من الفئات.

جدول 1:8 مقتطفات من عبارات التقويم الذاتي

مقتطفات من الأمثلة	التقويم الذاتي
<p>ماذا بعد؟ ما الذي أفعله الآن؟ سأكدا: أين الطريق إلى الحل؟ كيف ستجد الإجابة؟ سأكدا: استمر بالمحاولة، واصل العمل.</p>	<p>المراقبة الذاتية</p>
<p>نيبا: آه... فهمت، وجدتها. وودي: هل هي صحيحة؟ براديا: لا أعرف إن كان بمقدوري حلها أم لا. براديا: لا أجد شيئاً غير صحيح مما قمت به كله. سأكدا: أعتقد أن بوسعي تخمينها.</p>	<p>الوجدان • الثقة</p>
<p>نيبا: لا أعرف ماذا سأفعل، ليس بوسعي حلها. سير: كيف نحل هذه المسألة؟ أنا مرتبك. سأكدا: آه... لا أستطيع التفكير في كلمات لتفسير ذلك. نيبا: أرسم صورة جديدة. هذه الصورة صغيرة جداً. لقد أربكتني كثيراً. عندما أراها لا أستطيع التفكير البتة. سأكدا: لا أستطيع تخمين المسألة. أنا مرتبك ومتوتر جداً. سأكدا: لماذا لا أستطيع التفكير فيها؟ لا أستطيع التوصل إلى أي شيء.</p>	<p>الوجدان • الصعوبة/ الإحباط</p>
<p>وودي: يجب أن نفكر ببطء، فكر ببطء. وودي: ام م م م... يحتاج الأمر إلى تفكير كثير. سأكدا: آه... أنا كسول للتفكير في المجموع. براديا: أنا كسول جداً الآن.</p>	<p>الوجدان • الجهد</p>

مناقشة النتائج

تصف هذه الدراسة نموجاً يستحوذ على عمليات الحل للطلاب التايلانديين النابغين. وأشارت النتائج إلى أن عمليات حل الطلاب كانت تركز على التحليل المنطقي والإستراتيجيات المنظمة. وقد أظهروا مقدرة عالية في التعبير لفظياً عن أفكارهم،

وتفسير استدلالاتهم للحلول. وقد أظهرت هذه المقدره مدى فهمهم للبنى والإستراتيجيات الرياضية الشبيهة بتلك الموضحة في دراسة هينز (Heinz, 1993). وكانت نتائج الدراسة منسجمة مع الدراسات الأخرى، حيث كان المشاركون فيها من الثقافات الغربية. وقد كانت النتائج منسجمة ولا سيما ضمن سياق إستراتيجيات المسألة التي استخدمها الطلاب النابغون مثل؛ رسم الصور، وعمل الجداول، أو البحث عن أنماط بهدف تسهيل فهمهم المسائل (Gorodetsky & Klavir, 2003; Montague, 1991; Montague & Applegate, 2000; Sriraman, 2003). تبين بحوث الثقافة الغربية أن الطلاب التايلانديين النابغين طبقوا معرفتهم السابقة على المسألة، أو الموقف غير المؤلف. وقد استفادوا من المعرفة الرياضية المتنوعة في استحضار النظريات، والاعتماد عليها بهدف إيجاد معلومات إضافية ذات صلة بالمسألة واستنباطها (Goro Detsky & Klavir, 2003; Lawson & Chinnappan, 1994; Overtoon-Corsmit, Dekker & Span, 1990). وقد لوحظ أن الطلاب التايلانديين الموهوبين يكثرون من المحادثة والحوار عند مواجهتهم بمسائل صعبة جداً. وتعدُّ هذه النتيجة مماثلة لما قام به الطلاب الأمريكيون في دراسة سريرامان.

واستناداً إلى تحليل النتائج، برزت أدلة رئيسة ذات صلة بعمليات الطلاب لحل المسائل تتألف من خمس فئات، هي: المعرفة الرياضية المتقدمة، الرغبة في أخذ طرائق الحلول البديلة المتعددة في الحسبان، تذكّر المعرفة والخبرات السابقة والرغبة في استخدامها، الاعتماد على الحالة الوجدانية، ودعم المعلمين والآباء. ففي الفئة الأولى، دمجت المفاهيم الرياضية المتقدمة في حلول الطلاب، منها: قانون الجيوب، وصيغة المعامل ذي الحدين، وصيغة مجموع التسلسل الحسابي. وكانت تلك المفاهيم جميعها تدرس في الصفين الحادي عشر والثاني عشر ضمن المنهاج التايلاندي الوطني. ومع ذلك، فقد اكتسب الطلاب، الذين ليسوا في هذين الصفين، المعرفة السابقة بطريقة ما. وأشارت هذه النتيجة إلى وجود فهم لدى هؤلاء الطلاب للمفاهيم الرياضية عالية المستوى، وهي إحدى سمات الطلاب الموهوبين. وأشارت النتائج أيضاً إلى القدرة العالية على حل المسائل، وتطبيق هذه المفاهيم المتقدمة للتوصل إلى حل صحيح للمسألة.

وفي الفئة الثانية، بحث الطلاب عن طرائق بديلة للحل في أثناء تفكيرهم في المسائل؛ إذ حاولوا فهم المسألة وحلها باستخدام مجموعة متنوعة من الطرائق عند مواجهتهم لأي صعاب. وكما هو الحال في المسألة الثالثة، فقد أظهر كل من سكاذا ونيبا في حلها، رغبتهما وقدرتهما على دراسة مسارات مختلفة، بدلاً من الإصرار على المسارات التي لا خير فيها. ومع ذلك، فقد اعتمدت الطرق التي اتبعاها في البحث عن مسارات بديلة على معتقداتهما وخبرتهما السابقة المتصلة بالتعامل مع المسائل الرياضية.

أما الفئة الثالثة، فتشير إلى وضوح تأثير معرفة الطلاب السابقة، حيث طبّق الطلاب أساليب وإستراتيجيات كانوا قد استخدموها في السابق، فقد أشار وودي إلى استخدامه منحى علم المثلثات في المسألة الهندسية؛ لأن هذه الطريقة، وبحسب خبرته في حل هذا النوع من المسائل، قد أوصلته إلى الحل في أكثر من 60% من الحالات. وكان متخوفاً أيضاً من إخفاقه في حل المسألة إذا استخدم الهندسة الإقليدية. ومع ذلك، فقد كان ينوي محاولة رسم بعض الخطوط إذا أخفق في التوصل إلى الإجابة باستخدام علم المثلثات. أما ما يتعلق بالمسألة الأولى، فقد اكتسب سكاذا خبرة معرفة الجمعة الثالثة عشرة في التقويم السنوي، حيث قال «في الحقيقة، أنا دائماً أبحث عن يوم الجمعة الثالث عشر في كل تقويم سنوي. مثلاً، سيكون في شهر يناير في العام القادم، يوم الجمعة هو الثالث عشر من يناير. وتبين لي أن هذا يحدث كل عام، وهذه مسألة رياضية، يجب أن تربط الجمعة الثالثة عشرة بنظرية الأعداد. واعتقد أن ثمة مسألة أخرى كنت قد قرأتها وهي تتعلق بيوم رأس السنة الجديدة».

ويلاحظ أن السلوك الوجداني (السلوك المستند إلى العاطفة أكثر من المعرفة والأفكار والأفعال) في الفئة الرابعة أدى دوراً مهماً في عملية حل المسائل لدى الطلاب الخمسة النابغين. وكانت هذه النتائج منسجمة مع نتائج كارلسون وبلوم (Carlson And Bloom, 2005) وديبيلس (Debellis, 1998). وكما أوضح جولدن (Goldin, 2000) فقد زاد القائمون على حل المسائل الرياضية من الطرق التي يمكن استعمال الوجدان فيها لتوجيه خطواتهم، والتأثير في معرفتهم بطريقة بناءة في حل المسائل. ففي هذه الدراسة، كان الوجدان واضحاً جلياً من حيث الثقة بالنفس، والإحباط،

والجهد. فقد اعتمد الطلاب على ثقتهم بأنفسهم لمراقبة إحباطهم وقلقهم، محوّلين هذه المشاعر إلى تحفيز قادهم في نهاية المطاف إلى التوصل إلى الحل. لقد حافظت دافعتهم على الاهتمام الذي لديهم، وشجعتهم على مواصلة العمل لحل المسألة بفاعلية. وزيادة على هذا، فقد عبر الطلاب عن مشاعر إيجابية، وهم يحاولون حل المسألة. وأشار أحد الطلاب، مثلاً، إلى أنه كان متوتراً بسبب مستوى صعوبة إحدى المسائل المعطاة، مع أنه لم يكن تحت وطأة تحديد الوقت، كما قال سكاذا: «شعرت بالتوتر. ومع ذلك، هذا ليس اختباراً، وبوسعي أن أستغرق الوقت الذي أريد. لذ، واصلت العمل».

أما الفئة الخامسة، فتتمثل في ملاحظة دعم المعلمين والآباء الواضح بحسب إجابة وودي لسؤال طرح في المقابلة. إذ يعتقد أن الدعم الكبير قد ساعده كي يصبح قادراً على حل المسائل.

الباحثة: ما الذي يجعل المرء قادراً على حل المسائل، في رأيك؟
وودي: كل شيء على ما أظن. أما أنا، فقد حظيت بدعم متميز من والديّ، وساعدني معلمي كثيراً. وكانت أمي تبحث على الدوام عن مسألة رياضية هنا وهناك، وتطلب إليّ أن أحلها، وكنت أحب أيضاً قراءة الكتب الرياضية.

لا تظهر إجابة الطالب هذه مثلاً على دعم المعلمين والآباء للطلاب فحسب، بل إنها توضح جانباً من تأثير الثقافة التايلاندية. وينسجم هذا الدليل مع الدراسات في هذا المجال، إذ ينظر الآباء في الثقافة الآسيوية إلى تعليم الأبناء بصفته أعلى سلم أولويات التربية والتنشئة. وتؤكد هذه الثقافة على تعليم الأبناء، مع وجود أولوية لتعلم الرياضيات (Hatano, 1990; Geary, 1996)، وأظهرت هذه القيمة الثقافية للرياضيات أيضاً الاختلافات في استثمار الأبناء وأولياء الأمور والمعلمين لتعلم الرياضيات (Geary, 1994; Stevenson & Stigler, 1992). وربما يكون تركيز الثقافة التايلاندية على أهمية تعليم الأطفال عاملاً مهماً في نجاح هؤلاء الطلاب في عملية حل المسائل الرياضية.

محددات الدراسة

مع أن الطلاب لم يسبق لهم أن رأوا المسائل من ذي قبل، فإن هناك احتمالاً بانحراف النتائج بسبب المعرفة السابقة لدى الطلاب، إذ يمكن أن تكون خلفيتهم ومعرفتهم وخبراتهم في حل المسائل الرياضية السابقة قد أثرت بعض الشيء في طريقة تناولهم المسألة والحلول التي توصلوا إليها. وكان عدد المسائل الرياضية التي طرحت على الطلاب قليلة ومحدودة بمحتوى رياضي معيّن. وربما تكون الأنماط المحددة من المسائل قد أثرت في أدائهم إذا كانوا غير مرتاحين، أو غير متخصصين في هذا الجانب من المحتوى. ولم يواجه المشاركون أي معضلة في التعبير لفظياً عن عملية تفكيرهم، على الرغم من أنها كانت تجربتهم الأولى في ممارسة التفكير بصوت عالٍ. وربما تكون طريقة التفكير بصوت عالٍ قد طورت من عمليات تفكيرهم، وساعدت على تحسين طرائقهم مقارنة بطريقة التفكير التقليدية. وقد لا يكون المشاركون قد عبروا عن أفكارهم جميعها، بسبب الجهد الإضافي الذي يتعين عليهم القيام به نتيجة تطبيقهم أسلوب التفكير بصوت مرتفع. إضافة إلى ذلك، يفترض أن يكون الطلاب قد أجابوا عن أسئلة المقابلة كلها بعيداً عن التحيز أو الاهتمام باحترام الذات.

التداعيات المستقبلية للبحث

لقد أُجريت الدراسة في أثناء وجود المشاركين الخمسة في معسكر للتدريب. وربما تختلف النتائج لو أُجريت على عدد أكبر من المشاركين مدة أطول من الوقت. وهناك حاجة إلى إجراء دراسة مستقبلية تراقب العمليات والسلوكات وتقارن بينها، عند التعامل مع الطلاب داخل بيئتهم المدرسية بدلاً من بيئة معسكرات التدريب. وقد ساعد غياب تحديد الوقت على التخفيف من عبء الضغط على الطلاب، وأعانهم أيضاً على تفعيل قدرتهم على حل المسائل. وهناك حاجة في الدراسة المستقبلية إلى أخذ عامل الوقت في الحسبان، عند قيام الطلاب بحل مسائل رياضية غير اعتيادية؛ من أجل تعزيز بحث الطلاب عن مسار حلهم. وتشير النتائج إلى استخدام الطلاب التايلانديين النابغين المعرفة السابقة على نحوٍ فاعل، مستعملين مجموعة متنوعة من المعرفة، وامتلاكهم القدرة العالية على التعبير

لفظياً، وتفسير تعليلاتهم للحلول التي توصلوا إليها. وأنهم قادرون أيضاً على دمج المفاهيم الرياضية المتقدمة في عملية حل المسألة. ومن ثم، يجب أن تأخذ البحوث المستقبلية في الحسبان هذه العوامل، وتدرس مدى تأثيرها في العملية، وفي قدرة الطلاب الموهوبين على حل المسائل. تشير النتائج إلى استخدام الطلاب الموهوبين عبارات التقويم الذاتي في أثناء جلسات التفكير بصوت عالٍ لتساعدهم على أن يصبحوا متضلعين من حل المسائل. ومن المنطقي أن يعمل الباحثون على استكشاف المتغيرات الأخرى المتصلة بهذه العمليات، وطرق تحسين هذه المتغيرات من أجل العمل بفاعلية أكبر في أثناء حل المسائل.

قائمة المراجع

- Alexander, J. M., Carr, M., & Schwanenflugel, P. J. (1995). Development Of Meta-cognition In Gifted Children: Direction For Future Research. *Developmental Review*, 15, 1-37.
- Apsimon, H. (1991). *Mathematical Byways In Ayling, Beeling, And Ceiling*. Oxford, Ny: Oxford University Press.
- Artzt, A. F., & Armour-Thomas, E. (1992). Development Of A Cognitive-Meta-cognitive Framework For Protocol Analysis Of Mathematical Problem Solving In Small Group. *Cognition And Instruction*, 9, 137-175.
- Bloom, B., Englehart, M. Furst, E., Hill, W., & Krathwohl, D. (1956). *Taxonomy Of Educational Objectives: The Classification Of Educational Goals. Handbook I: Cognitive Domain*. New York: Longman.
- Brown, A. (1978). Knowing When, Where And How To Remember: A Problem Of Metacognition. In R. Glaser (Ed.), *Advances In Instructional Psychology* (Pp. 77-165). Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum Associates.
- Carlson, M. P., & Bloom, I. (2005). The Cyclic Nature Of Problem Solving: An Emergent Multidimensional Problem Solving Framework. *Educational Studies In Mathematics*, 58, 45-75.
- Covington, J. (2005). Solutions To January Calendar. *Mathematics Teacher*, 98, 334-336.
- Davidson, J. E., & Sternberg, R. J. (1998). Smart Problem Solving: How Metacognition Helps. In D. J. Hacker, J. Dunlosky, & A. C. Graesser (Eds.), *Metacognition In Educational Theory And Practice* (Pp. 47-68). Mahwah, Nj: Erlbaum.
- Debellis, V. A. (1998). *Mathematical Intimacy: Local Affect In Powerful Problem Solvers*. Proceedings Of The 20Th Annual Meeting Of The North American

- Group For The Psychology Of Mathematics Education (Pp. 435–440). Columbus, Oh: Eric Clearinghouse For Science, Mathematics, And Environmental Education.
- Flavell, J. H. (1992). Metacognitive And Cognitive Monitoring: A New Area Of Cognitive Development Inquiry. In T. O. Nelson (Ed.), *Metacognition—Core Readings*, (Pp. 3–8). Library Of Congress.
- Fortunanto, I., Hecht, D., Tittle, C. K., & Alvarez, L. (1991). Metacognition And Problem Solving. *Arithmetic Teacher*, 39, 38–40.
- Gardiner, A. (1987). *Mathematical Puzzling*. Oxford, England: Oxford University Press.
- Garofalo, J. (1992). Number—Consideration Strategies Students Use To Solve Wordproblems. *Focus On Learning Problem In Mathematics*, 14, 37–50.
- Garofalo, J. (1993). Mathematical Problem Preferences Of Meaning—Oriented And Number—Oriented Problem Solvers. *Journal For The Education Of The Gifted*, 17, 26–40.
- Garofalo, J., & Lester, F. K. (1985). Metacognition, Cognitive Monitoring, And Mathematical Performance. *Journal For Research In Mathematics Education*, 16, 163–176.
- Geary, D. C. (1994). *Children’s Mathematical Development: Research And Practical Applications*. Washington, Dc: American Psychological Association.
- Geary, D. C. (1996). Biology, Culture, And Cross—National Differences In Mathematical Ability. In R. J. Sternberg, & T. Ben—Zeev (Eds.), *The Nature Of Mathematical Thinking*, (Pp. 145–171). Mahwah, Nj: Erlbaum.
- Goldin, G. A. (2000). Affective Pathways And Representation In Mathematical Problem Solving. *Mathematical Thinking And Learning*, 23, 209–219.
- Gorodetsky, M., & Klavir, R. (2003). What Can We Learn From How Gifted/ Average Pupils Describe Their Processes Of Problem Solving? *Learning And Instruction*, 13, 305–325.
- Hannah, C. (1990, April). Metacognitive Strategies Used By Learning—Disabled Gifted Students. Paper Presented At The Annual Meeting Of The American Association For Educational Research Association, Boston, MA.
- Hatano, G. (1990). Toward The Cultural Psychology Of Mathematical Cognition. *Monograph Of The Society For Research In Child Development*, 55, 108–115.
- Heinze, A. (2003, July). Mathematically Gifted Elementary Students’ Problem Solving Strategies: Significant Differences To «Non—Gifted» Students. Paper

- Presented At The Biennial Conference Of The World Council For Gifted And Talented Children. Adelaide, Australia.
- Kapa, E. (1998). A Metacognitive Support During The Process Of Problem Solving In A Computerized Environment. *Educational Studies In Mathematics*, 29, 317–336.
- Killen, R. (1996). *Effective Teaching Strategies: Lesson From Research And Practice*, Sydney, Australia: Social Science Press.
- Klaimongkol, Y. (2002). The Development Of An Instructional Process By Applying A Problembased Learning Approach To Enhance Mathematical Competencies Of Prathom Suksa Five Gifted Students In Mathematics. Unpublished Doctoral Dissertation, Chulalongkorn University, Bangkok, Thailand.
- Krantz, S. G. (1996). *Techniques Of Problem Solving*. Providence, Ri: American Mathematical Society.
- Lawson, M. J., & Chinnappan, M. (1994). Generative Activity During Geometry Problem Solving: Comparison Of The Performance Of High–Achieving And Lowachieving High School Student. *Cognition And Instruction*, 12, 61–93.
- Mayer, R. E. (1992). *Thinking, Problem Solving, Cognition*. New York: Freeman.
- Mccormick, B. C. (2003). Metacognition And Learning. In W. M. Reynolds, & G. E. Miller (Eds.), *Handbook Of Psychology*, (Pp. 79–102). New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Merriam, S. B. (1998). *Qualitative Research And Case Study Applications In Education*. San Francisco, Ca: Jossey–Bass Publishers.
- Montague, M. (1991). Gifted And Learning Disabled Gifted Students' Knowledge And Use Of Mathematical Problem–Solving Strategies. *Journal For The Education Of The Gifted*, 14, 393–411.
- Montague, M., & Applegate, B. (1993). Middle School Students' Mathematical Problem Solving: An Analysis Of Think–Aloud Protocols. *Learning Disabilities Quarterly*, 16, 19–32.
- Office Of The National Education Commission, Ministry Of Education, Thailand. (2004). *Education In Thailand*. Bangkok, Thailand: Author.
- Overtoom–Corsmit, R., Dekker, R., & Span, P. (1990). Information Processing In Intellectually Highly Gifted Children By Solving Mathematical Tasks. *Gifted Education International*, 6, 143–148.
- Polya, G. (1957). *How To Solve It: A New Aspect Of Mathematical Method*. Garden City, Ny: Doubleday & Company, Inc.
- Posamenteir, A. S., & Salkind, C. T. (1996). *Challenging Problems In Geometry*. New York: Dover Publications.

- Posamentier, A. S., & Schulz, W. (1996). *The Art Of Problem Solving: A Resource For Mathematics Teacher*. Thousand Oaks, Ca: Corwin Press, Inc.
- Pressley, M., Borkowski, J., & Schneider, W. (1989). Good Information Processing: What It Is And How Education Can Promote It. *International Journal Of Educational Research*, 13, 857–867.
- Pretz, J. E., Naples, A. J., & Sternberg, R. J. (2003). Recognizing, Defining, And Representing Problems. J. E. Davidson, & R. J. Sternberg (Eds.), *The Psychology Of Problem Solving*, (Pp. 3–30). Cambridge, Ma: Cambridge University Press.
- Pugalee, D. K. (2001). Writing, Mathematics, And Metacognition: Looking For Connections Through Students' Work In Mathematical Problem Solving. *School Science And Mathematics*, 101, 236–245.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, Fl: Academic.
- Schoenfeld, A. H., Burkhardt, H., Daro, P., Ridgway, J., Schwartz, J., & Wilcox, S. (1999). *High School Assessment*. White Plains, Ny: Dale Seymour Publications.
- Sowell, E. J., Zeigler, A. J., Bergwell, L., & Cartwright, R. M. (1990). Identification And Description Of Mathematically Gifted Students: A Review Of Empirical Research. *Gifted Child Quarterly*, 34, 147–154.
- Sriraman, B. (2003). Mathematical Giftedness, Problem Solving, And The Ability To Formulate Generalizations. *The Journal Of Secondary Gifted Education*, 14, 151–165.
- Sternberg, R. J. (1995). *In Search Of Human Mind*, Orlando, Fl: Harcourt Brace College Publishers.
- Stevenson, H. W., & Stigler, J. W. (1992). *The Learning Gap: Why Our Schools Are Failing And What Can We Learn From Japanese And Chinese Education*. New York: Summit.
- Swanson, L. H. (1990). Influence Of Metacognitive Knowledge And Aptitude On Problem Solving. *Journal Of Educational Psychology*, 82, 306–314.
- Thipatdee, G. (1996). *The Construction Of An Enrichment Curriculum Developing Complex Thinking Ability Of The Upper Secondary School Students With High Achievement*. Unpublished Doctoral Dissertation, Chulalongkorn University, Bangkok, Thailand.
- Wieczerkowski, W., Cropley, A. J., & Prado, T. M. (2000). Nurturing Talents/Gifts In Mathematics. In K. A. Heller, F. J. Monks, R. J. Sternberg, & R. F. Subotnik (Eds.), *International Handbook Of Giftedness And Talent Education*, (Pp. 413–425). Oxford, Uk: Pergamon.

Yimer, A. (2004). Metacognitive And Cognitive Functioning Of College Students During Mathematical Problem Solving. Unpublished Doctoral Dissertation, Illinois State University.

Yin, R. K. (1994). *Case Study Research Design And Methods*, Newbury Park, Ca: Sage.



oboi.kanadl.com