المجموعة "الزمرة"

مفهومها - نظريتها - نشأتها وتطورها
تطبيقاتها وأثر ذلك على منهج التعليم العام

تأليف

دكتورة معصومة محمد كاظم

أستاذة المناهج وطرق تدريس الرياضيات

كليـة البنـات - جامعة عين شمس

١٩٧٩

دار المعارف

الناشر : دار المعارف ـ ١١١٩ كورنيش النيل ـ القاهرة ج٠م٠ع

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

الرياضيات مرآة الحضارة ، ولا يمكن أن تبنى مدنية بدون أساس رياضى متقدم . وهذا هو سر حضارة أجدادنا قدماء المصريين .

والعلوم الحديثة تعتمد إعتماداً كليا على الرياضيات ، فلو لا الرياضيات ما استطاع الإنسان غزو الفضاء . فالرياضيات بحق ملكة العلوم وخادمتها .

ولقد تطورت الرياضيات وتقدمت تقدما سريعا فى الحقبة الأخيرة من الزمن ، مما دعا خبراء ومتخصصى المناهج وعلماء تدريس الرياضيات يفكرون فى تطوير مناهج التعليم العام إبتداء من المدرسة الإبتدائية إلى نهاية المرحلة الثانوية . وقد بدأت تجربة تطوير مناهج الرياضيات فى مصر منذ حوالى عشر سنوات . ومع ذلك فالتجربة تلاقى الكثير من الصعوبات حتى الآن .

ولاشك أننا فى حاجة إلى تناول المفاهيم الجديدة ، ودراستها بعمق والتعرف على نشأتها وتطورها وعلى قيمتها التطبيقية فى مجال الرياضيات وفى مجالات أخرى خارج الرياضيات بهدف أن يشعر المعلم والطالب بقيمة هذه المفاهيم وحتمية دراستها .

وفى بحثنا هذا نقدم مفهوم المجموعة (الزمرة) من منظور تاريخى وتطبيق وذلك فى ستة فصول : يقوم الفصل الأول بتعريف مفهوم المجموعة ونظريتها . ويختص الفصل الثانى بنشأة وتطور المجموعة . ويتناول الفصل الثالث دراسة مفهوم المجموعة وعلاقته بالهندسات المختلفة . أما الفصل الرابع فيختص بمدى

الاستفادة من تطبيق نظرية المجموعات فى تدريس الرياضيات فى التعليم العام . ويتناول الفصل الخامس استخدام نظرية المجموعات فى علم الكيمياء . وينتهى الكتاب بالفصل السادس وهو الفصل الذى يوضح أثر نظرية المجموعات على مناهج الرياضيات فى التعليم العام وإعداد المعلم .

وتشكر المؤلفة كل من ساهم فى المعاونة فى إخراج هذا الكتاب إلى النور وتخص بالشكر الأستاذ الدكتور محمد عمر عبد الرحمن وأولادها الذين هيئوا الجو المناسب . كما تقدم الشكر للأستاذ الدكتور وليم عبيد لمناقشاته البناءة والى السيد الدكتور محمد صبرى عبد المطلب لتقديمه المشورة العلمية فى مجال الكيمياء وكذلك تشكر دار المعارف ومطبعه دار نشر الثقافة .

وترجو من الله أن يكون هذا الكتاب فاتحة لمزيد من الكتب والأبحاث التى تهدف إلى تعميق الأسس والمفاهيم الرياضية الجديدة على مناهجنا . والله الموفق والمعين .

المؤلفة

يونيو سنة ١٩٧٩

محتويات الكتاب

بسم الله الرحمن الرحيم

لا يزال الجدل حول مناهج الرياضيات فى التعليم العام بين المتخصصين وغير المتخصصين . ونقطة الحوار هى مسار التطوير . ومع أنه قد حدث فعلا تطوير فى المناهج عندنا منذ سنة ١٩٧٠ ومع أن هذا التطوير قد وضع على أسس مدروسة ،إلا أن كثيرين من رجال التعليم فى مصر ومن أولياء الأمور لا يزالون غير مقتنعين بهذا النوع من التطوير ، وربما يرجع السبب فى ذلك إلى عدم العناية بالثقافة العامة حول المادة نفسها وتطورها وتطبيقاتها المتعددة . وكذلك إلى تركيز الاهتمام فى مدارسنا على المعلومات والمهارات . وإغفـــال الاتجاهات وعدم إتاحة الفرصة للتثقيف العام وتوسيع الأفق خارج نطاق المقرر الدراسى .

وعلى ذلك رأت الباحثة أن تأخذ مفهوما من المفاهيم الموجودة فى المنهج المطور — أى من المفاهيم الجديدة فى مناهجنا الدراسية ، وإن كان هذا المفهوم عرف فى علم الرياضيات قبل سنة ١٩٠٠ ، ثم تتناول هذا المفهوم بالتعريف ثم بعد ذلك تنتقل إلى نشأته وتطوره . ثم تبحث فى أهميته فى الرياضيات عامة وفى تطبيقاته فى إحدى مجالات المعرفة الأخرى أى خارج نطاق الرياضيات .

وهذا المفهوم الذى وقع عليه اختيار الباحثة هو مفهوم المجموعة (الزمرة)[١].
وعلى ذلك ستكون خطوات هذا البحث كما يأتى :

---

(١) يستخدم اصطلاح « الزمرة » كترجمة بديلة للمجموعة Group فى بعض المراجع العربية .

بسم الله الرحمن الرحيم

لا يزال الجدل حول مناهج الرياضيات فى التعليم العام بين المتخصصين وغير المتخصصين . ونقطة الحوار هى مسار التطوير . ومع أنه قد حدث فعلا تطوير فى المناهج عندنا منذ سنة ١٩٧٠ ومع أن هذا التطوير قد وضع على أسس مدروسة ،إلا أن كثيرين من رجال التعليم فى مصر ومن أولياء الأمور لا يزالون غير مقتنعين بهذا النوع من التطوير ، وربما يرجع السبب فى ذلك إلى عدم العناية بالثقافة العامة حول المادة نفسها وتطورها وتطبيقاتها المتعددة . وكذلك إلى تركيز الاهتمام فى مدارسنا على المعلومات والمهارات . وإغفال الاتجاهات وعدم إتاحة الفرصة للتثقيف العام وتوسيع الأفق خارج نطاق المقرر الدراسى .

وعلى ذلك رأت الباحثة أن تأخذ مفهوما من المفاهيم الموجودة فى المنهج المطور — أى من المفاهيم الجديدة فى مناهجنا الدراسية ، وإن كان هذا المفهوم عرف فى علم الرياضيات قبل سنة ١٩٠٠ ، ثم تتناول هذا المفهوم بالتعريف ثم بعد ذلك تنتقل إلى نشأته وتطوره . ثم تبحث فى أهميته فى الرياضيات عامة وفى تطبيقاته فى إحدى مجالات المعرفة الأخرى أى خارج نطاق الرياضيات .

وهذا المفهوم الذى وقع عليه اختيار الباحثة هو مفهوم المجموعة (الزمرة)[1]. وعلى ذلك ستكون خطوات هذا البحث كما يأتى :

---

(١) يستخدم اصطلاح « الزمرة » كترجمة بديلة للمجموعة Group فى بعض المراجع العربية .

١ — دراسة مختصرة لمفهوم المجموعة ونظريتها .

٢ — دراسة لنشأة فكرة المجموعات وتطورها .

٣ — عرض بعض تطبيقات مفهوم المجموعة فى الرياضيات وفى منهج رياضيات التعليم العام .

٤ — عرض بعض الأمثلة التى توضح تطبيق المجموعات فى علم الكيمياء .

٥ — عرض أثر نظرية المجموعات على مناهج الرياضيات فى التعليم العام وإعداد المعلم .

الهـدف من البحث :

يهدف هذا البحث إلى دراسة وعرض العلاقة بين المجموعات وموضوعات شتى فى الرياضيات عامة وفى منهج الرياضيات بالمدرسة الثانوية خاصة . وفى مجال آخر خارج علم الرياضيات وهو مجـــال علم الكيمياء وكذلك تقديم معالجات متعددة برجاء تأكيد أهمية ضرورة احتواء دراسة المجموعات فى مناهج الرياضيات للطالب المتوسط الذى سيدخل الجامعة .

اهميـــة البحث :

المجموعة تركيب رياضى مجرد بسيط . ومع ذلك له تطبيقات عدة فى مجالات العلوم المختلفة كالفيزياء النظرية والكيمياء والهندسة الكهربية والآلات الحاسبة الالكترونية . لذلك وجب توعية معلم الرياضيات وطلبة كليات إعداد المعلمين والمهتمين بعلم الرياضيات من أولياء الامور وغيرهم بأهمية المجموعات وتطورها وتطبيقاتها فى الرياضيات وفى غيرها من المجالات وكذلك توعية مدرسى الكيمياء ومعلمى العلوم الأخرى بقيمة الرياضيات فى تدريس وفهم المواد الدراسية المختلفة وكذلك تثقيف المعلم وطالب كليات إعداد المعلم حول موضوعات الرياضيات التى وضعت فى المنهج المطور .

الفصل الأول

مفهوم ونظرية المجموعات

قبل أن نعرف المجموعة ، سنعطى بعض الأمثلة المحسوسة للمجموعات وسنبدأ بإعطاء مثال لمجموعة تبادل Permutation Group .

حيث أن مجموعات التباديل هامة جدا تاريخيا فى تطور مفهوم المجموعة .

أولا : مجموعة التباديل :

نفرض أن الفئة سـ = { I ، أ ، ب ، جـ ، د ، هـ } حيث أن هذه الستة عناصر على الترتيب هى الست تباديل الآتية للاعدد ١ ، ٢ ، ٣ :

بحيث ان :

I = (١ ، ٢ ، ٣) وهو الترتيب الأصلى ويكتب هكذا $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$

ويقرأ كما يلى : ١ تحل مكان ١ ، ٢ تحل مكان ٢ ، ٣ تحل مكان ٣

أ = (١ ، ٣ ، ٢) ويكتب هكذا : $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٣ & ١ \end{bmatrix}$

ويقرأ كما يلى :

١ تحل مكان ١ ، ٣ تحل مكان ٢ ، ٢ تحل مكان ٣

ب = (٢ ، ١ ، ٣) ويكتب هكذا : $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$

وتقرأ كما يلى :

٢ تحل مكان ١ ، ١ يحل مكان ٢ ، ٣ تحل مكان ٣

جـ = (٢ ، ٣ ١) ويكتب هكذا : $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ١ & ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

ويقرأ كما يلى :

٣ تحل مكان ١ ، ١ تحل مكان ٢ ، ٢ تحل مكان ٣

ه = (٣ ، ٢ ، ١) وتكتب هكذا : $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

وتقرأ كما يلى :

٣ تحل مكان ١ ، ٢ تحل مكان ٢ ، ١ تحل مكان ٣

ويعرف حاصل ضرب ا ب بالقيام بعملية التباديل الاولى ا ثم تليها العملية الثانية ب .

وعلى ذلك فالقيام بعملية التباديل ا = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٣ & ١ \end{bmatrix}$

ثم عملية التباديل ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

أى أن ا ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ١ & ٣ & ٢ \end{bmatrix}$ = حـ فى هذا المثال

أى ا ب = حـ

ولكن إذا أجرينا العملية ب ا نجد أن ب ا = ء

أى أن فى هذا المثال ا ب $\neq$ ب ا أى عملية الضرب هنا ليست تبديلية .

ويمكن وضع كل نواتج ضرب عناصر س الممكنة فى الجدول الآتى :

⊗	I	ا	ب	حـ	ء	هـ
I	I	ا	ب	حـ	ء	هـ
ا	ا	I	حـ	ب	هـ	ء
ب	ب	ء	I	هـ	ا	حـ
حـ	حـ	هـ	ا	ء	I	ب
ء	ء	ب	هـ	I	حـ	ا
هـ	هـ	حـ	ء	ا	ب	I

جدول (١)

ونلاحظ فى الجدول السابق ما يأتى :ـــ

١ ـــ توافر خاصية الانغلاق بالنسبة لعملية الضرب المعرفة أى أن حاصل ضرب أى عنصرين فى الفئة سـ يكون عنصرا فيها .

٢ ـــ توافر خاصية الدمج .

أى نجد أن (ا ب) حـ = ا (ب حـ) وذلك بأخذ الطرف الأيمن .

(ا ب) حـ = (حـ) حـ = ء

ثم الطرف الأيسر ا (ب حـ) = ا (هـ) = ء

٣ ـــ توافر خاصية وجود العنصر المحايد (I فى هذا المثال) وله خاصية

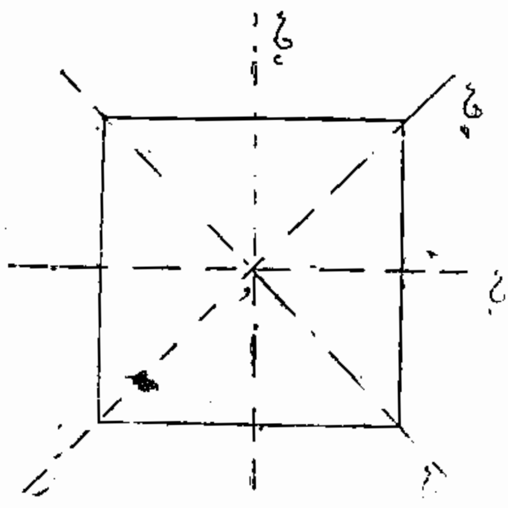
ا I = I ا = ا

، ب I = I ب = ب وهكذا

٤ ـــ توافر خاصية وجود معكوس لكل عنصر من عناصر الفئة سـ

وفى هذا المثال نجد أن ا ، ب ، هـ معكوسات لنفسها ولكن حـ معكوس ء ، ء معكوس حـ .

ثانيا : تماثل المربع .



شكل (١)

إن فكرة التماثل مألوفة عندنا جميعا . ولكن قليل من الناس الذين يدركون أن هناك جبر خاص بالتماثل . وفيما يلي سنعطى حالة محسوسة من تماثل المربع .

نتصور أن عندنا مربعا من الورق المقوى موضوعا على مستو له محاور ثابتة . وأن مركز المربع يقع عند نقطة الأصل .وأن أحد الأضلاع يكون أفقيا من الواضح أن المربع له تماثل دورانى ، أى أن الشكل الناتج من الدوران يكون متماثلا مع الشكل الأصلى . ولتوضيح ذلك تحرك المربع الحركات الدورانية الجاسئة rigid الآتية :

$د_١$ = دوران الشكل مع إتجاه عقارب الساعة بزاوية قدرها ٩٠° حول المركز .

$د_٢$ = دوران الشكل مع إتجاه عقارب الساعة بزاوية قدرها ١٨٠° حول المركز .

$د_٣$ = دوران الشكل مع إتجاه عقارب الساعة ولكن بزاوية قدرها ٢٧٠° حول المركز .

كذلك نجد أن للمربع تماثل إنعكاسى أى أن الشكل الناتج من الانعكاس يكون متماثلا مع الشكل الأصلى ولنرمز لهذه الانعكاسات الجاسئة بالرموز $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$ ، $ع_٤$ حيث أن : $ع_١$ = إنعكاس الشكل على المحور الأفقى المار بالمركز .

$ع_٢$ = إنعكاس الشكل على المحور الرأسى المار بالمركز .

$ع_٣$ = إنعكاس الشكل على القطر الواصل من المربع الأول إلى المربع الثالث .

$ع_٤$ = إنعكاس الشكل على القطر الواصل من المربع الثانى إلى المربع الرابع .

وعندما يكون الشكل فى وضعه الأصلى سنرمز لهذا الوضع I وبهذا يكون عندنا الآن ثمان حركات تماثل للمربع .

وفى جبر التماثل هذا سنعبر عن القيام بحركتين متتاليتين (بعملية الضرب) أى أن عملية الضرب هنا تعنى القيام بالحركة الأولى ثم يعقبها الحركة الثانية وعلى ذلك يمكن الحصول على $ع_{١}$ $د_{١}$ بانعكاس المربع على المحور الأفقى ثم دورانه بزاوية قدرها ٩٠° . فاذا وضعنا كل نواتج ضرب الحركات التى عرفناها فى جدول. كان الجدول كما يلى :

	I	$د_{١}$	$د_{٢}$	$د_{٣}$	$ع_{١}$	$ع_{٢}$	$ع_{٣}$	$ع_{٤}$
I	I	$د_{١}$	$د_{٢}$	$د_{٣}$	$ع_{١}$	$ع_{٢}$	$ع_{٣}$	$ع_{٤}$
$د_{١}$	$د_{١}$	$د_{٢}$	$د_{٣}$	I	$ع_{٣}$	$ع_{٤}$	$ع_{٢}$	$ع_{١}$
$د_{٢}$	$د_{٢}$	$د_{٣}$	I	$د_{١}$	$ع_{٢}$	$ع_{١}$	$ع_{٤}$	$ع_{٣}$
$د_{٣}$	$د_{٣}$	I	$د_{١}$	$د_{٢}$	$ع_{٤}$	$ع_{٣}$	$ع_{١}$	$ع_{٢}$
$ع_{١}$	$ع_{١}$	$ع_{٤}$	$ع_{٢}$	$ع_{٣}$	I	$د_{٢}$	$د_{٣}$	$د_{١}$
$ع_{٢}$	$ع_{٢}$	$ع_{٣}$	$ع_{١}$	$ع_{٤}$	$د_{٢}$	I	$د_{١}$	$د_{٢}$
$ع_{٣}$	$ع_{٣}$	$ع_{١}$	$ع_{٤}$	$ع_{٢}$	$د_{١}$	$د_{٣}$	I	$د_{٢}$
$ع_{٤}$	$ع_{٤}$	$ع_{٢}$	$ع_{٣}$	$ع_{١}$	$د_{٣}$	$د_{١}$	$د_{٢}$	I

جدول (٢)

ونلاحظ أنه إذا أجرينا الحركتين $ع_{١}$ $د_{١}$ على المربع يمكن التحقق من أن هاتين الحركتين لهما نفس نتيجة القيام بالحركة $ع_{٤}$.

ويمكن التأكد من ذلك من الجدول حيث $ع_{١}\ د_{١} = ع_{٤}$ (أنظر الجدول)

٢ ـــ وبالمثل إذا قمنا بتحصيل الحركتين $د_{١}$ $ع_{١}$ نلاحظ أن

$$د_{١}\ ع_{١} = ع_{٣} \neq ع_{١}\ د_{١}$$

ونستنتج من ذلك أن عملية الحركة التى عندنا ليست تبديلية ولكن يمكن التأكد من أن جميع الخواص الأخرى متوافرة مثل خاصية الانغلاق وخاصية الدمج وخاصية وجود العنصر المحايد وخاصية وجود معكوس لكل عنصر فى الفئة أى أن فئة الحركات .

$$ك = (I ، د_١ ، د_٢ ، د_٣ ، ع_١ ، ع_٢ ، ع_٣ ، ع_٤)$$

وعملية الضرب المعرفة فى هذا المثال تكون مجموعة غير تبديلية

ثالثا ـ مجموعة التحويلات :

يمكن مد جبر التماثل إلى تحويلات أحادية لأية فئة من العناصر سـ ومع أن غالبا ما يقترح التفكير فى الفئة سـ كفراغ (مثل مستوى أو كرة) وفى عناصرها كنقط . ولكن هذا لا يتعارض مع الجبر الشكلى .

فإذا كانت فئة التعويض والتى تحدث دورانات فى المستوى هى : ـ

$$ر : \begin{array}{l} س' = س \text{ حتا } \theta - ص \text{ حا } \theta \\ ص' = س \text{ جا } \theta + ص \text{ حتا } \theta \end{array}$$

وإذا كانت (س ، ص) نقطة فى مستوى . وإذا كانت θ = صفر فإن التحويلة السابقة تكون كما يلى :

$$، \begin{array}{l} س' = س (١) - ص (٠) = س \\ ص' = س (٠) + ص (١) = ص \end{array}$$

أى أن عندما تكون θ = صفر فإن النقطة (س ، ص) تبقى بدون تغيير . وعلى ذلك يكون العنصر المحايد فى فئة التحويلات هذه هى :

$$I : \begin{array}{l} س' = س \text{ حتا صفر } - ص \text{ حا صفر} \\ ص' = س \text{ حا صفر } + ص \text{ حتا صفر} \end{array}$$

ولتوليد Generate مجموعة تحويلات نعوض عن س ، ص على النحو التالى :

$$ت_١ : \begin{cases} س' = س \text{ حتا } \theta - ص \text{ حا } \theta \\ ص' = س \text{ حا } \theta + ص \text{ حتا } \theta \end{cases}$$

حيث أن $\theta = \frac{م ط}{ل}$ ، ط النسبة التقريبية ، م ، ل أعدادا صحيحة .

وإذا أخذنا

$$ت_٢ : \begin{cases} س'' = س' \text{ حتا } \theta - ص' \text{ حا } \theta \\ ص'' = س' \text{ حا } \theta + ص' \text{ حتا } \theta \end{cases}$$

وهذا معناه أن :

$$ت_٢ : \begin{cases} س'' = س \text{ حتا } ٢\theta - ص \text{ حا } ٢\theta \\ ص'' = س \text{ حا } ٢\theta + ص \text{ حتا } ٢\theta \end{cases}$$

وبنفس الطريقة يكون :

$$ت_٣ : \begin{cases} س''' = س \text{ حتا } ٣\theta - ص \text{ حا } ٣\theta \\ ص''' = س \text{ حا } ٣\theta + ص \text{ حتا } ٣\theta \end{cases}$$

أى أن $ت_٢ = (ت_١)^٢$ ، $ت_٣ = (ت_١)^٣$.

وواضح أن $ت_٤ = (ت_١)^٤$ فاذا كانت $\theta = ٩٠^\circ$ كانت $٤\theta = ٣٦٠^\circ$ فتكون $ت_٤ = I$.

والجدول الآتى يبين فئة التحويلات مع عملية الضرب (٥) المعرفة سابقا .

$\circ$	I	ت$_1$	ت$_2$	ت$_3$
I	I	ت$_1$	ت$_2$	ت$_3$
ت$_1$	ت$_1$	ت$_2$	ت$_3$	I
ت$_2$	ت$_2$	ت$_3$	I	ت$_1$
ت$_3$	ت$_3$	I	ت$_1$	ت$_2$

جدو رقم (٣)

وإذا فحصنا هذا النظام وجدنا أن كل خواص المجموعة متوفرة حتى الخاصية التبديلية أى أن هذا النظام مثال لمجموعة تبديلية .

وعلى ذلك يمكننا تعريف مجموعة التحويلات ج تعريفا مجرداً كما يأتى:

نعنى بمجموعة التحويلات على فراغ سـ أية فئة ج أحادية التحويلات ولنرمز لهذه التحويلة بالرمز ر من سـ على سـ بحيث أن :

١ ــ التحويلة المحايدة تكون فى ج .

٢ ــ إذا كان التحويلة ت فى ج ، فتكون معكوستها كذلك فى ج .

٣ ــ إذا كان ت$_1$ ، ت$_2$ فى ج ، كان حاصل ضربهما كذلك فى ج .

٤ ــ (ت$_1$ $\circ$ ت$_2$) $\circ$ ت$_3$ $=$ ت$_1$ $\circ$ (ت$_2$ $\circ$ ت$_3$) .

والآن سنعطى تعريفا عاما مجردا للمجوعة :

تعريف :

إذا كانت $\circ$ عملية ثنائية على الفئة سـ فان الفئة سـ ، العملية $\circ$ تكون مجموعة (س ، $\circ$) إذا وإذا فقط توافرت الشروط التالية :

١ ـــ خاصية الانغلاق أى العملية * تكون عملية مغلقة فى الفئة سـ .

٢ ـــ خاصية الدمج أى أن العملية * تكون عملية إدماجية فى سـ .

٣ ـــ خاصية العنصر المحايد أى يوجد عنصر محايد للعملية * فى الفئة سـ .

٤ ـــ خاصية معكوس العنصر أى يوجد لكل عنصر فى سـ معكوس تحت العملية * أى أن خواص الانغلاق والدمج ووجود العنصر المحايد ووجود معكوس لكل عنصر تسمى خواص المجموعة .

ومن الملاحظ أن الخاصية الإبدالية Commutative ليست من الخواص الأساسية للمجموعة . ولكن إذا توافرت خاصية التبديل سميت المجموعة بالمجموعة التبديلية أو المجموعة الابيلية نسبة إلى العالم الرياضى « أبل » Abel والذى سنتكلم عنه فى الفصل الثانى .

الايسومورفيزم (التشاكل) بين المجموعات :

يمكن تقديم فكرة المجموعات الايسومورفيه (المتشاكلة) أو فى بعض الأحيان تسمى (المتشابهة عطيا) بالمثال الآتى :ـــ

فيما يلى عمودان أحدهما مكونا من بعض الأعداد الصحيحة م ويقابلها فى العمود الثانى $٢^م$ أى ٢ مرفوعة إلى الأس م .

م	٢^م
٠	١
١	٢
١ —	٠ر٥
٢	٤
٢ —	٠ر٢٥
$\boxed{٣}$	$\boxed{٨}$
٣ —	٠ر١٢٥
٤	١٦
$\boxed{٤ —}$	$\boxed{٠ر٠٦٢٥}$
٥	٣٢
٥ —	٠ر٠٣١٢٥
٠	٠
٩	٠
٠	٠
إجمع	إضرب

جدول (٤)

فاذا نظرنا إلى العمودين وجمعنا العنصرين فى العمود الاول

٣ + (— ٤) = — ١ وضربنا العنصرين المقابلين لهما فى العمود الثانى ٨ × ٠٫٠٦٢٥ = ٠٫٥ كانت الاجابة كما يلى (— ١ ، ٠٫٥)

ونجدها فى الصف الثالث من العمودين وهذه صفة خاصة للمجموعات الآيسومورفيه أو المتشاكلة أو المتشابهه تمطيا . وعلى ذلك يمكن تعريف المجموعات الآيسومورفيه فيما يأتى :

تعريف : — تسمى المجموعتان (ق ، ٭) ، (ك ، #) أيسومورفيتين إذا وإذا فقط وجد تناظر أحادى بين عناصر ق ، عناصر ك بحيث أن إذا كانت ا ∈ ق تناظر س ∈ ك

، كانت ب ∈ ق تناظر ص ∈ ك

فان ا ٭ ب تناظر س # ص .

أى أن إذا كانت ا ↔ س ، ب ↔ ص فان ا ب ↔ س ص وعلى ذلك يمكن أن نقول أن المجموعات الآيسومورفيه تكون لها نفس التركيب الجبرى .

مثال : إذا كانت ق هى فئة الاعداد الصحيحة ، ك فئة الاعداد الصحيحة الزوجية أى ق : ... ، — ٤ ، — ٣ ، — ٢ ، — ١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ...

↕ ↕ ↕

ك : ..... ، — ٨ ، — ٦ ، — ٤ ، — ٢ ، ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ...

فاذا كانت ا ، ب ، حـ عناصر فى ق مع العملية ٭ بحيث أن ا ٭ ب = حـ وإذا كانت س ، ص ، ى عناصر فى ك فى العملية # بحيث أن س # ص = ى وعلى ذلك إذا كان التناظر بين ا ↔ س ، ب ↔ ص . فلا بد أن يكون صحيحا أن حـ ↔ ى إذا كان التناظر أيسومورفى .

وفعلا يكون هذا صحيحا إذا كانت العملية هى عملية الجمع العادية وليس صحيحا إذا كانت العملية عملية الضرب .

أى أن مع عملية الجمع تكون فئة الاعداد الصحيحة أيسومورفية مع فئة الأعداد الزوجية ولكنها لا يكونا أيسومورفيين مع عملية الضرب .

فمثلا $٤ \leftrightarrow ٨$ ، $٣ \leftrightarrow ٦$ $\therefore$ $(٤ + ٣) \leftrightarrow (٨ + ٦)$

ولكن (٤×٣) لا تناظر (٨×٦)

أهمية الايسومورفيزم (التشاكل) بين المجموعات :

بناء على ما ذكر فى البند السابق، إذا استطعنا اكتشاف وجود أيسومورفيزم بين بعض المجموعات ،فاننا نستطيع أن نقول أن هذه المجموعات لها نفس التركيب الجبرى . وهذه الخاصية مفيدة جدا ، لأنها توفر مجهود دراسة كل مجموعة على حدة ، فتى يكشف أيسومورفيزم بين المجموعات يكتفى بدراسة مجموعة واحدة كمثال لباقى المجموعات .

وتعتبر دراسة التباديل أساسا لدراسة المجموعات المحدودة الرتب ، وتخدم كأداة أساسية فى توضيح تركيب المجموعات الايسومورفية وعلى ذلك يمكن أن تخدم كنمط لتوحيد بعض الأفكار فى الرياضيات .

وفيما يلى سنعطى أربعة أمثلة لمجموعات مختلفة كل منها له عملية مختلفة وعناصرها غير متشابهة ، فاذا كان بين هذه المجموعات أيسومورفيزم ، نستطيع أن نقول أن المجموعات الأربع لها نفس التركيب الجبرى .

المثال الأول : مجموعة تباديل

إذا أخذنا (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤) مع عملية التباديل وأخذنا الترتيب الأصلى كعنصر محايد ورمزنا له بالرمز I حيث :

$$I = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ & ٣ & ٤ \end{bmatrix}$$

وأخذنا الترتيب الثاني $\text{ا} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٤ & ١ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

والترتيب الثالث $\text{ب} = \text{ا}^{٢} = \text{ا} \circ \text{ا} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٤ & ١ & ٢ & ٣ \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٤ & ١ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٤ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$$

والترتيب الرابع $\text{ح} = \text{ا}^{٣} = \text{ا} \circ \text{ا} \circ \text{ا} = \text{ا}^{٢} \circ \text{ا} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٤ & ١ \end{bmatrix}$

ونجد أن الترتيب الذي يليه $\text{ا}^{٤} = \text{ا}^{٣} \circ \text{ا} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ & ٣ & ٤ \end{bmatrix} = I$

وعلى ذلك يمكن وضع هذا النظام في الجدول الآتي :ـ

ل :

∘	I	ا	ب	ح
I	I	ا	ب	ح
ا	ا	ب	ح	I
ب	ب	ح	I	ا
ح	ح	I	ا	ب

جدول (٥)

<u>المثال الثاني : مجموعة الجذور الرابعة للواحد الصحيح :</u>

من دراسة نظرية ديموافر والجذور النونية للواحد الصحيح نجد أنه إذا

أختير الجذر المناسب فيمكن إستعماله لتوليد فئة الجذور كاملة . وفى هذا المثال سنختار الجذور الرابعة للواحد الصحيح لتكون عناصر الفئة هى (ت ، ت^{٢} ، ت^{٣} ، ت^{٤}) حيث ت = $\sqrt{-١}$ وستكون العملية هنا الضرب العادى .

ع :

×	١	ت	-١	-ت
١	١	ت	-١	-ت
ت	ت	-١	-ت	١
-١	-١	-ت	١	ت
-ت	-ت	١	ت	-١

جدول (٦)

المثال الثالث : مجموعة الاعداد مقياس ٤ :

إذا أخذنا فى الاعتبار الفئة (٠ ، ١ ، ٢ ، ٣) مع عملية الجمع مقياس (٤) فاننا يمكن وضع المجموعة فى الجدول الآتى :

س :

$+_{٤}$	٠	١	٢	٣
٠	٠	١	٢	٣
١	١	٢	٣	٠
٢	٢	٣	٠	١
٣	٣	٠	١	٢

جدول (٧)

المثال الرابع : مجموعة التحويلات :

إذا أخذنا نفس المثال الذى ذكر سابقا فى صفحة (١٠) .

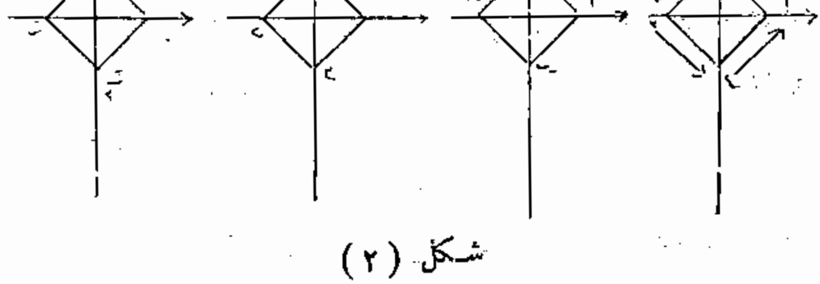
فإن ر :

٥	ا	$ت_1$	$ت_2$	$ت_3$
ا	ا	$ت_1$	$ت_2$	$ت_3$
$ت_1$	$ت_1$	$ت_2$	$ت_3$	ا
$ت_2$	$ت_2$	$ت_3$	ا	$ت_1$
$ت_3$	$ت_3$	ا	$ت_1$	$ت_2$

جدول (٨)

والأمثلة الأربع السابقة هى مثال لأربع مجموعات أيسومورفية وعلى ذلك فهى تمثل مجموعة واحدة من الوجهة المجردة .

ويمكن تمثيل هذه المجموعات هندسيا بدوران مربع فى مستوى بزاوية قدرها ٩٠° فى كل مرة . أنظر (شكل (٢)) .



شكل (٢)

المجموعات الدورية: Cyclic Groups

فى أى مجموعة ، يمكن تعريف القوى الصحيحة $ا^م$ لعنصر ا من المجموعة للأسس الموجبة والصفر والأسس السالبة كل على حدة فاذا كانت م > . فان:

$أ^{م} = أ \cdot أ \cdots أ$ (إلى م من العوامل) ،

$أ^{0} = I$ العنصر المحايد ، $أ^{-م} = (أ^{-1})^{م}$

كما أن قوانين الأسس الآتية تتحقق :

$أ^{ق}\ أ^{ك} = أ^{ق+ك}$ ، $(أ)^{ق\,ك} = أ^{ق\,ك}$

تعـــريف :

رتبة عنصر أ فى مجموعة ج يكون أقل عدد موجب م يجعل $أ^{م} = I$ (I العنصر المحايد) أما إذا لم توجد قوى موجبة للعنصر أ تجعل $أ^{م} = I$ فإن رتبة أ تكون لا نهائية .

وتكون المجموعة ج دورية إذا كانت تحتوى على عنصر س تعمل قواه على استنفاد عناصر المجموعة ج (Exhaust G) وهذا العنصر نقول أنه يولد Generate المجموعة .

مثـال ١ : مجموعة كل دورانات المربع حول مركزه بزاوية قدرها ٩٠° حسب دوران الساعة تتكون من الأربع قوى : د ، $د^{2}$ ، $د^{3}$ ، $د^{4} = I$ (حيث I المنصر المحايد) . وكذلك يمكن توليد هذه المجموعة بواسطة $د^{3}$ بدوران المربع عكس دوران الساعة بزاوية قدرها ٩٠° لأن $د^{2} = (د^{3})^{2}$ ، د $= (د^{3})^{3}$ ، $(د^{3})^{4} = I$ ، $د^{3}$ تنهى المجموعة .

ومن الواضح أن رتبة هذه المجموعة تساوى ٤ .

مثـال ٢ : يمكن اعتبار التباديل تحويلة أحادية لفئة محدودة فى نفسها فإذا كانت الفئة (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥) وعرفنا عليها العملية ϕ

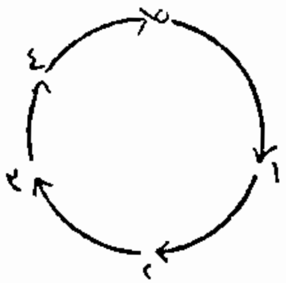
بحيث أن (١ ϕ = ٢ ، ٢ ϕ = ٣ ، ٣ ϕ = ٤ ، ٤ ϕ = ٥ ، ٥ ϕ = ١)

فإن التباديل التى على غرار التباديل المعرفة ϕ ، تعطينا إعادة تنظيم دورى لرموز التباديل تسمى تباديل دورية أو دورات أنظر شكل (٣) .

رتبــة المجموعــة : Order of a group

رتبة المجموعة هى عدد عناصرها

وعلى ذلك فالتباديل الدورية النـــونية العناصر أى التى عددها ن من العناصر تـكون رتبتها ن .



شكل (٣)

المجموعة الجزئية : Sub group

تسمى الفئة الجزئية سـ فى المجموعة ج مجموعة جزئية للمجموعة ج إذا كانت سـ هى نفسها تـكون مجموعة مع العملية الثنائية للمجموعة ج .

ففى أية مجموعة ج تـكون الفئة التى تتكون من العنصر المحايد ا فقط مجموعة جزئية ، كذلك المجموعة ج كلها تعتبر مجموعة جزئية بالنسبة لنفسها وتسمى المجموعات الجزئية غير المجموعة الجزئية ا ، ج مجموعات جزئية فعلية .

دليل المجموعــة الجزئية فى المجموعــة :

إذا كانت سـ مجموعة جزئية فى المجموعة ج .

فإن الفئة المرتبطة اليمينية (أو اليسارية) coset للمجموعة الجزئية سـ هى أية فئة سـ أ (أو أسـ) المكونة من حواصل الضرب اليمينية س أ (أو حواصل الضرب اليسارية) للعناصر س ∈ سـ مضروبة فى عنصر ثابت أ ∈ فى المجموعة ج .

وعدد الفئات المرتبطة (يمينية أو يسارية) المتمايزة تسمى دليل المجموعة الجزئية سـ فى المجموعة ج .

وفى هذا المقام سنذكر نظرية لاجرانج دون أن نتدخل فى البرهان ولمن يهمه الأمر أن يرجع إلى كتب الجبر[١] .

---

(١) G. Birkhoff & S. Maclane, A survey of Modern Algebra, Macmillan Company, New York, 1953, pp. 142 - 144.

كمـال رياض يعقـوب « الرياضيات الحـديثة » الجـزء الاول ــ دار المعـارف ، ١٩٧٣ .

معصومة محمد كاظم وآخرون «أساسيات تدريس الرياضيات الحديثة» دار المعـارف ١٩٧٠ .

نظرية لاجرانج :

رتبة المجموعة المحدودة ج هى حاصل ضرب رتب كل من مجموعاتها الجزئية .

الهومومورفيزم (تماثل التركيب) :

الهومومورفيزم (أو التماثل فى التركيب) لمجموعة ج على مجموعة أخرى ج َ هى تحويلة أحادية القيمة س ← س َ تطبق على كل ج Mapping G onto all of G'. بحيث أن

(س ص) َ = س َ ص َ لكل من س ، ص فى المجموعة ج

وسنكتفى بهذا القدر من التعريف بالمجموعة ونظريتها . ومن يريد الاستزادة فى دراسة جبر المجموعات يمكن الرجوع إلى عدة كتب، نذكر بعضها فى «المراجع» فى آخر البحث .

الفصل الثانى

نشأة وتطور نظرية المجموعات

فى هذا الفصل ، سنقوم بدراسة سريعة لنشأة وتطور نظرية المجموعات ، لنرى ما ساهمت به العقول البشرية فى تطور هذا المفهوم المجرد ، الذى ظهرت له تطبيقات شتى .

ويعتبر الرياضى الفرنسى فيتا Francois Viete (١٥٤٠ — ١٦٠٣) أول من وضع أسس التركيب المجرد الحديث لعلم الجبر . ولكن كان على هذه الأسس أن تبقى حوالى المائتين عاما قبل أن يجىء أبل Abel سنة ١٨٢٤ وجالوا Galois سنة ١٨٣١ ويقدموا للعالم فكرة المجموعة أى أن بشائر هذه النظرية ابتدأت مع فيتا ولكنها لم تصبح نظرية كاملة إلا بعد حوالى مائتين عاما بفضل جالوا .

ومع أن هذا المفهوم يعتبر حديثا نسبيا إلا أن بذوره كانت قديمة ، فالمجموعة الجمعية مقياس (٢٤) عرفت واستعملت بواسطة المصريين والبابليين القدامى فى حساب الساعة . كما أن بعض المختصين فى تاريخ الرياضيات أمثال فان دير فاردين [١] وسباير [٢] وميللر [٣] يرون أن طريقة المصريين القدماء فى معالجة مسائل الكسور

---

(١) Van Der Waerden, B.L. Science Awakening, Noordhoff ltd. Groningen, Holand, 1954.

(٢) Speiser, A, **Die Theorie der gruppen Endicher Ordnung,** Basel, Switz, 1956.

(٣) Miller, G. A, Group Theory in the History of Mathematics **Scientific Monthly,** 47 : 24 - 27.

الاعتيادية بواسطة طريقة الكسور التى بسطها الواحد ، هى طريقة مبنية على مفهوم المجموعة .

وفيما يلى سنتناول باختصار دراسة تاريخ نظرية المجموعات . وسنرى كيف أن معظم المفاهيم الأساسية فى هذه النظرية قد ظهرت أثناء القرن التاسع عشر ، وكيف أن فى أواخر القرن التاسع عشر لم تكن هذه النظرية قد درست وفحصت فى مجال الرياضيات فقط ، بل كانت قد استعملت كذلك فى حل مشكلات العالم الفيزيقى .

ومع أن معظم أفكار نظرية المجموعات جاءت من مصادر مختلفة ومتشعبة وغير مترابطة ، ولكنها أخيرا نظمت وتكاملت مع بعضها بواسطة رياضيي القرن التاسع عشر فى فئة منتظمة من المفاهيم والنظريات وأصبحت بذلك أساسا للنظرية التى نعرفها الآن .

وسنتناول فيما يلى :

اولا ـ ما ساهم به الرياضيون قبل القرن التاسع عشر :

عرفت بعض مكونات المجموعة وكذلك بعض الخواص التى تميزها قبل أن يعرف مفهوم المجموعة صراحة ، ولكن مع ذلك عرف واستعمل ضمنيا . ولقد ساهم بعض الرياضيين فى تطوير بعض مفاهيم هذه النظرية ، إلا أنهم لم يعرفوا اصطلاح المجموعة فى ذلك الوقت حيث أن المفهوم لم يكن قد اتضح بعد ، ولكن مع ذلك يرجع إلى هؤلاء العلماء الفضل فى التمهيد لبعض أساسيات نظرية المجموعات فى أثناء القرن السابع عشر ، كان من الواضح لهؤلاء الذين يشتغلون بالجذر النونى للواحد الصحيح ، أن هذه النون من العناصر تكون مجموعة دورية ضربية وأن الجذور النونية البدائية يمكن استعمالها كمولدات للمجموعة . كما يوجد مثالا آخر على استعمال نظرية المجموعات على مستوى شبه رسمى وهو فى برهان أويلر (١٧٦٠ — ١٧٦١) فى تعميمه لإحدى نظريات فرمات Fermat وهى التى تنص على أن :

« الاعداد الطبيعية التى ليست أكبر من م والتى تكون أوليه بالنسبة للعدد م تكون مجموعة أبيلية بالنسبة للضرب مقياس (م) » .

وكان المثال الذى استعمله فى برهانه مثال هام لمجموعة تبديلية محدودة وسنوضح هذه الفكرة فى المثال الثانى :

نفرض أن العدد م = ل ع . هو حاصل ضرب عددين أولين فإذا كانت م = ٣٥ = ٥ × ٧ = ل × ع .

وإذا رتبنا كل الاعداد الصحيحة من ١ إلى ٣٥ فى صفوف وأعمدة كما فى شكل (٤) ثم حذفنا مضاعفات العددين ٥ ، ٧ وأعدنا كتابة الأعداد ثانيه بعد الحذف كما فى الشكل (٥) .

١	٢	٣	٤	٥
٦	٧	٨	٩	١٠
١١	١٢	١٣	١٤	١٥
١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥
٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠
٣١	٣٢	٣٣	٣٤	٣٥

شكل (٤)

١	٢	٣	٤	
٦	١٢	٨	٩	
١١	١٧	١٣	١٩	ع — ١ = ٦ صفوف
١٦	٢٢	١٨	٢٤	
٢٦	٢٧	٢٣	٢٩	
٣١	٣٢	٣٣	٣٤	

ل — ١ = ٤ أعمده

شكل (٥)

وعلى ذلك يمكن تعريف دالة أويلر — التى يرمز لها بالرمز φ وهى فى هذا المثال φ (م) = φ (ل ع) — بأنها عدد الاعداد الصحيحة الموجبة التى أقل من م وتكون أولية بالنسبة للعدد م . وفى هذه الحاله :

φ (م) = φ (٣٥) = ٤ × ٦

= (ل — ١) (ع — ١) = ٢٤

وهو عدد الاعداد الصحيحة الموجبة فى المصفوفة الثانية (شكل ٥) والتى فيها ل — ١ = ٤ ، ع — ١ = ٦ .

وتظرية أويلر تنص على أن :

$ا^{\Phi(م)}$ — ١ يقبل القسمة على م حيث ا ، م أوليتين بالنسبة لبعضهما ويعنى هذا فى هذا المثال أن : $ا^{٢٤}$ — ١ يقبل القسمة على ٣٥ بشرط عدم وجود عامل مشترك بين ا ، م

فاذا كانت ا = ٢ فان نظرية أويلر تؤكد على أن :

$٢^{٢٤}$ — ١ تقبل القسمة على ٣٥ . وهذا صحيح لان $\frac{٢^{٢٤} - ١}{٣٥} = ٤٧٩٣٤٩$

وللبرهنة على هذه النظرية استخدم أويلر مصفوفة كالمصفوفتين فى شكل(٤)، شكل (٥) وعرض فيها عناصر المجموعة الضربية (مقياس م) .

وفى سنة ١٧٧٠ وضع أويلر طريقة جديدة لحل معادلة الدرجة الرابعة (مختلفة عن طريقة فرارى) . ولكنه لم يوفق فيما كان يأمل فيه، وهو الوصول لحل عام لكثيرة الحدود بطريقة مماثلة . وفى نفس السنة فكر لاجرانج Lagrange فى حل معادلة كثيرة الحدود العامة بمقارنة الحلول المعروفة لمعادلات الدرجة الثانية والثالثة والرابعة . وقد لاحظ ان فى كل حالة من هذه الحالات الثلاث حدث اختصار معين حول المعادلة إلى معادلة أقل منها فى الدرجة. ولكن عندما حاول لاجرانج اختصار معادلة الدرجة الخامسة ، حدث ان تحولت هذه المعادلة إلى معادلة درجتها أكبر بدلا من أصغر . ومع أن لاجرانج لم ينجح فى تحقيق هدفه الأصلى ، الا أن طريقته فى معالجة المسألة كانت باستعمال تباديلات جذور المعادلة ، وقد اكتشف مفتاح نظرية مجموعات التباديل متضمنة الخاصية التى ذكرت آنفا — والتى تسمى الآن بنظرية لاجرانج — وفيما يلى نص نظرية لاجرانج :

« رتبة كل مجموعة تباديل من الدرجة ن تقسم رتبة مجموعة متماثلة Symmetric من نفس الدرجة » .

بالاضافة إلى ذلك ، فقد بحث لاجرانج فى المجموعة الثمانية octic group من الدرجة الرابعة ، وفى المجموعات الدورية وغير الدورية من الرتبة الرابعة ومن الدرجة الرابعة .

كما ساهم رافينى P. Ruffini (١٧٦٥ — ١٨٢٢) بنظرية هامة أخرى فى نظرية المجموعات وهى الخاصة بما يأتى : —

ان رتبة المجموعة تقبل القسمة على رتبة كل مجموعاتها الجزئية ، ولكن لايوجد دائما مجموعات جزئية للمجموعة بحيث ان رتبة هذه المجموعات الجزئية تكون مقسوم عليه اختيارى لرتبة المجموعة .

كما صنف رافينى مجموعات التباديل ولكن اصطلاحاته لا تستعمل فى وقتنا

ثانيا — ما ساهم بــه الرياضيون فى القــرن التاسع عشر :

من علماء الرياضيات الذين مهدوا لهذه النظرية سيرفوا F. Servois فقد أدخل لأول مرة سنة ١٨١٤ مصطلح قانون التبديل .Commutative law كما يرجع الفضل للرياضى العظيم جاوس K. F. Gauss (١٧٧٧ - ١٨٥٥)لاستعماله مفهوم المجموعات الدورية للتباديل . وكذلك فى ادخال مصطلح المقياس modular وكذلك الرمز الخاص بالمقياس (≡) والتى تستعمله إلى وقتنا هذا كما درس جاوس المجموعة الجمعية واستعمل الصفر كتنصر محايد جمعى .

وقد أضاف إلى نظرية المجموعات اضافات هامة عالمين رياضيين عبقريين لم يمهلها القدر فماتا فى زهرة الشباب ، هذين العالمين هما ابل N. Abel (١٨٠٢ — ١٨٢٩) وجالوا E. Galois (١٨١١ — ١٨٣٢) وقد بنيا عملها على أبحاث لاجرانج .

ولقد عالج « أبل » المشكلة العامة وهى محاولة حل معادلة كثيرة الحدود من الدرجة النونية بمحاولة حل المعادلة من الدرجة الخامسة . وفى الحقيقة انه اعتقد انه نجح وأرسل حله إلى أحد الرياضيين فى الدانمرك . ولكنه اكتشف بعد ذلك انه أخطأ . ولكن هذه التجربة الخاطئة جعلته يتساءل هل من الممكن وجود حل جبرى عام . ولقد نجح « أبل » فى البرهنة على انه لا يمكن حل معادلة كثيرات الحدود العامة جبريا إذا كانت ن > ٤ ومع ذلك فلقد شعر بأنه لم يحقق أهدافه ، وهى :

١ ــ ايجاد كل المعادلات من أى درجة معلومة والتى يمكن حلها جبريا .

٢ ــ تحديد إذا كانت أى معادلة معلومة لها حل جبرى أو ليس لها حل جبرى .

ولقد أثبت « أبل » انه لا يوجد حل جبرى لمعادلة الدرجة الخامسة وذلك بالبرهنة على أن المجموعة المتماثلة من الدرجة الخامسة لا تحتوى على أى فئة جزئية ذات دليل (خمسة) ، ما عدا المجموعة المتماثلة من الدرجة الرابعة .

ولقد كان من حسن الحظ أن ينشر مبكرا برهان « أبل » الذى استعمل فيه المجموعات التبادلية ــ وأن هذا البرهان يسترعى انتباه وتفكير جالوا وقد استطاع « جالوا » أن يعطى اجابات كاملة على التساؤلين اللذين أثارهما « أبل » وفى سنة ١٨٣١ برهن جالوا على أن : ــ

معادلة كثيرة الحدود يمكن حلها إذا وإذا فقط كان فى الامكان حل مجموعتها على حقل معاملاتها .

وتعرف المفاهيم المرتبطة بهذه النتيجة عادة بنظرية جالوا ولقد استعمل « جالوا » فى بحثه فكرة المجموعات المتشاكلة أو الايسومورفية كما كان أول من أثبت أهمية المجموعات الجزئية اللا متغيرة ، ومجموعات العامل Factor groups .

كما كان له الفضل فى ابتكار تطبيقات مبتكرة وهامة للمجموعات المحدودة فى الجبر كما وضع أساس قابلية حل المعادلات الجبرية بواسطة عمليات قياسية rational operations واستخراج الجذور .

ومن المعروف أن « جالوا » هو أول من استعمل اصطلاح المجموعة من وجهة النظر المجردة ، كما تستعمل اليوم .

ولقد قام جالوا كذلك بأبحاث فى بعض الموضوعات مثل مجموعات التعويض وأوجد المفاهيم الآتية ـ مجموعات خارج القسمة Quotient groups المجموعات الجزئية اللا متغيرة والفئات المرتبطة اليمينية واليسارية .

ومع أهمية وأصالة أبحاث جالوا ، فانها لم تلق فيها كبيرا من معاصريه من الرياضيين . ولذا لم تنشر إلا بعد موته بعدة سنوات .

وفى حوالى منتصف القرن التاسع عشر درس كوشى A. L. Cauchy (١٧٨٩ — ١٨٥٧) بعض الموضوعات مثل التباديل الدائرية وطريقة تحويل مجموعات التباديل كما بحث فى ضرب المجموعات المتعدية من الدرجة ٦ والرتبة ١٢

ونشرت هذه الأبحاث فى الفترة من ١٨٤٠ — ١٨٦٠ ففى سنة ١٨٤٤ نشر عمله الأول الخاص بتحويل التبادل . وفى هذا البحث توقع كوشى حالة خاصة من نظرية Sylow وبالاضافة إلى ذلك بحث فى الشكل الكامل للمجموعة الدورية . ذات الرتبة النونية كما أدخل مفهوم الفئة المرتبطة المزدوجة double coset وفى سنة ١٨٥٤ نشر كايلى A. Cayley (١٨٢١ — ١٨٩٥) بحثا بعنوان :

« دراسة لنظرية المجموعات على أساس المعادلة الرمزية θ^n = ١ » .

وهذه النظرية هامة حيث أنها أعطت أول تعريف للمجموعة المحدودة المجردة كما أعطت النتيجة التى تسمى الآن بنظرية كايلى Cayley وهى تنص على:

« كل مجموعة محدودة تكون أيسومورفية لمجموعة تباديلية منتظمة » .

وفى سنة ١٨٧٠ نشر جوردان C. Jordan بحثه الخاص بمجموعات التعويض، وكان بحثا رائعا ، جمع فيه نتائج أبحاث لاجرانج ورافينى وأبل وجالوا بالاضافة إلى أبحاثه الخاصة به .

كذلك ساهم كرونيكر L. Kronecker (١٨٢٣ — ١٨٩١) بأعمال قيمة على المجموعات وخصوصا تعريف المجموعه الابيلية المحدودة .

ويعتبر هاملتن W. R. Hamilton (١٨٠٥ — ١٨٦٥) مثالا جيدا لرياضى عظيم اشتغل بالمجموعات ، ولكن لم تتضح عنده دلالة مفهوم المجموعة ، ففى محاضراته عن الرباعيات Quaternions والتى نشرت ١٨٥٣ قدم لأول مرة اصطلاح وقانون الدمج associative law وفى سنة ١٨٥٦ قدم ثانية موضوع الرباعيات فى عمل له بعنوان نظام جديد لجذور « الواحد الصحيح » .
A New System of Roots of Unity .

وقد مهد مفهوم الرباعيات للمثال الخاص بالمجموعة غير التبديلية للضرب كما أخذ فى اعتباره العلاقات بين المجسمات المنتظمة والمجموعات .

وفى أواخر القرن التاسع عشر ظهر كثير من الجديد فى نظرية المجموعات بجانب حدوث تطور فى كثير من المفاهيم التى كانت موجودة فعلا ففى سنة ١٨٦٧ نشر جوردان M. E. C. Jordan (١٨٣٨ — ١٩٢٢) مقالته الأولى فى المجموعات ذات الرتب اللانهائية . وأدخل اصطلاح طبقة Class مجموعة التباديل . كما قدم نظرية تبرهن على ثبات عوامل تركيب المجموعة وفى سنة ١٨٧٠ نشر كتابه بعنوان :

« بحث فى التعويضات والمعادلات الجبرية » .

لخص فيه معظم ما كتب حتى هذا التاريخ . كما عمل بعض الأعمال الاصلية فيما يسمى الآن بالمجموعات المجردة . وقد قام جوردان بعمل أول قائمة شاملة للمجموعات البدائية Primitive groups حتى درجة ١٧ ولكن القائمة لم تكن كاملة .

كما ساهم ماثيو E. L. Mathieu (١٨٣٥—١٨٩٠) فى تطور هذه النظرية فقد اكتشف مفهوم مجموعات الضرب المتعديه Multiply transitive groups كما ابتكر ما يعرف الآن بمجموعات ماثيو Mathieu groups وهى خاصة بالمجموعات المتعدية من درجة ١٢ ، ٢٤ وكذلك أثبت وجود نظام لانهائى لمجموعات متعدية ثلاثية . من درجة ق + ١ ورتبة ق (ق^{٢} — ١) .

infinite system of triply transitive group.

وفى سنة ١٨٧٢ نشر L. Sylow (١٨٣٢ — ١٩١٨) ثمانية نظريات هامة تسمى باسمه . وتعتبر هذه الأعمال استمرار لأعمال جالوا وبعض هذه النظريات يمكن تلخيصها باستعمال المصطلحات الحديثة فيما يلى :

١ — إذا كانت المجموعة ج من الرتبة ن = ق^{م} س حيث ق لا تقسم س ، ق عدد أولى . فان ج تحتوى على مجموعات جزئية من رتبة ق^{ا} حيث

ا = ١ ، ٢ ، ٣ ... م ، وأن كل مجموعة جزئية من رتبة ق^{ا} حيث

ا = ١ ، ٢ ، ٣ ... (م — ١) تكون مجموعة جزئية معتادة normal لمجموعة جزئية واحدة على الأقل من الرتبة ق$^{ا + ١}$.

٢ — فى مجموعة محدودة ج ، فان المجموعات الجزئية المسماه بـ Sylow تكون مترافقه Conjugate .

٣ — عدد مجموعات سيلو الجزئية ق لمجموعة محدودة ج تكون على صورة ١ + ك ق وتقسم رتبة ج .

وقد طبق نظرية المجموعات فى العالم الفيزيقى ثلاثة علماء أولهم فيلكس كلاين سنة ١٨٧٢ فى برنامجه المسمى ببرنامج ايرلانجر والذى اعتبر فيه الهندسة كسلسلة من المسائل فى نظرية المجموعات وقد كتب مجموعة أفكاره فى كتاب نشر سنة ١٨٨٤ .

وقد استعمل بوانكاريه H. Poincaré (١٨٥٤ — ١٩١٢) ثانى هؤلاء العلماء بعض المفاهيم الاساسية التى وضعها كلاين فى اثبات أن هندسة اقليدس مؤسسة على مفهوم المجموعات ونشر ذلك سنة ١٨٩٨ .

وكان ثالث هؤلاء العلماء هود لى ، Sophius "Lie" (١٨٤٢ — ١٨٩٩) فقد استخدم بعض المفاهيم الاساسية فى نظرية المجموعات ليحل بعض مشاكل الفيزياء وذلك فى مجلدا من ثلاث أجزاء أثناء ١٨٨٨ — ١٨٩٣ وقد استعمل اللاتغير invariance تحت مجموعات التحويل المستمر ، فى حل مسائل المعادلات التفاضلية وكان هذا العمل معتمدا على نظريته الخاصة بمجموعات التحويلات المستمرة وغير المستمرة .

وقد ناقش ديديكند R. Dedekind (١٨٣١ — ١٩١٦) فى مجلة علمية أمريكية[١] سنة ١٨٩٨ خواص المجموعات الهاميلتية والتى اشتقت من رباعيات هاملتن ، وأثبت أن المجموعة الضربية للوحدات الرباعية Quaternionic units تكون مجموعة رتبتها ٨ كما أثبت ديديكند أن هذه المجموعة مثال على مجموعة غير ابلية .

وفى سنة ١٨٩٦ قدم فروبنيوس G. Frobenius (١٨٤٩ — ١٩١٧) لأول مرة مفاهيم العنصر المميز Characteristic element والمجموعات الجزئية المميزة Characteristic subgroups . وكان من أوائل الذين بحثوا فى مجال المصفوفات . كما قام أيضا بدراسة Commutator subgroups.

كما اشتهر العالمين كيركمان T.P. Kirkman (١٨٠٦ — ١٨٩٥) وبرنسايد W. Burnside (١٨٥٢—١٩٢٧) بأبحاثهما فى نظرية المجموعات فقام كيركمان سنة ١٨٥٨ بتقديم ورقة خاصة بتجديد مجموعات التباديل ونال عليها جائزة من أكاديمية العلوم بباريس وقام بيرنسايد بأبحاث متقدمة فى مجال المجموعات

---

(١) Bulletin of the American Mathematical society.

ذات الرتبه المحدودة ودرس التباديل الزوجية والفردية . وحصل على مميزات المجموعة Group characteristics ولقد ابتكر هذان العالمـــان مجال هام للمجموعات المحدودة يعرف بنظرية مجموعات التمثيل

Group representation theory

وسنكتفى بهذا القدر عن نشأة وتطور مفاهيم نظرية المجموعات وعن العلماء الذين ساهموا فى التطوير وأن كنا لم نذكر إلا بعضا منهم وهناك مراجع كثيرة يمكن الرجوع إليها لارتشاف مزيد من المعلومات حول هذا الموضوع لمن يرغب فى الاستزادة .

الفصل الثالث

مفهوم المجموعة فى الهندسات المختلفة

تكلمنا فى الفصل الأول عن جبر المجموعات . وفى هذا الفصل سنبين وجود مفهوم المجموعة وخواصها فى علم الهندسة .

فإذا كانت $\{\text{د}_{\text{ا}}\}$ هى فئة كل الدورانات لدائرة فى مستوى حول مركزها حيث يأخذ الدليل ا كل القيم بحيث $\text{٠} \leqslant \text{ا} < \text{١}$ وحيث د تدل على الدوران خلال الزاوية $\text{ا} \times \text{٣٦٠}^\circ$ وإذا عرفنا العملية « $\circ$ »

بحيث أن $\text{د}_{\text{ا}} \circ \text{د}_{\text{اَ}} = \text{د}_{\text{ا}+\text{اَ}}$ حيث أن $\text{ا} + \text{اَ}$ تدل على حاصل جمع ا ، اَ (مقياس ١) .

(وهذا يعنى أنه إذا كانت $\text{ا} + \text{اَ} \geqslant \text{١}$ فأننا نعوض عن $\text{ا} + \text{اَ}$ بالمقدار $\text{ا} + \text{اَ} - \text{١}$ وعلى ذلك إذا كانت $\text{ا} = \text{٠٫٧}$ ، $\text{اَ} = \text{٠٫٨}$ فان ($\text{د}_{\text{ا}+\text{اَ}} = \text{د}_{\text{٠٫٥}}$) .

وهندسيا ، فان $\text{د}_{\text{ا}} \circ \text{د}_{\text{اَ}}$ تعنى دوران الدائرة خلال زاوية قدرها $\text{ا} \times \text{٣٦٠}^\circ$ متبوعة بدوران آخر خلال زاوية قدرها $\text{اَ} \times \text{٣٦٠}^\circ$ (أو بالعكس) وتكون النتيجة كدوران واحد مقداره $\text{د}_{\text{ك}}$ حيث ك هو العدد $\text{ا} + \text{اَ}$ (مقياس ١) ونجد أن تجمع $\{\text{د}_{\text{ا}}\}$ مع العملية التى عرفناها آنفا تكون مجموعة تسمى مجموعة دورانات دائرة .

وإذا فرضنا أن ج ترمز إلى فئة كل التحويلات

$$\left.\begin{array}{l} س' = ا س + ب ص + هـ \\ ، ص' = حـ س + ء ص + و \end{array}\right\} \qquad (١)$$

حيث (أ ، ب حـ ، ء ، هـ ، و $\in$ ر)

فى المستوى الاحداثى حيث كل تحويلة تحول أى نقطة (س،ص) إلى نقطة (س' ، ص') بحيث يرتبط إحداثياها بأحداثى(س ، ص) بالمعادلتين (١) بشرط أن ا ء $\neq$ ب حـ .

وإذا رمزنا لتحويلتين بالرمزين $ت_١$ ، $ت_٢$ فان $ت_١ \circ ت_٢$ ترمز إلى التحويلة التى تحصل عليها وذلك بالقيام أولا بالتحويلة $ت_٢$ ثم نتبعها بالتحويلة $ت_١$ وبالجبر البسيط يمكن رؤية أن التحويلتين المرتبطتين هكذا تكافئان تحويلة واحدة تكون معاملاتها ا ، ب ، حـ ، ء .

وتسمى المجموعة المكونة من الفئة ج والعملية التى عرفناها فى هذا البند بالمجموعة الأفينية للمستوى Affine group of the plane وبدراستها نجد أنها مجموعة غير أبيلية .

يتضح لنا مما سبق وجود مجموعات فى الهندسة مثل مجموعة دورانات الدائرة والمجموعة الأفينية لتحويلات المستوى ويمكن مد المجموعة الاولى إلى مجموعة الدورانات حول نقطة ثابتة للمستوى بأجمعه . وهذه المجموعة مثال آخر لمجموعة تحويلات .

وسنعرف فيما يلى مجموعة التحويلات بطريقة عامة مجردة أكثر مما ذكر فى الفصل الاول .

تعـــريف (١) :

إذا كانت سـ فئة ما . فان تحويلة الفئة سـ هى راسم فوقى للفئة سـ على سـ وهى أحادية التناظر أى (١ — ١) .

فاذا كانت ص = < (س) تدل على الراسم ، فان كل عنصر من عناصر سـ يكون له صورة واحدة وواحدة فقط من عناصر سـ .

ويترتب على هذا التعريف أن التحويلة دائما يكون لها معكوس ويمكن التعبير عن المعكوس بما يأتى :

س = < ^١- (ص)   (وهذه إحدى خواص المجموعة)

تعـــريف (٢) :

إذا كانت د = د (س)، هـ = هـ (س) تحويلات للفئة سـ فان < هـ تعنى التحويلة < (هـ (س)) ، حيث < هـ تسمى حاصل ضرب < ، هـ .

تعـــريف (٣) :

إذا كانت T هى فئة تحويلات تجمع سـ بحيث أنه بدلالة العملية الثنائية التى عرفناها فى تعريف (٢) فان الفئة T تكون مجموعة ، وعلى ذلك نسمى T مجموعة تحويلات .

وعلى ذلك يمكن البرهنة بسهولة على أن فئة التحويلات T لتجمع سـ يتوافر فيها خواص المجموعة وهى :

١ ــ حاصل ضرب أى عنصرين فى T يكون أيضا عنصر فى T .

٢ ــ التحويلة المحايدة س = < (س) عنصر فى T .

٣ ــ معكوس عناصر T يكونوا عناصر فى T .

٤ ــ قانون الدمج يتحقق .

تطبيق فكرة المجموعة فى الهندســة :

عند تطبيق ما سبق على الهندسة فان الفئة سـ المذكورة فى التعاريف السابقة تكون نوعا من الفراغ Space والاصطلاح « فراغ » له معنى واسع الآن فى الرياضيات. فالفرق بين الفئة والفراغ ليس كبيرا . فالفراغ ببساطة فئة أضيف

لها بعض الخواص المعينة . ومن هذه الخواص وجود دالة مترية أو دالة مسافة وسنوضح هذه الفكرة فى بعض الفراغات :

فراغ الهندسة التحليلية :

إذا أخذنا فى الاعتبار مستوى الهندسة التحليلية . وإذا نظرنا إليه كفئة فإن مستوى الهندسة التحليلية يكون هو التجمع لكل الثنائيات المرتبة (س ، ص) من الأعداد الحقيقية س ، ص . أما إذا نظرنا إليه كفراغ ، فهو فئة سـ مع دالة المسافة الفيثاغورية ف (ق ، ك) والتى تعبر عن المسافة بين ق ، ك فاذا كانت ق هى النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) ، ك هى النقطة ($س_٢$ ، $ص_٢$) فاننا يمكن أن نعبر عن المسافة بما يأتى :

$$ف\,(ق ، ك) = \sqrt{(س_١ - س_٢)^٢ + (ص_١ - ص_٢)^٢} \quad (٢)$$

وكل الخواص الأخرى للمستوى التحليلى تأتى من هذا التعريف .

وبالمثل لإيجاد الهندسة التحليلية ذات الثلاث أبعاد ، تبدأ بفئة كل الثلاثيات المرتبة (س ، ص ، ى) للاعداد الحقيقية س ، ص ، ى .

ولتعريف هـذا الفراغ ، نضيف دالة مسافة مشابهة للدالة (٢) . وبالمثل يمكن عمل نفس الخطوات بالنسبة للفراغات ذات الأربع أبعاد والخمس أبعاد وعامة للهندسة التحليلية ذات النون من الأبعاد (النونية الأبعاد) .

الأنواع الأكثر عمومية للفراغ :

يعتبر الفراغ التوبولوجى من أكثر أنواعات الفراغات عمومية . فاذا حللنا الأثر الذاتى لإضافة دالة المسافة (٢) لتجمع أزواج الأعداد الحقيقية (س ،ص) فاننا نرى أن ذلك يؤول إلى تعيين موقع للأزواج (س ، ص) بالنسبة لبعضها بعضا . فمثلا إذا كانت ق ، ك ، ع نقطا ، ف (ق ، ك) = ٢ ، ف (ق ، ع) = ٣ فاننا نعتبر ك أقرب للنقطة ق من النقطة ع للنطقة ق . وحيثما

تقل المسافة بين النقط بدلالة الترتيب بواسطة قيمة الأعداد الحقيقية ف (ق ، ك) فاننا نعتبر أنها تقرب أكثر لتأخذ نفس الموقع فى مستوى الهندسة التحليلية .

إذا إعتبرنا أن موقع عناصر فئة ما أساس ، فاننا نصل لفكرة الفراغ التوبولوجى (وقديما سمى جاوس Gauss التوبولوجى بعلم تحليل الموقع position analysis) ولكن توجد طرقا أخرى لتعريف الموقع النسبى غير طريقة دوال المسافة فمثلا إحدى الطرق هى تعيين جوار neighborhood لكل عنصر فى الفئة س التى نريد أن نعمل منها فراغا .

ففى فئة الأعداد الحقيقية المرتبة ر إذا كانت ء ∋ ر فان لأى عددين حقيقين ا ، ب بحيث أن :

ا < ء < ب فاننا نسمى الفئة { س | ا < س < ب }

جوار للعنصر ء فى ر .

وهذه الأفكار مثل نهاية المتتابعة مثلا يمكن تعريفها مباشرة بدلالة هـذا الجوار المعرف فى (٣) .

الخواص والأشكال الهندسية :

نرى مما سبق أن للحصول على فراغ من فئة من العناصر ، نضيف بعض الخواص المميزة التى بطريقة أو بأخرى تتضمن الأفكار الحدسية للموقع فى الفئة ويمكن أن نسمى الخواص المضافة أو العلاقات والخواص أو العلاقات المعرفة منها أنها هندسية . وعلى ذلك فالمسافة بين النقط كما هى معرفة فى (٢) تكون خاصية هندسية . وكذلك يمكن إعتبارها علاقة بين ق ، ك . وبالمثل فالتوازى والتعامد و .... وغير ذلك تعتبر علاقات هندسية بين المستقيمات .

وعادة ما نسمى عناصر الفراغ نقطا ، والفئات الخاصة المعرفة بدلالة

الخواص الهندسية تسمى أشكالا هندسية . فمثلا الأزواج المرتبة (س ، ص) الخاصة بمستوى الهندسة التحليلية تسمى نقطا والفئات :

$$\{ (س ، ص) \mid (س - س_١)^٢ + (ص - ص_١)^٢ = ر^٢ \}$$

حيث ر عدد حقيق ،تسمى دوائر مركزها ($س_١$ ، $ص_١$) ونصف قطرها ر .

والخواص التي تعرف بدلالة فئات فقط ، مثل الأعـــداد الكاردينالية لا تعتبر عادة هندسية (ما لم تكن مرتبطة بخاصية هندسية) . وتجمعات النقط الاختيارية والتي لا تكون معرفة بدلالة خواص هندسية تسمى فئات من النقط أو فئات فقط .

اللامتغيرات الهندســية .. .. Geometric Invariants

إذا كانت سـ فراغا ، خ خاصية هندسية أو علاقة للفراغ سـ وكانت ت تحويلة للفراغ سـ . مثلا سـ ربما تكون فراغ مستوى هندسة تحليلية وتكون خ دالة مسافة (٢) وتكون ت دوران سـ حول النقطة (٠ ، ٠) وتكون ت دوران سـ حول النقطة (٠ ، ٠) .

فتكون ف (ق ، ك) = ف (ت (ق) ، ت (ك)) .

(المسافة بين نقطتين تكون هي نفسها المسافة بين صورتيهما بواسطة التحويلة ت) .

ونعبر عن هذه الحقيقة الأخيرة بأن نقول أن الخاصية خ لا متغير تحت التحويلة ت .

ومن الناحية الأخرى ، مع نفس الفراغ سـ ولكن خ في هذه الحالة ترمز إلى علاقة التعامد بين المستقيمات وإذا كانت ت تحويلة أفينية ، فاننا نجد عامة أنه عندما تكون المستقيمات $ل_١$ ، $ل_٢$ متعامدة — فليس صحيحا أن تكون

ت(ل١) ، ت(ل٢) متعامدةأى أنالتعامد عادة لايكون لا متغير Invariants تحت التحويلة الافينية .

وإذا كانت الخاصية خ لا متغير تحت كل التحويلات لمجموعة T من تحويلات الفراغ سـ ، فاننا نسمى خ لا متغير للفراغ سـ تحت T أو نقول أن الخاصية خ لا متغير T للفراغ سـ ، فمثلا إذا كانت T هى مجموعة تحويلات أفينية لمستوى الهندسة التحليلية سـ ، فمن السهل أن نبرهن على أن توازى المستقيمات لا متغير T للفراغ سـ .

وتبعا لوجهة النظر هذه ، والتى عبر عنها فيليكس كلاين فى برنامجه الذى القاه فى إيرلانجر بألمانيا سنة ١٨٧٢ فانه يمكن التكلم عن هندسة — T للفراغ سـ على أنها دراسةخواص الفراغ وأشكاله اللامتغيرة تحت T . أى أنهندسة T للفراغ سـ هى دراسة اللامتغيرات — T للفراغ سـ .

ولقدكان لتطبيق فكرة كلاين فى تصنيف الهندسات أهمية ذات دلالة أكثر من أية نظرية من النظريات الخاصة .

وفيما يلى سندرس بعض الهندسات المختلفة من وجهة النظر هذه :

أولا ـ الهندسة الاقليدية :

يمكن النظر إلى الهندسة الاقليدية على أنها مجموعة تحتوى على عدد لا نهائى من التحويلات . وهذه الهندسة تحتوى على متساويات القياس للمستوى أو بلغة الهندسة الابتدائية تحتوى على تحويلات بحيث يكون المستوى مطابقا لنفسه تحت هذه التحويلات ويمكن أن تكون هذه التحويلات مركبة من إزاحات دورانات جاسئة أو إنعكاسات .

كما تحتوى هذه الهندسة أيضا على مجموعة أخرى تتكون من تحويلات « التشابه » فى الفراغ وهذه التحويلات أحادية وتتكون من ضرب كل المسافات

فى معامل ثابت ك . بحيث أن ك > ٠ ، (تسمى ك عامل التناسب) ويمكن توضيح ذلك بدراستنا لخواص الأشكال التى تدرس فى هندسة المدرسة الثانوية ، نجد أن هـذه الخواص مثل الطـول ، المساحة ، التطـابق ، التوازى والتعامد والتشابه ، جميعا لا متغيرات invariants تحت مجموعة الحركات الجاسئة rigid وهذه هى المجموعة التى عناصرها : الازاحات ، الدورانات والانعكاسات على المستقيمات . ونجد أن الجزء الأول من هندسة المدرسة الثانوية يختص بهندسة الحركة الجاسئة للمستوى والفراغ ثم يلى ذلك الاهتمام بالتشابه أو ما يمكن أن نسميه بهندسة التساوى الشكلى equiform وفى هذه الحالة تكون المجموعة هى مجموعة تحويلات تشابه . وتـكون فيها مجموعة الحركات الجاسئة فئة جزئية لها ومجموعة التشابه هذه تحتوى كذلك على تحويلات تحتفظ بالزوايا (كما هى) ولـكن تقل المسافات بين النقط أو تزيد بنسب معينة وتحت مجموعة التكبير هذه لا يمكن دراسـة خواص مثل المساحة والحجم والتطابق لأن هذه الخواص لا تـكون لا متغيرة . ولـكن الأشكال المتشابهة مثل المثلثات المتشابهة أو كثيرات الأضلاع المتشابهة تصبح موضعا للدراسة .

ثانيا ـ الهندسة الافينيـــة :

إذا وسعنا enlarge مجموعة التحويلات T فاننا نحصل على هنـدسة مختلفة وكذلك على أشياء مختلفة أى اللامتغيرات تختلف كذلك (أى أن ما يهمنا دراسته من اللامتغيرات يختلف) .

فأولا : إذا أضيفت تحويلات جديدة ، فربما نتوقع أن الخواص التى كانت لا متغيرة قبل ذلك لا تبقى كذلك . وبذلك يوجد عدد أقل منها .

ثانيـا : أن نقص عـــدد اللامتغيرات يقودنا طبيعيا إلى البحث عن لا متغيرات لم تـكن ملاحظة قبل ذلك فمثلا إذا فرضنا أن T هى فئـة كل التحويلات الافينية فى المستوى (١) .

فعلى ذلك لا تكون الزوايا لا متغيرات ولكن توازى المستقيمات يكون خاصية لا متغيرة .وعلى ذلك يكون التوازى موضعا للدراسة فى الهندسة الأفينية للمستوى .

ثالثا ـ الهندسة الاسقاطية :

إذا أخذنا فى الاعتبار الحالة التى تكون فيها T مجموعة التحويلات الاسقاطية للمستوى . والتحويلة الإسقاطية من الوجهة التحليلية يمكن تعريفها بأنها التحويلة التى تجعل النقطة (سَ ، صَ) تحل محل (س ، ص) تبعا للقانون .

$$\text{سَ} = \frac{\text{ا س + ب ص + ج}}{\text{ى س + هـ ص + و}}$$

$$\text{صَ} = \frac{\text{ر س + ح ص + ى}}{\text{ى س + هـ ص + و}}$$

حيث ا ، ب ، ج ، ى ، ..... أعدادا حقيقية تحقق شرط المحدد الآتى :

$$\begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ب} & \text{ا} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{ى} \\ \text{ى} & \text{ح} & \text{ر} \end{vmatrix} \neq \text{صفر}$$

وتكون مجموعة التحويلات الأفينية للمستوى هـ فئة جزئية لمجموعة التحويلات الاسقاطية والتى فيها ى = هـ = صفر .

وفى هذه الحالة ، لا يصبح توازى المستقيمات لا متغير للمجموعة الأكبر ولـكن تطـابق النقط على المستقيمات تـكون لا متغير[1] أى تحتفظ النقط على المستقيمات .

رابعا ــ التوبولوجى :

كفرع من الهندسة ، فان التوبولوجى تعتمد على مجموعة T وعناصرها التى تسمى تحويلات توبولوجية أو هوموموروفيزم (تماثل التركيب) عامة جدا والتحويلة التوبولوجية تصلح لأى فراغ توبولوجى وهى مجرد راسم أحادى بحيث أن الراسم ومعكوسه يحتفظ بنقط النهاية preserve limit points .

وغالبا ما توصف التحويلة التوبولوجية بالنسبة للرجل العادى ــ دون دقة بأنها أى تغيير deformation فى الشكل ، ولكن دون أن يقطع ولا يوجد قيود سوى ذلك .

فمثلا يمكن تغيير شكل الدائرة إلى قطع ناقص أو مثلث أو كثير أضلاع ــ ولكن يشترط ألا يتغير إلى دائرتين غير متقاطعتين ، وذلك لعدم الإخلال بشرط عدم القطع ــ وكذلك لا يمكن أن يتحول إلى شكل 8 وذلك بسبب الخاصية الأحادية للتحويلة وعلى هذا تسمى توبولوجى المستوى أحيانا بهندسة لوح المطاط . ولكن كل هذا الوصف غير دقيق لأن التحويله التوبولوجية شىء عام أكثر من ذلك بكثير وفيما يلى تعريف التحويلة التوبولوجية بدلالة الاحتفاظ بنقطة النهاية .

---

(١) للاستزادة من دراسة هندسة التحويلات الاسقاطية يمكن الرجوع إلى :

Courant, C. and Robbins, H. What is Mathematics, Oxford University Press, 1961, P. 155.

تعــريف :

فى فئة الأعداد الحقيقية المرتبة إذا كانت ء ∈ ر فان أى عددين حقيقيين ا ، ب بحيث ا < ء < ب فاننا نسمى الفئة { س ا | < س < ب } جوار للنقطة ء .

وفكرة نهاية المتتابعة يمكن تعريفها مباشرة بدلالة هذا الجوار (المعرف فى (٣)) .

وأكثر المفاهيم أساسية فى الفراغ التوبولوجى ت هى نقطة النهاية limit point فاذا كانت ق نقطة نهاية لفئة من النقط م فى ت إذا كان لكل جوار neighborhood و للنقطة ق فى ت فالفئة م ∩ (و — ق) ليست خالية . وعلى هذا فالعدد صفر هو نقطة نهاية لفئة الأعداد الحقيقية .

{ س | ٠ < س < ١ } وكذلك للفئة :

$$\{ \text{س} \mid \text{س} = \frac{١}{\text{ن}} \text{ ، ن} \in \text{فئة الأعداد الطبيعية} \}$$

ومن ناحية اللامتغيرات التوبولوجية ، فواضح أن المسافة ليست لا متغير ولا أى عدد يكون دالة للطول . ولكن إذا حذفنا نقطتين من دائرة ، فان ذلك يفصلها إلى جزئين وعلى ذلك يكون — أخذ النقطتين فى الدائرة لتقسمها إلى جزئين - لا متغير توبولوجى للدائرة . لأنه مهما كانت التحويلة التوبولوجية ت، فان التحويلة ت (ج) للدائرة (ج) يكون لها دائما هـذه الخاصية . وهناك خاصية أخرى توبولوجية للدائرة وهى : إذا حذفنا نقطة واحدة من الدائرة — فان ذلك لا يفصل الدائرة إلى قسمين .

رأينا فيما سبق أنه أمكن تصنيف الهندسات تبعا لمجموعة التحويلات الخاصة بها . فمثلا رأينا أن هندسة إقليدس تتعامل مع خواص الفراغ التى تحتفظ (تكون لا متغيرات) تحت متساويات القياس isometries . أما التولوبولوجى فتتعامل

مع الخواص التى تحفظ (تكون لا متغيرة) تحت تماثل التركيب homeomorphism وبالمثل فالهندسة الاسقاطية والأفينية تتعامل مع الخواص التى لا تتغير تحت المجموعات الإسقاطية والأفينية .

ومما سبق نرى أن فكرة التحويلات ذات أهمية عظيمة فهى تعمل كوسيلة لتصنيف الهندسات ذات الطابع الكلاسيكى . وكما ذكرنا سابقا يرجع الفضل فى وجهةالنظر التى قدمناها إلى برنامج كلاين الذى كان حدثا هاما فى تاريخ الرياضيات لأنه عمل على توضيح كثير من المفاهيم الهندسية ،ذلك بتنظيمه للمعلومات الهندسية التى كانت معروفة فى ذلك الوقت . كما أنار الطريق أمام أنواع كثيرة أخرى من الهندسات[1] .

---

(١) لابتكار هندسة جديدة ، من الضرورى فقط إيجاد نوع جديد من مجموعة التحويلات ، وفراغ يمكن تطبيقها عليه . ولكن ليس بالطبع أن الهندسات المختلفة بهذه الطريقة تكون لها دلالة فى تقدم الرياضيات .

الفصل الرابع

تطبيقات نظرية المجموعات فى تدريس بعض موضوعات الرياضيات فى التعليم العام

فى هذا الفصل سنوضح كيفية استخدام مفهوم وخواص نظرية المجموعات فى بعض دروس الرياضيات فى المرحلة الإعدادية والمرحلة الثانوية، وذلك بإعطاء بعض الأمثلة :

أولا ـ استعمال المجموعات فى حل الجمل الرياضية :

وذلك بتطبيق النظرية[1] الآتية :

الفئة سـ والعملية ∘ تكون مجموعة إذا وجد حل وحيد فى سـ لكل من المعادلتين الآتيتين :

أ ∘ س = ب ، ص ∘ أ = ب

حيث أ ، ب أى عنصرين فى سـ

مثـــال (١) :

نحتاج إلى خواص المجموعة للبرهنة على أن المعادله أ + س = ب لها حل وحيد عندما تكون أ ، ب أى عنصرين فى فئة سـ وتكون س ∈ سـ

---

(١) برهان هذه النظرية يوجد فى اى كتاب من كتب الجبر مثل :
Birkoff, G. and S. Maclane, A Survey of Modern Algebra, Macmillan company, N.Y. 1958 P. 127.

البرهـان : بما أن $١ + س = ب$

$\therefore - ١ + (أ + س) = - ١ + ب$ وجود المعكوس فى سـ

$\therefore (- ١ + ١) + س = - ١ + ب$ خاصية الدمج

$\therefore$ صفر $+ س = - ١ + ب$ خاصية العنصر المحايد الجمعى

أى أن $س = - ١ + ب$

ومن خاصية الانغلاق نعلم أن $(- ١ + ب) \in$ سـ وهى الخاصية الرابعة للمجموعة (سـ ، +) .

وواضح أن هذه المعادلة $أ + س = ب$ لا يكون لها حل دائما فى فئة الاعداد الصحيحة الموجبة ، لأن الأعداد الصحيحة الموجبة لا تكون مجموعة جمعية . ولكن هذه المعادلة لها حل دائما عندما تكون سـ فئة الأعدادالصحيحة وكذلك إذاكانت سـ فئة الأعداد القياسية ، ذلك لأن الأعداد الصحيحة والأعداد القياسية يكونا مجموعة مع عملية الجمع .

مثــال (٢) :

باستعمال خواص المجموعة يمكن تفسير عدم وحدانية حلول بعض المعادلات الخاصة البسيطة التى تتضمن عملية الضرب .

إذاكانت الفئة سـ فئة الأعداد الحقيقيةفلحل المعادلة :

$أ س = ب$ حيث $أ ، ب \in$ سـ

نعتبر الحالات الآتية :

(أ) عندما تكون $أ \neq$ صفر ، $ب \neq$ صفر فيوجد دائما حل وحيد للمعادلة $أ س = ب$ (لأن فى هذه الحالة تكون عندنا مجموعة ضربية لأعداد حقيقية لا تساوى الصفر) .

أما الحالات الأخرى فتكون كالآتى :

(ب) ١ ـ عندما يكون أ = ب = صفر فإن صفر × س = صفر
وهنا يوجد لها عدد لا نهائى من الحلول .

٢ ـ عندما يكون أ = صفر، ب ≠ صفر فإن صفر × س = ب
، ب ≠ صفر . وفى هذه الحالة لا يوجد لها أى حل

٣ ـ وعندما يكون ب = صفر ، أ ≠ صفر
فإن أ × س = صفر ، أ ≠ صفر وهنا يكون لها حل وحيد هو الصفر

مثـــال (٣) :

يمكن ربط حل الأنظمة الخطية بحل المعادلات البسيطة .

وذلك باستخدام المجموعات

فإذا كان النظام على الصورة الآتية :

أ س + ب ص = هـ

حـ س + د ص = و

ويمكن التعبير عن هذا النظام بلغة المصفوفات كما يأتى :

$$\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{هـ} \\ \text{و} \end{bmatrix}$$

ويمكن تكوين مجموعة ضربية من مصفوفتين غـــير منعزلتين[1] (invertible-nonsingular) بحيث تكون معادلة بسيطة فى هذه المجموعة على الصورة الآتية :

---

(١) تتميز هـــذه المصفوفات غير المنعزلة بأن : لكل مصفوفة غـير منعـزلة م يوجد معكوس المصفوفة $م^{-1}$ (وهو مصفوفة غير منعزلة) بحيث أن
$$م \cdot م^{-1} = م^{-1} \cdot م = I$$

$$\begin{bmatrix} \text{د} & \text{هـ} \\ \text{ح} & \text{و} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ى} & \text{س} \\ \text{ع} & \text{ص} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{جـ} \end{bmatrix}$$

وبضرب المصفوفات نحصل على النظام الأصلى ونظام آخر بنفس المعاملات أ ، ب ، جـ ، د ولكن فى متغيرين آخرين ى ، ع

وهذه الطريقة توضح للطالب إمكانية حل نظامين لمعادلتين بنفس المجهود الذى يحل به نظام واحد وذلك بفضل استعمال المصفوفات .

أى أننا نفكر فى الحل كما لو كانت معادلة واحدة على صورة :

م سـ = ل

ونحلها كما لو كانت على الصورة السابقة (مثال ٢) أ س = ب

ومن غير شك لا يوجد غير حل وحيد إذا وإذا فقط م كان لها معكوس وهذا صحيح إذا كانت أ د ــ ب جـ ≠ ٠ .

فإذا كان لدينا المعادلتان المصفوفتان الآتيتين ، (بحيث كانت م مصفوفة غير منعزلة) ،

فإن م سـ = ل ، صم = ل وكانت :

$$\begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix} = \text{ل} ، \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} = \text{م}$$

كان للمصفوفة سـ حل وحيد هو م^{-1} ل = $\begin{bmatrix} \frac{٧}{٢} & ١- \\ ١- & ١ \end{bmatrix}$

، للمصفوفة ص حل وحيد هو ل م$^{-1}$ $= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 11 \end{bmatrix}$

ولاحظ أن س ≠ ص وذلك لأن م$^{-1}$ ل ≠ ل م$^{-1}$ حيث أن ضرب المصفوفات غير إبدالى .

ثانيا ـ استعمال المجموعات فى العمليات على الاعداد :

من المفيد أن يكون هناك تمثيل هندسى للعمليات الجبرية والحسابية وهذه الصورة الهندسية يمكن استعمالها لمراجعة الأجوبة والتحقق من الخواص وفى بعض الحالات تقود هذه الصور إلى نتائج جديدة كما يمكن ترجمة هذه الصور الهندسية فى بعض الحالات إلى مجموعة أخرى متشاكلة (ايسومورفيه) مع المجموعة الجبرية أو الحسابية .

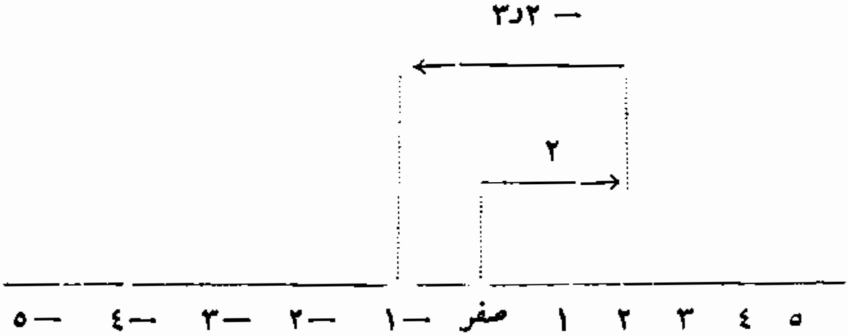
وفيما يلى بعض الأمثلة التى توضح كيف يمكن أن تستفيد من خاصية الأيسومورفيزم بين المجموعات .

مثـــال (٤) :

جمع الأعداد الحقيقية تكون متشاكلة (ايسومورفيه) مع تحصيل الانتقالات (الازاحات) فى بعد واحد .

وهذا المثال جيد حيث أنه يسهل العمليه الحسابية ، فالإزاحات أو الانتقالات أسهل بكثير من جمع الأعداد الحقيقية حتى أننا فى كثير من الأحيان تستعمل الإزاحة كنموذج لتعليم الأطفال الجمع .

والشكل الاتى يمثل لنا ٢ + (− ٢ر٣) = − ٢ر١



(شكل ٦)

ويمكن توضيح الأيسرموفيوم (التشاكل) وذلك بتناظر العناصر مع بعضها كما فى الشكل التالى (شكل ٦) . فمن الواضح وجود تناظر أحادى وأن الإجابات متناظرة .

	العدد الحقيقى ٢ جمع عليها ٢ر٣ —	تناظر	الانتقال (الإزاحة) وحدتين إلى اليمين ثم ٢ر٣ وحدة إلى اليسار
الإجابة	٢ر١ —		٢ر١ وحدة إلى اليسار

(شكل ٧)

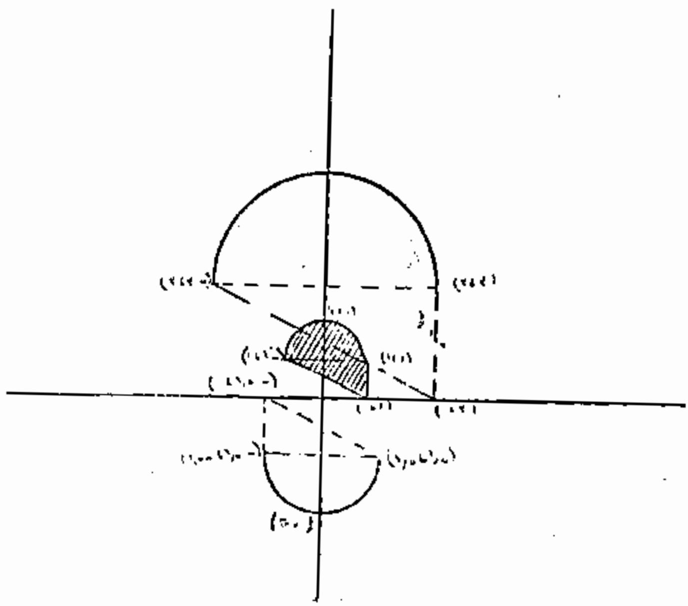
مثـــال (٥) :

حاصل ضرب الأعداد الحقيقية تكون أيسومورفية مع تحصيل تحويلات التكبير . Size transformations.

وهذا النوع من التحويل أساسى فى دراسة التشابه) .

و (الشكل ٨) يوضح صورة ذات بعدين للضرب فى ٣

والفكرة هى أن نضرب أحداثيات كل نقط الشكل الأصلى فى ٣ لتحصل على صورة الشكل .



(شكل ٨)

وبالضرب فى — ½ يعطينا صورة أبعادها ½ أبعاد الصورة الأصلية وكذلك نجد أن الصورة الناتجة نتيجة لدوران الصورة الأصلية بزاوية قدرها ١٨٠° .

ونلاحظ أن الضرب فى ٣ ثم متابعته بالضرب فى — ½ له نفس النتيجة كما لو ضربنا الشكل الأصلى فى — $\frac{٣}{٢}$.

وهذا ما نصينا عليه فى مثال (٥) وهو أن حاصل الضرب يناظر نتيجة تحصيل تحويلات التكبير .

وهذا الايسومورفيزم له فائدة عظيمة فى التدريس .

فاولا : ان الضرب فى عدد سالب يحدث دورانا قدره ١٨٠° وهذا يوحى لنا بأن الضرب المتتالى فى عددين سالبين يترك الشكل فى وضعه الأصلى .

وعلى هذا نجد ان نموذج تحويلات التكبير نموذج معقول لتفسير ان حاصل ضرب عددين سالبين يكون عددا موجبا .

ثانيــا : إذا أخذنا ٩٠٪ من ٨٥٪ من عدد ما أو إذا وضع مبلغا ما ليربح ربحا مركبا قدره ٥٪ فى السنة لمدة سنتين ، فان نموذج الضرب المتتالى يكون مناسبا .

وعلى العموم هذا النموذج له ميزة انه يصلح لكل الاعداد الحقيقية وعلى ذلك فهو أفضل من نماذج الجمع المتتالى أو الطرح المتتالى .

ثالثا : استعمال المجموعات فى فهم الخواص الاساسية للقوى (الاسس) :

مثـــال (٦) :

إذا أخذنا مجموعة المضاعفات الصحيحة للعدد ٣ مثلا مع عمليــة الجمع وفئــة القوى الصحيحة للعدد ٢ مع عملية الضرب .

(فئة مضاعفات العدد ٣ ، +) : ٠ ، ٣ ، — ٣ ، ٦ ، — ٦ ، ٩ ، - ٩

(فئة القوى الصحيحة للعدد ٢ ، ×) :

$٢^{٠}$ ، $٢^{١}$ ، $٢^{-١}$ ، $٢^{٢}$ ، $٢^{-٢}$ ، $٢^{٣}$ ، $٢^{-٣}$

نلاحظ وجود تشاكل (ايسومورفيزم) بين المجموعتين السابقتين ويمكن التأكد من ذلك بجمع أى عددين فى الصف الاول وضرب العددين المناظرين فى الصف الثانى والتأكد من ان الاجابة تتناظر . وهذا يحقق الايسومورفيزم (التشاكل) .

كما اننا يمكن التحقق من ان التشاكل موجود بين فئة مضاعفات العدد ٣ وعملية الطرح وبين فئة القوى الصحيحة للعدد ٣ ، عملية القسمة .

مثـــال (٧) :

يمكن استعمال المجموعات المتشاكلة (الايسومورفية) للمضاعفات والقوى (الأسس) وذلك لمساعدة التلاميذ على فهم الخواص الأساسية للقوى (الأسس) .

نبدأ بفحص المجموعة الجمعية للمضاعفات ونأخذ العدد ١ كعنصر مولد للمجموعة . فيكون أى عنصر فى فئة المضاعفات على صورة م ١ حيث م عدد صحيح . وعلى ذلك نجد توافر الخواص الآتية :

١ ـــ الانغلاق بالنسبة لعملية الجمع وذلك من الخاصية م ١ + ن ١ = (م + ن) ١

٢ ـــ خاصية وجود العنصر المحايد وذلك عندما م = صفر فيكون صفر × ١ = صفر

٣ ـــ خاصية وجود معكوس لكل عنصر م ١ هو (ــ م) ١

وهذه الخواص الثلاث يعرفها التلاميذ قبل تعاملهم مع القوى (الأسس) وفيما يلى سنبحث فى الخواص المناظرة فى المجموعة الضربية للقوى فاذا كان العنصر المولد للمجموعة هو س حيث س $\neq$ ١ ، س $\neq$ صفر . وأى عنصر فى فئة القوى سيكون على صورة س^م حيث م عدد صحيح .

وحيث انه يوجد ايسومورفيزم (تشاكل) بين المجموعتين المذكورتين لذلك فان لكل خاصية للمضاعفات يناظرها خاصية للقوى وعلى ذلك تتوافر الخواص الآتية :

(١) الانغلاق بالنسبة لعملية الضرب وتشير عليها خاصية القوى الآتية :

$س^م \times س^ن = س^{م+ن}$

(٢) خاصية وجود العنصر المحايد للقوى. وذلك عند م = صفر فيكون $س^٠ = ١$.

(٣) خاصيـــة وجود المعكوس لكل عنصر ويكون معكوس $س^م$ هو $س^{-م}$

وعلى ذلك نجد ان كل خاصية للمضاعفات تناظرها خاصية للقوى.

وفيما يلي نرى توافر خاصية الدمج في المضاعفات وفي القوى.

(٤) ن (م ا) = (ن م) ا تناظر $\left(س^م\right)^ن = س^{م ن}$

كما يمكن استخلاص خاصية أخرى للقوى من هذا التناظر كما يأتي:

(٥) م (ا + ب) = م ا + م ب تناظر $(س ص)^م = س^م ص^م$

وفيما يلي الخاصية السادسة.

(٦) مضاعف الفرق يساوي الفرق بين المضاعفات، وهذا تناظر قوى خارج القسمة يساوي خارج قسمة القوى.

أي

م (ا − ب) = م ا − م ب يناظر $\left(\frac{س}{ص}\right)^م = \frac{س^م}{ص^م}$

مثـــال (٨):

يمكن ان تساعد المجموعات الايسومورفية (المتشاكلة) للمضاعفات والقوى على فهم القوى الكسرية (الأسس الكسرية).

من الأمور الهامة أن يتعلم الطلبة ان القوى (الأسس) الكسرية طبيعية مثل المضاعفات الكسرية (حاصل ضرب عدد × عدد كسرى)، فمثلا $\frac{١}{٢}$ ا

هى ناتج حل معادلة تتضمن مضاعفات (٢ ب = ١) وبنفس الطريقة فان $س^{\frac{١}{٢}}$ تنتج من حل معادلة تتضمن قوى ($ص^٢$ = س) .

ولكن لاقامة التناظر الآحادى الضرورى للتشاكل (الايسومورفيزم) تتطلب أن يكون لمجموعة القوى القياسية مولد موجب وعناصر موجبة فقط .

وعلى ذلك يكون شرط أساسى أن تكون س موجبة ، $س^{\frac{١}{٢}}$ تدل على الجذر التربيعى الموجب فقط للعنصر س .

وفيما يلى بعض الخواص المتناظرة للمضاعفات القياسية والقوى القياسية

المضاعفات	القوى (الأسس)
(١) $\frac{١}{٢}$ ١ هو العدد الذى عندما يجمع على نفسه يعطى ١	(١) $س^{\frac{١}{٢}}$ هو العدد الذى عندما يضرب فى نفسه يعطى س
(٢) نصف المجموع هو مجموع الانصاف $\frac{١}{٢}$ (١ + ب) = $\frac{١}{٢}$ ١ + $\frac{١}{٢}$ ب	(٢) الجذر التربيعى لحاصل الضرب هو حاصل ضرب الجذور التربيعية $(س ص)^{\frac{١}{٢}} = س^{\frac{١}{٢}} . ص^{\frac{١}{٢}}$ أو $\sqrt{س ص} = \sqrt{س} . \sqrt{ص}$
(كلا الطرفين يساوى المتوسط الحسابى للعددين ١ ، ب)	كلا الطرفين يساوى المتوسط الهندسى للعددين س ، ص)
(٣) $\underbrace{\frac{١}{ن}١ + \frac{١}{ن}١ + \cdots + \frac{١}{ن}١}_{\text{ن من الحدود}}$	(٣) $\underbrace{س^{\frac{١}{ن}} س^{\frac{١}{ن}} \cdots\cdots س^{\frac{١}{ن}}}_{\text{ن من العوامل}}$
$= \frac{ن}{ن} ١ = ١$	$= س^{\frac{ن}{ن}} = س$

$$(٤)\quad ا^{\frac{م}{ن}} = \left(ا^{\frac{١}{ن}}\right)^{م} = \left(ا^{م}\right)^{\frac{١}{ن}} \qquad (٤)\quad س^{\frac{م}{ن}} = \left(س^{\frac{١}{ن}}\right)^{م}$$

$$= \left(س^{م}\right)^{\frac{١}{ن}}$$

$$أو\ س^{\frac{م}{ن}} = \left(\sqrt[ن]{س}\right)^{م} = \sqrt[ن]{س^{م}}$$

(٥) إذا كانت ل تقع بين م ، ن، فان ل أ تقع بين م أ ، ن أ

(٥) إذا كانت ل تقع بين م ، ن فان $س^{ل}$ تقع بين $س^{م}$ ، $س^{ن}$

ونتيجة للخاصية الخامسة يمكن ايجاد تقريب عشرى للمقدار $٣^{\sqrt{٢}}$ بملاحظة ان هذا العدد يقع بين ٣ (١ر٤١) ، ٣ (١ر٤٢) وبالمثل

$٥^{\sqrt{٢}}$ تقع بين ($٥^{١ر٤١}$) ، ($٥^{١ر٤٢}$)

ومن هذا نرى أن الخواص المذكورة تسمح بتفسير المضاعفات غير القياسية والقوى غير القياسية .

مثـــــال (٩) :

يمكن تكوين اللوغاريتمات من خلال المجموعات المتشاكلة (الايسومورفية) للاعداد الحقيقة .

من السهل عادة التعامل مع مجموعة المضاعفات عن مع مجموعة من القوى (الأسس) لأن عملية الجمع أسهل من عملية الضرب .

فاذا أخذنا المجموعتين الايسومورفيتين للمضاعفات الحقيقية وللقوى الحقيقية هما :

المجموعة الجمعية للمضاعفات الحقيقية للعدد ا حيث ا $\neq$ صفر

والمجموعة الضربية للقوى الحقيقية للعدد س من حيث س $>$ صفر، س $\neq$ أ

ولقد درسنا فى المثالين السابقين مجموعات جزئية من هاتين المجموعتين .

وحيث أن أى عدد حقيقى هو مضاعف حقيقى لأى عدد حقيقى لا يساوى الصفر، وأى عدد حقيقى موجب هو قوة حقيقية لأى عدد حقيقى موجب لا يساوى واحد (١) ، لذا نعيد تسمية هاتين المجموعتين إلى :

المجموعة الجمعية للاعداد الحقيقية،

المجموعة الضربية للاعداد الحقيقية الموجبة .

وحتى يكون هناك تشاكل (أيسومورفيزم) بين هاتين المجموعتين ، وإذا كانت أ ، ب فى المجموعة الجمعية يناظر العددين س ، ص من المجموعة الضربية، فان الخواص التالية تكون متناظرة :

اجمع أعداد حقيقية	اضرب أعداد حقيقية موجبة
(١) أ + ب	س ص
(٢) − ب	$\frac{\text{١}}{\text{ص}}$
(٣) أ + − ب = أ − ب	س . $\frac{\text{١}}{\text{ص}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$
(٤) ن أ	$\text{س}^{\text{ن}}$
(٥) ٠	١

وهذا التناظر الأخير رقم (٥) هو التناظر الوحيد الذى يتضمن عددين معروفين والذى يتحقق دائماً .

ولكن إذا عرفنا كيف تجعل العناصر الأخرى فى المجموعتين تتناظر فان

كل عملية ضرب يمكن تحويلها إلى عملية جمع وأى عملية حسابية لمقلوبات الأعداد يمكن تحويلها لمسألة حساب الأعداد المخالفة فى الاشارة . وهذه هى الفكرة الأساسية وراء اللوغاريتمات .

وفيما يلى سنجعل الأعداد التى على اليمين لوغاريتمات للاعداد المناظرة على اليسار . وسيحدد التناظر بالعدد الذى يناظر العدد ١ .

سنضع ب تناظر ١ وسنسمى ب بأساس التناظر :

اللوغاريتمات	العدد
١	ب

حيث ب يمكن أن تكون أى عدد موجب غير الواحد .

وحيث أن المضاعفات تناظر القوى فأننا نحصل على الآتى :

١ + ١ = ٢	ب . ب = ب^{٢}
٦ — ن	ب^{ن}
٥ر	$\sqrt{ب}$
١ر	$\sqrt[١٠]{ب}$

والتناظر ن ← ب^{ن} هو الدالة الأسية للأساس ب والتناظر العكسى هو الدالة اللوغاريتمية للأساس ب .

وغالبا ما يختار الأساس ب = ١٠ عندما نبدأ فى دراسة اللوغاريتمات مع أن ب = هـ تكون طبيعية أكثر فى التطبيقات (هـ = e)
وعندما تكون ب = ١٠

فان

م	تكون لوغاريتم	$١٠^{م}$
١	» »	١٠
٢	» »	١٠٠
− ١	» »	١ر٠
− ٢	» »	٠١ر٠
.		.
.		.

وكلنا نعلم فضل الاساس ١٠ فاذا كان لوغاريتم عدد كسر عشرى ، أى مثلا
٣٠١٠ر٠ لوغاريتم للعدد ٢

فان عملية الضرب على اليسار تناظر عملية الجمع على اليمين فمثلا :

٣٠١٠ر٠ + م   لوغاريتم للعدد ٢×١٠^{م}

٣٠١٠ر٠ − ٤   »   » $٢ \times ١٠^{-٤} =$ ٠٠٠٢ر

وعلى هذا نجد أن إستعمال المجموعات له فائدة فى أنه يمكن معرفة كل خواص اللوغاريتمات من الأول .

فالخواص من ١ إلى ٦ يمكن إعادة كتابتها بدلالة رموز الدالة اللوغاريتمية فاذا كانت لو س = أ ، لو ص = ب .

فان :

(١) لو س ص = أ + ب = لو س + لو ص .

(٢) لو $\frac{١}{ص}$ = ـ ب = ـ لو ص

(٣) لو $\frac{س}{ص}$ = أ ـ ب = لو س ـ لو ص

(٤) لو سن = ن أ = ن لو س

(٥) لو ١ = صفر بغض النظر عن الأساس

(٦) بلوبن = ن

وعلى ذلك فان الدالة اللوغاريتمية هى تشاكل (أيسومورفيزم) يرسم المجموعة الضربية للأعداد الحقيقية الموجبة على المجموعة الجمعية للأعداد الحقيقية .

رابعا ـ استعمال المجموعات فى تدريس بعض المفاهيم الهندسية الاساسية :

توجد ثلاثة مفاهيم أساسية فى هندسة التعليم العام ، لها أهمية كبيرة للرياضيين ، كما لها علاقة وثيقة بدراسة المجموعات .

هذه المفاهيم هى :

١ ـ المسافة : وهى مرتبطة إرتباطا وثيقا بالتطابق .

٢ ـ نسبة المسافات : وهى مرتبطة بالتشابه .

٣ ـ التماثل .

مثـــال (١٠) :

مجموعة التطابق توضح خواص علاقة تكافؤ التطابق .

إن إستعمال التحويلات لتعريف التطابق يعمل على سد بعض الثغرات فى

تعريف إقليدس للتطابق[1] ، ومع ذلك يحتفظ بتعريف عام للتطابق فبلغة التحويلات : يتطابق الشكلان ا ، ب أى ا $\cong$ ب إذا وإذا فقط كان هناك أيسومترى Isometry (تحويلة مع الاحتفاظ بالمسافة) ت بحيث أن ت (ا) $=$ ب .

وهذه العلاقة تحول أفكار إقليدس إلى أفكار رياضية وذلك باستعمال إنعكاسات ، ودورانات ، وإزاحات (إنتقالات) وإنعكاسات إنزلاقية glide reflections (وهذه هى كل الأيسومترات الممكنة) للأفكار الفيزيقية مثل وضع شكل على آخر Superposition وانطباق الأشكال على بعض coinciding

وفيما يلى خواص علاقة التكافؤ الخاصة بالتطابق :

١ — لكل شكل ا يكون ا $\cong$ ا

٢ — إذا كان ا $\cong$ ب فان ب $\cong$ ا

٣ — إذا ا $\cong$ ب ، ب $\cong$ حـ فان $\cong$ حـ

وبدلالة التعريف العام للتطابق فان هذه الخواص تتطلب ما يأتى :

١ — وجود أيسومترى I بحيث أن لكل شكل ا يكون I (ا) $=$ ا

٢ — إذا وجد أيسومترى ت بحيث أن ت (ا) $=$ ب ، فان هناك أيسومترى تَ بحيث أن تَ (ب) $=$ ا .

٣ — إذا كان ت$_1$ ، ت$_2$ أيسومترات بحيث أن ت$_1$ (ا) $=$ ب ، ت$_2$ (ب) $=$ حـ فانه يوجد أيسومترى ت$_3$ بحيث أن ت$_3$ (ا) $=$ حـ .

---

(1) "two figures are congruent if they can be made to coincide".

فاذا نظرنا إلى هذه الخواص من وجهة نظر خواص المجموعة وتحصيل التحويلات فان الخواص تكون كما يلي :

١ ـ فئة الأيسومترات تحتوى على العنصر المحايد تحت عملية تحصيل التحويلات (العنصر المحايد = I) .

٢ ـ فئة الأيسومترات تحتوى على معكوس لكل عنصر من عناصرها (تَ معكوس ت) .

٣ ـ فئة الأيسومترات مغلقة تحت عملية تحصيل التحويلات (ت$_٣$ = ت$_٢$ ٥ ت$_١$) .

وحيث أن عملية تحصيل التحويلات تحقق دائما خاصية الدمج كذلك ، لذلك نرى أن خواص علاقة التكافؤ الخاصة بالتطابق مكافئة منطقيا لما يأتى :

فئة الأيسومترات تحت عملية تحصيل التحويلات تكون مجموعة ، هذه المجموعة تسمى مجموعة التطابق Congrnence group .

مثـــال (١١) :

مجموعة تحويلات التشابه مع عملية تحصيل التحويلات توضح خواص علاقة تكافؤ التشـــابه :

يمكن وضع تعريف عام للتشابه باستعمال التحويلات[١] هكذا :

يتشابه الشكلان ا ، ب أى ا ~ ب إذا وإذا فقط وجدت تحويلة تشابه ب (مركبة من تحويلات تكبير وأيسومترات) .

بحيث أن ت (ا) = ب .

ومن التعريف يمكن إستنتاج أن : إذا كانت الأشكال متشابهة ، فان هذه

---

(١) هـذا التعريف العام لم يكن موجودا عنـد اقليـدس .

الأشكال تكون لها علاقة مع بعضها من حيث الموقع بطريقة ما بحيث يمكن أن الشكل يرسم على الآخر بطريقة واحدة فقط من الطرق الأربعة الآتية :

١ ـ الإزاحة (الانتقال) translation

٢ ـ الإنعكاس reflection

٣ ـ التشابه الحلزونى spiral similarity

٤ ـ إنعكاس تشابه (مركب من تحويلة تكبير وانعكاس على مستقيم يحتوى على مركز تحويلة التكبير) .

ونلاحظ أن نتيجة الطريقتين الأوليتين أشكالا متطابقة ولكن الطريقتين الثالثة والرابعة فتكون فى بعض الأحيان للأشكال المتشابهة أو المطابقة .

وتتكون فئة تحويلات التشابه من كل تحويلات هذه الأربع أنواع . وتكوين مجموعة من هذه الفئة مع عملية تحصيل التحويلات تكافىء منطقيا العبارة الآتية :

التشابه هو علاقة تكافؤ .

وخواص علاقة التكافؤ تؤدى إلى أننا نحصل دائما على أشكال متشابهة بالتطبيق المتتالى لهذه التحويلات ومن غير شك فكل شكل يحصل عليه بهذه الطريقة يكون مشابها لكل الأشكال الأخرى .

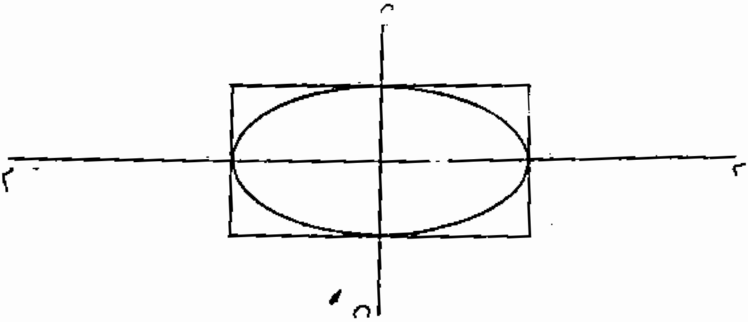
مثـــال (١٢) :

نستعمل مجموعات التماثل لاستنباط معلومات عن الاشكال :

يرتبط بكل شكل فئة من الأيسومترات (إنعكاسات، دورانات ،إنتقالات إنعكاسات إنزلاقية ، بحيث ترسم هذا الشكل على نفسه) .

وهذه الفئة هى فئة التماثل لهذا الشكل . وفئة التماثل هذه مع عملية تحصيل التحويلات ، تكون مجموعة ، هى مجموعة التماثل لهذا الشكل .

فنى شكل (٩) نرى أن المستطيلات، القطاعات الناقصة ، لها نفس مجموعة التماثل أى أيسومورفية ، كل لها فئات تماثل مكونة من أربعة عناصر .



(شكل ٩) أيسومترات فى فئة تماثل :

إنعكاس على المستقيم مم َ ، إنعكاس على المستقيم ن نَ

دوران بزاوية قدرها ١٨٠° حول و ، والعنصر المحايد

وكلما زاد التماثل فى الشكل ، كلما زاد إحتمال وجود أجزاء متساوية الطول وزوايا متساوية فى المقياس .

ودراسة التماثل لها قيمة كبيرة فى الرياضيات . فكثير من الدوال يمكن ترجمتها على أنها تشير الى تماثل فى أشكالها البيانية فمثلا :

جا (— س) = — جا س تشير إلى تماثل دورانى حول نقطة الأصل

د (— س) = — د (س) .

جتا (— س) = جتا س تشير إلى تماثل إنعكاس على المحور الصادى

د (— س) = د (س) .

ظا (س + ط) = ظا س تشير إلى تماثل إنتقال (إزاحة) .

وبالعكس ، إذا وجد شكلا بيانيا متماثلا فيمكن إستنتاج علاقات ودوال متناظرة .

ذكرنا فى هذا الفصل بعض الأمثلة التى توضح فائدة إستعمال المجموعات وخواصها فى تدريس فروع الرياضيات المختلفة . وسنكتفى بهذا القدر من الأمثلة وإن كانت هناك أمثلة كثيرة أخرى لاستعمالاتها فى فروع رياضية أخـرى مثل فى حساب المثلثات وغير ذلك .

ولكننا سننتقل فى الفصل القادم إلى دراسة إستعمالات المجموعة ونظريتها فى مجال آخر غير مجال الرياضيات . ألا وهو مجال الكيمياء .

الفصل الخامس

استخدام نظرية المجموعات فى علم الكيمياء

لا تقتصر استعمالات مفهوم ونظرية المجموعات على الرياضيات فقط ، بل تتعداها إلى المجالات الأخرى ، وسنذكر فيما يلى بعض الأمثلة التى توضح تطبيق نظرية المجموعات فى علم الكيمياء .

فما هو معروف أن الجزيئات الكيميائية لها أشكال هندسية مختلفة . ولكل شكل هندسى عدد من عناصر التماثل (محور تماثل — مستوى تماثل — مركز للتماثل) وبالتالى يمكن إجراء عدد من عمليات التماثل على كل شكل هندسى كالدوران مثلا حول محور تماثل بزاوية معينة أو الانعكاس على مستوى تماثل .

وسنبدأ بتعريف عملية التماثل وعنصر التماثل :

عمليــة التمــاثل :

أن عملية التماثل هى حركة الجسم بحيث أنه بعد إتمام الحركة ، فإن كل نقطة فى الجسم تنطبق تماما على نقطة مكافئة (أو ربما على نفس النقطة) للجسم فى وضعه الأصلى . أى إذا لاحظنا وضع الجسم وتنظيمه قبل وبعد الحركة ، فإن هذه الحركة تكون عملية تماثل إذا لم نستطع التفرقة بين وضعى الجسم وتنظيمه قبل وبعد الحركة . أى أن عملية التماثل على جسم ما ، هى العملية التى تكون نتيجتها شكل مكافىء لشكل الجسم الأصلى أى شكل لا يفترق عن الشكل الأصلى للجسم ، وإن كان ليس ضروريا أن يكون مطابقاً له . وبحيث تحتفظ المسافات بين كل أزواج النقط فى الجسم .

عنصـــر التـمـــاثل :

هو كيان هندسى مثل نقطة، خط أو مستوى بحيث يمكن إجراء عملية تماثل بالنسبة له .

وعناصر التماثل وعمليات التماثل لها مع بعضها علاقة وثيقة ، لأن العملية لا يمكن تعريفها إلا بالنسبة للعنصر فقط . وفى نفس الوقت فإن وجود عنصر تماثل يدل عليه وجود عمليات تماثل مناسبة وحيث أن وجود عنصر تماثل يخضع لوجود عملية تماثل وبالعكس ، فسنناقش العناصر والعمليات المتعلقة بها معا . وفى معالجة تماثل الجزيئات فى الكيمياء ، يكتفى بأربعة أنواع من عمليات وعناصر التماثل ، يمكن توضيحها فى الجدول الآتى :

عنصر التماثل	عملية التماثل
١ ـــ مستوى	انعكاس على المستوى
٢ ـــ مركز التماثل أو مركز التعاكس	تعاكس كل الذرات من خلال المركز
٣ ـــ محور حقيقى	دوران حـــول المحور مرة واحدة أو أكثر
٤ ـــ محور غير حقيقى	دوران يتبعه انعكاس فى مستو عمودى على محـور الدوران وتكرار هذا التسلسل من العمليات مرة أو أكثر .

مستويات التماثل والانعكاس :

يجب أن يمر مستوى التماثل خلال الجسم بمعنى أن هذا المستوى لا يمكن أن يكون كله خارج الجسم . وتتلخص الشروط الواجب توافرها فى المستوى لكى يكون مستوى تماثل ما يأتى :

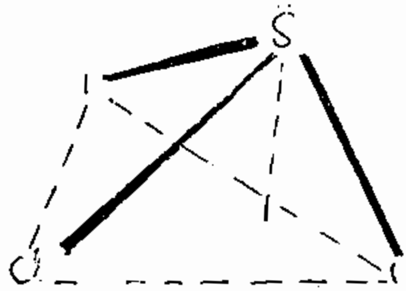
يستعمل نظام الإحداثيات الكارتيزية لوضع الجزىء بحيث أن المستوى يحتوى على المحورين السينى والصادى . وبذلك يكون المحور الثالث اليائى عموديا على هذا المستوى . وبذلك يمكن تحديد وضع كل ذرة فى الجزىء فى نفس النظام الإحداثى . فإذا كانت الذرة مثلا موجودة أصـــلا عند النقطة (سر ، صر ، ىر) وتركنا الإحداثيان السينى والصادى لهذه الذرة كما هو وغيرنا إشارة الإحداثى اليائى فإن الذرة تتحرك إلى النقطة (سر ، صر ، -ىر) ويمكن التعبير عن العملية السابقة كما يأتى :

إذا أسقطنا عمودا من كل ذرة على المستوى ، ومددنا هذا المستقيم على استقامته مسافة متساوية فى الجانب الآخر للمستوى ثم حركنا الذرة إلى نهاية هذا المستقيم . فإذا أجرينا هذه العملية على كل ذرات الجزىء فإننا نحصل على شكل مكافىء لشكل الجزىء الأصلى . ويسمى المستوى الذى استعملناه بمستوى التماثل ، وعادة تستعمل σ لنرمز لمستوى التماثل ويستعمل نفس الرمز ليدل على عملية الانعكاس خلال المستوى .

ويلاحظ أن وجود مستوى تماثل واحد يولد عملية تماثل واحدة كما تلاحظ أن تأثير استعمال نفس عملية الانعكاس مرتين هو إرجاع كل الذرات إلى وضعها الأصلى . وعلى هذا فإن استعمال العملية σ يعطى شكلا مكافئا للشكل الأصلى ، ولكن استعمال نفس العملية σ مرتين ينتج شكلا مماثلا أو مطابقا للأصلى . ويرمز لإستعمال العملية σ استعمالا متتاليا « ن » من المرات بالرمز

$\sigma^{ن}$ وتكون $\sigma^{ن} = E$ حيث استعملنا هنا الرمز E ليمثل أى مزج للعمليات بحيث تكون نتيجتها إرجاع الجزىء إلى وضع مماثل تماما لوضعه الأصلى .وعلى ذلك تكون E العملية المحايدة ومن الواضح هنا أن σ ن $= E$ عندما تكون ن زوجية وأن σ ن $= \sigma$ إذا كانت فردية .

ويوجد جزيئات ليس لها مستويات تماثل على الاطلاق ومن ضمن هذه الجزيئات ، الجزيئات غير المستوية والتى تحتوى على عدد فردى من كل الذرات ، مثال مركب فل كل كب أ FClSO



(شكل ١٠)

وعلى العكس يوجد الجزيئات التى تحتوى على عدد لا نهائى من مستويات التماثل وهى الجزئيات الخطية إذ أن أى مستوى يحتوى على محور الجزىء يكون مستوى تماثل لهذه الجزيئات .

ومن الواضح أن هناك عددا لا نهائى من هذه المستويات . ولكن أغلب الجزيئات الصغيرة يقع بين هذين النوعين ، أى يكون لها مستوى تماثل واحد أو عدد قليل من هذه المستويات .

فمثلا إذا أخذنا جزىء (فل$_2$ كب أ) F_2 SO أو (كل$_2$ كب أ)

Cl_2SO فإننا نجد أن كل جزىء له مستوى تماثل واحد وهو الذى يمر خلال ذرة الكبريت S وذرة الأكسجين O ويكون عموديا على مستوى (فل فل ، أ) F, F, O أو مستوى (كل ، كل ، أ) Cl, Cl ,O

(شكل ١١)

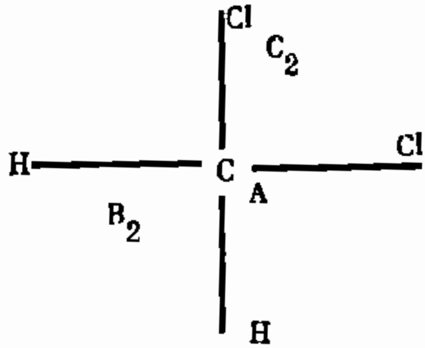
فإذا أخذنا الأمثلة الآتية :

اولا : جزىء المـاء : (يد$_٢$ أ) H_2O .

يحتوى جزىء الماء على مستويين للتماثل أحدهما هو المستوى الجزيىء والآخر المستوى الذى يشتمل على ذرة الأكسيجين ويكون عموديا على المستوى الجزيىء . ويكون تأثير الانعكاس خلال المستوى الثانى هو ترك ذرة الأكسيجين ثابتة مع تبديل ذرات الأيدروجين بينما يكون نتيجة الانعكاس خلال المستوى الأول هو ترك كل الذرات مكانها كما هى . ونرمز لهذا النمط بالرمز AB_2 حيث يرمز هنا للاكسجين بـ A ، للأيدروجين بـ B_2 .

ثانيا ـ جزىء كلوريد الميثيلين : (ك يد$_٢$ كل$_٢$) CH_2CL_2

ويرمز لهذا النمط بالرمز AB_2C_2 حيث يرمز لذرة الكربون بـ A والأيدروجين بـ B_2 والكلور بـ C_2 ويحتوى هذا الجزىء على مستويين للتماثل متعامدين أحدهما يشتمل على AB_2 والانعكاس خلال هذا المستوى يترك هذه الثلاث ذرات مكانها دون حركة ، بينما يبدل مكان ذرتى C أى الكلور . والمستوى الآخر يشتمل على AC_2 والانعكاس خلاله يبدل الذرات فقط أى ذرتى الأيدروجين .



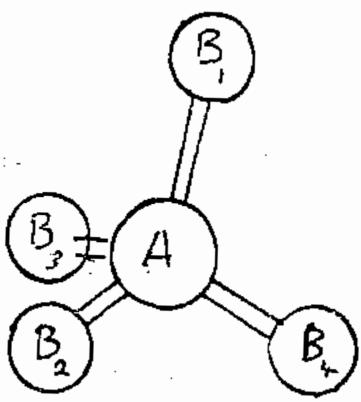
(شكل ١٢)

ثالثا ـ جزىء ذو الشكل الهرمى الرباعى (Regular tetrahedron)

هذا النوع من الجزئيات يحتوى على ستة مستويات تماثل وباستعمال نفس نظام الترميز السابق فإننا نستطيع تحديد هذه المستويات بذكر الذرات التى يحتويها وتشمل مستويات التماثل الذرات الاتية :

$A\,B_1\;\;B_2,\;\;AB_1\;\;B_3,\;\;AB_1\;\;B_4,$

$A\,B_2\;\;B_3,\;\;AB_2\;\;B_4,\;\;AB_3\;\;B_4,$



(شكل ١٣)

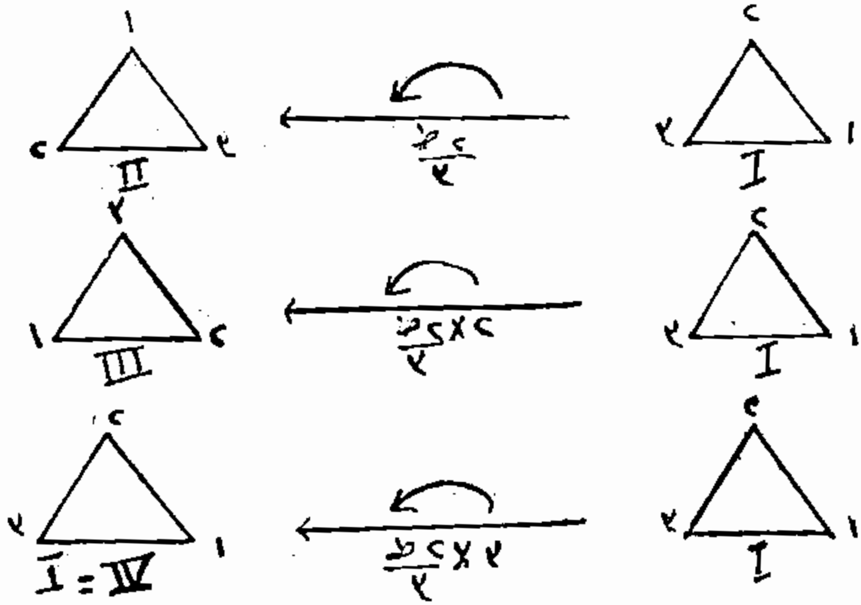
مركز التعاكس : The Inversion Center

إذا أمكن تغيير وضع الجزىء إلى وضع مكافىء لوضعه الأصلى وذلك بتغيير إحداثيات كل ذرة فيه من (س ، ص ، ى) إلى (-س،-ص،-ى) وكانت نقطة أصل الإحداثيات الكارتيزية تقع داخل نقطة الجزىء فإن هذه النقطة التى تقع عليها نقطة الأصل تسمى مركز التماثل أو مركز التماكس . وكما ذكرنا عند دراسة مستوى التماثل فإن مركز التماكس يولد عملية تماثل واحدة فقط .

المحور الحقيقى والدوران الحقيقى :

المحور الحقيقى لدوران مثلث متساوى الأضلاع هو الخط العمودى على مستوى المثلث مارا بمركزها الهندسى .

والدوران الحقيقى هو دوران المثلث بزاوية ما حول هذا المحور الحقيقى فإذا دار المثلث بزاوية قدرها ١٢٠° أى $\frac{٢ ط}{٣}$ حول هذا المحور فإن المثلث يتحول إلى شكل مكافىء وكذلك إذا دار المثلث بزاوية ٢٤٠° أى ٢ × $\frac{٢ ط}{٣}$ حول هذا المحور تنتج شكلا مكافئا ولكن دوران المثلث بزاوية ٢ ط لا يعطى فقط شكلا مكافئا بل يعطى أيضاً شكلا مطابقا .



(شكل ١٤)

والرمز العام للمحور الحقيقى الدوران هو C_n حيث n هى رتبة المحور.

والرتبة تعنى أكبر قيمة للرمز n بحيث أن الدوران خلال ($\frac{٢ ط}{ن}$) $\frac{2\pi}{n}$

يعطى شكلا متكافئا أما الدوران خلال ($\frac{ن \times ٢ ط}{ن}$) $\frac{n \times 2\pi}{n}$ فلا

يعطى فقط شكلا متكافئا بل يعطى أيضا شكلا مطابقا ويسمى المحور C_3

محور ثلاثى ويستعمل أيضا الرمز C_3 لتمثيل عملية الدوران بزاوية $\frac{٢ ط}{٣}$

حول C_3 .

ويستعمل الرمز C_3^2 ليدل على عملية الدوران بزاوية ٢ × $\frac{٢ ط}{٣}$

ويرمز للدوران ٣ × $\frac{٢ ط}{٣}$ بالرمز C_3^3

وعلى ذلك نجد أن $C_3^4 = C_3$ وبذلك تتكون العمليات المختلفة هى C_3، C_3^2 ، C_3^3 فقط وينتج عن الدوران C_3^3 نفس الشكل الأصلى أى يساوى العنصر المحايد[1] E .

ويلاحظ أنه فى حالة مستوى التماثل أو مركز التماكس تتولد عملية واحدة (إنعكاس) بواسطة مستوى التماثل . وكذلك عملية واحدة (تماكس) بواسطة مركز التماكس . ولكن فى حالة الدوران حول محور حقيق من رتبة n فان n من العمليات تتولد مثل :

$$C_n ,\ C_n^2 , C_n^3 \ \ldots\ldots , C_n^{n-1} ,\ C_n^n (= E)$$

(١) سنرمز هنا للعنصر المحايد بالرمز E وذلك تبعا لكتب الكيمياء .

مجموعات نقطة التماثل : The Symmetry Point Groups

إذا فرضنا أننا نتيجة للبحث ، جمعنا قائمة بكل عناصر التماثل فى جزىء ما ، فإننا نستطيع أن نضع قائمة لكل عمليات التماثل المولدة بواسطة كل من هذه العناصر .وهدفنا الأول هنا هو أن نبرهن على أن مثل هذه القائمة الكاملة لعمليات التماثل لو وضعت فى جدول فاننا نجد أن عمليات التماثل تحقق الأربعة خواص الخاصة بالمجموعة ، الا وهى الإنغلاق ووجود العنصر المحايد وخاصية وجود معكوس عنصر وخاصية الدمج .

وتستخدم نظرية المجموعات لتساعد على تصنيف وإستنتاج العديد من خواص الجزيئات الكيميائية ، وتعتمد نظريات علم الكيمياء فى وقتنا الحاضر على إستخدام نظرية المجموعات .

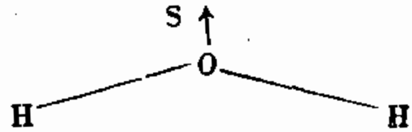
فهناك أفرع فى العلوم الكيميائية ، كالطيف الكيميائى ونظريات الروابط والتركيب الجزيئى ، لا يمكن فهمها بطريقة غير وصفية إلا باستخدام نظرية المجموعات . حتى الطرق الوصفية تعتمد فى أساسها على نتائج إستخدام نظرية المجموعات فى الكيمياء .

تطبيق نظرية المجموعات

الفئة التى تتكون عناصرها من عمليات التماثل التى يمكن إجراؤها على جزىء ما ، معرف عليها عملية (إجراء عمليات التماثل بالتتابع من اليمين إلى اليسار) تسمى مجموعة .

وسنوضح هذا بالمثال الآتى :

نعتبر جزء الماء (وهو يتكون من ذرة أكسجين وذرتى أيدروجين) وصيغته التركيبية هى :



(شكل ١٥)

محور « ى » هو محور دوران تماثل . فاذا لف الجزىء حوله بزاوية ١٨٠° نتج إتجاه لا يمكن تمييزه عن الإتجاه الأول . وبصفة عامة فان عمليات (تحويلات) التماثل التى يمكن إجراؤها على هذا الجزىء هى :

١ ــ ترك الجزىء كما هو ويستعمل الرمز E (العنصر المحايد) .

٢ ــ الدوران حول محور « ى » بزاوية ١٨٠° ويستعمل الرمز C_2 .

٣ ــ الإنعكاس على مستوى « س ى » ويستعمل الرمز $\sigma_\gamma^{\text{س ى}}$ أو σ_γ'

٤ ــ الانعكاس على مستوى « ص ى » ويستعمل الرمز $\sigma_\gamma^{\text{ص ى}}$ أو σ_γ^{*}

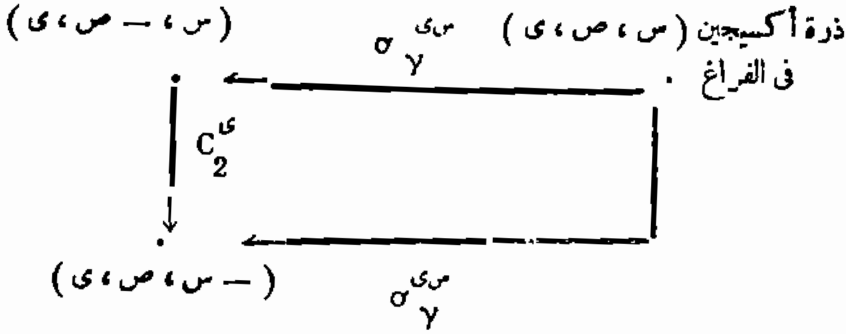
وينتمى هذا الجزىء والجزيئات التى لها نفس التركيب الفراغى إلى مجموعة يرمز لها بالرمز $C_{2\gamma}$.

وفيما يلى سنثبت أن العمليات (التحويلات) الأربعة المذكورة أعلاه والعملية المعرفة عليها تكون مجموعة :

أولا : تحقق خاصية الإنغلاق . أى أن حاصل ضرب أى عنصرين فى الفئة هو عنصر فيها .

فمثلا $\sigma_\gamma^{\text{س ى}} \times C_2^{\text{ى}} = \sigma_\gamma^{\text{ص ى}}$ وهو عنصر فى الفئة .

الإثبات : باستخدام الإحداثيات الكارتيزية لذرة الأكسجين مثلا :



ثانيا : تحقق الدمج

$$\sigma^{صى} \otimes (\sigma^{سى} \otimes C_2^{ى}) = (\sigma^{صى} \otimes \sigma^{سى}) \otimes C_2^{ى}$$

ويمكن إثبات هذا باستخدام نفس الأسلوب فى أولا .

ثالثا : تحقق خاصية وجود عنصر محايد فى الفئة وهو E

$$C_2^{ى} = C_2^{ى} \otimes E$$

وكذلك $\sigma^{سى} = \sigma^{سى} \otimes E$

يترك إثبات ذلك للقارىء

رابعا : تحقق خاصية وجود معكوس لكل عنصر .

$$E = C_2^{-1} \otimes C_2$$

أى دوران الجزىء بمقدار ١٨٠° فى إتجاه عقارب الساعة ثم دورانه بنفس الزاوية فى إتجاه عكس عقارب الساعة يكافىء ترك الجزىء كما هو .

ويمكن تمثيل المجموعة هذه التى رمزنا لها بالرمز $C_{2\gamma}$ بفئة من المصفوفات بحيث أن كل مصفوفة تناظر عملية أحادية فى المجموعه ولنفرض أن محور C_2 ينطبق

على محور ى من نظام الأحداثيات الكارتيزية وأن σ'_γ هو المستوى س ى ،

$\dot{\sigma}_\gamma$ هو المستوى ص ى .

فتكون المصفوفات التى تمثل التحويلات المؤثرة على نقطة ما هى :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad C_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma'_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \dot{\sigma}_\gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وعلى ذلك يكون جدول المجموعة الضربية كالآتى :

(جدول ١)

$\otimes$	E	C_2	σ'_γ	$\dot{\sigma}_\gamma$
E	E	C_2	σ'_γ	$\dot{\sigma}_\gamma$
C_2	C_2	E	$\dot{\sigma}_\gamma$	σ'_γ
σ'_γ	σ'_γ	$\dot{\sigma}_\gamma$	E	C_2
$\dot{\sigma}_\gamma$	$\dot{\sigma}_\gamma$	σ'_γ	C_2	E

ومن الجدول يتضح أن $\sigma'_\gamma\, C_2 = \dot{\sigma}_\gamma = C_2\, \sigma'_\gamma$

وأن $\dot{\sigma}_\gamma\, C_2 = \sigma'_\gamma = C_2\, \dot{\sigma}_\gamma$

وإن فى $C_2\gamma$ كل عنصر يكون معكوس نفسه .

تصنيف الجزيئـــات :

يمكن إدراك قيمة نظرية المجموعات إذا علمنا أن عدد الجزيئات الكيميائية بالملايين مما يصعب معه إستنتاج خواصها كلها . وعلمنا أن نظرية المجموعات يمكن أن تدمج هذه الملايين من المركبات الكيميائية فى حوالى ٤٢ مجموعة بحيث يمكن إستنتاج العديد من خواصها بمجرد النظر فى حوالى ٢٥ جدول يجمع سلوك تماثلها .

أى أن نظرية المجموعات تعمل على تصنيف الجزيئات الكيميائية .

وفيما يلى سنعطى مثالا آخر يبين أهمية نظرية المجموعات فى علم الطيف الكيميائى :

فى الجزيئات الكيميائية تعتمد حدوث الإنتقالات الالكترونية الناشئة عن إمتصاص طاقة كهرو مغناطيسية فى المنطقة المرئية أو فوق البنفسجية من الطيف أم ما تعتمد على تماثل مستويات الطاقة التى ستتم بينها هذه الانتقالات .

والانتقالة الالكترونية تحدث من مستوى طاقة تام التماثل ψ_g (g=ground) إلى مستوى آخر ψ_e (e=excited) يمكن معرفة نوع تماثله بمعلومية التركيب الالكترونى للجزىء فى الحالة المثارة .

وشدة الامتصاصة (إحتمالية حدوث الانتقالة) تعطى بالتكامل الآتى[1] :

١ ـ فى حالة دالة فردية فان $\int \psi_g \mu \psi_e^{\,d\tau}$

حيث μ = كمية الطاقة ، حيث $d\tau$ $\int$ يعنى تكامل على فراغ المتغيرات وجمع المتغيرات وجمع المتغيرات الدورانية) .

أى أن حاصل ضرب ψ_e μ و ψ_g غير تام التماثل .

---

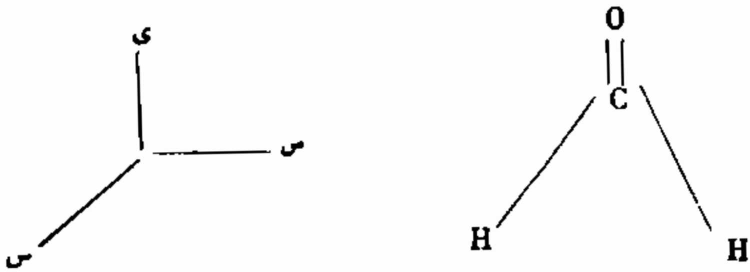
(١) للاستزادة والتوسع يقـرأ Levine, I. "Molecular spectroscopy", John wiley N.Y. 1975, Ch. 5 & Ch. 6.

٢ ـ فى حالة دالة زوجية :

سيكون للتكامل قيمة أكبر من الصفر وبالتالى يكون شدة الانتقالة الالكترونيةملوسة . ويمكن تحديدذلك باستخدام ما يسمىبجداول الصفة[1]. والتى تبنى بواسطة نظرية المجموعات .

سنوضح ما ذكر أعلاه بالمثال الآتى :

إذا أخذنا جزىء الفورمالدهايد (ذرة أكسجين وذرة كربون وذرتى أيدروجين) .



(شكلا ١٦)

وهو ينتمى إلىالمجموعة $C_{2\gamma}$ (مثل جزىء الماء) وجدول الصفة وأنواع التماثل لهذه المجموعة هو :

(جدول ٢)

	E	C_2	σ_γ (س ى)	σ_γ (ص ى)
A_1	1	1	1	1
A_2	1	1	−1	−1
B_1	1	−1	1	−1
B_2	1	−1	−1	1

(1) Ibid, PP. 402 - 466.

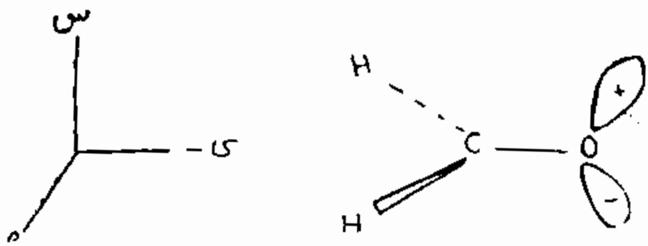
(الصفة « + ١ » تعنى عدم تأثر المتجه بعملية التماثل بينما « — ١ » تعنى أن الاتجاه إنعكس باجراء عملية التماثل) .

والانتقالات الالكترونية الجائز حدوثها وملاحظتها فى طيف هذا الجزىء هى :

(ا) من مدار يسمى n إلى آخر يسمى π^* ($n \longrightarrow \pi^*$)

(ب) من مدار يسمى π إلى آخر يسمى π^* ($\pi \longrightarrow \pi^*$)

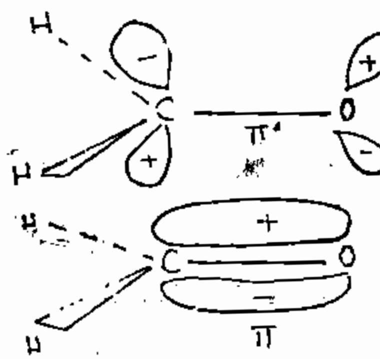
وأشكال المدارات المعينة ونوع تماثلها موضحة كالآتى :



(شكل ١٧)

مدار n على الأكسجين (الاشارة تعنى طور المدار phase) (ground state)

ونوع التماثل B_2 أنظر الجدول السابق (جدول ٢) .



(شكل ١٨)

ونوع التماثل B_1 أنظر الجدول السابق (جدول ٢) .

أى أن :

(ا) الانتقالة من مدار بمستوى طاقة معين $n \rightarrow \pi^*$ إلى مدار بمستوى طاقة آخر ينتج عنها التركيب الالكترونى $(n)^1 (\pi^*)^1$ ونوع التماثل للحالة الثائرة ψ_e هو $A_2 = B_1 \times B_2$.

(أنظر جدول ٢)

وعلى ذلك فان تماثل μ (المذكورة فى التكامل السابق) يجب أن يكون A_2 . أو أحد مركباتها حيث أن $\mu = \mu_{س} + \mu_{ص} + \mu_{ى}$) حتى يكون $A_1 = \mu \times \psi_e$ ثم يكون :

$A_1 = \psi_g \times \mu \times \psi_e$ ويكون التكامل له قيمة أكبر من الصفر .

لكن الذى نراه من جدول الصفة أن مركبات μ ليس لأحد منها نوع تماثل A_2 ولذلك فان التكامل فى حالة الإنتقال $n \rightarrow \pi^*$ سيكون مساويا للصفر والنتائج المعملية (المقاسة) تتفق مع هذا الاستنتاج حيث أن الانتقالة $n \rightarrow \pi^*$ لها شدة ضعيفة جدا .

(ب) الانتقالة $\pi \longleftarrow \pi^*$ مسموح بها حيث أن التكامل له قيمة أكبر من الصفر لأن تماثل $\psi_e = B_1 \times B_1 = A_1$ ،

$$A_1 = \psi_g \quad ، \quad A_1 = \mu_{\text{ى}}$$

أى تام التماثل . وهذا يتفق تماما مع النتائج المعملية .

يتضح من الأمثلة السابقة قيمة نظرية المجموعات فى الكيمياء . وكيف أن هذه النظرية توفر كثير من الجهد والمال ، والفضل يرجع إلى قدرتها فى تصنيف الجزيئات .

الفصـــل الســادس

أثر نظرية المجموعات على مناهج الرياضيات فى التعليم العام واعداد المعلم

فى هذا الفصل ، سنتكلم عن أثر ما تقدم على مناهج التعليم العام وعلى برنامج إعداد المعلم :

اولا ـ أثر ما تقدم على مناهج التعليم العام :

(أ) من حيث المحتوى :

يجب مراعاة ما يأتى :

١ ــ قبل دراسة المجموعات ، لا بد من التمهيد للتلاميذ بدراسة معنى وخواص التركيب الرياضى . وذلك بدراسة مكوناته : الفئات ومدلولها ، والعمليات عليها . وكذلك العمليات الرياضية بمعناها العام . ودراسة الخواص الرياضية مثل الانغلاق ــ الدمج ــ الابدال ــ المعكوس ــ والعنصر المحايد بحيث يشعر الطالب بقيمة دراسة التراكيب الرياضية المختلفة .

٢ ــ ضرورة احتواء المنهج لبعض موضوعات التحويلات الهندسية . ويمكن بدء هذه الدراسة فى المرحلة الابتدائية بطريقة حدسية محسوسة ، حتى يفهم التلاميذ معنى هذه التحويلات حدسيا قبل دراستها نظريا ، ثم دراسة التحويلات الهندسية التى تكون مجموعة مثل مجموعة تماثلات شكل ما ومثل مجموعة التقايسات (متساويات القياس) الهندسية .

٣ ــ الاهتمام بدراسة الجداول والتنظيمات وحساب الساعة .

٤ ــ ضرورة احتواء المنهج لمبادىء المتجهات .

٥ ــ التأكيد على احتواء المنهج الكثير من التطبيقات والأمثلة التى توضح قيمة المجموعات فى المجالات المختلفة أو استخداماتها فى موضوعات منهج المدرسة الثانوية حتى يشعر الدارسون بأهمية هذا التركيب الرياضى المجرد .

٦ ــ ضرورة مراعاة الترابط بين مناهج الرياضيات ومناهج العلوم الأخرى، حيث أن هناك أهمية لأن تدرس العلوم أيضا من وجهات نظر أحدث تظهر فيها المعالجات الرياضية الحديثة مثل استخدام المجموعات .

(ب) من حيث طـرق التـدريس :

هناك بعض المبادىء الواجب أخذها فى الاعتبار حتى تتحقق أهداف دراسة المجموعات . هذه المبادىء هى :

١ ــ عند دراسة المجموعات ، يجب ألا نبدأ بتعريف المجموعة ، ولكن يجب الابتداء بمواقف محسوسة متنوعة تظهر فيها خواص المجموعة . ثم يطلب من التلاميذ اكتشاف هذه الخواص . وإعطائهم الفرصة للوصول إلى تعريف عام للمجموعة .

٢ ــ عند معالجة الأيسومورفيزم بين المجموعات ــ يجب أن نقدم مواقف وأمثلة متعددة تتضمن مجموعات أيسومورفية ونترك الفرصة للتلاميذ لإكتشاف الأيسومورفيزم بين المجموعات بأنفسم ولكن تحت توجيه وإشراف المعلم وذلك قبل إعطاء الاصطلاحات أو التعاريف المجردة .

٣ ــ العمل على الربط بين المفاهيم الرياضية المجـــردة وتطبيقاتها فى المجالات المختلفة .

٤ ــ الاستفادة من تطور ونشأة المجموعات فى تدريسها .

ثانيا ـ أثر ما تقـدم على برامج اعـداد المعلم :

عند إعداد برامج إعداد المعلم يجب مراعاة ما يأتى :

١ ــ يجب أن تتضمن هذه البرامج دراسة تطبيقات الرياضيات فى العلوم المختلفة ولا يقتصر على الرياضيات التطبيقية الكلاسيكية والتى كانت تقتصر على الميكانيـكا .

٢ ــ يجب أن تتضمن برامج إعداد المعلم دراسة نشأة وتطور علم الرياضيات عامة وخواص ونظرية المجموعات خاصة ، حتى يشعر التلاميذ بالنمو الطبيعى للرياضيات وأنه لا يوجد ما يسمى رياضيات حديثة ورياضيات قديمة . ويشعروا بقيمة الاكتشافات الرياضية وكيف أن هذه الاكتشافات استغرقت زمنا طويلا وجهدا كبيراً من جانب العلماء والباحثين كما أنها أدت إلى حل الكثير من المشكلات العملية وساهمت مع غيرها فى تطوير المجتمع ورفاهية الإنسان .

٣ ــ يجب أن يدرس طلاب كليات إعداد المعلم بجميع تخصصاتهم مقررا دراسيا يوضح القيمة التطبيقية للرياضيات والأسس الرياضية والتركيب الرياضى فى ميادين تخصصهم ، حتى يشعروا بقيمة الرياضيات ودورها فى التقدم العلمى والتكنولوجى فى عصرنا هذا .

٤ ــ يجب تشجيع الدارسين فى كليات إعداد المعلم على البحث والاطلاع على كل جديد فى الرياضيات بما يكفل لهم استمرارية التعليم ويزيد من ثقافتهم وعدم الاقتصار على طريقة المحاضرة فى التدريس بالجامعة بل يجب أن تتنوع طريقة التدريس بالجامعة . وأن يكلف الطلاب بدراسة بعض الموضوعات ومناقشتها وإعداد بعض البحوث التى يعتمدون على أنفسهم فى إعدادها تحت إشراف وتوجيه الأستاذ واستعمال المكتبة .

ملخص لما فى هـذا البحث :

تعرفنا فى هذا البحث على المجموعات وخواصها ونظريتها، وعلى الايسومورفيزم بين المجموعات ثم قدمنا دراسة مختصرة عن نشأة المجموعات وتاريخها، وتطورها آملين أن تكون دافعا على استزادة المعلم وطالب كليات إعداد المعلم، من الثقافة حول مادة تخصصه . وقد أعطينا بعض الأمثلة لإستخدام المجموعات فى مجالات رياضية جبرية وهندسية داخل الفصل وخارجه . وبينا مدى الاستفادة من الايسومورفيزم . فإذا استطعنا اكتشاف ايسومورفيزم بين مجموعتين، عملنا على دراسة النظام الأسهل ثم عممنا نتائجنا على النظام الآخر . ولقد رأينا من الأمثلة التى ذكرناها، كيف أن تطبيقات استعمال المجموعات الايسومورفية توضح أن ما يمكن أن يكون صعبا فى لغة ما ربما يكون سهلا فى لغة أخرى (مثال المضاعفات والأسس) . كما أننا فى الفصل الأخير وضحنا قيمة استخدام المجموعات وخواصها والايسومورفيزم فى دراسة الكيمياء، وبينا كيف يمكن تصنيف الجزيئات الكيميائية عن طريق الايسومورفيزم بين المجموعات ومن ذلك تتضح لنا كيف يمكن أن تكون الطريقة الرياضية موفرة للمجهود والوقت والمال .

ومع أننا فى هذه الدراسة اقتصرنا على استعمالات المجموعات فى علم الرياضيات وفى أحد موضوعات الكيمياء . إلا أن نظرية المجموعات لا تقتصر على هذا الحد، وإنما لها استخدامات كثيرة فى مجالات مختلفة وخصوصا فى علم الفيزياء والميكانيكا الكمية والآلات الحاسبة . مما يجعل هذه النظرية لها قيمة تطبيقية عظيمة بالرغم من أنها نظرية مجردة .

وفى النهاية أوضحنا كيفية الاستفادة من نظرية المجموعات فى تطوير مناهج الرياضيات .

بحوث مقترحة :

تقترح الباحثة القيام بمزيد من الدراسات الخاصة بنظرية المجموعات وموضوعات رياضية أخرى . كالآتى :

١ ــ تطبيقات المجموعات فى مجالات أخرى مثل الفيزياء والاقتصاد .

٢ ــ تطبيقات موضوعات رياضية أخرى مثل المصفوفات والمتجهات فى المجالات العلمية والاقتصادية وغيرها .

REFERENCES

1. Birkhoff, G. and MacLane, S. "A Survey of Modern Algebra", MacMillan Company, New York 1958.
2. Cajori, F. "The History of Mathematics", MacMillan Company, 1931.
3. Cotton, Albert, "Chemical Applications of Group Theory", John Wiley, N.Y. 1971.
4. Courant, R. and Robbins, H. "What is Mathematics", Oxford University Press, 1947.
5. Eves, H. and Newson, C.V. "An Introduction to the Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics", Rinehart and Company, Inc., New Work 1958.
6. Levine Ira, Molecular Spectroscopy, John Wiley, N.Y. 1975.
7. Miller, G.A. "The collected Works of George Abram Miller", Vol. I, University of Illinois, Urbana, Illinois, 1935
8. Murrel, The Theory of the Electronic Spectra of Organic Molecules, Chapman and Hall, London, 1971.
9. Richardson, M. "Fundamentals of Mathematics", MacMi Company, New York, 1954.
10. Smith, D.E. "History of Modern Mathematics", John and Sons, New York, 1906.
11. "Enrichment Mathematics for High School", N.C.T.M. 28th Yearbook, Washington D.C., 1963.
12. "Insights into Modern Mathematics", N.C.T.M. 23rd Yearbook, Washington, D.C. 1957.
13. "Historical Topics for the Mathematics Classroom", N.C.T.M. 31st. Yearbook, Washington, D.C. 1969.

Periodicals :

Dean, R. "Group theory for school mathematics", The Mathematics Teacher, Feb. 1962.

Litvak, B. "History of group theory leading to the dev. of infinite abelian groups", M.T., Jan., 1964.

Miller, G.H. "The evolution of group theory", M.T., Jan., 1964.

Usiskin, Z., Applications of Groups and Isomorphic Groups to Topics in the Standard Curriculum", M.T., Feb. & March, 1975.

المـراجع العـربية :

١ ـ سـعد حسـنين وآخـرون :

المـدخل فى الرياضـيات الحـديثة ، الجـزء الأول (القـاهرة : دار المعـارف ١٩٧٤)٠

٢ ـ كمـال رياض يعقوب :

« الرياضيات الحديثة » الجزء الأول (القاهرة : دار المعارف ١٩٧٣)٠

٣ ـ معصومة كاظم وآخـرون :

« أساسيات تدريس الرياضيات الحـديثة » (القاهرة : دار المعارف ١٩٧٠)٠

رقم الايداع بدار الكتب المصرية
١٩٧٩/٤٦٢٧ م
الترقيم الــدولى
٩٧٧ ـ ٢٤٧ ـ ٨٢٥ ـ ٠

مطبعـــة دار نشر الثقــافة
٢١ شارع كامل صـدقي بالفجـالة
ت : ٩١١٦٠٧٦ ـ القاهرة