الباب التاسع

المصفوفات الرياضية

مقدمة وتعاريف :

يلاحظ أن كثير من المشاكل الاقتصادية الرياضية يمكن فهمها واستخدامها بسهولة فى حالة عرضها فى صورة مصفوفات رياضية والتى يمكن اعتبارها أنها تمثل طريقة مختصرة تستخدم تعبيرات سهلة لكتابة العلاقات الجبرية التى تتضمن كثير من المتغيرات . إذ من المعروف أن الجبر العادى باشاراته ودلالاته ورموزه يعتبر نظاماً مناسباً ومختصراً لعرض العلاقات المنطقية للاعداد ، أما المصفوفات الرياضية باشاراتها ورموزها فتعرض التطور الحديث لهذا الاختصار ، إذ أنه بواسطة اجراء عمليات معينة يمكن عرض النظام القديم فى صورة أكثر اختصارا ومؤدية إلى نفس النتائج المتحصل عليها سابقا .

ومن الواضح أن موضوع المصفوفات الرياضية محتوياً النظرية وتطبيقاتها هو موضوع كثير من المؤلفات المتخصصة إلا أننا سنناقش فى هذا الباب أساساً تلك النواحى من المصفوفات الرياضية التى نحتاجها لشرح الظواهر الاقتصادية كما سبق ذكره عند شرح نظرية سلوك المستهلك ونظرية المنشأة .

ولذلك يمكن تعريف المصفوفة الرياضية بأنها عبارة عن منظوم عمومى Rectangular Array لمجموعة من العناصر أو المكونات عادة ما تكون

فى صورة رموز أو أعداد مرتبة فى صفوف وأعمدة فى قوسين مربعين . ويحدد كل عنصر بموقعه فى المصفوفة الرياضية أو بمعنى آخر فى أى صف وعمود (بهذا الترتيب) يقع العنصر أو المكون . وعادة ما يشار إلى المصفوفة الرياضية بحرف كبير وإلى العناصر أو المكونات بنفس الحرف يذيل كل منها بدليل يبين موقعه . ومن ثم فإن المصفوفة الرياضية :

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} & \text{أ}_{٤١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{٤٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} & \text{أ}_{٤٣} \end{bmatrix}$$

وكذلك فى المصفوفة :

$$\text{و} = \begin{bmatrix} ١ & -٥ \\ ٢ & ١٤ \\ ٥ر٧ & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

نجد أن :

$\text{و}_{١١} = ١$ ، $\text{و}_{١٢} = ٢$

$\text{و}_{١٣} = ٥ر٧$ ، $\text{و}_{٢١} = -٥$

$\text{و}_{٢٢} = ١٤$ ، $\text{و}_{٢٣} = \text{صفر}$

ويمكن القول بصفة عامة أن المصفوفة الرياضية أ لها عناصر أو مكونات أ_{ij} حيث تمثل i الصف وتمثل j العمود .

وتعرف أيضاً المصفوفة الرياضية بحجمها أو ترتيبها أى بعدد صفوفها

وأعمدتها . ولذلك فإن المصفوفة أ السابقة تعرف بأنها مصفوفة ٣ × ٤ حيث أنها مكونة من ثلاثة صفوف وأربعة أعمدة ، وكذلك الحال فإن المصفوفة والموضحة بعاليه عبارة عن مصفوفة ٣ × ٢ . ويطلق على المصفوفة الرياضية التى لها عدد متساو من الصفوف والأعمدة « المصفوفة المربعة » square Matrix والتى لها أهمية خاصة كما سنرى ، كما يطلق على المصفوفة التى تتكون من عمود واحد « المصفوفة ذات العمود » Column Vector والمصفوفة التى تتكون من صف واحد « المصفوفة ذات الصف » Row Vector وكذلك يطلق على المصفوفة التى تتكون من صف واحد وعمود واحد « المعامل العددى » Scalar .

ويجب أن نشير الآن أن المصفوفة الرياضية ليس لها قيمة بداخلها أو فى حد ذاتها ولكن المصفوفة الرياضيه تمدنا ببساطة بوسيلة سهلة للإشارة إلى منظوم عمودى أو جدول أرقام أو رموز .

ويقال لمصفوفتين بأنهما متساويتين إذا كانت فقط كل العناصر أو المكونات فى المصفوفه الأولى مساويه لكل العناصر أو المكونات المناظرة فى المصفوفه الثانيه أى أن :

$$\text{أ} = \text{ب}$$

إذا كانت $\text{أ}_{ij} = \text{ب}_{ij}$ بالنسبه لكل i ، j أو بمعنى آخر إذا كانت $\text{أ}_{11} = \text{ب}_{11}$ ، $\text{أ}_{21} = \text{ب}_{21}$ ، . . . ، $\text{أ}_{\text{م ن}} = \text{ب}_{\text{م ن}}$. أى أنه يجب أن يكون كل عنصر فى المصفوفة أ متساو لنفس العنصر فى المصفوفه

ب وبنفس ترتيب العنصر . ومن الطبيعى فإن المصفوفتين يجب أن يكونا بنفس الترتيب .

ويطلق على العناصر أو المكونات التى تساوى أ$_{ji}$ « بالمكونات القطرية » Diagonal Elements حيث تقع هذه المكونات على القطر الرئيسى الذى يبدأ من أعلى اليمين إلى أدنى اليسار . كما يطلق على المصفوفة المربعة أ والتى فيها أ$_{ji}$ ≠ صفر وأن أ$_{ji}$ = صفر ، $i \neq j$ بالمصفوفة القطرية Diagonal Natrix . وكذلك يطلق على المصفوفة القطرية أ التى فيها أ$_{ii}$ = ١ بمصفوفة الوحدة أو المصفوفة المتطابقة ldentity Matrix ويرمز إليها بالرمز I . وتلعب المصفوفة المتطابقة نفس الدور الذى يلعبه المعامل العددى ١ . وإذا كانت كل عناصر أية مصفوفة (وليس من الضرورى أن تكون مصفوفة مربعة) عبارة عن أصفار فيطلق عليها المصفوفة الصفرية أو مصفوفة العدم Null Natrix .

ومن المصطلحات المستخدمة أيضاً هى تغيير Transpose المصفوفة أ أى جعل الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف ويرمز إليها بالرمز أَ .

أى أن :

أَ$_{ji}$ = أ$_{ji}$

فمثلا إذا كان لدينا :

$$أ = \begin{bmatrix} ١ & ٥- \\ ٢ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$$

فإن :

$$
\left[\begin{array}{ccc} ٤ & ٢ & ١ \\ ١ & ٢ & -٥ \end{array}\right] = \text{اَ}
$$

ويلاحظ أن :

$$(\text{اَ})' = \text{ا}$$

ويطلق على المصفوفة المربعة ، التي فيها اَ = ا بالمصفوفة المنتظمة أو المتماثلة Symmetric Matrix . ولذلك فإن :

$$
\left[\begin{array}{ccc} ٥ & ٢ & ٤ \\ ٩ & ٥ & ٢ \\ ٢٠ & ٩ & ٥ \end{array}\right] = \text{ظ}
$$

تمثل مصفوفة منتظمة أو متماثلة .

العمليات الجبرية :

سنناقش فى هذا البند العمليات الجبرية الأساسية للمصفوفات الرياضية.

ويمكن تعريف عملية جمع المصفوفات الرياضية كالتالى :

$$\text{ا} + \text{ب} = \text{حـ}$$

إذا كانت :

$$\text{ا}_{ji} + \text{ب}_{ji} = \text{حـ}_{ji}$$

وهكذا إذا كانت :

$$ا = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٩ \\ ٥- & ٤ \end{bmatrix} ، \quad ب = \begin{bmatrix} ٤ & ٢- \\ ١ & ٢ \\ ٥ & ٦- \end{bmatrix}$$

ومن ثم فإن :

$$ح = ا + ب = \begin{bmatrix} ٥ & \text{صفر} \\ ٥ & ١١ \\ \text{صفر} & ٢- \end{bmatrix}$$

ومن الواضح أنه من الضروري أن تكون المصفوفتين من نفس الترتيب حتى يمكن جمعهما أى لابد أن يكون لها نفس عدد الصفوف والأعمده . ومن خصائص جمع المصفوفات هى ما يأتى :

$$ا + ب = ب + ا$$

،

$$ا + (ب + ح) = (ا + ب) + ح$$

وتتبع نفس القواعد بالنسبة لطرح المصفوفات الرياضية . أما عملية ضرب المصفوفات الرياضية فيمكن تعريفها كالتالى :

$$ا ب = ح$$

إذا كانت :

$$ح_{ji} = \sum_{ك=1}^{م} ا_{ك i} ب_{ك j}$$

حيث م تمثل عدد الأعمدة للمصفوفة ا وعدد الصفوف للمصفوفة ب

أى أنه لإجراء عملية ضرب المصفوفات الرياضية يجب أن يكون عدد الأعمدة فى المصفوفه ا مساويا لعدد الصفوف فى المصفوفه ب .

وأن ترتيب المصفوفة ح سيساوى عدد الصفوف فى المصفوفة ا وعدد الأعمدة فى المصفوفة ب .

افترض مثلا أن :

$$ا = \begin{bmatrix} ٦ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٤ \end{bmatrix} \quad ، \quad ب = \begin{bmatrix} ٢- & ١ & ٤ \\ ٤ & ٥ & ١ \\ ٦ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$$

ويلاحظ أن ا لها ثلاثه أعمدة وأن ب لها ثلاثه صفوف ، ومن ثم فإن ا ، ب يمكن ضربهما . وبذلك تكون عناصر ح = ا + ب يمكن الحصول عليها كالتالى :

ح${}_{١١}$ = ا${}_{١١}$ ب${}_{١١}$ + ا${}_{٢١}$ ب${}_{١٢}$ + ا${}_{٣١}$ ب${}_{١٣}$

= ٢ × ٤ + ١ × ١ + ٦ × ١

= ١٥ .

ح${}_{٢١}$ = ا${}_{١١}$ ب${}_{٢١}$ + ا${}_{٢١}$ ب${}_{٢٢}$ + ا${}_{٣١}$ ب${}_{٢٣}$

= ٢ × ١ + ١ × ٥ + ٦ × ٢

= ١٩

⋮

ح${}_{٣٢}$ = ا${}_{١٢}$ ب${}_{٣١}$ + ا${}_{٢٢}$ ب${}_{٣٢}$ + ا${}_{٣٢}$ ب${}_{٣٣}$

= (٤ × −٢) + ٢ × ٤ + ١ × ٦

= ٦

وتكون المصفوفة الناتجة حـ التى ترتيبها ٢ × ٣ كالتالى :

$$حـ = \begin{bmatrix} ١٥ & ١٩ & ٣٦ \\ ١٩ & ١٦ & ٦ \end{bmatrix}$$

ويلاحظ أن خصائص ضرب المصفوفات الرياضية هى كالتالى :

ا ب ≠ ب ا

،

(ا ب) حـ = ا (ب حـ)

،

ا (ب + حـ) = ا ب + ا حـ

،

(ا + ب) حـ = ا حـ + ب حـ

وهناك إجراء بسيط يساعد فى معرفة إمكان إجراء عملية ضرب المصفوفات وتحديد ترتيب مصفوفه حاصل الضرب الأخيرة . فلو وضعنا تحت كل مصفوفه ترتيبها (الصف فالعمود) كالتالى:

ا × ب × حـ = ء

(م × ن) (ن × ك) (ع × ل)

فإنه لإجراء عمليه الضرب يجب أن تكون : ن = ن ، ك = ع وأن ترتيب المصفوفه ء سيساوى (م × ل) . يلاحظ أيضاً أن حاصل ضرب مصفوفه رياضيه فى مصفوفه ذات عمود Column Vector سيكون عبارة عن مصفوفه ذات عمود وأن حاصل ضرب مصفوفه ذات صف

ومصفوفة رياضيه ستكون مصفوفة ذات صف وأن حاصل ضرب مصفوفة ذات صف فى مصفوفة ذات عمود ستكون عبارة عن معامل عددى Scalar.

وتعرف عملية ضرب المعامل العددى بضرب كل عنصر أو مكون فى المصفوفة الرياضية بقيمة ثابتة (المعامل العددى) . ويجب ملاحظة أن هذه الحالة لا تمثل حالة خاصة من ضرب المصفوفات ولكن إذا ضربنا مصفوفة رياضية بهذا المعامل العددى فإن جميع مكونات أو عناصر المصفوفة يجب ضربها بهذا المعامل .

ومن المهم أن نوضح أنه لم تظهر طريقة اللآن تمكننا من قسمة المصفوفات الرياضية ولكن سنستخدم بدلا منها مفهوم معكوس المصفوفة الرياضية Inversion of Matrices . ويعرف معكوس المصفوفة المربعة ا والذى سنرمز إليه بالرمز ا$^{-1}$ بحيث يكون :

$$\text{ا}\,\text{ا}^{-1} = I$$

أى أن التعبير ا$^{-1}$ الذى يمثل معكوس المصفوفة الرياضية ا إذا ضربناه فى ا سيعطينا المصفوفة المتطابقة I

ويجب ملاحظه أن :

(١) $\text{ا}\,\text{ا}^{-1} = \text{ا}^{-1}\,\text{ا}$

(٢) إذا كانت ا مربعه فإن ا$^{-1}$ وحيدة Unique .

(٣) إذا كانت ا غير مربعة فإن يمكن إيجاد المصفوفة ب بحيث

ا ب = I ولكن ب لا تكون وحيدة Unique ولا يطلق عليها المعكوس وليس مجالنا فى هذا المؤلف استخدام هذه المصفوفة .

(٤) إذا كانت حـ = ا ب (المصفوفه كلها مربعه) فإن .

$$حـ^{-1} = ب^{-1} ا^{-1}$$

(٥) إذا كانت ب = $ا^{-1}$ فإن ب َ = $(اَ)^{-1}$

(٦) إذا كانت ا متماثلة Summetric فإن $ا^{-1}$ متماثلة أيضاً . وسنناقش إجراءات تحديد معكوس المصفوفة الرياضية لطرلها فى بند مستقل .

المعادلة المستقيمة :

إن المعالجات الرياضية التى تتضمن نظم المعادلات المستقيمة الآتية يمكن القيام بها باستخدام التعاريف والعمليات الجبرية الخاصه بالمصفوفات السابق مناقشتها فإذا فرضنا أن ا تمثل المصفوفه الرياضيه ن × ن وأن س ، ب تمثل كل منها مصفوفة ذات عمود واحد مكونة من ن من العناصر لذلك فإن المعادلة الآتية :

$$ا \underline{س} = \underline{ب}$$

تمثل نظاماً مكوناً من ن من المعادلات المستقيمة فى ن من المتغيرات غير المعروفة $س_i$ بالشكل الآتى :

$$\text{ا}_{11}\text{س}_{1} + \text{ا}_{21}\text{س}_{2} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}1}\text{س}_{\text{ن}} = \text{ب}_{1}$$

$$\text{ا}_{12}\text{س}_{1} + \text{ا}_{22}\text{س}_{2} + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}2}\text{س}_{\text{ن}} = \text{ب}_{2}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\text{ا}_{\text{ن}1}\text{س}_{1} + \text{ا}_{\text{ن}2}\text{س}_{2} + \cdots + \text{ا}_{\text{نن}}\text{س}_{\text{ن}} = \text{ب}_{\text{ن}}$$

وهكذا نجد أن المصفوفة ا تمثل المعاملات للمتغيرات فى المعاملات ويطلق عليها مصفوفة المعاملات . ومن البديهى يمكن حل هذا النظام من المعادلات بالجبر العادى عن طريق حذف المتغيرات بسلسلة من ضرب وجمع المعادلات حتى نصل إلى معادلة تحتوى على متغير واحد فقط ثم التعويض لإيجاد قيم باقى المتغيرات .

ولكن باستخدام المصفوفات الرياضية يمكن حل مصفوفة المعادلات

$$\text{ا}^{-1}\,\text{ا}\,\underline{\text{س}} = \text{ا}^{-1}\,\underline{\text{ب}}$$

$$I\,\underline{\text{س}} = \text{ا}^{-1}\,\underline{\text{ب}}$$

$$\underline{\text{س}} = \text{ا}^{-1}\,\underline{\text{ب}}$$

إلا إننا سنرى أن ذلك لن يساعد حقيقة فى الحل الحقيقى للمصفوفة $\underline{\text{س}}$ حيث ان إيجاد ا^{-1} يتضمن بصفة عامة مجهود يماثل المجهود المطلوب فى حل المعادلات بالطريق العادى ومع ذلك حيث أنه يمكن استخدام الرموز سنجد أن الحل يمكن ان يكون نافعاً . كما يلاحظ أنه إذا كان لدينا مجموعات مختلفة من المعادلات .

$$\text{ا}\,\underline{\text{س}} = \underline{\text{ب}}$$

$$\text{ا}\,\underline{\text{ص}} = \underline{\text{حـ}}$$

$$\text{ا}\,\underline{\text{ع}} = \underline{\text{ء}}$$

فسنحتاج إلى معكوس المصفوفة ا فقط مرة واحدة . أى أن :

$$\underline{\text{س}} = \text{ا}^{-1}\,\underline{\text{ب}}$$

$$\underline{\text{ص}} = \text{ا}^{-1}\,\underline{\text{حـ}}$$

$$\underline{\text{ع}} = \text{ا}^{-1}\,\underline{\text{ء}}$$

معكوس المصفوفات الرياضية : Inversion of Matrices

أوضحنا سلفا أن تعريف معكوس المصفوفة الرياضية لا يتضمن فى حد ذاته إجراءات حسابية . وتقترح أحد النظريات الأساسية الخاصة بوجود معكوس المصفوفة الرياضية تلك الإجراءات (طريقة العوامل المشتركة Cofactors) ولو أنها مطولة بعض الشىء. ولذلك يوجد عدد كبير من ألجورثيم Algorithms لحساب معكوس المصفوفة الرياضية . وفى الحقيقة يمكن القول أن Algorithm لحساب معكوس المصفوفة الرياضية عبارة عن إجراء ينتج مصفوفة التى سيكون لها طبيعياً الخصائص الأساسية لمعكوس المصفوفة الرياضية . وفى الحقيقة . لا يمكن ضمان هذا المعكوس، فمثلا فإن الأخطاء التقريبية Ronudoff Errors تنتج دائماً مصفوفة والتى لن يكون لها خصائص معكوس المصفوفة الرياضية .

وسنعرض الآن المعكوس الألجوريثمى Inversion Algorithm ويعرف بطريقة دوليتل المختصرة Abbreviated Doolittle والتى يقتصر تطبيقها على المصفوفات المتماثلة . ويجب ملاحظة أن معظم مشاكل الانحدار يجرى حلها على العقول الالكترونية ذات السرعة العالية والتى بصفة عرضية لا تستخدم عادة طريقة دوليتل المختصرة . ومع ذلك فإننا توصى بحل بعض المشاكل باليد باستخدام هذه الطريقة ، وسنرى أن طريقة دوليتل المختصرة تؤدى إلى نتائج مشجعة مثل المحصلات الجانبية by — Products ومن أمثلة ذلك حل معادلة المصفوفات .

$$ا \underline{س} = \underline{ص}$$

والتى يكون حلها عبارة عن :

$$\underline{س} = ا^{-1} \underline{ص}$$

وسنوضح الآن هذه الإجراءات بالنسبة للمصفوفات ٤ × ٤ وليست هناك صعوبة بالنسبة للمصفوفات ذات الأحجام الكبيرة . فإذا رمزنا إلى عناصر المصفوفة ا بالرمز a_{ji} وإلى عناصر المصفوفة $\underline{ص}$ بالرمز $ا_{اص}$ أى العمود الصادى للمصفوفة ا . ويكتب الجزء الأعلى على اليمين لهذه المصفوفة على ورقة عادية كما هو موضح بعد مع عمود المجموع للمراجعة ويرمز إليه $ا_{ح_i}$. ويلاحظ أن هذا العمود يمثل مجموع كل الأعمدة للمصفوفة ا متضمنا العناصر التى لم تكتب على الورقة العادية . ويمكن بعد ذلك اتباع الإجراءات المبينة . ومن الواضح أن عمود المراجعة قد

حسب بنفس الصورة التى تم بها حسب العناصر فى الجدول . ويلاحظ أن المراجعة هى أن مجاميع الصفوف الموضحة مساوية (عرضة إلى خطأ التقريب Roundoff Error) للعناصر المحسوبة . فإذا لم تكن كذلك فإن ذلك يعنى وجود خطأ حسابى .

ولذلك فإن هذه الإجراءات هى عبارة عن تحويل المجموعة الأصلية للمعادلات إلى مجموعة جديدة من المعادلات ولكن بمصفوفة معاملات مثلثيه Triangular Coefficient Matrix . وكما هو موضح من الورقه العادية فإن مجموعه المعادلات بمعاملاتها هى :

س١ + ب٢١ س٢ + ب٣١ س٣ + ب٤١ سص = ب١ص

س٢ + ب٣٢ س٣ + ب٤٢ سص = ب٢ص

س٣ + ب٤٣ سص = ب٣ص

سص = ب٤ص

ومن الواضح أنه ليست هناك صعوبة للحصول على الحل للمتغيرات س .

س٤ = ب٤ص

س٣ = ب٣ص — ب٤٣ سص

س٢ = ب٢ص — ب٣٢ س٣ — ب٤٢ صص ، الخ

وسنرى مؤخرا أنه من الضرورى دائما الحصول فقط على الحل ولكن

طبقا لهذه الإجراءات فإننا نحصل على الحل دون الحصول على معكوس المصفوفة الرياضية.

وللحصول على معكوس المصفوفة الرياضية والتي سنرمز له بالرمز ح والذى يتكون من العناصر ح$_{ji}$ سنتبع الإجراءات التالية. ويجب ملاحظة أن ح يجب أن تكون متماثلة ومن ثم فإنه يجب حساب النصف الأيمن إلى أعلى فقط.

$$\text{ح}_{\text{٤٤}} = \frac{\text{١}}{\text{أ}_{\text{٤٤}}}$$

$$\text{ح}_{\text{٤٣}} = \text{ح}_{\text{٤٤}}\ \text{ب}_{\text{٤٣}}$$

$$\text{ح}_{\text{٤٢}} = \text{ح}_{\text{٤٣}}\ \text{ب}_{\text{٣٢}} - \text{ح}_{\text{٤٤}}\ \text{ب}_{\text{٤٢}}$$

$$\text{ح}_{\text{٤١}} = \text{ح}_{\text{٤٢}}\ \text{ب}_{\text{٢١}} - \text{ح}_{\text{٤٣}}\ \text{ب}_{\text{٢١}} - \text{ح}_{\text{٤٤}}\ \text{ب}_{\text{٤١}}$$

برنامج طريقة دوليتل المختصرة :

(الجزء المتقدم Forward Portion)

المصفوفة					المراجعة
أ١١	أ٢١	أ٣١	أ٤١	أ١ص	أ١ح
	أ٢٢	أ٣٢	أ٤٢	أ٢ص	أ٢ح
		أ٣٣	أ٤٣	أ٣ص	أ٣ح
			أ٤٤	أ٤ص	أ٤ح
أَ١١	أَ٢١	أَ٣١	أَ٤١	أَ١ص	أَ١ح
ب١١	ب٢١	ب٣١	ب٤١	ب١ص	ب١ح
	أَ٢٢	أَ٣٢	أَ٤٢	أَص	أَ٢ح
	ب٢٢	ب٣٢	ب٤٢	ب٢ص	ب٢ح
		أَ٣٣	أَ٤٣	أَ٣ص	أَ٣ح
		ب٣٣	ب٤٣	ب٣ص	ب٣ح
			أَ٤٤	أَ٤ص	أَ٤ح
			ب٤٤	ب٤ص	ب٤ح

المعادلات :

$$\text{ا}'_{\text{١}j} = \text{ا}_{\text{١}j}$$

$$\text{ب}_{\text{١}j} = \text{ا}'_{\text{١}j} / \text{ا}'_{\text{١١}}$$

$$\text{ا}'_{\text{٢}j} = \text{ا}_{\text{٢}j} \ \text{ا}'_{\text{٢١}} \text{ب}_{\text{١}j}$$

$$\text{ب}_{\text{٢}j} = \text{ا}'_{\text{٢}j} / \text{ا}'_{\text{٢٢}}$$

$$\text{ا}'_{\text{٣}j} = \text{ا}_{\text{٣}j} - \text{ا}'_{\text{٣١}} \text{ب}_{\text{١}j} - \text{ا}'_{\text{٣٢}} \text{ب}_{\text{٢}j}$$

$$\text{ب}_{\text{٣}j} = \text{ا}'_{\text{٣}j} / \text{ا}'_{\text{٣٣}}$$

$$\text{ا}'_{\text{٤}j} = \text{ا}_{\text{٤}j} - \text{ا}'_{\text{٤١}} \text{ب}_{\text{١}j} - \text{ا}'_{\text{٤٢}} \text{ب}_{\text{٢}j} - \text{ا}'_{\text{٤٣}} \text{ب}_{\text{٣}j}$$

$$\text{ب}_{\text{٤}j} = \text{ا}'_{\text{٤}j} / \text{ا}'_{\text{٤٤}}$$

ملاحظات :

١ — ا_{ji} ، $j < i$ = صفر بالتعريف . ولذلك لم تحسب هذه القيمة كما توضح .

٢ — $\text{ب}_{ii} = \text{١}$ ، لكل i

٣ — وفى كل المصفوفات الإحصائية $\text{ا}'_{ii} \geq$ صفر .

ويلاحظ أن الصف الأخير فى $\text{ح} = \text{ا}^{-1}$. وبالتعريف الخاص بمعكوس المصفوفة الرياضية فإن مجموع حواصل الضرب لهذه العناصر مع العناصر فى الصف الأخير (أو العمود حيث أن المصفوفات متماثلة) يجب أن تساوى واحد صحيح وإلا فإن هناك خطأ حسابيا .

$$\text{ح}_{٣٣} = ١ / \text{أ}'_{٣٣} - \text{ح}_{٤٣}\,\text{ب}_{٤٣}$$

$$\text{ح}_{٣٢} = - \text{ح}_{٣٣}\,\text{ب}_{٣٢} - \text{ح}_{٤٣}\,\text{ب}_{٤٢}$$

$$\text{ح}_{٣١} = - \text{ح}_{٣٢}\,\text{ب}_{٢١} - \text{ح}_{٣٣}\,\text{ب}_{٣١} - \text{ح}_{٤٣}\,\text{ب}_{٤١}$$

وللمراجعة مرة أخرى عن طريق الضرب في الصف الثالث للمصفوفة ا

$$\text{ح}_{٢٢} = ١ / \text{أ}'_{٢٢} - \text{ح}_{٣٢}\,\text{ب}_{٣٢} - \text{ح}_{٤٢}\,\text{ب}_{٤٢}$$

$$\text{ح}_{٢١} = - \text{ح}_{٢٢}\,\text{ب}_{٢١} - \text{ح}_{٣٢}\,\text{ب}_{٣١} - \text{ح}_{٤٢}\,\text{ب}_{٤١}$$

وللمراجعة مرة أخرى عن طريق الضرب بالعناصر في الصف الثاني للمصفوفة ا .

$$\text{ح}_{١١} = ١ / \text{أ}'_{١١} - \text{ح}_{٢١}\,\text{ب}_{٢١} - \text{ح}_{٣١}\,\text{ب}_{٣١} - \text{ح}_{٤١}\,\text{ب}_{٤١}$$

وكذلك يمكن المراجعة عن طريق الضرب بالعناصر في الصف الأول للمصفوفة ا . وليس بعيدا عن الاحتمال (رغم إمكان حدوثه) أن المراجعات الموضحة بعاليه تسمح باكتشاف الأخطاء الحسابية ولكن ننصح بالمراجعة إذا كانت العناصر غير القطرية للمصفوفات ح ا تساوي صفرا (عرضة إلى الخطأ التقريبي) .

عمليات مصفوفات التجزئة : Partitioned Matrices

يمكن اعتبار أن المصفوفة الرياضية تشتمل على مصفوفات فرعية ، أو بمعنى آخر يمكن القول أن المصفوفة الرياضية يمكن تجزئتها . ولذلك فإن المصفوفة الرياضيه الآتيه يمكن تجزئتها كما هو موضح :

ا = $\left[\begin{array}{c:ccc} ٦ & ٥ & ٩ & ٤ \\ ٥ & ٤ & ٢ & ١ \\ \hline ١ & ٢ & ٦ & ٩ \end{array}\right]$ ، ب = $\left[\begin{array}{cc} ٢ & ٤ \\ ٥ & ١ \\ ٣ & ٣ \\ \hdashline \text{صفر} & ٣ \end{array}\right]$

ويمكن الإشارة إلى المصفوفات الفرعية للمصفوفة ا بالرمز م وللمصفوفات الفرعية للمصفوفة ب بالرمز ك لإيضاح موقع المصفوفة الفرعية كما لو كانت عنصرا مع عدم ضرورة حذف المذيلات .

م$_{١١}$ = $\begin{bmatrix} ٥ & ٩ & ٥ \\ ٤ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$

م$_{٢١}$ = $\begin{bmatrix} ٦ \\ ٥ \end{bmatrix}$

ك$_{٢}$ = (٣ ، صفر) الخ .

ويمكن القيام بكل عمليات المصفوفات الرياضية الكاملة باستخدام المصفوفات الفرعية كما لو كانت عناصر ، وستكون النتائج مشابهة كما لو كان القيام بها على المصفوفات الكاملة . ولذلك فإن المصفوفتين ا ، ب تصلحان لعملية الضرب وكذلك المصفوفات الفرعية . ومن ثم فإن .

ص = $\left[\begin{array}{c} \text{م}_{١١}\text{ك}_{١} + \text{م}_{٢١}\text{ك}_{٢} \\ \hdashline \text{م}_{١٢}\text{ك}_{١} + \text{م}_{٢٢}\text{ك}_{٢} \end{array}\right]$

ونود ملاحظة أننا نرغب فى تجزئة المصفوفة المربعة إلى أربعة مصفوفات فرعية بحيث تكون المصفوفات الفرعية على القطر الرئيسى أيضا مربعة أى أن

$$\begin{bmatrix} \text{م}_{٢١} & \text{م}_{١١} \\ \text{م}_{٢٢} & \text{م}_{١٢} \end{bmatrix} = \text{ا}$$

حيث م$_{١١}$ ، م$_{٢٢}$ مصفوفات مربعة . وباستخدام هذه التجزئة سنبحث خصائص معكوس المصفوفة ا وتطبيقاتها لنظم المعادلات المستقيمة .

فإذا رمزنا إلى :

$$\begin{bmatrix} \text{ك}_{٢١} & \text{ك}_{١١} \\ \text{ك}_{٢٢} & \text{ك}_{١٢} \end{bmatrix} = \text{ب} ، \begin{bmatrix} \text{م}_{٢١} & \text{م}_{١١} \\ \text{م}_{٢٢} & \text{م}_{١٢} \end{bmatrix} = \text{ا}$$

حيث ا ، ب ، م$_{١١}$ ، م$_{١٢}$ ، ك$_{١١}$ ، ك$_{٢٢}$ مصفوفات مربعة ، ا ، ب ، م$_{١١}$ ، ك$_{١١}$ ، ... ، إلخ من نفس الترتيب ، ويلاحظ أنه إذا كانت ب = ا$^{-١}$ فإن :

$$I = \text{ا ب}$$

أو

$$\begin{bmatrix} \text{صفر} & I \\ I & \text{صفر} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ك}_{٢١} & \text{ك}_{١١} \\ \text{ك}_{٢٢} & \text{ك}_{١٢} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{م}_{٢١} & \text{م}_{١١} \\ \text{م}_{٢٢} & \text{م}_{١٢} \end{bmatrix}$$

وباستخدام القواعد العادية لضرب المصفوفات الرياضية فإن :

$$I = \text{ك}_{١٢}\,\text{م}_{٢١} + \text{ك}_{١١}\,\text{م}_{١١}$$

$$\text{م}_{11}\,\text{ك}_{21} + \text{م}_{21}\,\text{ك}_{22} = \text{صفر}$$

$$\text{م}_{11}\,\text{ك}_{11} + \text{م}_{22}\,\text{ك}_{12} = \text{صفر}$$

$$\text{م}_{12}\,\text{ك}_{21} + \text{م}_{22}\,\text{ك}_{22} = 1$$

ويمكن حل هذه المعادلات الأربعة لقيم ك_{11} ، ك_{21} ، ك_{12} ، ك_{22} (ومن ثم ب) كالتالى :

$$\text{ك}_{11} = (\text{م}_{11} - \text{م}_{21}\,\text{م}_{22}^{-1}\,\text{م}_{12})^{-1}$$

،

$$\text{ك}_{22} = (\text{م}_{22} - \text{م}_{12}\,\text{م}_{11}^{-1}\,\text{م}_{21})^{-1}$$

،

$$\text{ك}_{12} = -\,\text{م}_{22}^{-1}\,\text{م}_{12}\,\text{ك}_{11}$$

،

$$\text{ك}_{21} = -\,\text{م}_{11}^{-1}\,\text{م}_{21}\,\text{ك}_{22}$$

ويجب ملاحظة أن إيجاد المعكوس بالتجزئة لن ينتج وفر فى زمن العقل الالكترونى (سواء باليد أو توماتيكيا) ولذلك لا ننصح باستخدامها كطريقة للحساب فيما عدا :

١ — إذا كانت المصفوفة كلها كبيرة جدا لدرجة يمكن تناولها أو تخزينها فى العقل الالكترونى .

٢ — وإذا كانت أو إذا كانت المصفوفة الرياضية لها خصائص معينة أو أنماط معينة . فمثلا إذا كانت م_{12} = صفر فإن إيجاد المعكوس بالتجزئة يصبح أكثر سهولة .

ومع ذلك فإننا نرغب فى تطبيقات التجزئة للمصفوفات إلى نظم المعادلات المستقيمة . وبصفة خاصة سندرس التأثير على حل ذلك النظام إذا حذفنا معادلات ومتغيرات مختلفة من النظام .

افترض أن لدينا الحل لكل النظام ($\text{ن} \times \text{ن}$) أى لدينا المعادلة :

$$\text{أ}\,\underline{\text{س}} = \underline{\text{ب}}$$

والحـل :

$$\underline{\text{س}} = \text{أ}^{-1}\,\underline{\text{ب}}$$

ونود الآن إيجاد الحـل للمصفوفة الفـرعية :

$$\text{م}_{11}\,\underline{\text{س}}_{1}^{*} = \underline{\text{ب}}_{1}$$

وبـكلام آخر ، نرغب فى إيجاد م_{11}^{-1} بدون إيجاد معـكوس م_{11} مباشرة . ويلاحظ أن الحل $\underline{\text{س}}_{1}^{*}$ لن يساوى الجزء الأول للمصفوفة س ، أى $\underline{\text{س}}_{1}$. وباستخدام معادلة معكوس التجزئة فإن :

$$\text{ك}_{11} = (\text{م}_{11} - \text{م}_{21}\,\text{م}_{22}^{-1}\,\text{م}_{12})^{-1}$$

والتى يمـكن استنتاج التحويل Converse

$$\text{م}_{11} = (\text{ك}_{11} - \text{ك}_{21}\,\text{ك}_{22}^{-1}\,\text{ك}_{12})^{-1}$$

ومن ثم :

$$\text{م}_{11}^{-1} = \text{ك}_{11} - \text{ك}_{21}\,\text{ك}_{22}^{-1}\,\text{ك}_{12}$$

تمثل تعبيرا يتضمن معـكوس ك_{22} فقط . ويمثل ذلك تخفيضا كافيا فى الحساب إذا كانت م_{22} (ومن ثم ك_{22}) صغيرة . وبصفة خاصة افترض

الحالة التى يكون فيها ترتيب $م_{٢٢}$ (ومن ثم $ك_{٢٢}$ ، $\underline{ب}_{٢}$ ، $\underline{س}_{٢}$) هو (١ × ١) أى معاملات عدديا Scalar . ولذلك فإن :

$ك_{١٢}$ هى [(ن — ١) × ١] مصفوفة ذات عمود واحد ويشار إليها بالرمز $\underline{ب}_{٢١}$ بعناصر $ب_{ji}$

، $ك_{١٢}$ هى [١ × (ن — ١)] مصفوفة صف واحد ويشار إليها بالرمز $\underline{ب}_{١٢}$ بعناصر $ب_{jj}$

، $ك_{٢٢}$ معاملا عدديا ويشار إليه بالرمز $ب_{نن}$ والتى معكوسها هو

$١ / ب_{نن}$

وأصبح معادلة $م_{١١}^{-١}$ الآن هى :

$$م_{١١}^{-١} = ك_{١١} — ١/ب_{نن} [\underline{ب}_{٢١} \underline{ب}_{١٢}]$$

وكذلك العناصر الفردية للمعكوس $م_{١١}^{-١}$ يشار إليه بالرمز .

$ب_{ji}^{*-١}$ ستكون .

$$ب_{ji}^{*-١} = ب_{ji} — (ب_{ji} ب_{نj}) / ب_{نن}$$

وهى معادلة سهلة جدا فى حسابها .

ويمكن كذلك توفير إجراءات حسابية للحصول على الحل $\underline{س}^{*}$ للمعادلة :

$$م_{١١} \underline{س}_{١}^{*} = \underline{ب}_{١}$$

ونعرض الآن طريقة اشتقاق هذا الإجراء بالتفصيل لتوضيح بعض مبادىء العمليات الجبرية للمصفوفات . فمثلا سبق أن كان لدينا .

$$\underline{\text{س}}_{1}^{*} = \text{م}_{11}^{-1}\,\underline{\text{ب}}_{1}$$

$$= (\text{ل}_{11} - \text{ل}_{21}\,\text{ل}_{22}^{-1}\,\text{ل}_{12})\,\underline{\text{ب}}_{1}$$

$$= \text{ل}_{11}\,\underline{\text{ب}}_{1} - \text{ل}_{21}\,\text{ل}_{22}^{-1}\,\text{ل}_{12}\,\underline{\text{ب}}_{1}$$

وبجمع وطرح $\text{ل}_{21}\,\underline{\text{ب}}_{2}$ نكتب

$$\underline{\text{س}}_{1}^{*} = \text{ل}_{11}\,\underline{\text{ب}}_{1} + \text{ل}_{21}\,\underline{\text{ب}}_{2} - \text{ل}_{21}\,\underline{\text{ب}}_{2} - \text{ل}_{21}\,\text{ل}_{22}^{-1}\,\text{ل}_{12}\,\underline{\text{ب}}_{1}$$

ولكن من حل النظام كله نعرف أن :

$$\underline{\text{س}}_{1} = \text{ل}_{11}\,\underline{\text{ب}}_{1} + \text{ل}_{21}\,\underline{\text{ب}}_{2}$$

ومن ثم يمكن كتابة

$$\underline{\text{س}}_{1}^{*} = \underline{\text{س}}_{1} - \text{ل}_{21}\,(\underline{\text{ب}}_{2} + \text{ل}_{22}^{-1}\,\text{ل}_{12}\,\underline{\text{ب}}_{1})$$

ويمكن تبسيط التعبير بضرب العناصر داخل القوسين فى $(\text{ل}_{22}^{-1}\,\text{ل}_{22})$ $= I$. ومن ثم فإن :

$$\underline{\text{س}}_{1}^{*} = \underline{\text{س}}_{1} - \text{ل}_{21}\,(\text{ل}_{22}^{-1}\,\text{ل}_{22}\,\underline{\text{ب}}_{2} + \text{ل}_{22}^{-1}\,\text{ل}_{22}\,\text{ل}_{22}^{-1}\,\text{ل}_{22}\,\underline{\text{ب}}_{1})$$

وبتحليل ل_{22}^{-1} فإن :

$$\underline{\text{س}}_{1}^{*} = \text{س}_{1} - \text{ل}_{21}\,\text{ل}_{22}^{-1}\,(\text{ل}_{22}\,\underline{\text{ب}}_{2} = \text{ل}_{22}\,\text{ل}_{22}^{-1}\,\text{ل}_{12}\,\underline{\text{ب}}_{1})$$

والكمية $ل_{٢٢} ل^{-١}_{٢٢} = ١$ والتي لا نحتاج إليها . ومن ثم فإن :

$$\underline{س}^{*}_{١} = \underline{س}_{١} - ل_{٢١} ل^{-١}_{٢٢} (ل_{٢٢} \underline{ب}_{٢} + ل_{١٢} ب_{١})$$

والآن ، فإن الجزء الثاني لحل نظام المعادلات كله

$$\underline{س}_{٢} = ل_{١٢} \underline{ب}_{١} + ل_{٢٢} \underline{ب}_{٢}$$

والتي تمثل الكمية داخل القوسين . ومن ثم فإن :

$$\underline{س}^{*} = \underline{س}_{١} - ل_{٢١} ل^{-١}_{٢٢} \underline{س}_{٢}$$

وبمعنى آخر يعطى هذا التعبير الحل «الجزئي» Partial Solution الجديد في صورة الحل الكامل « Full Solution » وفي الحالة التي يكون فيها $ل_{٢٢}$ معاملا عدديا يكون لدينا :

$$س^{*}_{١} = س_{i} - ب_{iه} س_{ه} / ب_{هه}$$

والتي يمكن مشاهدة أن لها نفس الشكل كمعادلات $ب^{*}_{ji}$

مثال :

بافتراض أن لديك نظام المعادلات في الصورة $ا \underline{س} = \underline{ب}$ حيث

$$ا = \begin{bmatrix} ٢ & -١ & صفر \\ -١ & ٤ & ٣ \\ صفر & ٣ & ٣ \end{bmatrix} ، \quad \underline{ب} = \begin{bmatrix} ٦ \\ ٧ \\ ٩ \end{bmatrix}$$

والتي منه يمكن الحصول على :

$$ا^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & ١ & -١ \\ ١ & ٢ & -٢ \\ -١ & -٢ & \frac{٧}{٣} \end{bmatrix} ، \quad \underline{س} = \begin{bmatrix} ٤ \\ ٢ \\ ١ \end{bmatrix}$$

ونرغب فى معرفة الحل لقيم $س_١$ ، $س_٢$ فقط باستخدام المعادلتين الأولتين . أى :

$$\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س_١ \\ س_٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ \\ ٧ \end{bmatrix}$$

وباستخدام المعادلات المختزلة نحتاج إلى :

$$ب_{٢١} = \begin{bmatrix} -١ \\ -٢ \end{bmatrix} ، \quad ب_{١٢} = \begin{bmatrix} -١ & -٢ \end{bmatrix}$$

$$، \quad ب_{٢٢} = \begin{bmatrix} ٣/٧ \end{bmatrix}$$

ومن ثم فإن :

$$ب^*_{١١} = ب_{١١} - ب_{٣١}\, ب_{١٢} / ب_{٣٣}$$

$$= ١ - \frac{(-١)(-١)}{٣/٧} = \frac{٤}{٧}$$

$$= ٢ - (-١)(-١)/(٣/٧) = \tfrac{٤}{٧}$$

$$ب^*_{٢١} = ب_{٢١} - ب_{٣١}\, ب_{٣٣} / ب_{٣٣}$$

$$= ١ - (-١)(-٢)/(٣/٧) = \tfrac{١}{٧} ، \ldots ، \text{الخ}$$

وتكون عناصر مصفوفة الحل ($\underline{س}_١$) هى :

$$س^*_١ = س_١ - ب_{٣١}\, س_٣ / ب_{٣٣}$$

$$= ٤ - (-١)(١)/(٣/٧)$$

$$= ٣١/٧ ، \ldots ، \text{الخ}$$

وتكون النتائج النهائية هى :

$$م^{-1}_{11} = ك^{*}_{11} = \begin{bmatrix} ٧/١ & ٧/٤ \\ ٧/٢ & ٧/١ \end{bmatrix}$$

$$، \qquad \underline{س}^{*} = \begin{bmatrix} ٧/٢١ \\ ٧/٢٠ \end{bmatrix}$$

معادلات الدرجة الثانية : Quadratic Forms

إذا كان لدينا مصفوفة متماثلة أ (ن × ن) ومصفوفة ذات ترتيب واحد ص فإنه يمكن تعريف معادلة الدرجة الثانية كالآتى :

$$ل = \underline{ص}'\ أ\ \underline{ص}$$

والتى يمكن كتابتها جبريا كالآتى :

$$ل = \sum_{i} \sum_{j} أ_{ji}\ ص_{i}\ ص_{j}$$

أو

$$ل = \sum أ_{ji}\ ص^{2}_{i} + ٢ \sum_{j<i} أ_{ji}\ ص_{i}\ ص_{j}$$

وتمثل ذلك فقط مجموع كل التوليفات الممكنة المربعة وحواصل الضرب Cross Products للكمية $ص_{i}$ بأوزان معينة تعطى فى مصفوفة أ . وإذا كانت أ تمثل مصفوفة قطريه Diagonal Matrix فإن الشكل التربيعى Quadratic Form هو مجموع المربعات .

وتوجد فئة أو مجموعة من المصفوفات المتماثلة يطلق عليها المصفوفات الموجبة المحددة Positive Definite Matrices بحيث تكون

ل موجبة لأى (ليست أصلية) مصفوفة ذات ترتيب واحد ص . ولسوء الحظ لا توجد اختبارات بسيطة لهذه الخاصية ، وأحد هذه الاختبارات هو نتيجة طريقة دوليتل المختصرة إذا كانت Leading Terms (ا$^{*}_{ii}$) للحل المتقدم موجبة فإن المصفوفة ا تكون موجبة محددة :

ويلاحظ أنه إذا كانت ا موجبة محدودة فستكون كذلك ا$^{-1}$ وكحالة خاصة فإن مصفوفة معينة تكون موجبة وشبه محدودة Semi - definite إذا كانت ل ليست سالبة (أى أن الصفر ممكنا) لأى ص .

وقد يكون من المرغوب فيه فى بعض الأحيان الحصول على الشكل التربيعى Quadratic Form من نوع :

$$\text{ل} = \underline{\text{ص}}' \ \text{ا}^{-1} \ \underline{\text{ص}}$$

ويمكن إجراء ذلك بدون إيجاد معكوس ا . وللحصول (عن طريق الجزء المتقدم لطريقة دوليتل) على الحل س للمعادلة ا س = ص . ونعرف أن س = ا$^{-1}$ ومن ثم تمثل ص َ س الكمية المرغوبة .

ص