الباب الثاني

نظرية سلوك المستهلك

إن المفهوم الأساسى لشرح نظرية سلوك المستهلك هى دالة المنفعة Utility Function ، إذ يقوم المستهلكون بتحقيق إشباعهم باستهلاك سلعة أو مجموعة من السلع . ويقال أن المستهلك قد اشبع رغبة أو رغبات معينة باستهلاك هذه السلع . ويمكن تمثيل هذا الإشباع بالعلاقة الرياضية التالية :

$$م = د\,(ك_1 ، ك_2 ، \ldots ، ك_ن)$$

وتسمى هذه الدالة بالدالة الكلية للمنفعة حيث أن م عبارة عن المنفعة الكلية وأن $ك_1$ ، $ك_2$ ، .... ، $ك_ن$ هى الكميات المختلفة من السلع . ويمكن اشتقاق دالة الطلب من دالة المنفعة التى تشرح سلوك المستهلك فى السوق . وهناك طرقا مختلفة لاشتقاق دالة الطلب وسنوضح فيما يلى كل منها .

أولا : الطريقة الكلاسيكية للمنفعة Classical Utility Approach

تعتمد الطريقة الكلاسيكية للمنفعة على أساس أنه يمكن قياسها بوحدات معينة فكما يمكن وزن الأشياء المختلفة يمكن أيضا قياس المنفعة بوحدات معينة كأن يقال مثلا أن استهلاك برتقالة واحدة تعطى ١٥ وحدة أو استهلاك تفاحة يعطى ٣٠ وحدة وهكذا . هذه الطريقة التى تعتمد عليها النظرية الكلاسيكية

فى فرضها لشرح سلوك المستهلك المقياس الكاردينالى Cardinal Measure ويمكن تحت هذا الفرض اشتقاق جدول دالة المنفعة :

$$م = د (ك)$$

وتسمى هذه الدالة أيضا بدالة المنفعة الكلية . وهى عبارة عن مجموع المنافع التى يستهلكها الفرد فى وقت معين وتحت ظروف معينة . ويمكن كذلك اشتقاق المنفعة الحدية التى تمثل التغير فى المنفعة الكلية أو الاشباع نتيجة التغير فى الوحدات المستهلكة وحدة واحدة . ورياضيا يمكن الحصول على المنفعة الحدية من دالة المنفعة الكلية وذلك بحساب المشتقة الأولى لها كالتالى :

$$م ح = \frac{ء م}{ء ك} = د َ (ك)$$

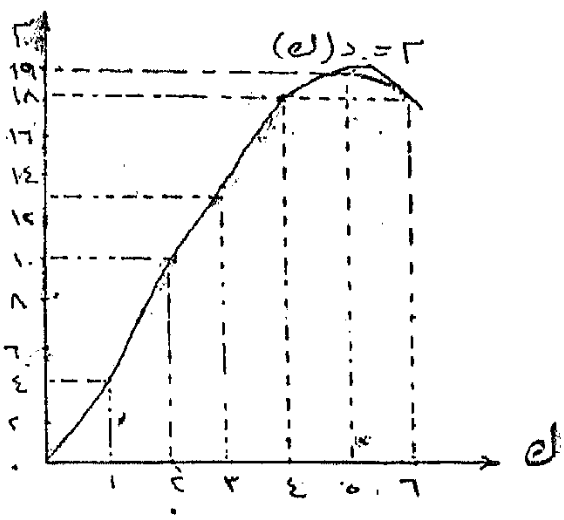
حيث تمثل م ح المنفعة الحدية ، $\frac{ء م}{ء ك}$ المشتقة الأولى لدالة المنفعة .

ويبين المثال التالى دالة المنفعة والمنفعة الحدية لكميات مختلفة من إحدى السلع :

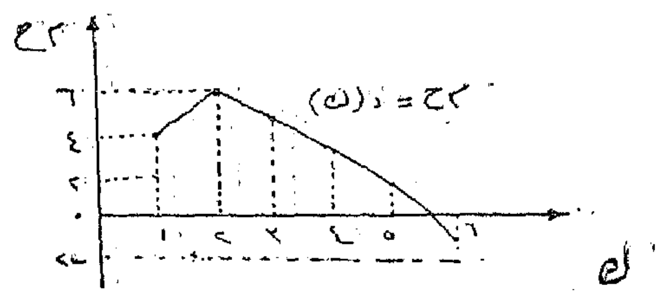
المنفعة الحدية م ح	المنفعة الكلية م	الكمية ك
صفر	صفر	صفر
٤	٤	١
٦	١٠	٢
٥	١٥	٣
٣	١٨	٤
١	١٩	٥
١—	١٨	٦

جدول (١) : المنفعة الكلية والمنفعة الحدية
لكميات مختلفة من إحدى السلع

ويمكن إيضاح ذلك أيضاً بالشكلين الآتيين :



شكل (١) منحنى المنفعة الكلية لاستهلاك ك
وحدات مختلفة من السلعة (ك)



شكل (٢) منحنى المنفعة الحدية باستهلاك
وحدات مختلفة من السلعة (ك)

ويبين شكل (١) العلاقة المتوقعة بين الوحدات المستهلكة من السلعة (ك) والمنفعة التي يحصل عليها الفرد . وكلما زادت الكميات المستهلكة عن الصفر يبدأ الاشباع في الزيادة بنسبة متزايدة حتى نقطة معينة حيث تبدأ هذه النسبة المتزايدة في النقصان . وكلما زادت الكميات المستهلكة من هذه السلعة يصل الفرد إلى نقطة الاشباع المعظم Maximization of Satisfaction أو نقطة التشبع Point of Saturation . ومع أن فرض المنفعة بأنها مقيسة لإشتقاق دالة الطلب في النظرية الكلاسيكية يعتبر فرضاً أساسيا إلا أن هذا الفرض قد يكون أحيانا من الصعب تصوره في صورة وحدات كمية .

(أ) طريقة مارشال لإشتقاق دالة الطلب Marshallian Approach

لإشتقاق دالة الطلب ذكر مارشال الفروض الآتية :

١ — أن كل مستهلك له دالة منفعة مقيسة في صورة وحدات كمية .

٢ — عند نقطة معينة تتناقص المنفعة الحدية كلما زاد الإستهلاك .

٣ — عند إنفاق المستهلك لدخله يحاول دائما معظمة المنفعة .

٤ — يعتبر التذوق وأفضلية السلعة ثابتة .

٥ — يعتبر دخل المستهلك ثابتا ويحدد هذا الدخل والمستويات السعرية . الكميات المشتراة منها .

ويعتبر الفرض الأول والثانى من أهم الفروض لإشتقاق دالة الطلب التى تمثل بمنحنى يتجه إلى أسفل ناحية اليمين كما يحدد الفرض الثالث تصرفات المستهلك .

ولقد افترض مارشال فرضا سادسا له أهمية فى اشتقاق دالة الطلب وهو أن الكمية المنفقة على أى سلعة ليست من الأهمية بمكان إذا قورنت بالدخل الكلى .

فإذا فرضنا أن سعر الوحدة من السلعة $ك_1$ هو $ع_1$ فإن نسبة الإنفاق على السلعة $ك_1$ هى $\frac{ك_1 ع_1}{ى}$ حيث ى تمثل دخل المستهلك علما بأنه ليس هناك أى تداخل بين السلع المشتراة .

وقد افترض مارشال أيضا أن المنفعة الحدية للنقود ثابتة . وتعرف المنفعة الحدية للنقود بأنها المنفعة الإضافية المكتسبة من إدخار جنيه واحد (وحدة النقود) مقابل صرف هذا الجنيه . ومن ثم يمكن تعريف المنفعة للسلعة الأولى $م_1$ بأنها المنفعة التى اكتسبت نتيجة استهلاك وحدات من هذه السلعة $ك_1$. وتوضح بالدالة الآتية :

$$م_1 = د\ (ك_1)$$

أى أن المنفعة الكلية هى دالة للكميات المستهلكة من السلعة الأولى .

وتمثل نقطة معظمة الإشباع النقطة التى تكون عندها المنفعة الحدية لوحدة النقود المنفقة على السلعة $ك_1$ مساوية للمنفعة الحدية للنقود . فإذا رمزنا للمنفعة الحدية للنقود بالرمز (λ) وللمنفعة الحدية للسلعة $ك_1$ بالرمز ($م ح$)$_1$ فإن :

$$\lambda = \frac{(م ح)_1}{ع_1}$$

$$حيث أن\ (م ح)_1 = \frac{د م_1}{د ك_1}$$

ويطلق على ذلك بالمبدأ الحدى للتساوى Equi-Marginal Principal والسبب الأساسى فى اعتبار هذه النقطة هى نقطة معظمة الإشباع أن الوحدة الأخيرة المنفقة على السلعة ($ك_1$) تعطى منفعة حدية لوحدة النقود مساوية للمنفعة الحدية لإدخار هذه الوحدة من النقود .

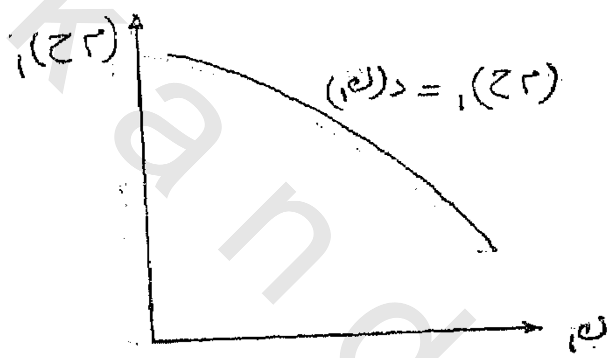
ويجب أن ينطبق المبدأ الحدى للتساوى على جميع السلع المستهلكة بواسطة الفرد . ويطلق على نقطة معظمه الإشباع بنقطة التوازن . وحيث أن المستهلك فى هذه الحالة يمثل وحدة إقتصادية فإن نقطة التوازن تعبر عن توازن جزئى .

ويمكن اشتقاق دالة الطلب لهذه السلعة عند تغير مستوياتها السعرية من العلاقة التالية :

$$ع_1 = \frac{(م ح)_1}{\lambda}$$

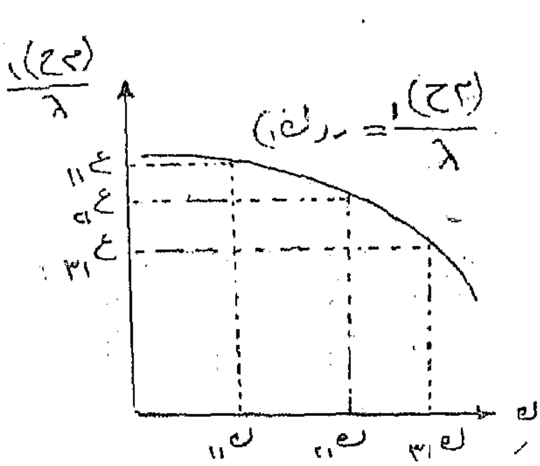
وكلما زاد سعر السلعة ع١ كلما زادت المنفعة الحدية للسلعة (م ح١)، حيث أن λ ثابتة . ونظراً لتناقص المنفعة الحدية للسلعة كلما زادت الكميات المستهلكة فإن ذلك يعني أن (ك١) يجب أن تتناقص .

ولاشتقاق دالة الطلب افترض أن دالة المنفعة الحدية يمكن إيضاحها بالشكل (٣) . ولتحويل هذه الدالة إلى دالة طلب تقسم المنفعة الحدية على الثابت (λ) كما هو مبين في شكل (٤). ويمثل المحور الرأسي خارج القسمة، كما يمثل المحور الأفقي الكميات المستهلكة من السلعة .



شكل (٣) المنفعة الحدية للسلعة ك١

ويمثل ع١١، ع٢١، ع٣١ المستويات السعرية الثلاثة للسلعة ك١ كما تمثل ك١١، ك٢١، ك٣١ مستويات الكميات المناظرة لهذه المستويات السعرية .

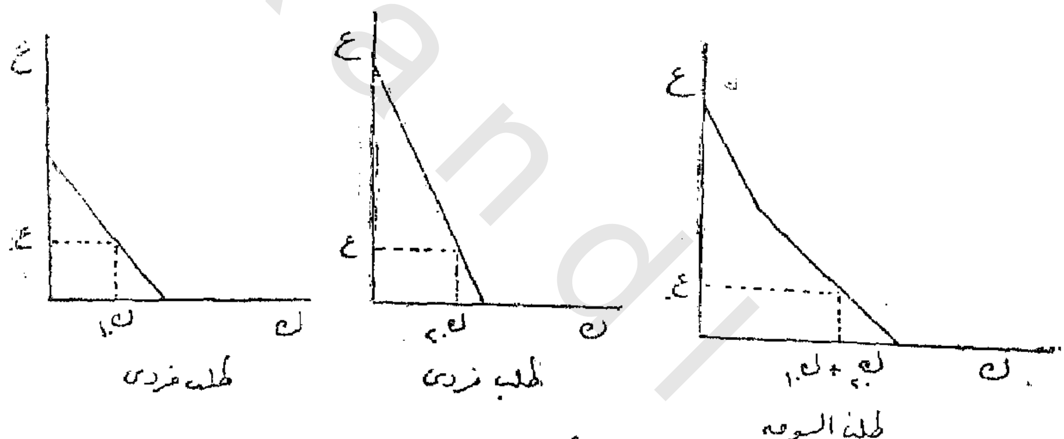


شكل (٤) دالة طلب المشتقة .

ومن ثم يمكن إشتقاق دالة الطلب من هذه المستويات السعرية وكمياتها المناظرة بالدالة التالية :

$$ك_1 = د\,(ع_1)$$

ويبين منحنى الطلب المشتق الكميات المختلفة التى يريد المستهلك شراؤها عند مستويات سعرية مختلفة بافتراض ثبات العوامل الأخرى . ولاستنباط دالة طلب السوق تجمع الدوال الفردية عند المستويات السعرية المختلفة كما هو مبين فى شكل (٥) .



شكل (٥)

ويمثل ع. السعر عند مستوى معين كما يمثل ك.١ ، ك.٢ الكميات المستهلكة للسعر ع. للفردين ١ ، ٢ .

ومن الملاحظ أنه يجب تجميع الكميات عند المستويات السعرية عند إشتقاق دالة الطلب . ويطلق الاقتصاديون على دالة طلب السوق الطلب الكلى . ومن الجدير بالذكر أنه لاشتقاق الطلب الكلى أو دالة طلب السوق يجب افتراض استقلال المستهلكين عن بعضهم .

No Inferaction among Consumers

(ب) طريقة ويكسل فى إشتقاق الطلب Wieksell's Contribution

يفترض ويكسل وهو من أهم الاقتصاديين فى العصر الكلاسيكى بأن النسبة المنفقة على كل سلعة ليست هامة لدخل المستهلك الكلى . ولكنه افترض نفس الفروض الأخرى لمارشال وأوضح المنفعة بالدالة التالية .

$$\text{م} = \text{د}\,(\text{ك}_1 ، \text{ك}_2 ، \ldots ، \text{ك}_{\text{ن}})$$

وتبين هذه الدالة المنفعة المشتقة من الاستهلاك التزامنى Simultaneous Consumption لعدد ن من السلع . ويمكن التعبير عن دخل المستهلك بالمعادلة التالية .

$$\text{ى} = \text{ع}_1\,\text{ك}_1 + \text{ع}_2\,\text{ك}_2 + \ldots\ldots + \text{ع}_{\text{ن}}\,\text{ك}_{\text{ن}}$$

حيث :

ى = الدخل

$\text{ع}_{\text{ا}}$ = أسعار السلع المختلفة حيث تبدأ ا من ١ إلى ن

ومن الواضح أن الدخل سينفق على جميع السلع . ولمعظمة الإشباع لابد للمستهلك أن ينفق هذا الدخل فى الصورة التالية .

$$\frac{(\text{م ح})_1}{\text{ع}_1} = \frac{(\text{م ح})_2}{\text{ع}_2} = \ldots\ldots\ldots = \frac{(\text{م ح})_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}}}$$

أى أن المنفعة الحدية لوحدة الجنيه لجميع السلع متساوية حيث أن

$$(\text{م ح})_{\text{ا}} = \frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ك}_{\text{ا}}}$$

حيث ا تبدأ من ١ إلى ن

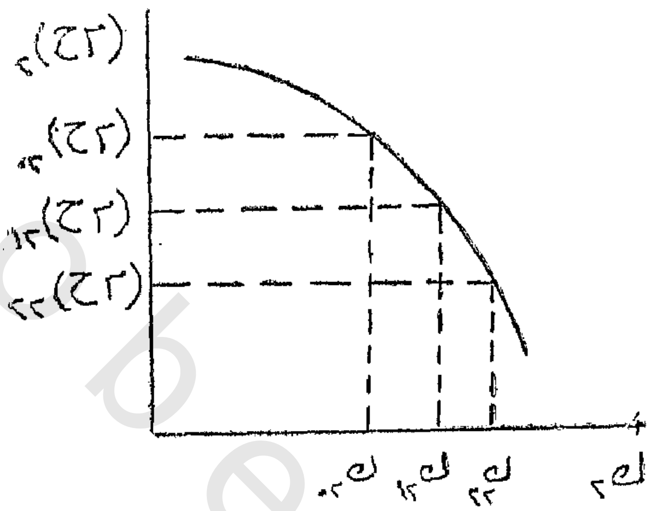
وتعرف هذه الحالة بحالة التوازن الجزئى للمستهلك وأن أى تحرك منها يقلل من الإشباع المتعاظم . فمثلا لو حدث أن :

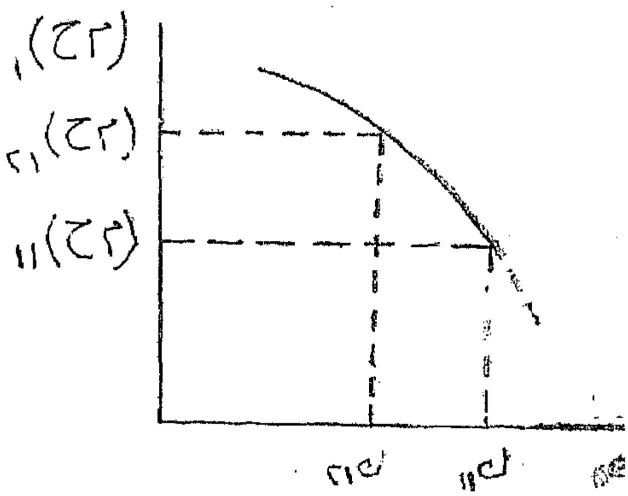
$$\frac{(\text{م ح})_1}{\text{ع}_1} > \frac{(\text{م ح})_2}{\text{ع}_2}$$

فانه يمكن تحقيق إشباع أكبر عن طريق إستهلاك كميات أكبر من السلعة (ك١) . ولذلك فإن المستهلك سيقوم بشراء كميات أكبر من (ك١) وأقل من (ك٢) . ونظراً لسريان مبدأ التناقص الحدى للمنفعة فإن شراء المستهلك لكميات كبيرة من (ك١) وكميات أقل من (ك٢) فإن ذلك يؤدى إلى تناقص المنفعة الحدية للسلعة الأولى وزيادتها بالنسبة للسلعة الثانية . ولذلك يجب على المستهلك أن يقوم بشراء كميات من السلعة (ك١) وكميات من السلعة (ك٢) حتى تتساوى المنافع الحدية لوحدة الجنيه .

$$\frac{(\text{م ح})_1}{\text{ع}_1} = \frac{(\text{م ح})_2}{\text{ع}_2}$$

ويمكن إشتقاق دالة الطلب الفردى كما هو موضح بالشكلين الآتيين :





شكل (٦) الكميات المختلفة المستهلكة من السلعة ك$_1$ ومستوى المنافع الحدية

شكل (٧) الكميات المختلفة من السلعة ك$_2$ ومستوى المنافع الحدية

وعند المستويات السعرية ع$_{11}$ ، ع$_{22}$ للسلعتين ك$_1$ ، ك$_2$ على التوالى فإن حالة التوازن تمثل الحالة التى تكون فيها المنفعة الحدية بالنسبة لوحدة النقود للسلعة الأولى مساوية للمنفعة الحدية لوحدة النقود بالنسبة للسلعة الثانية كما يلى :

$$\frac{(\text{م ح})_{11}}{\text{ع}_{11}} = \frac{(\text{م ح})_{12}}{\text{ع}_{12}}$$

وتكون الكميات المستهلكة عند هذه المستويات السعرية هى ك$_{11}$ ، ك$_{12}$ على التوالى. وبافتراض أن الدخل وسعر السلعة الثانية ثابتا وإرتفاع سعر السلعة الأولى إلى المستوى السعرى ع$_{21}$ فإن :

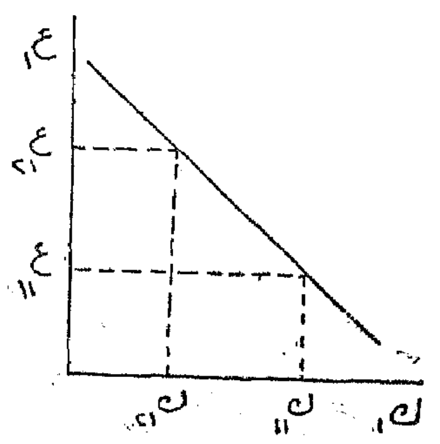
$$\frac{(\text{م ح})_{12}}{\text{ع}_{12}} > \frac{(\text{م ح})_{11}}{\text{ع}_{21}}$$

ولذلك سيجد المستهلك أن المنفعة الحدية للسلعة الثانية أكبر من

المنفعة الحدية للسلعة الأولى . وبتحول الإنفاق من السلعة الأولى إلى السلعة الثانية مع الأخذ فى الاعتبار مبدأ تناقص المنفعة الحدية فإن المستهلك سيظل على تلك الحال إلى أن تحدث نقطة توازن أخرى . وبذلك تكبر الكمية المستهلكة من السلعة الثانية مع تناقص منفعتها الحدية وتقل الكمية المستهلكة من السلعة الأولى مع زيادة منفعتها الحدية . وتمثل الكمية المستهلكة من السلعة الأولى بالرمز $ك_{٢١}$ ومنفعتها الحدية بالرمز $(م ح)_{٢١}$. كما تمثل الكمية من السلعة الثانية بالرمز $ك_{٢٢}$ ومنفعتها الحدية بالرمز $(م ح)_{٢٢}$ وباستمرار هذه العملية نصل إلى نقطة توازن جديدة وهى :

$$\frac{(م ح)_{٢١}}{ع_{٢١}} = \frac{(م ح)_{٢٢}}{ع_{١٢}}$$

ونظراً لأن سعر السلعة الثانية والدخل ثابتين وأن المتغير هو سعر السلعة الأولى فيمكن اشتقاق دالة الطلب للسلعة $ك_{١}$. فمثلا عندما كان المستوى السعرى $ع_{١١}$ كانت الكمية المستهلكة ($ك_{١١}$) وحينما أصبح المستوى السعرى $ع_{٢١}$ نقصت الكمية إلى $ك_{٢١}$. وبذلك يمكن إشتقاق كميات أخرى عند مستويات سعرية مختلفة . ويمكن الوصول إلى دالة الطلب كما هو موضح بالشكل التالى :



شكل (٨) منحنى الطلب المشتق

وتمثل الحالة السابقة حالة التوازن لسلعتين . ولكن من الناحية العملية نجد أن المستهلك لا ينفق دخله على سلعتين كما أوضحنا ولكنه يقوم بانفاق دخله على عديد من السلع .

فلو فرضنا أن المستهلك ينفق دخله على (ن) من السلع فيمكن إشتقاق دوال الطلب لكل سلعة على حدة . ويكون المستهلك فى حالة توازن إذا أنفق دخله بالصورة التالية :

$$\frac{(\text{م ح})_1}{\text{ع}_1} = \frac{(\text{م ح})_2}{\text{ع}_2} \qquad (1)$$

$$\frac{(\text{م ح})_2}{\text{ع}_2} = \frac{(\text{م ح})_3}{\text{ع}_3} \qquad (2)$$

.

.

.

$$\frac{(\text{م ح})_{\text{ن}-1}}{\text{ع}_{\text{ن}-1}} = \frac{(\text{م ح})_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}}} \qquad (\text{ن} - 1)$$

$$\text{ى} = \sum_{\text{ا}=1}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ا}} \, \text{ك}_{\text{ا}} \qquad (\text{ن})$$

حيث ا تبدأ من ١ إلى ن

ونظراً لأن عدد المعادلات مساويا إلى عدد المجاهيل (ن) فيمكن حل المعادلات السابقة أى يمكن معرفة الكميات المختلفة $\text{ك}_{\text{ا}}$ (ا تبدأ من ١ إلى ن) عند مستويات سعرية مختلفة .

ثانيا : منحنيات السواء Indifference Curves

قد يكون من الصعب إقناع فرد ما بأن استهلاك سلعة معينة يعطى قدراً معيناً من الوحدات أى أن المنفعة مقيسة . ولكن هذا الفرض سنتركه جانبا ونتبنى فرضا آخرا بأن المنفعة ليست مقيسة ولكن المستهلك يمكن أن يحدد أفضلية سلعة معينة على سلعة أخرى أو توليفه (Combination) من السلع على توليفةأخرى من السلع . Ranking Utility or Ordinal Utility ويمكن تقسيم أفضلية المستهلك بالنسبة إلى استهلاكه لعدد من السلع إلى التقسيمات الآتية :

١ — لكل الأزواج الممكنة من التوليفات من السلع يمكن للمستهلك أن يفضل أحد الاختبارات التالية :

(ا) أن يفضل التوليفه ($ل_1$) على التوليفه ($ل_2$) ويمكن كتابتها ($ل_1 > ل_2$) .

(ب) أن يفضل التوليفه ($ل_2$) على التوليفه ($ل_1$) ويمكن كتابتها ($ل_2 > ل_1$) .

(ح) أن تكون التوليفة ($ل_1$) لها نفس الأفضلية للتوليفة $ل_2$ أو ($ل_1 = ل_2$) .

٢ — يجب أن تكون أفضلية المستهلك متناسقة Consistent بمعنى أنه إذا كان هناك ثلاثة توليفات ($ل_1$ ، $ل_2$ ، $ل_3$) وأن المستهلك يفضل التوليفة $ل_1$ على التوليفة $ل_2$ ($ل_1 > ل_2$) والتوليفة $ل_2$ على التوليفة $ل_3$

($\text{ل}_2 > \text{ل}_3$) فيجب على المستهلك أن يفضل ل_1 على ل_3 ($\text{ل}_1 > \text{ل}_3$) ويسمى ذلك قاعدة التحويل Law of Transitivity

ويمكن تمثيل المنفعة بالدالة الآتية :

$$\text{م} = \text{د} \left(\text{ك}_1 ، \text{ك}_2 ، \ldots ، \text{ك}_{\text{ن}} \right)$$

حيث أن المنفعة (م) غير مقيسة . ومن ثم يكون الاشباع غير مقيسا . فإذا كان المستهلك يفضل التوليفة ل_1 على ل_2 والتوليفة ل_2 على ل_3 وهكذا إلى ن من التوليفات :

$$\text{ل}_1 > \text{ل}_2 > \cdots > \text{ل}_{\text{ن}}$$

فإنه سيقوم بالانفاق على التوليفة الأولى ل_1 أولا ثم على التوليفة الثانية ل_2 وهكذا مع الأخذ فى الاعتبار أن دخل المستهلك محدودا . ولكن لا يعنى ذلك أن إنفاق الدخل بهذه الصورة يحقق معظمة الاشباع التى سنتكلم عنها بعد شرح وتحليل لطبيعة منحنيات السواء فى البند التالى .

طبيعة منحنيات السواء :

يقصد بمنحنى السواء ذلك المنحنى الذى يوضح مختلف التوليفات من السلعتين ك_1 ، ك_2 التى يعطى كل منها اشباع متساو للمستهلك .

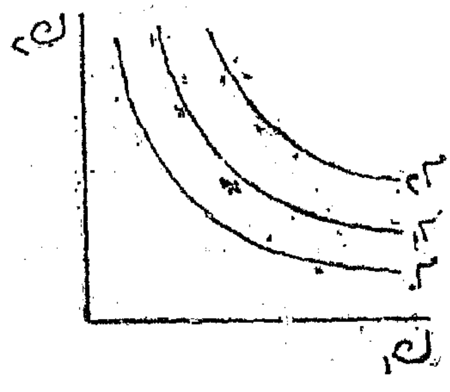
ولعرض مفهوم منحنيات السواء سنقوم بشرح دالة المنفعة الثابتة على المنحنى الواحد للسلعتين ك_1 ، ك_2 مع افتراض أن المنفعة ثابتة عند المستوى م_0 . ويمكن تمثيل دالة المنفعة فى هذه الحالة بالدالة الآتية :

$$\text{م}_0 = \text{د} \left(\text{ك}_1 ، \text{ك}_2 \right)$$

ويعنى ذلك أنه عند المستوى الثابت م. هناك توليفات مختلفة لهاتين السلعتين تعطى كل منها قدر متساو من المنفعة . وبتمثيل هذه التوليفات بيانيا ينتج منحنى السواء كما هو مبين بالشكل التالى (٩) :

شكل (٩) منحنى السواء

ويمكن إيضاح المستويات المختلفة للمنفعة على منحنيات السواء . ويلاحظ أنه كلما انتقلنا من منحنى إلى آخر جهة اليمين كلما زاد الاشباع وكلما انتقلنا جهة اليسار كلما نقص الاشباع . ويبين الشكل التالى (١٠) هذه الحالة حيث أن م. < م١ < م٢ .

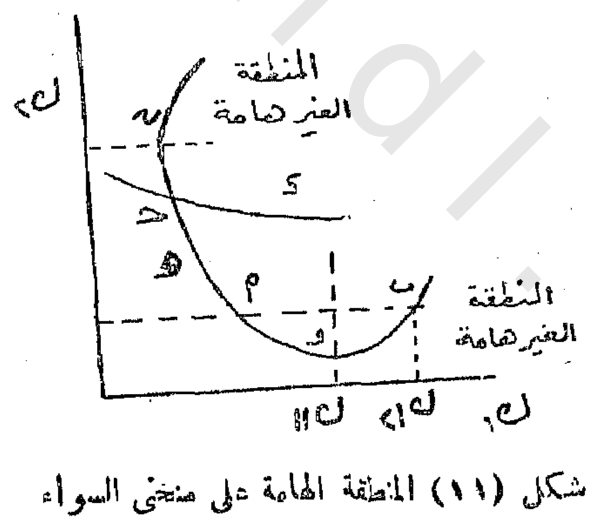


شكل (١٠) المستويات المختلفة للمنفعة

خواص منحنيات السواء :

تتميز منحنيات السواء بالخواص الآتية :

(١) تعتبر منحنيات السواء سالبة الميل على الأقل فى المنطقة الهامة لقيم كل من ك١ ، ك٢ كما هو مبين فى الشكل التالى . ويجب ملاحظة أن المنطقة الهامة هى تلك المنطقة التى يكون فيها منحنى السواء سالب الميل . فمثلا عند النقطتين ا ، ب كما هو فى الشكل التالى (١١) يتساوى الاشباع مع ملاحظة أن الكمية ك٢١ المناظرة للنقطة ب أكبر من الكمية المناظرة للنقطة ا .



شكل (١١) المنطقة الهامة على منحنى السواء

وهنا يثار تساؤلا فورا وهو : لماذا يقوم المستهلك بانفاق دخل أكبر عند النقطة ب رغم أنه سيحصل على نفس القدر من الاشباع عند النقطة ا . ومن ثم يمكن تحديد المنطقة الهامة من الشكل السابق على أنها ذلك الجزء من المنحنى بين و ، ه .

(ب) عدم تقاطع منحنيات السواء : إذ لو أمكن مثلا تقاطع منحنيين م١ ، م٢ عند النقطة حـ وأن هناك نقطة هـ على م١ والنقطة ى على م٢ . وحيث أن م٢ > م١ فيمكن بالتالى القول أن ى > هـ وأن حـ = ى ، حـ = هـ ، ويعنى ذلك أن ى = هـ . ومن الواضح أن هذا غير صحيحا لأن ى > هـ . ومن ثم نستنتج أن منحنيات السواء لا يمكن تقاطعها كما هو مبين فى الشكل السابق .

(حـ) منحنيات السواء محدبة بالنسبة إلى نقطة الأصل : ويرجع ذلك إلى المعدل الحدى للاحلال . Marginal Rate of Substitution ويمكن تعريفه بأنه عبارة عن الكمية التى يرغب المستهلك فى إعطائها مقابل وحدات أخرى من سلعة ثانية مع عدم تغير الاشباع . ونظراً لأن المستهلك لا يفقد أى شيء من الاشباع تكون الكمية المأخوذة مساوية للكمية المفقودة فى الاشباع . ويمكن حساب ذلك التغير كما يلى :

كمية الاشباع المفقود = ى ك٢ × (م ح)٢

كمية الاشباع المكتسب = ى ك١ × (م ح)١

ونظراً لأن المستهلك على نفس منحنى السواء ، أى المنفعة ثابتة

فإن :

كمية الاشباع المفقود = كمية الاشباع المكتسب

ى ك٢ × (م ح)٢ = ى ك١ × (م ح)١

$$\frac{د ك_٢}{د ك_١} = \frac{(م ح)_١}{(م ح)_٢}$$

وتعرف $\frac{د ك_٢}{د ك_١}$ بالمعدل الحدى لاحلال (م ح ل) ك$_١$ بدلا من ك$_٢$. أو هى عبارة عن تلك الكمية من السلعة ك$_٢$ التى يريد المستهلك إعطاؤها لأخذ كمية أخرى من السلعة ك$_١$ مساوية لها فى الإشباع .

(د) تعتبر منحنيات السواء ذات فروض متصلة .

المعدل الحدى للاحلال :

يمكن إشتقاق المعدل الحدى للاحلال رياضيا من دالة المنفعة كالآتى :

حيث أن :

$$م = د (ك_١ ، ك_٢)$$

وبالتفاضل الكلى لهذه الدالة :

$$د م = \frac{\partial م}{\partial ك_١} \times د ك_١ + \frac{\partial م}{\partial ك_٢} \times د ك_٢$$

وبفرض أن

$$ف_ا = \frac{\partial م}{\partial ك_ا}$$ حيث ا تأخذ القيم ١ ، ٢

تكون

$$د م = ف_١ د ك_١ + ف_٢ د ك_٢$$

وتكون المشتقات الأولى للتفاضلات الجزئية لدالة المنفعة هي المنافع الحدية .

$$ف_ا = (م ح)_ا$$ حيث ا تأخذ القيم ١ ، ٢

ويقيس التفاضل الكلى مقدار التغير في دالة المنفعة م .

ويلاحظ أن مقدار التغير في المنفعة ثابتا على طول منحنى السواء . أى أن ى م = صفر ، ومن ثم فإن :

$$ف_١ \, ى ك_١ + ف_٢ \, ى ك_٢ = صفر$$

ويمكن حل هذه المعادلة لإيجاد قيمة $\frac{ى ك_٢}{ى ك_١}$ أى المعدل الحدى للاحلال كالآتى :

$$\frac{ى ك_٢}{ى ك_١} = - \frac{ف_١}{ف_٢} = - \frac{\frac{\partial م}{\partial ك_١}}{\frac{\partial م}{\partial ك_٢}} = - \frac{(م ح)_١}{(م ح)_٢}$$

وتعرف $\frac{ى ك_٢}{ى ك_١}$ أيضا بميل منحنى السواء . ويطلق بعض الاقتصاديون عليها لفظ المعدل السلبى للاحلال Rate of Commodity Substitution

ويلاحظ أن الإشارة السالبة لهذا المعدل لا تعنى أن المنفعة الحدية سالبة بل أن المقصود من هذه الإشارة أن ميل منحنى السواء يكون سالبا .

معظمة المستهلك للمنفعة عرضة إلى قيد الدخل :

أوضحنا سلفا أن غرض المستهلك هو تحقيق معظمة الإشباع . إلا أن تحقيق هذا الغرض يتقيد بعوامل معينة تتمثل في (١) كمية محدودة من الدخل (٢) أسعار السلع المختلفة .

ونظراً لأن التحليل الحالى لسلوك المستهلك يعتمد على منحنيات السواء فإن الفرض الأساسى للمنفعة بأنها غير مقيسة مازال قائماً . وحيث أن معظمة المنفعة عرضة إلى قيد الدخل فإنه يجب افتراض الفروض التالية :

١ — يحاول المستهلك معظمة المنفعة .

٢ — دخل المستهلك وتذوقه للسلعة ثابتا فى وقت معين .

٣ — ثبات أسعار السلع المختلفة فى وقت معين .

٤ — دالة المنفعة متصلة بالنسبة إلى المشتقتين الأولى والثانية للتفاضلات الجزئية .

ويمكن معظمة المنفعة بالطرق الآتية :

طريقة حل معادلة الميزانية

لنفرض أن فردا ما يستهلك ك$_ا$ من السلع (حيث تبدأ ا من ١ إلى ن) وأن أسعار هذه السلع هى كالتالى ع$_ا$ حيث تبدأ ا من ١ إلى ن . والأساس فى هذه الطريقة معظمة المنفعة عرضه إلى قيود المستهلك وهى الدخل وأسعار السلع . ويمكن تمثيل دالة المنفعة ودخل المستهلك بالمعادلتين الآتيتين :

$$\text{م} = \text{د}\left(\text{ك}_1 \text{ ، } \text{ك}_2 \text{ ، } \ldots \text{ ، } \text{ك}_{\text{ن}}\right)$$

عرضة إلى:

$$\text{ى} = \sum_{\text{ا}=1}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ا}} \, \text{ك}_{\text{ا}} \qquad \text{ا تبدأ من ١ إلى ن}$$

أى يجب معظمة

$$\text{م} = \text{د}\left(\text{ك}_1 \text{ ، } \text{ك}_2 \text{ ، } \ldots \text{ ، } \text{ك}_{\text{ن}}\right)$$

عرضة إلى:

$$\text{ى} = \text{ع}_1 \text{ك}_1 + \text{ع}_2 \text{ك}_2 + \ldots + \text{ع}_{\text{ن}} \text{ك}_{\text{ن}}$$

والطريقة هى حل معادلة الميزانية لأى متغير من الكميات (الدخل وأسعار السلع ثابتة) كالتالى:

$$\text{ك}_1 = \frac{\text{ى}}{\text{ع}_1} - \frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_1}\text{ك}_2 - \frac{\text{ع}_3}{\text{ع}_1}\text{ك}_3 - \ldots - \frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_1}\text{ك}_{\text{ن}}$$

وبإحلال هذه المعادلة فى داله المنفعة

$$\text{م} = \text{د}\left(\frac{\text{ى}}{\text{ع}_1} - \frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_1}\text{ك}_2 - \ldots - \frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_1}\text{ك}_{\text{ن}} \text{ ، } \text{ك}_2 \text{ ، } \ldots \text{ ، } \text{ك}_{\text{ن}}\right)$$

وتعتبر هـذه الداله داله غير مقيدة Unconstrained Function ، ولمعظمتها تطبق القواعد الآتية :

(١) توضع المشتقات الأولى مساوية للصفر

$$\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ك}_{\text{ر}}} = \text{صفر}$$ حيث ر تبدأ من ١ إلى ن

(٢) إذا كانت المشتقة الثانية للدالة أقل من الصفر فإن هذا يشير إلى أن داله المنفعة ممعظمة

$$\left(\frac{\partial^{2} \text{م}}{\partial \text{ك}^{2}_{\text{ر}}} < \text{صفر} \right)$$

مثال :

لبيان كيفية الحصول على معظمة المنفعة فى حالة السلعتين ك_1 ، ك_2 عرضة إلى الدخل (ى) الذى سينفق عليها يتبع الآتى :

معظمة $\text{م} = \text{د} (\text{ك}_1 ، \text{ك}_2)$ (١)

عرضة إلى :

$$\text{ى} = \text{ع}_1 \text{ك}_1 + \text{ع}_2 \text{ك}_2 \qquad (٢)$$

وكما بينا سلفا فان الخطوة الأولى هى حل معادلة الدخل إلى أى من المتغيرات .

$$\text{ك}_2 = \frac{\text{ى}}{\text{ع}_2} - \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} \text{ك}_1 \qquad (٣)$$

وبإحلال معادلة (٣) فى داله المنفعة (١)

$$\text{م} = \text{د}\left[\left(\text{ك}_1 ،\ \frac{\text{ى}}{\text{ع}_2} - \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}\,\text{ك}_1\right)\right]$$

ولإيجاد نقطة معظمة المنفعة

المشتقة الأولى $\frac{\text{ء م}}{\text{ء ك}_1} = \text{صفر}$ (٤)

المشتقة الثانية $\frac{\text{ء}^2\text{م}}{\text{ء ك}_1^2} < \text{صفر}$ (٥)

وبحل المعادلة (٤) لإيجاد قيمة ك_1 وبإحلالها فى المعادلة (٣) يمكن إيجاد قيمة ك_2 . وبإحلال القيمتين لكل من ك_1 ، ك_2 فى المعادلة (٥) يمكن أيضاً معرفة ما إذا كانت المشتقة الثانية ينطبق عليها قانون المعظمة .

ويمكن حساب المعدل الحدى الإحلال أيضاً بتفاضل دالة المنفعة بالنسبة إلى ك_1 من المعادلة (١) كالتالى :

$$\frac{\text{ء م}}{\text{ء ك}_1} = \frac{\partial\,\text{م}}{\partial\,\text{ك}_1} + \frac{\partial\,\text{م}}{\partial\,\text{ك}_2} \times \frac{\text{ء ك}_2}{\text{ء ك}_1} \qquad (٦)$$

ومن المعادلة (٣)

$$\frac{\text{ء ك}_2}{\text{ء ك}_1} = -\,\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} \qquad (٧)$$

وبإحلال المعادلة (٧) فى المعادلة (٦) وبوضع المعادلة تساوى الصفر

$$\frac{\text{ء م}}{\text{ء ك}_1} = \text{ف}_1 + \text{ف}_2\left(-\,\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}\right) = \text{صفر} \qquad (٨)$$

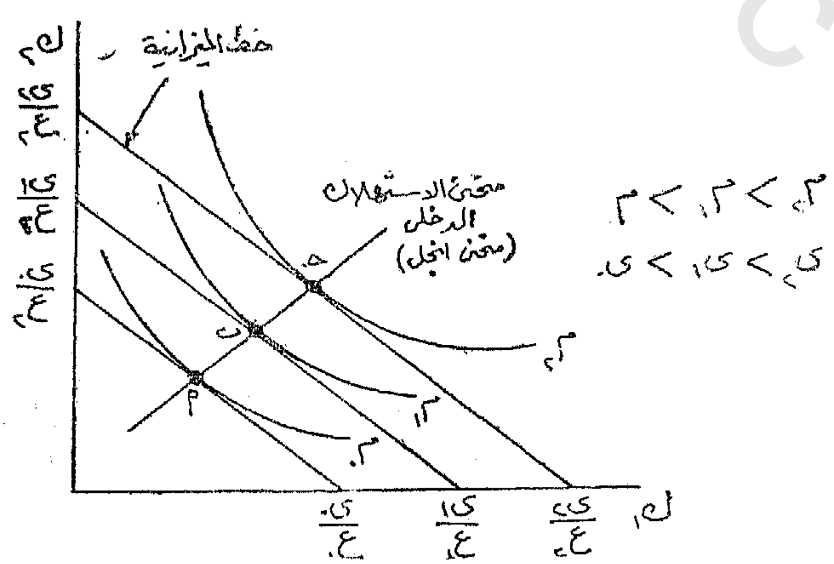
حيث أن :

$$ف_١ = \frac{\partial م}{\partial ك_١}$$ حيث تأخذ ا القيم ١ ، ٢

وبحل المعادلة (٨) يمكن إيجاد المعدل الحدى للإحلال كالآتى :

$$(م ح ل) = -\frac{ف_١}{ف_٢} = -\frac{ع_١}{ع_٢} \quad (٩)$$

أى أن لمعظمة المنفعة يجب أن يكون المعدل الحدى للإحلال مساويا لنسبة الأسعار (والنسبة هنا سالبة ولا يعنى هذا مطلقا أن الأسعار فى صورة سالبة) والنقطة المثلى للاشباع على منحنى السواء هى تلك النقطة التى يكون عندها ميل منحنى السواء مساويا لميل قيد الميزانية Budget Constraint . أى بعبارة أخرى تمثل نقطة التماس بين منحنى السواء وخط الميزانية . فإذا كان الدخل محددا بالكمية ى كما هو موضح بالشكل التالى فإن نقطة الاشباع المثلى هى نقطة (ا) بهذا الشكل .



شكل (١٢) نقطة الاشباع المثلى بين منحنيات السواء وخطوط الميزانية

وواضح أن قيد الميزانية عبارة عن خط مستقيم . إذ عندما تكون $ل_١$ = صفر فإن المستهلك لن ينفق شيء فى شراء أى كمية من السلعة الأولى وتكون الكمية المشتراه من السلعة الثانية هى $\frac{ى}{ع_٢}$. أما إذا كان المستهلك لن ينفق شىء فى شراء أى كمية من السلعة الثانية تكون الكمية المشتراه من السلعة الأولى هى $\frac{ى}{ع_١}$. وبتوصيل هاتين النقطتين على الخطى الأفقى والرأسى اللذين يوضحان الكميات المستهلكة من $ل_١$ ، $ل_٢$ يمثل ذلك خط الميزانية Budget Line

ومن الطبيعى أن إزدياد الدخل يؤدى إلى إنتقال خط الميزانية إلى أعلى جهة اليمين موازيا خط الميزانية الأول . ويتضح ذلك من الشكل السابق إذ أن $ى_٢ > ى_١ > ى$. وتكون نقط معظمة الاشباع بالنسبة لمستويات هذه الدخول المختلفة هى ا ، ب ، حـ أى النقط التى يتساوى عندها ميل خط الميزانية مع ميل منحنى السواء (نقط التماس) . ومن المعادلة (٩) وجدنا أن :

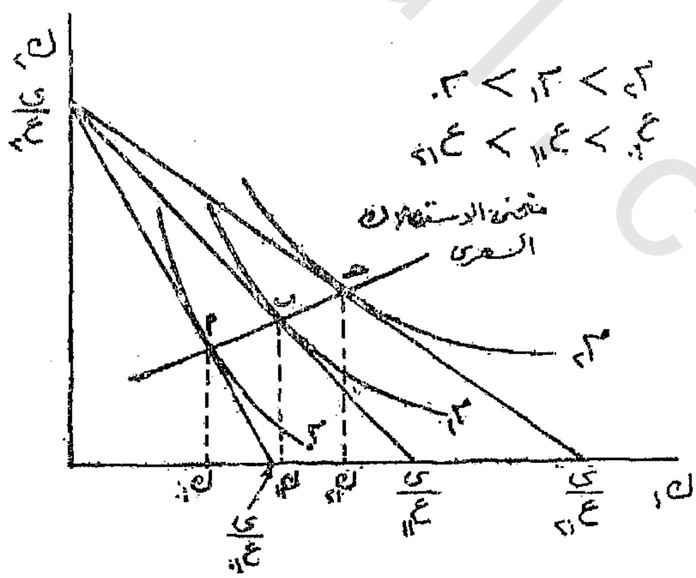
$$\frac{ف_١}{ف_٢} = \frac{ع_١}{ع_٢}$$

ومن ثم نستنتج أن :

$$\frac{ف_١}{ع_١} = \frac{ف_٢}{ع_٢}$$

أى أن عند نقط التماس بين خط الميزانية ومنحنيات السواء تكون المنافع الحدية للسلع بالنسبة لوحدة النقود متساوية . وهى نفس النتيجة التى توصلنا إليها باستخدام الطريقة الكلاسيكية غير أن المنفعة هنا غير مقيسة . ويمكن توصيل هذه النقط بين خطوط الميزانية ومنحنيات السواء لتعطى منحنى يطلق عليه لفظ منحنى الاستهلاك الدخلى Income Consumption Curve أو منحنى إنجل Engel Curve . مع ملاحظة أن المستويات السعرية للسلع ثابتة .

وإذا فرضنا أن المستوى السعرى للسلعة ك٢ والدخل ثابتين وأن المتغير الوحيد هو سعر السلعة ك١ فسيؤدى ذلك إلى تغير ميل خط الميزانية . فإذا كان التغير فى سعر السلعة ك١ بالنقصان فإن هذا يؤدى إلى تحرك خط الميزانية فى اتجاه اليمين وتزداد الكمية المستهلكة من السلعة ك١ كما هو مبين فى الشكل التالى :



شكل (١٣) منحنى الاستهلاك السعرى

ويلاحظ أنه نظراً لفرض ثبات سعر السلعة ك٢ فإن التقاطع على محور كميانها سيظل ثابتاً وأن نقط معظمة الاشباع هى عبارة عن تلك النقط التى

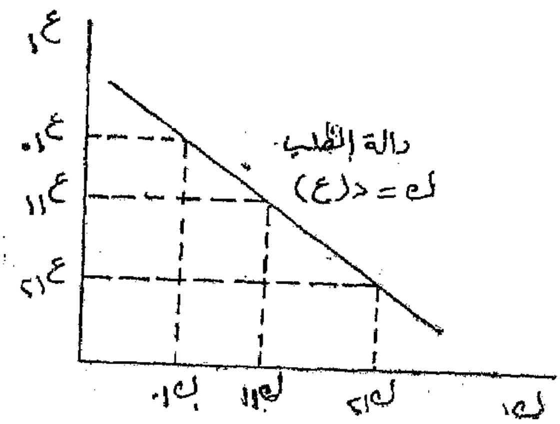
يكون ميل منحنى السواء مساويا لميل خط الميزانية أى نقطة التماس بينهما ويكون

$$(\text{م ح ل}) = -\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}$$

وبتوصيل نقط التماس (ا ، ب ، حـ) ينتج منحنى الاستهلاك السعرى Price Consumption Curve . ويمكن اشتقاق دالة الطلب من منحنى الاستهلاك السعرى حيث يبين العلاقة بين أسعار السلعة ك_1 والكميات المختلفة عند هذه المستويات السعرية كالآتى :

ع_1	ك_1
$\text{ع}_{1\cdot}$	$\text{ك}_{1\cdot}$
ع_{11}	ك_{11}
ع_{21}	ك_{21}
.	.
.	.
.	.

ويمكن توضيح ذلك بيانيا كما هو فى الشكل التالى



شكل (١٤) منحنى الطلب المشتق من منحنى الاستهلاك السعرى

ويمكن تمثيل علاقة دالة الطلب بالعلاقة الرياضية التالية :

$$\text{ك}_1 = \text{د}\,(\text{ع}_1 \mid \text{ى} \,،\, \text{ع}_2)$$

أى أن المتغيرين الوحيدين هما ع_1 ، ك_1 أما الثابتين فهما ى ، ع_2 .

<u>مثال :</u>

إذا فرضنا أن دالة المنفعة يمكن تمثيلها رياضيا بالدالة التالية

$$\text{م} = \text{ك}_1 \,\text{ك}_2$$

وأن سعر الوحدة من السلعة الأولى ٦ قروش وسعر الوحدة من السلعة الثانية هو ٣ قروش وأن الدخل ١٨٠ قرشا والمطلوب معظمة المنفعة عرضة إلى قيد هذا الدخل وأسعار تلك السلع .

<u>الحل :</u>

معظمة

$$\text{م} = \text{ك}_1 \,\text{ك}_2$$

عرضة إلى

$$١٨٠ = ٦\,\text{ك}_1 + ٣\,\text{ك}_2$$

ويمكن حل معادلة خط الميزانية لإيجاد قيمة ك_2

$$\text{ك}_2 = \frac{١٨٠}{٣} - \frac{٦}{٣}\,\text{ك}_1 = ٦٠ - ٢\,\text{ك}_1$$

وبإحلال هذه المعادلة فى دالة المنفعة ينتج أن :

$$\text{م} = \text{ك}_1 \,\text{ك}_2 = \text{ك}_1 (٦٠ - ٢\,\text{ك}_1)$$

$$= ٦٠\,\text{ك}_1 - ٢\,\text{ك}_1^{٢}$$

وتكون المشتقة الأولى لدالة المنفعة هي :

$$د'(م) = \frac{ء م}{ء ك_1} = ٦٠ - ٤ ك_1$$

ولمعظمة دالة المنفعة توضع د' (م) = صفر ثم تحسب المشتقة الثانية د'' (م) فإذا كانت قيمتها سالبة دل ذلك على معظمة المنفعة .

$$٦٠ - ٤ ك_1 = صفر$$

$٤ ك_1 = ٦٠$ ومن ثم فإن $ك_1 = ١٥$.

وبإحلال هذه القيمة في المعادلة

$$ك_2 = ٦٠ - ٢ ك_1$$

$$ك_2 = ٦٠ - ٢ (١٥) = ٣٠$$

$$د''(م) = \frac{ء^2 م}{ء ك_1^2} = - ٤$$

ونظراً لأن المشتقة الثانية سالبة فإن النقطة $ك_1 = ١٥$ ، $ك_2 = ٣٠$ هي نقطة معظمة الاشباع وتكون رتبة المنفعة Utility Rank

$$م = (١٥) (٣٠) = ٤٥٠$$

وقد أوضحنا سلفا أن نقطة معظمة الاشباع هي تلك النقطة التي تتساوى عندها المنافع الحدية للسلع المختلفة بالنسبة لوحدة النقود ، ونجد كذلك عند هذه النقطة أن المعدل الحدي للإحلال مساويا لنسبة الأسعار كالتالي :

$$(م ح)_1 = \frac{\partial م}{\partial ك_1} = د'(م) = ك_2 = ٣٠$$

$$\text{(م ح)}_{٢} = \frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ك}_{٢}} = \text{د}'(\text{م}) = \text{ك}_{١} = ١٥$$

$$\frac{\text{(م ح)}_{١}}{\text{ع}_{١}} = \frac{٣٠}{٦} = ٥$$

$$\frac{\text{(م ح)}_{٢}}{\text{ع}_{٢}} = \frac{١٥}{٣} = ٥$$

ولذلك فإن :

$$\frac{\text{(م ح)}_{١}}{\text{ع}_{١}} = \frac{\text{(م ح)}_{٢}}{\text{ع}_{٢}}$$

ويكون المعدل الحدى للإحلال (م ح ل) للسلعة $\text{ك}_{١}$ بدلا من السلعة $\text{ك}_{٢}$

$$\text{(م ح ل)} = -\frac{\text{(م ح)}_{١}}{\text{(م ح)}_{٢}} = -\frac{٣٠}{١٥} = -٢$$

وتكون النسبة السعرية Price Ratio

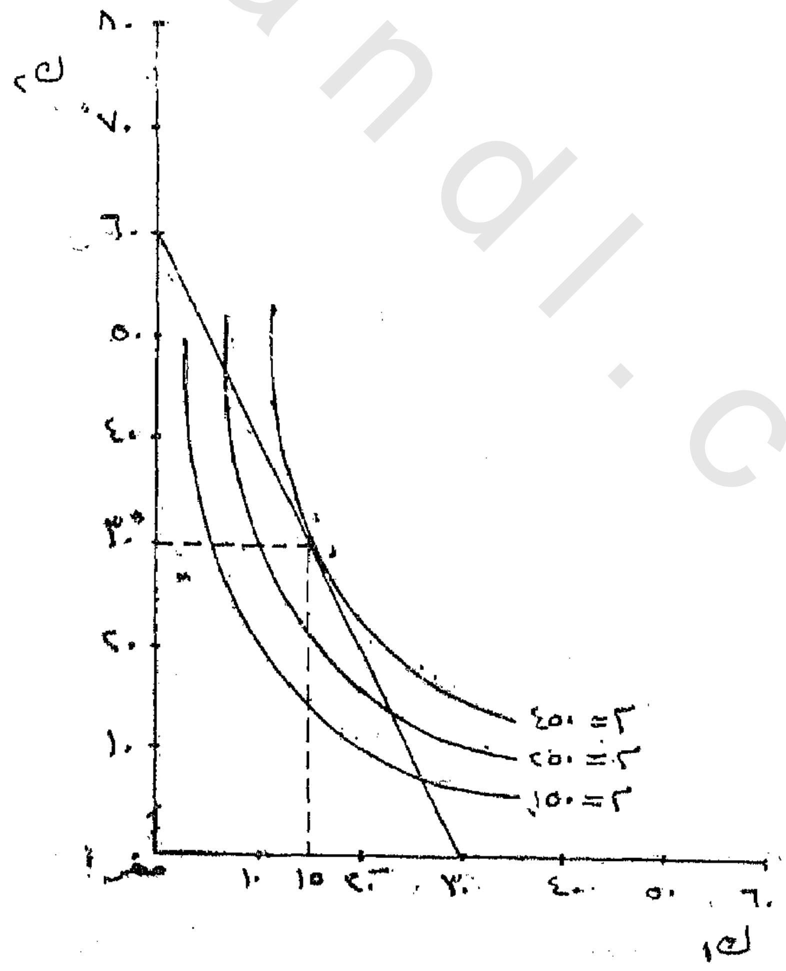
$$\frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}} = \frac{٦}{٣} = ٢$$

ولذلك فإن :

$$\text{(م ح ل)} = -\frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}} = -٢$$

ويمكن إيضاح معظمة المنفعة بيانيا كما هو مبين فى الشكل التالى . فإذا إفترضنا ثلاثة منحنيات سواء لثلاثة مستويات من المنفعة أو الاشباع فمن

قيد الميزانية (خط الميزانية) Budget Constraint يمكن للمستهلك إما أن يشترى ٦٠ وحدة من السلعة ك٢ ولا شيء من السلعة ك١ أو ٣٠ وحدة من ك١ ولا شيء من ك٢ وبتوصيل النقطتين يمكن رسم قيد الميزانية أو خط الميزانية كما هو مبين فى المثال الحالى . ونظراً لأن هذا الخط يبين توليفات مختلفة على طوال إمتداده لذلك يطلق عليه خط التوليفات الممكنة Line of Attainable Combinations ولمعظمة الاشباع يحاول المستهلك أن يصل إلى أعلى مستوى منحنى سواء عرضة إلى خط التوليفات الممكنة المعطى للمستهلك . ومن المثال السابق يمكن للمستهلك أن يصل منحنى السواء الذى رتبته ٤٥٠ وتكون النقطة المثلى للاشباع هى ك١ = ١٥ ، ك٢ = ٣٠ .



شكل (١٥) معظمة المنفعة

معظمة المنفعة بطريقة مضروبات لاجرانج Lagrange Multipliers

أوضحنا سلفا أن المستهلك فى معظمته للمنفعة للحصول على أكبر قدر ممكن من الاشباع لابد وأن يأخذ فى الاعتبار ذلك القدر المعين من الدخل وأسعار تلك السلع المشتراه .

وقد تواجه منشأة ما معظمة دخلها بشرط أن تكون العمالة ثابتة أو حصول المنشأة على أكبر قدر من الخدمات لمظمة الإنتاج بأقل التكاليف الممكنة . مثل هذه المشاكل يمكن حلها باستخدام مضروبات لاجرانج .

فمثلا بفرض أن الدالة الآتية دالة منفعة .

$$م = د(ك_1 ، ك_2 ، \ldots ، ك_ن)$$

عرضة إلى :

$$ى = ع_1 ك_1 + ع_2 ك_2 + \ldots + ع_ن ك_ن$$

ولاستخدام طريقة مضروبات لاجرانج يوضع القيد فى الصورة التالية

$$ن = ى - ع_1 ك_1 - ع_2 ك_2 - \ldots - ع_ن ك_ن$$

ولذلك فإن الدالة المراد معظمتها هى دالة المنفعة عرضه إلى قيد الدخل .

والصورة العامة لدالة مضروبات لاجرانج هى كالتالى

$$ل = م + \lambda ن$$

$$= د(ك_1 ، ك_2 ، \ldots ، ك_ن) + \lambda$$

$$(ى - ع_1 ك_1 - \ldots - ع_ن ك_ن)$$

حيث تمثل ر دالة لاجرانج ، ن تمثل قيد الميزانية ، λ مضروب لاجرانج غير المحدد حيث ضرب في معادلة الدخل للمستهلك قبل أن تحدد قيمته. وفي هذه الدالة يهمل إحتمالين : الاحتمال الأول هو الإدخار Saving والإحتمال الثاني هو التسليف Lending

ومعظمة الدالة ر هي نفسها معظمة المنفعة م حيث أن ن = صفر عند نقطة التوازن وتكون المشتقات الأولى لمعظمة المنفعة عرضه إلى قيد الدخل هي :

$$\text{ر}_{١} = \frac{\partial \text{ر}}{\partial \text{ك}_{١}} = \frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ك}_{١}} - \lambda \, \text{ع}_{١} = \text{صفر} \qquad (١)$$

$$\text{ر}_{٢} = \frac{\partial \text{ر}}{\partial \text{ك}_{٢}} = \frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ك}_{٢}} - \lambda \, \text{ع}_{٢} = \text{صفر} \qquad (٢)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\text{ر}_{\text{ن}} = \frac{\partial \text{ر}}{\partial \text{ك}_{\text{ن}}} = \frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ك}_{\text{ن}}} - \lambda \, \text{ع}_{\text{ن}} = \text{صفر} \qquad (\text{ن})$$

$$\text{ر}_{\lambda} = \text{ى} - \text{ع}_{١} \text{ك}_{١} - \text{ع}_{٢} \text{ك}_{٢} - \cdots - \text{ع}_{\text{ن}} \text{ك}_{\text{ن}}$$

ونظراً لأن المستويات السعرية والدخل ثوابت فهناك عدد من المتغيرات قدره ن + ١ (عدد السلع ن ، λ) وعدد من المعادلات قدرها (ن + ١) . ويعني هذا أنه يمكن إيجاد قيمة المجاهيل حيث أن عدد المجاهيل مساويا لعدد المعادلات .

ومن المعادلات ١ إلى ن يمكن استنتاج الآتى :

$$\lambda = \frac{\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ك}_{١}}}{\text{ع}_{١}} \qquad (١)$$

$$\lambda = \frac{\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ك}_{٢}}}{\text{ع}_{٢}} \qquad (٢)$$

$$\lambda = \frac{\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ك}_{\text{ن}}}}{\text{ع}_{\text{ن}}} \qquad (\text{ن})$$

وحيث أن $\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ك}_{\text{ا}}} = (\text{ح م})_{\text{ا}} = \lambda$ حيث تبدأ ا من ١ الى ن

فإن :

$$\frac{(\text{ح م})_{١}}{\text{ع}_{١}} = \frac{(\text{ح م})_{٢}}{\text{ع}_{٢}} = \cdots = \frac{(\text{ح م})_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}}} = \lambda$$

حيث λ عبارة عن المنفعة الحدية للنقود . ويلاحظ أن هذه النتيجة مساوية للنتيجة التى توصلنا إليها عن طريقة المنفعة الكلاسيكية .

ولإثبات أن λ عبارة عن المنفعة الحدية للنقود يحسب التفاضل الكلى لدالة المنفعة وقيد الدخل كالآتى

$$\text{م} = (\text{ك}_{١} \text{ ، } \text{ك}_{٢} \text{ ، } \cdots \text{ ، } \text{ك}_{\text{ن}})$$

$$\text{د}\,\text{م} = \frac{\partial\,\text{م}}{\partial\,\text{ك}_{١}}\,\text{د}\,\text{ك}_{١} + \frac{\partial\,\text{م}}{\partial\,\text{ك}_{٢}}\,\text{د}\,\text{ك}_{٢} + \cdots +$$

$$\frac{\partial\,\text{م}}{\partial\,\text{ك}_{\text{ن}}}\,\text{د}\,\text{ك}_{\text{ن}}$$

$$\text{د}\,\text{م} = \sum_{\text{ا}=١}^{\text{ن}} \frac{\partial\,\text{م}}{\partial\,\text{ك}_{\text{ا}}}\,\text{د}\,\text{ك}_{\text{ا}} \qquad (١)$$

حيث ا تبدأ من ١ إلى ن

$$\text{ى} = \text{ع}_{١}\,\text{ك}_{١} + \text{ع}_{٢}\,\text{ك}_{٢} + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}}\,\text{ك}_{\text{ن}}$$

$$\text{د}\,\text{ى} = \text{ع}_{١}\,\text{د}\text{ك}_{١} + \text{ع}_{٢}\,\text{د}\text{ك}_{٢} + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}}\,\text{د}\,\text{ك}_{\text{ن}}$$

$$\text{د}\,\text{ى} = \sum_{\text{ا}=١}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ا}}\,\text{د}\text{ك}_{\text{ا}} \qquad (٢)$$

حيث ا تبدأ من ١ إلى ن

وحيث أن :

$$\text{ف}_{\text{ا}} = \frac{\partial\,\text{م}}{\partial\,\text{ك}_{\text{ا}}}$$

،

$$\text{ع}_{\text{ا}} = \frac{\text{ف}_{\text{ا}}}{\quad}$$

وبإحلال هذه العلاقة السعرية فى المعادلة (٢) نستنتج أن :

$$\text{د ي} = \frac{1}{\lambda} \sum_{\text{ا}=1}^{\text{ن}} \text{ف}_{\text{ا}} \, \text{د ك}_{\text{ا}} \qquad (٣)$$

وبقسمة المعادلة (١) على المعادلة (٣) فإن :

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ي}} = \frac{\sum_{\text{ا}=1}^{\text{ن}} \text{ف}_{\text{ا}} \, \text{د ك}_{\text{ا}}}{\frac{1}{\lambda} \sum_{\text{ا}=1}^{\text{ن}} \text{ف}_{\text{ا}} \, \text{د ك}_{\text{ا}}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{د م}}{\text{د ي}} = \lambda$$

ونظراً لأن $\frac{\text{د م}}{\text{د ي}}$ هى عبارة عن المنفعة الحدية للنقود ومساوية إلى λ .

ومن ثم فإن λ هى المنفعة الحدية للنقود .

وقد أوضحنا سابقا أنه لمعظمة المنفعة توضع المشتقات الأولى مساوية للصفر . ولا يعنى هذا أن المستهلك قد معظم منفعته عرضه إلى قيد الدخل ، ولكن لا بد من إيجاد المشتقات الثانية . وباستخدام محدد هاسين Bordered Hessian Determinant يمكن معرفة الكميات المختلفة من السلع التى تعطى معظمة المنفعة . ولكن يختلف المحدد لاختبار المنفعة العظمى حسب عدد السلع التى سنتكلم عن الشروط المختلفة لمعظمة المنفعة فى هذه الحالة بعد تعريف هذا المحدد .

$$\Delta_{1} = \begin{vmatrix} ع_{11} & ع_{21} & \cdots & ع_{ن1} & ف_{1} \\ ع_{12} & ع_{22} & \cdots & ع_{ن2} & ف_{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ع_{1ن} & ع_{2ن} & \cdots & ع_{نن} & ف_{ن} \\ ف_{1} & ف_{2} & \cdots & ف_{ن} & \text{صفر} \end{vmatrix}$$

وحيث أن

$$ع_{اب} = \frac{\partial^{2} ع}{\partial ك_{ا}\, \partial ك_{ب}}$$

حيث ا ، ب تبدأ من ١ إلى ن

$$ف_{ا} = \frac{\partial ف}{\partial ك_{ا}}$$

حيث ا تبدأ من ١ إلى ن

وأن المحددات الصغرى Minors لمحدد هاسين هي كالتالى :

$$\Delta_{٢} = \begin{vmatrix} \text{ر}_{٢٢} & \text{ر}_{٣٢} & \cdots & \text{ر}_{٢\text{ن}} & \text{ق}_{٢} \\ \text{ر}_{٢٣} & \text{ر}_{٣٣} & \cdots & \text{ر}_{٣\text{ن}} & \text{ق}_{٣} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \text{ر}_{\text{ن}٢} & \text{ر}_{\text{ن}٣} & \cdots & \text{ر}_{\text{نن}} & \text{ق}_{\text{ن}} \\ \text{ق}_{١} & \text{ق}_{٢} & \cdots & \text{ق}_{\text{ن}} & \text{صفر} \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_{\text{ن}} = \begin{vmatrix} \text{ر}_{\text{نن}} & \text{ق}_{\text{ن}} \\ \text{ق}_{\text{ن}} & \text{صفر} \end{vmatrix}$$

ولكي تكون دالة لاجرانج (ر) معظمة تطبق القواعد التالية :

١ — إذا كان عدد السلع زوجي (even) تكون المحددات في الصورة :

$\Delta_{١} >$ صفر ، $\Delta_{٢} <$ صفر ، $\Delta_{٣} >$ صفر ... وهكذا

أي أن المحددات تتغير في الاشارة على أن تبدأ باشارة موجبة .

٢ — إذا كان عدد السلع فردي (odd) تكون المحددات في الصورة :

$\Delta_{١} <$ صفر ، $\Delta_{٢} >$ صفر ، $\Delta_{٣} <$ صفر ... وهكذا

أى أن المحددات تتغير فى الاشارة على أن تبدأ باشارة سالبة .

مثال :

فى المثال السابق لدالة المنفعة

$$\text{م} = \text{ك}_{\text{١}}\,\text{ك}_{\text{٢}}$$

عرضة إلى قيد الدخل

$$\text{٦}\,\text{ك}_{\text{١}} + \text{٣}\,\text{ك}_{\text{٢}} = \text{١٨٠}$$

بين كيفية معظمة هذه الدالة عرضة إلى هذا القيد مستخدما طريقة مضروبات لاجرانج .

$$\text{ر} = \text{م} + \lambda\,\text{ن}$$

$$\text{ر} = \text{ك}_{\text{١}}\,\text{ك}_{\text{٢}} + \lambda\,(\text{١٨٠} - \text{٦}\,\text{ك}_{\text{١}} - \text{٣}\,\text{ك}_{\text{٢}})$$

$$\text{ر}_{\text{١}} = \frac{\partial\,\text{ر}}{\partial\,\text{ك}_{\text{١}}} = \text{ك}_{\text{٢}} - \text{٦}\,\lambda = \text{صفر} \qquad (\text{١})$$

$$\text{ر}_{\text{٢}} = \frac{\partial\,\text{ر}}{\partial\,\text{ك}_{\text{٢}}} = \text{ك}_{\text{١}} - \text{٣}\,\lambda = \text{صفر} \qquad (\text{٢})$$

$$\text{ر}_{\lambda} = \frac{\partial\,\text{ر}}{\partial\,\lambda} = \text{١٨٠} - \text{٦}\,\text{ك}_{\text{١}} - \text{٣}\,\text{ك}_{\text{٢}} \qquad (\text{٣})$$

ومن (١) ، (٢)

$$\text{ك}_{\text{٢}} = \text{٦}\,\lambda$$

$$\text{ك}_{\text{١}} = \text{٣}\,\lambda$$

وبإحلال هذه العلاقات فى (٣) وبحل المعادلات يمكن إيجاد :

$$\text{٥} = \lambda$$

$$\text{٣٠} = \text{ك}_{\text{٢}} \quad \text{،} \quad \text{١٥} = \text{ك}_{\text{١}}$$

$$\text{٤٥٠} = \text{٣٠} \times \text{١٥} = \text{م} \quad \therefore$$

ونظراً لأن λ = ٥ يمكن استنتاج :

$$\lambda = \text{٥} = \frac{\text{٣٠}}{\text{٦}} = \frac{\text{ك}_{\text{٢}}}{\text{ع}_{\text{١}}} = \frac{(\text{م ح})_{\text{١}}}{\text{ع}_{\text{١}}}$$

$$\lambda = \text{٥} = \frac{\text{١٥}}{\text{٣}} = \frac{\text{ك}_{\text{١}}}{\text{ع}_{\text{٢}}} = \frac{(\text{م ح})_{\text{٢}}}{\text{ع}_{\text{٢}}}$$

$$\lambda = \text{٥} = \frac{(\text{م ح})_{\text{٢}}}{\text{ع}_{\text{٢}}} = \frac{(\text{م ح})_{\text{١}}}{\text{ع}_{\text{١}}} \quad \therefore$$

وأن :

$$\text{٢} = \frac{\text{٣٠}}{\text{١٥}} = \frac{\text{ك}_{\text{٢}}}{\text{ك}_{\text{١}}} = \frac{(\text{م ح})_{\text{١}}}{(\text{م ح})_{\text{٢}}}$$

$$\text{٢} = \frac{\text{٦}}{\text{٣}} = \frac{\text{ع}_{\text{١}}}{\text{ع}_{\text{٢}}}$$

$$-\text{٢} = \frac{\text{ع}_{\text{١}}}{\text{ع}_{\text{٢}}} = \frac{(\text{م ع})_{\text{١}}}{(\text{م ح})_{\text{٢}}} = (\text{م ح ل}) \quad \therefore$$

« الإشارة السالبة لأن الميل سالب »

وبتطبيق محددها سين وإيجاد المشتقات الثانية

$$\Delta_{1} = \begin{vmatrix} \text{م}_{11} & \text{م}_{21} & \text{ن}_{1} \\ \text{م}_{12} & \text{م}_{22} & \text{ن}_{2} \\ \text{ن}_{1} & \text{ن}_{2} & \text{صفر} \end{vmatrix}$$

ومن الملاحظ أن $\text{م}_{21} = \text{م}_{12}$ حيث أن المحدد متماثل

$$\Delta_{1} = \begin{vmatrix} \text{صفر} & ١ & -٦ \\ ١ & \text{صفر} & -٣ \\ -٦ & -٣ & \text{صفر} \end{vmatrix} = ٣٦ > \text{صفر}$$

حيث أن :

$$\text{م}_{11} = \text{صفر} \qquad \text{م}_{21} = ١ \qquad \text{م}_{22} = \text{صفر}$$

$$\Delta_{2} = \begin{vmatrix} \text{م}_{22} & \text{ن}_{2} \\ \text{ن}_{2} & \text{صفر} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{صفر} & -٣ \\ -٣ & \text{صفر} \end{vmatrix} = -٩ < \text{صفر}$$

ونظراً لأن $\Delta_{1} > \text{صفر}$ ، $\Delta_{2} < \text{صفر}$ وأن عدد السلع زوجي فتكون معظمة المنفعة عند الكميات $\text{ل}_{1} = ١٥$ ، $\text{ل}_{2} = ٣٠$ عبارة عن كميات معظمة الاشباع .

ثالثا : اشتقاق دالة الطلب بطريقة مضروبات لاجرانج

أوضحنا سلفا أنه يمكن إشتقاق دالة الطلب بطريقتين هما الطريقة الكلاسيكية وطريقة منحنيات السواء والطريقة الثالثة لاشتقاق نفس الدالة هي طريقة مضروبات لاجرانج . وتتلخص هذه الطريقة فى إيجاد المشتقات الأولى لدالة لاجرانج . وبحل المعادلات بالنسبة إلى المجاهيل يمكن إيجاد دوال الطلب بالنسبة للسلع المختلفة . وسنقتصر الكلام هنا على وجود سلعتين فقط .

حيث أن دالة المنفعة :

$$م = د\,(ك_1 ، ك_2)$$

$$م = ك_1\, ك_2$$

و

خط الميزانية $$ى = ك_1 ع_1 + ك_2 ع_2$$

$$ن = ى - ك_1 ع_1 - ك_2 ع_2$$

ويمكن معظمة دالة لاجرانج واشتقاق دالة الطلب كالتالى

$$ل = م + \lambda\, ن$$

$$ل = ك_1\, ك_2 + \lambda\,(ى - ك_1 ع_1 - ك_2 ع_2)$$

والمشتقات الأولى لدالة لاجرانج كالتالى :

$$ل_1 = \frac{\partial ل}{\partial ك_1} = ك_2 - \lambda ع_1 = صفر \qquad (1)$$

$$\text{ف}_{٢} = \frac{\partial \text{ف}}{\partial \text{ك}_{٢}} = \text{ك}_{١} - \lambda\, \text{ع}_{٢} = \text{صفر} \qquad (٢)$$

$$\text{ف}_{\lambda} = \frac{\partial \text{ف}}{\partial \lambda} = \text{ى} - \text{ع}_{١}\, \text{ك}_{١} - \text{ع}_{٢}\, \text{ك}_{٢} = \text{صفر} \qquad (٣)$$

ومن المعادلات (١) ، (٢) فإن :

$$\frac{\text{ك}_{٢}}{\text{ك}_{١}} = \frac{\lambda\, \text{ع}_{١}}{\lambda\, \text{ع}_{٢}}$$

$$\text{ك}_{١} = \text{ك}_{٢}\, \frac{\text{ع}_{٢}}{\text{ع}_{١}}$$

$$\text{ك}_{٢} = \text{ك}_{١}\, \frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}}$$

وبإحلال هذه العلاقة السابقة فى المعادلة (٣)

$$\text{ى} - \text{ع}_{١}\, \text{ك}_{١} - \text{ع}_{٢}\, \text{ك}_{٢} = \text{صفر}$$

$$\text{ى} - \text{ع}_{١}\, \text{ك}_{١} - \text{ع}_{٢}\, \text{ك}_{١}\, \frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}} = \text{صفر}$$

$$\text{ى} - ٢\, \text{ع}_{١}\, \text{ك}_{١} = \text{صفر}$$

$$\text{ك}_{١} = \frac{\text{ى}}{٢\, \text{ع}_{١}} \qquad (٤)$$

$$\text{ى} - \text{ع}_{١}\, \text{ك}_{٢}\, \frac{\text{ع}_{٢}}{\text{ع}_{١}} - \text{ع}_{٢}\, \text{ك}_{٢} = \text{صفر}$$

$$\text{ك}_{٢} = \frac{\text{ى}}{٢\, \text{ع}_{٢}} \qquad (٥)$$

وتعرف العلاقات (٤) ، (٥) بدوال الطلب لكل من $ك_{١}$ ، $ك_{٢}$.
ويمكن إثبات معظمة المنفعة بإيجاد المشتقات الثانية وتطبيق قواعد محدد هاسين لمعظمة المنفعة كالتالى :

$$\Delta_{١} = \begin{vmatrix} م_{١١} & م_{٢١} & ن_{١} \\ م_{٢١} & م_{٢٢} & ن_{٢} \\ ن_{١} & ن_{٢} & صفر \end{vmatrix}$$

حيث أن :

$$م_{اب} = \frac{\partial^{٢} م}{\partial ك_{ا} \, \partial ك_{ب}} \qquad ا ، ب = ١ ، ٢$$

$$ن_{ا} = \frac{\partial ن}{\partial ك_{ا}} \qquad ا = ١ ، ٢$$

$$\Delta_{١} = \begin{vmatrix} صفر & ١ & -ع_{١} \\ ١ & صفر & -ع_{١} \\ -ع_{١} & -ع_{٢} & صفر \end{vmatrix} = ٢ ع_{١} ع_{٢} > صفر$$

$$\Delta_{٢} = \begin{vmatrix} صفر & -ع_{٢} \\ -ع_{٢} & صفر \end{vmatrix} = -(ع_{٢}^{٢}) < صفر$$

ويلاحظ أن أسعار السلع دائما موجبة القيمة فتكون $\Delta_{١} >$ صفر ، $\Delta_{٢} <$ صفر . وحيث أن عدد السلع زوجى فإن نقطة الاشباع ممعظمة .

ولاشتقاق دالة الطلب تحل المشتقات الأولى أيضا كالآتى :

$$ك_٢ - \lambda ع_١ = صفر$$

$$ك_١ - \lambda ع_٢ = صفر$$

$$\frac{ك_٢}{ك_١} = \frac{\lambda ع_١}{\lambda ع_٢}$$

$$ك_١ = ك_٢ \times \frac{ع_٢}{ع_١} \quad ، \quad ك_٢ = ك_١ \times \frac{ع_١}{ع_٢}$$

وبالتعويض فى قيد الدخل يمكن إيجاد دوال الطلب لكل من $ك_١$ ، $ك_٢$.

$$ى - ك_١ ع_١ - ك_٢ ع_٢ = صفر$$

$$ى - ك_١ ع_١ - ك_١ \times \frac{ع_١}{ع_٢} \times ع_٢ = صفر$$

$$ى - ٢ ك_١ ع_١ = صفر$$

$$ك_١ = \frac{ى}{٢ ع_١}$$

دالة الطلب للسلعة الأولى.

$$ى - ك_٢ \times \frac{ع_٢}{ع_١} \times ع_١ - ك_٢ ع_٢ = صفر$$

$$ى - ٢ ك_٢ ع_٢ = صفر$$

$$\text{ك}_{٢} = \frac{\text{ى}}{٢\,\text{ع}_{٢}}$$

دالة الطلب للسلعة الثانية

ويمكن اشتقاق دالة الطلب من دالة المنفعة في حالة ما إذا كانت دالة المنفعة محولة موجبة الإنتظام (Positive Monotonic Transformation) بطريقة مضروبات لاجرانج .

معظمة دالة المنفعة

$$\text{م}^{*} = \text{م}^{٢} = \text{ك}_{١}^{٢}\,\text{ك}_{٢}^{٢}$$

عرضة إلى :

$$\text{ى} = \text{ك}_{١}\text{ع}_{١} + \text{ك}_{٢}\text{ع}_{٢}$$

$$\text{ر} = \text{م} + \lambda\,\text{ب}$$

$$\text{ر} = \text{م}^{*} + \lambda\,\text{ب}$$

$$\text{ر} = \text{ك}_{١}^{٢}\,\text{ك}_{٢}^{٢} + \lambda\,(\text{ى} - \text{ك}_{١}\text{ع}_{١} - \text{ك}_{٢}\text{ع}_{٢})$$

والمشتقات الأولى هى :

$$\text{ر}_{١} = ٢\,\text{ك}_{١}\,\text{ك}_{٢}^{٢} - \lambda\,\text{ع}_{١} = \text{صفر} \qquad (١)$$

$$\text{ر}_{٢} = ٢\,\text{ك}_{١}^{٢}\,\text{ك}_{٢} - \lambda\,\text{ع}_{٢} = \text{صفر} \qquad (٢)$$

$$\text{ر}_{\lambda} = \text{ى} - \text{ك}_{١}\text{ع}_{١} - \text{ك}_{٢}\text{ع}_{٢} = \text{صفر} \qquad (٣)$$

ومن (١) ، (٢) يمكن اشتقاق

$$\text{ك}_{٢} = \text{ك}_{١} \times \frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}} \quad ، \quad \text{ك}_{١} = \text{ك}_{٢} \times \frac{\text{ع}_{٢}}{\text{ع}_{١}}$$

وبإحلال هذه العلاقة فى (٣) يمكن استنتاج أن :

$$\text{ك}_٢ = \frac{\text{ى}}{٢\,\text{ع}_٢}$$

$$\text{ك}_١ = \frac{\text{ى}}{٢\,\text{ع}_١}$$

وهذه هى دوال الطلب لكل من ك$_١$ ، ك$_٢$

والمشتقات الثانية هى

$$\Delta_١ = \begin{vmatrix} -\text{ع}_١ & ٤\,\text{ك}_١\,\text{ك}_٢ & ٢\,\text{ك}_٢^{٢} \\ -\text{ع}_٢ & ٢\,\text{ك}_١^{٢} & ٤\,\text{ك}_١\,\text{ك}_٢ \\ \text{صفر} & -\text{ع}_٢ & -\text{ع}_١ \end{vmatrix} > \text{صفر}$$

$$\Delta_٢ = \begin{vmatrix} -\text{ع}_٢ & ٢\,\text{ك}_١^{٢} \\ \text{صفر} & -\text{ع}_٢ \end{vmatrix} > \text{صفر}$$

ونظراً لأن $\Delta_١ >$ صفر ، $\Delta_٢ <$ صفر تكون المنفعة معظمة عند هذه المنفعة حيث أن عدد السلع زوجى .

<u>اشتقاق دالة الطلب من دالة المنفعة اللوغاريتمية عرضة إلى قيد الدخل</u>

بطريقة مضروبات لاجرانج .

$$\text{م}^{**} = \text{لو م} = \text{لو ك}_١ + \text{لو ك}_٢$$

والمطلوب معظمة دالة لاجرانج

$$\text{ل} = \text{م} + \lambda\,\text{ن}$$

$$\text{ر} = \text{م}^{**} + \lambda\, \text{ن}$$

المشتقات الأولى

$$\text{ر}_1 = \frac{1}{\text{ك}_1} - \lambda\, \text{ع}_1 = \text{صفر} \qquad (1)$$

$$\text{ر}_2 = \frac{1}{\text{ك}_2} - \lambda\, \text{ع}_2 = \text{صفر} \qquad (2)$$

$$\text{ر}_\lambda = \text{ى} - \text{ك}_1 \text{ع}_1 - \text{ك}_2 \text{ع}_2 = \text{صفر} \qquad (3)$$

ومن (١) ، (٢) يمكن استنتاج أن :

$$\text{ك}_2 = \text{ك}_1 \times \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} \quad ، \quad \text{ك}_1 = \text{ك}_2 \times \frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_1}$$

وبإحلال هذه العلاقة فى (٣) فإن :

$$\text{ك}_2 = \frac{\text{ى}}{2\, \text{ع}_2}$$

$$\text{ك}_1 = \frac{\text{ى}}{2\, \text{ع}_1}$$

وتمثل دوال الطلب التى سبق الحصول عليها

والمشتقات الثانية هى :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\text{ك}_1^2} & \text{صفر} & -\text{ع}_1 \\ \text{صفر} & -\frac{1}{\text{ك}_2^2} & -\text{ع}_2 \\ -\text{ع}_1 & -\text{ع}_2 & \text{صفر} \end{vmatrix} > \text{صفر}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\text{ل}_2^{2}} & -\text{ع}_2 \\ -\text{ع}_2 & \text{صفر} \end{vmatrix} < \text{صفر}$$

ونظراً لأن عدد السلع زوجى وأن Δ_1 > صفر ، Δ_2 < صفر تكون المنفعة معظمة عند هذه النقطة .

ا ـ تأثيرات الإحلالية والدخلية Substitution and Income Effects

علاقة إسلتسكى : Slutsky Relation

من الواضح أنه كلما تغير سعر سلعة ما فإن الكمية المطلوبة منها تتغير أيضا . وهذا ما يطلق عليه التأثير السعرى Price Effect . وبعبارة أخرى فإنه يمثل نسبة التغير فى الكمية المشتراة من سلعة ما إلى سعرها . ويمكن قياس نسبة التغير Rate of Change بتفاضل دالة الطلب بالنسبة إلى السعر . فإذا كانت دالة الطلب يمكن التعبير عنها بالدالة التالية :

$$\text{ل}_1 = \text{د}(\text{ع}_1 ، \text{ى} ، \text{ع}_2 ، \ldots)$$

حيث :

ل$_1$ = الكميات المشتراة عند مستويات سعرية مختلفة

ع$_1$ = المستويات السعرية المختلفة

ى = الدخل

ع$_2$ = سعر السلعة الثانية

ورياضيا يمكن الاشارة إلى نسبة التغير بالرمز $\frac{\partial ك_1}{\partial ع_1}$ أى التفاضل الجزئى لدالة الطلب بالنسبة إلى السعر . ويلاحظ أن دالة الطلب بالنسبة لسلعة ما لا يتوقف التغير فى الكميات المشتراة على سعر تلك السلعة بل أن هنالك عوامل أخرى تؤثر فى تلك الكميات مثل الدخل وأسعار السلع الأخرى .

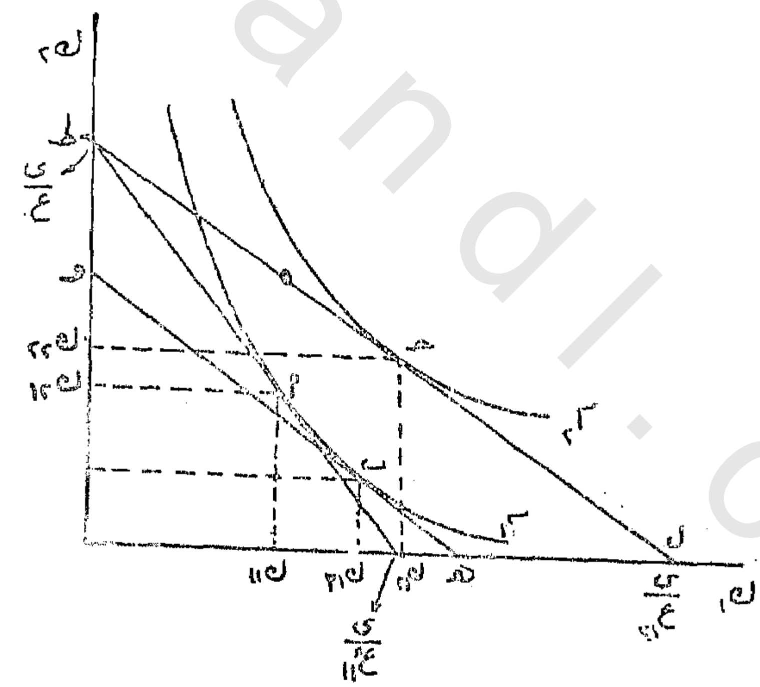
وبفرض أن سعر السلعة $ع_1$ تغير بالنقصان وأن جميع الأسعار الأخرى والدخل ثابتة فإن المستهلك يكون أكثر ميولا لإحلال هذه السلعة محل السلع الأخرى ، ومن ناحية أخرى فإن الدخل الحقيقى Real Income للمستهلك يزداد . ويؤثر هذا التغير فى الدخل الحقيقى للمستهلك أيضا على استهلاك هذه السلعة . ومن ثم يمكن القول بأن التأثير السعرى يتكون من شقين ، الشق الأول راجعا إلى إحلال السلعة $ك_1$ بدلا من سلع أخرى نتيجة لتغير السعر والشق الثانى راجعا إلى التغير فى الدخل الحقيقى . ويسمى التأثير الأول التأثير الإحلالى Substitufion Effeet والتأثير الثانى التأثير الدخلى Income Effect . أى أن :

التأثير السعرى = التأثير الإحلالى + التأثير الدخلى

ويمكن إيضاح هذه التأثيرات بيانيا كما هو مبين فى الشكل التالى . ويتضح من هذا الشكل أن المستهلك يصل إلى معظمة المنفعة عرضة إلى قيد الدخل عند النقطة ا باستهلاك الكميات $ك_{11}$ من السلعة الأولى ، $ك_{12}$ من السلعة الثانية . ويؤدى تغير السعر بالنقصان إلى تحرك خط الميزانية إلى اليمين ثابتا عن

النقطة ط وتكون نقطة التوازن الثانية لمعظمة المنفعة عند النقطة حـ وتكون نقطة الاشباع المثلى بعد تغير السعر هى الكميات ك٢١ ، ك٢٢ من السلعة الأولى والسلعة الثانية على التوالى . ويكون التحرك على محور السلعة ك١ من ك١١ إلى ك٢١ هو عبارة عن التغير فى الكمية ك١ نتيجة لتغير سعرها بالنقصان وهذا ما يعرف بالتأثير السعرى .

ويفرض فقدان المستهلك لجزءاً من دخله مساويا للزيادة الحقيقية فى الدخل نتيجة لنقصان السعر فإنه يتكون خطاً موازيا لخط الميزانية ط ل وهو و هـ مماساً لمنحنى السواء م١ عند نقطة التوازن ب أى نقطة تعظيم



شكل (١٦) التأثيرات الإحلالية والدخلية

الاشباع . ويكون الإنتقال من النقطة ا إلى النقطة ب عبارة عن التأثير الإحلالى . ويقيس تلك الكمية من السلعة الأولى ك١ التى استخدمت بدلا من السلعة الثانية ك٢ نظراً لرخصها النسبى مع فرض ثبات الدخل وسعر السلعة الثانية .

التأثير الإحلالى :

يعرف التأثير الإحلالى بأنه عبارة عن التغير فى الكمية المشتراة من سلعة ما نتيجة لتغير سعرها مع فرض ثبات أسعار السلع الأخرى والدخل الحقيقى للمستهلك .

التأثير الدخلى :

يمكن إيضاح التأثير الدخلى من الشكل السابق . فمثلا عندما يحصل المستهلك على تلك الكمية المفقودة من الدخل فإن المستهلك سينتقل من نقطة التوازن ب إلى النقطة الأخرى حـ ويسمى ذلك الإنتقال من ب إلى حـ بتأثير الدخل . ومن ثم يمكن تعريف التأثير الدخلى بأنه التغير فى الكمية المطلوبة من سلعة ما نتيجة التغير فى الدخل الحقيقى للمستهلك الذى حدث من تغير سعر تلك السلعة مع فرض ثبات أسعار السلع الأخرى .

ومن الشكل السابق يمكن تقسيم التأثير السعرى إلى شطريه فالإنتقال من ا إلى ب هو التأثير الإحلالى والإنتقال من ب إلى حـ هو التأثير الدخلى ويكون التأثير السعرى هو الإنتقال من ا إلى حـ .

اشتقاق التأثيرات الإحلالية والدخلية رياضيا فى حالة الإنفاق على سلعتين :

أوضحنا سلفا أن الهدف الأساسى للمستهلك هو معظمة المنفعة عرضة إلى دخل محدد وأسعار ثابتة . ويمكن وضع ذلك فى صورة مضروبات لاجرانج كالتالى :

$$ر = م + \lambda ن$$

$$\text{ل} = \text{م} + \lambda\,(\text{ى} - \text{ك}_1\text{ع}_1 - \text{ك}_2\text{ع}_2)$$

حيث :

$$\text{م} = \text{د}\,(\text{ك}_1 \text{،}\ \text{ك}_2)$$

ويمكن إيجاد قيم كل من ك_1، ك_2، λ بحل المشتقات الأولى لمعظمة الدالة . والمشتقات الأولى هى :

$$\text{ل}_1 = \text{ف}_1 - \lambda\,\text{ع}_1 = \text{صفر} \qquad (1)$$

$$\text{ل}_2 = \text{ف}_2 - \lambda\,\text{ع}_2 = \text{صفر} \qquad (2)$$

$$\text{ل}_\lambda = \text{ى} - \text{ك}_1\text{ع}_1 - \text{ك}_2\text{ع}_2 = \text{صفر} \qquad (3)$$

حيث أن :

$$\text{ل}_1 = \frac{\partial\,\text{ل}}{\partial\,\text{ك}_1}$$

حيث تأخذ ١ القيم ١ ، ٢

$$\text{ف}_1 = \frac{\partial\,\text{م}}{\partial\,\text{ك}_1}$$

حيث تأخذ ١ القيم ١ ، ٢

$$\text{ل}_\lambda = \frac{\partial\,\text{ل}}{\partial\,\lambda}$$

ويمكن اشتقاق نقطة الاشباع المثلى من المعادلات الثلاث السالبة .

ويجب ملاحظة أنه فى حالة تغير الأسعار والدخل فإن حل هذه المعادلات السابقة سيكون مختلفا ، فبتغير الدخل (ى) ، وسعر السلعة الأولى

(ع_1) ، وسعر السلعة الثانية (ع_2) يسبب تغيرا فى الكمية المطلوبة من السلع ك_1 ، ك_2 وكذلك λ . ويمكن تحديد هذه المتغيرات بأخذ التفاضل الكلى للمشتقات الأولى أى لكل من المعادلات ١ ، ٢ ، ٣ .

$$\text{د}\,\text{س}_1 = \text{ف}_{11}\,\text{د}\,\text{ك}_1 + \text{ف}_{21}\,\text{د}\,\text{ك}_2 - \text{ع}_1\,\text{د}\,\lambda - \lambda\,\text{د}\,\text{ع}_1 = \text{صفر} \qquad (٤)$$

$$\text{د}\,\text{س}_2 = \text{ف}_{21}\,\text{د}\,\text{ك}_1 + \text{ف}_{22}\,\text{د}\,\text{ك}_2 - \text{ع}_2\,\text{د}\,\lambda - \lambda\,\text{د}\,\text{ع}_2 = \text{صفر} \qquad (٥)$$

$$\text{د}\,\text{س}_\lambda = \text{د}\,\text{ى} - \text{ع}_1\,\text{د}\,\text{ك}_1 - \text{ك}_1\,\text{د}\,\text{ع}_1 - \text{ع}_2\,\text{د}\,\text{ك}_2 - \text{ك}_2\,\text{د}\,\text{ع}_2 = \text{صفر} \qquad (٦)$$

ومجاهيل هذه المعادلات هى د ك_1 ، د ك_2 ، د λ . ونظراً لأن عدد المجاهيل مساويا لعدد المعادلات يمكن إيجاد قيم تلك المجاهيل . ويجب معرفة التغير فى ى ، ع_1 ، ع_2 يمكن التحكم فيه ، أى أن هدفنا هو تغييرها وقياس نتيجة تأثير هذه المتغيرات فى الطلب على السلعتين . ويمكن كتابة المعادلات السابقة فى صورة مصفوفات رياضية كالتالى :

$$\begin{bmatrix} \text{ف}_{11} & \text{ف}_{21} & -\text{ع}_1 \\ \text{ف}_{21} & \text{ف}_{22} & -\text{ع}_2 \\ -\text{ع}_1 & -\text{ع}_2 & \text{صفر} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{د}\,\text{ك}_1 \\ \text{د}\,\text{ك}_2 \\ \text{د}\,\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\,\text{د}\,\text{ع}_1 \\ \lambda\,\text{د}\,\text{ع}_2 \\ -\text{د}\,\text{ى} + \text{ك}_1\,\text{د}\,\text{ع}_1 + \text{ك}_2\,\text{د}\,\text{ع}_2 \end{bmatrix}$$

ويجب ملاحظة أن $\text{ف}_{21} = \text{ف}_{12}$ حيث أن المصفوفة الرياضية متماثلة .

وبفرض أن :

$$\underline{\text{ا}} = \begin{bmatrix} \text{ف}_{11} & \text{ف}_{21} & -\text{ع}_1 \\ \text{ف}_{21} & \text{ف}_{22} & -\text{ع}_2 \\ -\text{ع}_1 & -\text{ع}_2 & \text{صفر} \end{bmatrix} \qquad \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} \text{دك}_1 \\ \text{دك}_2 \\ \text{د}\lambda \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{حـ}} = \begin{bmatrix} \lambda\,\text{دع}_1 \\ \lambda\,\text{دع}_2 \\ -\text{دى} + \text{ك}_1\,\text{دع}_1 + \text{ك}_2\,\text{دع}_2 \end{bmatrix}$$

حيث $\underline{\text{ا}}$ ، $\underline{\text{ب}}$ ، $\underline{\text{حـ}}$ تمثل مصفوفات رياضية

أى أن :

$$\underline{\text{ا}}\ \underline{\text{ب}} = \underline{\text{حـ}}$$

ويمكن إيجاد حل هذه المجاهيل بالمصفوفات الرياضية كما يلى :

$$\underline{\text{ب}} = \underline{\text{ا}}^{-1}\ \underline{\text{حـ}}$$

حيث أن :

$\underline{\text{ا}}^{-1}$ هو معكوس المصفوفة $\underline{\text{ا}}$

ولحل هذه المعادلات الآنية Simultaneous Equations يجب أن تكون قيمة محدد المصفوفة $\underline{\text{ا}}$ لاتساوى الصفر أى $|\underline{\text{ا}}| \neq$ صفر . ولكى تكون المنفعة معظمة يجب أن تكون قيمة محدد هاسين الأولى موجبة وقيمة المحدد الثانى سالبة حيث أن عدد السلع زوجى .

وإذا رمزنا إلى المحدد $|\text{أ}| = \text{ح}$ ، $\text{ح}_{\text{أ ب}}$ عبارة عن العامل المشترك Cofactor (أ، ب) للمصفوفة أ. وباستخدام قاعدة كرامر Cramer,s Rule يمكن إيجاد قيمة كل من د ك١ ، د ك٢ كالتالى :

$$\text{د ك}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda\,\text{د ع}_1 & \text{ف}_{21} & -\text{ع}_1 \\ \lambda\,\text{د ع}_2 & \text{ف}_{22} & -\text{ع}_2 \\ -\text{د ى} + \text{ك}_1\,\text{د ع}_1 + \text{ك}_2\,\text{د ع}_2 & -\text{ع}_2 & \text{صفر} \end{vmatrix}}{\text{ح}}$$

ويمكن إيجاد قيمة البسط (المحدد) عن طريق الامتداد بصف أو عمود . ويمكن إيجاد تلك القيمة عن طريق العمود الثالث مع الأخذ فى الاعتبار الإشارات .

$$\text{د ك}_1 = \frac{(-1)^{1+3} \times (-\text{ع}_1) \begin{vmatrix} \lambda\,\text{د ع}_2 & \text{ف}_{22} \\ -\text{د ى} + \text{ك}_1\,\text{د ع}_1 + \text{ك}_2\,\text{د ع}_2 & -\text{ع}_2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} (-\text{ع}_2) \begin{vmatrix} \lambda\,\text{د ع}_1 & \text{ف}_{21} \\ -\text{د ى} + \text{ك}_1\,\text{د ع}_1 + \text{ك}_2\,\text{د ع}_2 & -\text{ع}_2 \end{vmatrix}}{\text{ح}}$$

$$\text{د ك}_1 = \frac{-\text{ع}_1 \left\{ -\text{ع}_2\,\lambda\,\text{د ع}_2 - \text{ف}_{22} (-\text{د ى} + \text{ك}_1\,\text{د ع}_1 + \text{ك}_2\,\text{د ع}_2) \right\} + \text{ع}_2 \left\{ -\text{ع}_2\,\lambda\,\text{د ع}_1 - \text{ف}_{21} (-\text{د ى} + \text{ك}_1\,\text{د ع}_1 + \text{ك}_2\,\text{د ع}_2) \right\}}{\text{ح}}$$

$$\text{ءك}_1 = \frac{\text{ع}_1\text{ع}_2\lambda\,\text{ءع}_2 + \text{ع}_1\text{ف}_{22}\left(-\text{ءى} + \text{ك}_1\text{ءع}_1 + \text{ك}_2\text{ءع}_2\right) - \text{ع}_2^2\lambda\,\text{ءع}_1 - \text{ع}_2\text{ف}_{21}\left(-\text{ءى} + \text{ك}_1\text{ءع}_1 + \text{ك}_2\text{ءع}_2\right)}{\text{ح}}$$

$$\text{ءك}_1 = \frac{\lambda\,\text{ءع}_1\text{ح}_{11} + \lambda\,\text{ءع}_2\text{ح}_{12} + \left(-\text{ءى} + \text{ك}_1\text{ءع}_1 + \text{ك}_2\text{ءع}_2\right)\left(\text{ع}_1\text{ف}_{22} - \text{ع}_2\text{ف}_{21}\right)}{\text{ح}}$$

$$\text{ءك}_1 = \frac{\lambda\,\text{ءع}_1\text{ح}_{11} + \lambda\,\text{ءع}_2\text{ح}_{12} + \left(-\text{ءى} + \text{ك}_1\text{ءع}_1 + \text{ك}_2\text{ءع}_2\right)\text{ح}_{13}}{\text{ح}}$$

وبنفس الطريقة يمكن حساب ءك_2

$$\text{ءك}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \text{ف}_{11} & \lambda\,\text{ءع}_1 & -\text{ع}_1 \\ \text{ف}_{21} & \lambda\,\text{ءع}_2 & -\text{ع}_2 \\ -\text{ع}_1 & -\text{ءى} + \text{ك}_1\text{ءع}_1 + \text{ك}_2\text{ءع}_2 & \text{صفر} \end{vmatrix}}{\text{ح}}$$

$$\text{ءك}_2 = \frac{(-1)^{1+3}\times(-\text{ع}_1)\begin{vmatrix} \text{ف}_{21} & \lambda\,\text{ءع}_2 \\ -\text{ع}_1 & -\text{ءى} + \text{ك}_1\text{ءع}_1 + \text{ك}_2\text{ءع}_2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\times(-\text{ع}_2)\begin{vmatrix} \text{ف}_{11} & \lambda\,\text{ءع}_1 \\ -\text{ع}_1 & -\text{ءى} + \text{ك}_1\text{ءع}_1 + \text{ك}_2\text{ءع}_2 \end{vmatrix}}{\text{ح}}$$

$$\text{ءك}_2 = \frac{-\text{ع}_1\left\{\text{ف}_{21}\left(-\text{ءى} + \text{ك}_1\text{ءع}_1 + \text{ك}_2\text{ءع}_2\right)\right\} + \text{ع}_2\left\{\text{ف}_{11}\left(-\text{ءى} + \text{ك}_1\text{ءع}_1 + \text{ك}_2\text{ءع}_2\right) + \text{ع}_1\lambda\,\text{ءع}_2\right\}}{\text{ح}}$$

$$\text{دك}_{٢} = \frac{-\text{ع}_{١}\text{ف}_{٢١}(-\text{دى} + \text{ك}_{١}\text{دع}_{١} + \text{ك}_{٢}\text{دع}_{٢}) - \text{ع}_{١}^{٢}\lambda\,\text{دع}_{٢} + \text{ع}_{٢}\text{ف}_{١١}(-\text{دى} + \text{ك}_{١}\text{دع}_{١} + \text{ك}_{٢}\text{دع}_{٢}) + \text{ع}_{١}\text{ع}_{٢}\lambda\,\text{دع}_{١}}{\text{ح}}$$

$$\text{دك}_{٢} = \frac{\lambda\,\text{دع}_{١}\text{ح}_{٢١} + \lambda\,\text{دع}_{٢}\text{ح}_{٢٢} + (-\text{دى} + \text{ك}_{١}\text{دع}_{١} + \text{ك}_{٢}\text{دع}_{٢})\text{ح}_{٣٢}}{\text{ح}}$$

ولإشتقاق التأثير السعرى وشطريه التأثيرات الإحلالية والدخلية سنفرض عديد من الفروض للحالات التالية :

الحالة الأولى :

بفرض أن $\text{دع}_{٢} = \text{دى} =$ صفر ، وبقسمة $\text{دك}_{١}$ على $\text{دع}_{١}$

$$\frac{\partial \text{ك}_{١}}{\partial \text{ع}_{١}} = \frac{\lambda\,\text{ح}_{١١}}{\text{ح}} + \text{ك}_{١}\frac{\text{ح}_{١٣}}{\text{ح}}$$

التأثير السعرى = التأثير الإحلالى + التأثير الدخلى

ويقيس التفاضل الجزئى التأثير السعرى حيث يتكون الطرف الأيسر من المعادلة من شقى التأثير الإحلالى والدخلى ولكن السؤال الذى يتبادر إلى الذهن هو كيف يمكن فصل التأثيرات بشرطيها كل عن الآخر .

الحالة الثانية :

(ا) بفرض أن الدخل الحقيقى ثابتا فهذا يعنى أن المنفعة ثابتة . ورياضيا يمكن كتابتها دم = صفر . وبأخذ التفاضل الكلى لدالة المنفعة .

$$\text{دم} = \text{ف}_{١}\,\text{دك}_{١} + \text{ف}_{٢}\,\text{دك}_{٢} = \text{صفر}$$

ومن المشتقات الأولى لمعظمة دالة المنفعة نجد أن :

$$\frac{\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ك}_1}}{\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ك}_2}} = \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}$$

$$\frac{\text{ف}_1}{\text{ف}_2} = \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}$$

وبقسمة ء م على ف٢

$$-\frac{\text{ف}_1}{\text{ف}_2}\,\text{ء ك}_1 + \text{ء ك}_2 = \text{صفر}$$

وبإحلال المتساويات :

$$\frac{\text{ف}_1}{\text{ف}_2} = \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}$$ فى العلاقة السابقة

$$\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \text{ك}_1 + \text{ء ك}_2 = \text{صفر}$$

وبضرب هذه العلاقة فى ع٢ فإن :

$$\text{ع}_1\,\text{ء ك}_1 + \text{ع}_2\,\text{ء ك}_2 = \text{صفر}$$

وقد سبق إيضاح أن :

$$\text{د س}_{\lambda} = \text{د ى} - \text{ع}_{١}\,\text{د ك}_{١} - \text{ك}_{١}\,\text{د ع}_{١} - \text{ع}_{٢}\,\text{د ك}_{٢} - \text{ك}_{٢}\,\text{د ع}_{٢}$$

$$= \text{صفر}$$

$$\text{د ى} - \text{ك}_{١}\,\text{د ع}_{١} - \text{ك}_{٢}\,\text{د ع}_{٢} = \text{ع}_{١}\,\text{د ك}_{١} + \text{ع}_{٢}\,\text{د ك}_{٢}$$

ولذلك فإن :

$$- \text{د ى} + \text{ك}_{١}\,\text{د ع}_{١} + \text{ك}_{٢}\,\text{د ع}_{٢} = \text{صفر}$$

(ب) بفرض أن $\text{د ع}_{٢}$ = صفر وبإحلال $- \text{د ى} + \text{ك}_{١}\,\text{د ع}_{١} + \text{ك}_{٢}\,\text{د ع}_{٢}$ = صفر ، $\text{د ع}_{٢}$ = صفر في معادلة $\text{د ك}_{١}$ وبقسمتها على $\text{د ع}_{١}$ نستنتج أن :

$$\left(\frac{\partial \text{ك}_{١}}{\partial \text{ع}_{١}}\right)_{\text{م} = \text{ثابت}} = \frac{\lambda\,\text{ح}_{١١}}{\text{ح}}$$

وتعرف $\frac{\lambda\,\text{ح}_{١١}}{\text{ح}}$ بالتأثير الإحلالي أي أنه عبارة عن التغير في $\text{ك}_{١}$ الناتج عن التغير في سعرها $\text{ع}_{١}$ مع فرض ثبات سعر السلعة $\text{ك}_{٢}$ والدخل الحقيقي .

وبطرح التأثير الاحلالي من التأثير السعري يمكن الحصول على التأثير الدخلي .

$$\frac{\partial \text{ك}_{١}}{\partial \text{ع}_{١}} - \left(\frac{\partial \text{ك}_{١}}{\partial \text{ع}_{١}}\right)_{\text{م} = \text{ثابت}} = \frac{\lambda\,\text{ح}_{١١}}{\text{ح}} + \text{ك}_{١}\,\frac{\text{ح}_{١٣}}{\text{ح}} - \frac{\lambda\,\text{ح}_{١١}}{\text{ح}}$$

$$= \text{ك}_{١}\,\frac{\text{ح}_{١٣}}{\text{ح}}$$

أي أن التأثير السعري يمكن أن ينفصل إلى شقيه التأثير الدخلي والتأثير الاحلالي

$$\frac{\partial \text{ك}_{١}}{\partial \text{ع}_{١}} = \frac{\lambda\, \text{ح}_{١١}}{\text{ح}} + \text{ك}_{١} \frac{\text{ح}_{١٢}}{\text{ح}}$$

التأثير السعرى = التأثير الاحلالى + التأثير الدخلى

الحالة الثالثة :

بفرض أن الأسعار ثابتة وأن المتغير الوحيد هو الدخل أى أن :

$$\text{ى ع}_{١} = \text{ى ع}_{٢} = \text{صفر}$$

وبقسمة ى $\text{ك}_{١}$ على ى ى فإن :

$$\left(\frac{\partial \text{ك}_{١}}{\partial \text{ى}}\right)_{\substack{\text{ع}_{١} = \text{ثابت} \\ \text{ع}_{٢} = \text{ثابت}}} = - \frac{\text{ح}_{١٢}}{\text{ح}}$$

ويمكن تلخيص النتائج التى حصلنا عليها من الحالات الثلاث بإحلال القيم المشتقة فى معادلة تأثير السعر كما يلى :

$$\frac{\partial \text{ك}_{١}}{\partial \text{ع}_{١}} = \left(\frac{\partial \text{ك}_{١}}{\partial \text{ع}_{١}}\right)_{\text{م} = \text{ثابت}} - \text{ك}_{١} \left(\frac{\partial \text{ك}_{١}}{\partial \text{ى}}\right)_{\substack{\text{ع}_{١} = \text{ثابت} \\ \text{ع}_{٢} = \text{ثابت}}}$$

وتعرف هذه المعادلة بعلاقة إسلتسكى Slutsky Relation ومن ثم يمكن كتابة المعادلة العامة فى حالة وجود عدد قدره ں من السلع كالتالى :

$$\frac{\partial ك_1}{\partial ع_1} = \left(\frac{\partial ك_1}{\partial ع_1}\right)_{م = ثابت} - ك_1 \left(\frac{\partial ك_1}{\partial ى}\right)_{\substack{ع_1 = ثابت \\ \vdots \\ ع_ن = ثابت}}$$

حيث تبدأ م من ١ إلى ن

استنباط قيم التأثيرات الاحلالية والدخلية

قبل أن نقوم بإيجاد قيم التأثيرات الإحلالية والدخلية نود أن نشير إلى أن التأثير الإحلالى دائماً سالب القيمة . والتأثير الإحلالى هو :

$$\left(\frac{\partial ك_1}{\partial ع_1}\right)_{م = ثابت} = \frac{\lambda ح_{11}}{ح}$$

وقد أوضحنا سلفا أن λ عبارة عن الوحدة الحدية للنقود دائماً موجبة وكذلك فإن المحدد ح موجب القيمة ويدل على أن التأثير الإحلال يعتمد على قيمة العامل المشترك Cofactor $ح_{11}$.

$$ح_{11} = \begin{vmatrix} ف_{22} & -ع_2 \\ -ع_2 & صفر \end{vmatrix} = -ع_2^2 < صفر$$

ونظراً لأن السعر دائماً موجبا فإن $ح_{11}$ دائماً سالبة القيمة ويثبت ذلك أن التأثير الإحلالى دائماً سالب القيمة .

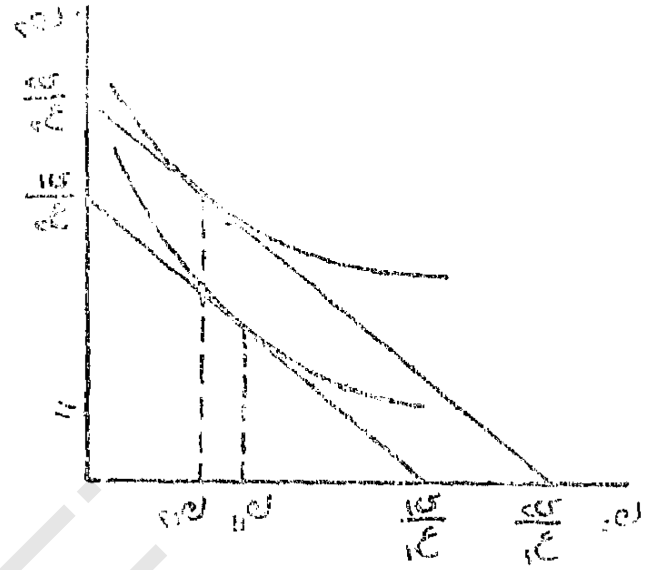
ويختلف الحال فى التأثير الدخلى عن التأثير الإحلالى حيث أن التأثير الدخلى يكون إما موجبا أو سالبا القيمة . ويرجع سبب إختلاف القيمة إلى نوع السلعة من ناحية أنها رديئة أو عادية أو ممتازة . ويمكن معرفة نوعية هذه السلعة رديئة أو ممتازة من إشارة التأثير الدخلى . فإذا كان التأثير الإحلالى موجب القيمة دل ذلك على أن السلعة رديئة أما إذا كان التأثير الإحلالى سالب القيمة فإن السلعة ممتازة .

ومن تعريف السلعة الرديئة فإن :

$$- ك_1 \left(\frac{\partial ك_1}{\partial ى} \right)_{ع_1 = \text{ثابت}} > \text{صفر}$$
$$ع_2 = \text{ثابت}$$

ولكن المتبع فى تعريف السلعة الرديئة أنها تلك السلعة التى كلما إزداد دخل المستهلك كلما تناقصت الكمية المشتراة منها كما هو مبين فى الشكل التالى أو رياضيا فإن :

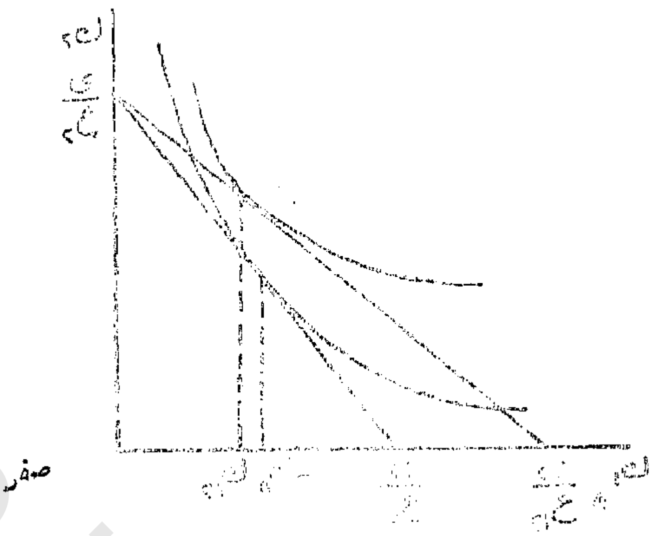
$$\left(\frac{\partial ك_1}{\partial ى} \right)_{ع_1 = \text{ثابت}} < \text{صفر}$$
$$ع_2 = \text{ثابت}$$



شكل (١٧) السلعة ك١ رديئة

ويجب ملاحظة أنه فى حالة ما إذا كانت الكمية المستهلكة من ك١ كبيرة نسبيا فإن التأثير الدخلى قد يكون أكبر من التأثير الإحلالى (سالب القيمة دائماً) ويكون التأثير السعرى موجبا . وتوجد مثل هذه الحالة فى الطبقات الأقل من المتوسطة التى تستهلك كميات كبيرة من الخبز . فلو انخفض ثمن الخبز إلى النصف مثلا فإن المستهلك سيقوم بشراء نفس الكمية السابقة من الخبز أو أقل نظراً لوجود زيادة فى دخله الحقيقى وتكون النتيجة تحول تلك الزيادة فى دخله الحقيقى إلى سلع لم يكن يتمتع بشرائها أو شراء سلع كان يقوم بشرائها ولكن بكميات أكبر .

وهنا تعريف آخر للسلع الرديئة بأنها تلك السلع التى كلما نقص سعرها كلما نقصت الكمية المستهلكة منها مع فرض ثبات الدخل وأسعار السلع الأخرى كما هو مبين فى الشكل التالى :



شكل (١٨) السلعة $ك_1$ سلعة رديئة

وقد تكون الكمية المستهلكة من السلعة الرديئة صغيرة نسبيا . وفي هذه الحالة يكون التأثير الإحلالي أقل من التأثير الدخلي وتكون المحصلة أن التأثير السعري سالب الإشارة .

أما عن السلع الممتازة أو العادية فهي تلك السلع التي تزداد الكميات المشتراة منها إذا إزداد دخل المستهلك وتنقص بنقص دخله مع فرض ثبات أسعار السلع الأخرى . ورياضيا يمكن كتابتها في الصورة التالية :

$$\left[\frac{\partial ك_1}{\partial ى}\right]_{\substack{ع_1 = ثابت \\ ع_2 = ثابت}} > صفر$$

أي أن التأثير الدخلي لهذه السلع سالب الإشارة :

$$-ك_1 \left[\frac{\partial ك_1}{\partial ى}\right]_{\substack{ع_1 = ثابت \\ ع_2 = ثابت}} < صفر$$

ونظراً لأن التأثير الدخلى والإحلالى سالبي الإشارة فإن التأثير السعرى سيكون سالب الإشارة وتكون دالة الطلب سالبة الميل .

وفى مثالنا السابق م = ك١ ك٢ عند الأسعار ع١ = ٦ ، ع٢ = ٣ ، ى = ١٨٠ وجد أن المستهلك يكون فى حالة معظمة للمنفعة عند الكميات ك١ = ١٥ ، ك٢ = ٣٠ وأن λ = ٥ وكانت المشتقات الأولى كما يلى :

$$\text{م}_1 = \text{ك}_2 - \lambda\,\text{ع}_1 = \text{صفر}$$

$$\text{م}_2 = \text{ك}_1 - \lambda\,\text{ع}_2 = \text{صفر}$$

$$\text{م}_\lambda = \text{ى} - \text{ع}_1\,\text{ك}_1 - \text{ع}_2\,\text{ك}_2 = \text{صفر}$$

وبأخذ التفاضلات الكلية للدوال الثلاثة السابقة وترتيبها نجد أن :

$$\text{د ك}_2 - \text{ع}_1\,\text{د}\lambda = \lambda\,\text{د ع}_1$$

$$\text{د ك}_1 - \text{ع}_2\,\text{د}\lambda = \lambda\,\text{د ع}_2$$

$$-\text{ع}_1\,\text{د ك}_1 - \text{ع}_2\,\text{د ك}_2 = -\text{د ى} + \text{ك}_1\,\text{د ع}_1 + \text{ك}_2\,\text{د ع}_2$$

ويمكن كتابتها فى صورة مصفوفات كالتالى :

$$\begin{bmatrix} \text{صفر} & 1 & -\text{ع}_1 \\ 1 & \text{صفر} & -\text{ع}_2 \\ -\text{ع}_1 & -\text{ع}_2 & \text{صفر} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{د ك}_1 \\ \text{د ك}_2 \\ \text{د}\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\,\text{د ع}_1 \\ \lambda\,\text{د ع}_2 \\ -\text{د ى} + \text{ك}_1\,\text{د ع}_1 + \text{ك}_2\,\text{د ع}_2 \end{bmatrix}$$

أو

$\underline{\text{ا}}\ \underline{\text{ب}} = \underline{\text{ح}}$. وإذا كان المحدد ح = |ا| وأن ح$_{\text{ر ب}}$ هى عبارة عن العامل المشترك (ا ، ب) إلى المصفوفة ا . ولإيجاد قيمة ى ل$_1$ يجب أن نحسب القيم التالية :

$$\text{ح} = \begin{vmatrix} \text{صفر} & 1 & -\text{ع}_1 \\ 1 & \text{صفر} & -\text{ع}_2 \\ -\text{ع} & -\text{ع}_2 & \text{صفر} \end{vmatrix} = 2\,\text{ع}_1\text{ع}_2$$

$$\text{ح}_{11} = \begin{vmatrix} \text{صفر} & -\text{ع}_2 \\ -\text{ع}_2 & \text{صفر} \end{vmatrix} = -(\text{ع}_2)^2$$

$$\text{ح}_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & -\text{ع}_1 \\ -\text{ع}_2 & \text{صفر} \end{vmatrix} = \text{ع}_1\text{ع}_1$$

وبإحلال هذه القيم فى معادلة ى ل$_1$ المشتقة فإن :

$$\text{ى ل}_1 = \frac{\lambda(-\text{ع}_2^2)\,\text{ى ع}_1 + \lambda(\text{ع}_1\text{ع}_2)\,\text{ى ع}_2 + (-\text{ى ى} + \text{ل}_1\,\text{ى ع}_1 + \text{ل}_2\,\text{ى ع}_2)(-\text{ع}_2)}{2\,\text{ع}_1\text{ع}_2}$$

وبفرض أن ى ع$_2$ = ى ى = صفر وبقسمة ى ل$_1$ على ى ع$_1$

$$\frac{\partial \text{ل}_1}{\partial \text{ع}_1} = \frac{-\lambda\text{ع}_2^2 - \text{ل}_1\text{ع}_2}{2\,\text{ع}_1\text{ع}_1}$$

$$\frac{\partial \text{ل}_1}{\partial \text{ع}_1} = \frac{-\lambda\text{ع}_2^2}{2\,\text{ع}_1} \quad \frac{-\text{ل}_1}{2\,\text{ع}_1}$$

التأثير السعرى = التأثير الإحلالى + التأثير الدخلى

وبإحلال القيم المتحصل عليها فى حالة تعظيم المنفعة :

$$\frac{\partial ك_1}{\partial ع_1} = \frac{-٥ \times ٢}{٢ \times ٦} - \frac{١٥}{٢ \times ٦} = \frac{-٥}{٤} - \frac{٥}{٤} = -٢ر٥٠$$

فإن كلتا التأثيرين لهما نفس الإشارة السالبة . ونظراً لأن التأثير الدخلى سالب الإشارة فإن ذلك يدل على أن السلعة $ك_1$ سلعة ممتازة أو عادية وقيمة التأثير السعرى —٢ر٥٠ تعنى أنه إذا إزداد سعر الوحدة فإن الكمية تتناقص بمقدار = ٢ر٥٠ وحدة .

السلع الإحلالية والسلع التكميلية Substitute and Complements Goods

بعد استعراض التغير فى $ك_1$ الناتج عن التغير فى سعرها $ع_1$ يتبادر إلى الذهن السؤال التالى : ما هو تأثير التغير فى $ع_2$ على الكمية المطلوبة من $ك_1$ وكذلك تأثير التغير فى السعر $ع_2$ على الكمية المطلوبة من $ك_2$. وقد سبق إيضاح أنه من التفاضل الكلى للمشتقات الأولى لمعظمة دالة المنفعة نستنتج أن :

$$ى ك_1 = \frac{\lambda\, ى ع_1\, ح_{١١} + \lambda\, ى ع_2\, ح_{٢١} + (-ى ى + ك_1\, ى ع_1 + ك_2\, ى ع_2)\, ح_{١٣}}{ح}$$

ولإشتقاق التأثير السعرى الناتج عن التغير فى $ع_2$ على الكمية المطلوبة من السلعة $ك_1$ نفرض أن $ى ع_1$ = $ى ى$ = صفر وبقسمة $ى ك_1$ على $ى ع_2$ نستنتج أن :

$$\frac{\partial ك_١}{\partial ع_٢} = \frac{\lambda\, ح_{٢١}}{ح} + ك_٢ \frac{ح_{١٣}}{ح}$$

التأثير السعرى = التأثير الإحلالى + التأثير الدخلى

وباستخدام نفس الطريقة السابقة يمكن إثبات أن $\frac{\lambda\, ح_{٢١}}{ح}$ ، ك٢ $\frac{ح_{١٣}}{ح}$ هما التأثير الإحلالى والتأثير الدخلى على التوالى كما يمكن اشتقاق التأثير السعرى للتغير فى السعر ع١ على الكمية المطلوبة من السلعة ك٢ .

$$\frac{\partial ك_٢}{\partial ع_١} = \frac{\lambda\, ح_{١٢}}{ح} + ك_٢ \frac{ح_{٢٣}}{ح}$$

التأثير السعرى = التأثير الاحلالى + التأثير الدخلى

ويمكن كتابة هذه العلاقة فى الصورة التالية لعدد من السلع قدره ن :

$$\frac{\partial ك_١}{\partial ع_ب} = \left[\frac{\partial ك_١}{\partial ع_ب}\right]_{م = ثابت} - ك_ب \left[\frac{\partial ك_١}{\partial ى}\right]_{ع_١ = ثابت}$$

$\vdots$

$ع_ن = ثابت$

وتعتبر المصفوفة ا مصفوفة متماثلة أى أن $ح_{اب} = ح_{با}$ وعلى هذا فإن $ح_{٢١} = ح_{١٢}$ ومن ثم فإن التأثيرات الإحلالية متساوية $\frac{\lambda\, ح_{٢١}}{ح} = \frac{\lambda\, ح_{١٢}}{ح}$. وبفرض ثبات الدخل الحقيقى فان التغير فى الكمية المطلوبة

للسلعة $ك_{ا}$ الناتجة عن التغير فى سعر السلعة $ع_{ب}$ هو نفسه التغير فى الكمية المطلوبة للسلعة $ك_{ب}$ الناتجة عن التغير فى سعر السلعة $ع_{ا}$.

وإذا رمزنا إلى :

$$\frac{\lambda ح_{با}}{ح} = ت_{با} \quad ، \quad \frac{\lambda ح_{اب}}{ح} = ت_{اب}$$

حيث أن ا ، ب تاخذ القيم من ١ إلى ن فيمكن القول أن :

$$ت_{اب} = ت_{با}$$

ويمكن استخدام الرمز $ت_{اب}$ لتعريف السلع الإحلالية والتكميلية والمستقلة Independent . فاذا كانت $ت_{اب} = ت_{با} >$ صفر فان ذلك يعنى أن السلعتين $ك_{ا}$ ، $ك_{ب}$ سلع إحلالية Substitute Goods كالشاى والقهوة مثلا . أما إذا كانت $ت_{اب} = ت_{با} <$ صفر فان السلع $ك_{ا}$ ، $ك_{ب}$ تعتبر سلع تكميلية كالشاى والسكر .

أما عن السلع المستقلة فهى عبارة عن تلك السلع التى يكون استهلاك كميات منها ليس له أى أثر على استهلاك وحدات من سلع أخرى . أى أن التغير فى الكمية المطلوبة من أحدها ليس له أى تأثير على الكميات المطلوبة من سلعة أخرى أو $ت_{اب} = ت_{با} =$ صفر .

ويمكن إيضاح ذلك من مثالنا السابق حيث أن م = $\text{ك}_1 \, \text{ك}_2$ ، $\text{ع}_1 = ٦$ ، $\text{ع}_2 = ٣$ ، ى = ١٨٠ وأن تلك الكميات التى تعطى معظمة المنفعة هي $\text{ك}_1 = ١٥$ ، $\text{ك}_2 = ٣٠$ وأن ح = $٢ \, \text{ع}_1 \, \text{ع}_2$

$$\text{ح}_{21} = (-١) \begin{vmatrix} ١ & -\text{ع}_2 \\ -\text{ع}_1 & \text{صفر} \end{vmatrix} = \text{ع}_1 \, \text{ع}_2 = \text{ح}_{12}$$

$$\text{ح}_{12} = (-١) \begin{vmatrix} ١ & -\text{ع}_1 \\ \text{ع}_2 & \text{صفر} \end{vmatrix} = \text{ع}_1 \, \text{ع}_2 = \text{ح}_{21}$$

$$\text{ح}_{13} = \begin{vmatrix} ١ & -\text{ع}_1 \\ \text{صفر} & -\text{ع}_2 \end{vmatrix} = -\text{ع}_2$$

$$\text{ح}_{23} = (-١) \begin{vmatrix} \text{صفر} & -\text{ع}_1 \\ ١ & -\text{ع}_2 \end{vmatrix} = -\text{ع}_1$$

وقد سبق إثبات أن :

$$\frac{\partial \text{ك}_1}{\partial \text{ع}_2} = \frac{\lambda \, \text{ح}_{12}}{\text{ح}} + \text{ك}_2 \frac{\text{ح}_{13}}{\text{ح}}$$

$$= \frac{\lambda \, \text{ع}_1 \, \text{ع}_2}{٢ \, \text{ع}_1 \, \text{ع}_2} + \text{ك}_2 \frac{(-\text{ع}_2)}{٢ \, \text{ع}_1 \, \text{ع}_2}$$

$$= \frac{٥}{٢} - \frac{٣٠}{٢ \times ٢} = \frac{٥}{٢} - \frac{٥}{٢} = \text{صفر}$$

وكذلك سبق إثبات أن :

$$\frac{\partial \text{ك}_2}{\partial \text{ع}_1} = \frac{\lambda\, \text{ح}_{21}}{\text{ح}} + \text{ك}_1 \frac{\text{ح}_{23}}{\text{ح}}$$

$$= \frac{\lambda\,(\text{ع}_1 \text{ع}_2)}{٣\, \text{ع}_1 \text{ع}_2} + \text{ك}_1 \frac{(-\text{ع}_1)}{٣\, \text{ع}_1 \text{ع}_2}$$

$$= \frac{\lambda}{٣} - \frac{\text{ك}_1}{٣\, \text{ع}_2}$$

$$= \frac{٥}{٣} - \frac{١٥}{٣ \times ٣} = \frac{٥}{٣} - \frac{٥}{٣} = \text{صفر}$$

وكما هو موضح فى المثال الحالى فان التأثيرين الإحلاليين متساويان وموجبي القيمة ، ومن ثم فان ك_1 ، ك_2 سلعتين إحلاليتين . وكذلك فان التأثيرات السعرية مساوية إلى الصفر . ومن ثم إذا أخذنا التأثير السعرى لكى يحدد العلاقة بين ك_1 ، ك_2 فان ذلك يدل على أن السلعتين مستقلتين . وفى هذه الحالة فان التعريفين غير متشابهين . ولذلك نود أن نؤكد أن التأثير الإحلالى هو الذى يحدد العلاقة بين السلع المختلفة . وحيث أن قيمته موجبة فان السلعتين ك_1 ، ك_2 تمثل سلعتين إحلاليتين .

ومن الملاحظ أن جميع الحالات التى استخدمت لاشتقاق دالة الطلب

لايمكن أن تكون سلع تكميلية. ففى حالة المنفعة م = د (ك١ ، ك٢) تكون السلعتين ك١ ، ك٢ سلعتين إحلاليتين وأن دوال الطلب المشتقة ك١ ، ك٢ = د (ع١ ، ع٢ ، ى) متجانسة Homogenous من الدرجة الصفرية . وبتطبيق نظرية إيلر Euler's Theorem فان :

$$\frac{\partial ك_1}{\partial ع_1} ع_1 + \frac{\partial ك_1}{\partial ع_2} \times ع_2 + \frac{\partial ك_1}{\partial ى} \times ى = \text{صفر}$$

وبوضع القيم المشتقة فى المعادلة السابقة نستنتج أن :

$$ع_1 \left[\frac{\lambda ح_{11}}{ح} + ك_1 \frac{ح_{13}}{ح} \right] + ع_2 \left[\frac{\lambda ح_{12}}{ح} + ك_2 \frac{ح_{13}}{ح} \right]$$

$$+ \left[\frac{- ح_{13}}{ح} \right] ى = \text{صفر}$$

$$\frac{1}{ح} \left[ع_1 \lambda ح_{11} + ع_2 \lambda ح_{12} - ح_{13} (ى - ع_1 ك_1 - ع_2 ك_2) \right] = \text{صفر}$$

$$\frac{1}{ح} \left[ع_1 \lambda ح_{11} + ع_2 \lambda ح_{12} - (\text{صفر}) (ح_{13}) \right] = \text{صفر}$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة فى الصورة التالية :

$$ع_1 ت_{11} + ع_2 ت_{21} = \text{صفر}$$

وقد أوضحنا سلفا أن $ت_{11}$ دائما سالبة . ونظراً لأن ع١ ، ع٢ موجبتى القيمة فإنه لكى تكون المعادلة مساوية إلى الصفر لابد أن تكون $ت_{21}$ موجبة . ونظراً لأن $ت_{21} >$ صفر فإن ذلك يثبت أن ك١ ، ك٢ سلعتين إحلاليتين .

إثبات أن منحنيات السواء محدبة بالنسبة إلى نقطة الأصل لقيد معظمة المنفعة :

أوضحنا سلفا أن منحنيات السواء محدبة إتجاه نقطة الأصل . ويرجع ذلك إلى المعدل الحدى للإحلال . ولكن سبق ارجاء إثبات ذلك رياضيا إلى حين شرح طريقة معظمة المنفعة بطريقة مضروبات لاجرانج . وسنقوم بهذه البرهنة الرياضية بالنسبة إلى سلعتين . فإذا رمزنا إلى $ر_{اب} = ف_{اب}$ فإن من المشتقات الثانية لمعظمة المنفعة بطريقة مضروبات لاجرانج نجد أن:

$$\Delta_{١} = \begin{vmatrix} ف_{١١} & ف_{٢١} & -ع_{١} \\ ف_{٢١} & ف_{٢٢} & -ع_{٢} \\ -ع_{١} & -ع_{٢} & صفر \end{vmatrix}$$

حيث أن $ن_{ا} = -ع_{ا}$ حيث ا تأخذ القيم ١ ، ٢ وهذا صحيح دائما فى حالة قيد الميزانية الخطى . ولإيجاد قيمة $\Delta_{١}$ يمكن استخدام طريقة الامتداد بالصف الأخير .

$$\Delta_{١} = -ع_{١} \begin{vmatrix} ف_{٢١} & -ع_{١} \\ ف_{٢٢} & -ع_{٢} \end{vmatrix} + (-١)(-ع_{٢}) \begin{vmatrix} ف_{١١} & -ع_{١} \\ ف_{٢١} & -ع_{٢} \end{vmatrix}$$

$$= -ع_{١}(-ع_{٢}ف_{٢١} + ع_{١}ف_{٢٢}) + ع_{٢}(-ف_{١١}ع_{٢} + ف_{٢١}ع_{١})$$

$$= ع_{١}ع_{٢}ف_{٢١} - ع_{١}^{٢}ف_{٢٢} - ع_{٢}^{٢}ف_{١١} + ع_{١}ع_{٢}ف_{٢١}$$

$$= -ف_{١١}ع_{٢}^{٢} + ٢ع_{١}ع_{٢}ف_{٢١} - ف_{٢٢}ع_{١}^{٢}$$

ولـكى تـكون المنفعة ممعظمة يجب أن تـكون $\Delta_1 >$ صفر أى أن :

$$- \text{ف}_{11}\,\text{ع}_2^{2} + 2\,\text{ع}_1\,\text{ع}_2\,\text{ف}_{21} - \text{ف}_{22}\,\text{ع}_1^{2} > \text{صفر} \qquad (1)$$

وبضرب الطرفين فى (— ١)

$$\text{ف}_{11}\,\text{ع}_2^{2} - 2\,\text{ف}_{21}\,\text{ع}_1\,\text{ع}_2 + \text{ف}_{22}\,\text{ع}_1^{2} < \text{صفر}$$

ولا يغير ذلك من طبيعة أن Δ_1 يجب أن تـكون أكبر من الصفر فى حالة ممعظمة المنفعة لعدد زوجى وأن :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \text{ف}_{22} & -\text{ع}_2 \\ -\text{ع}_2 & \text{صفر} \end{vmatrix} = -(\text{ع}_2^{2}) < \text{صفر} .$$

ونظراً لأن $\text{ع}_2 >$ صفر فمن ثم نجد أن $\Delta_2 <$ صفر ، أى أن المنفعة ممعظمة . وقد أوضحنا سلفاً أن منحنى السواء سالب الميل فى المنطقة الهامة أى أن :

$$\frac{\text{د}\,\text{ك}_2}{\text{د}\,\text{ك}_1} = - \frac{\text{ف}_1}{\text{ف}_2} = - \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} \qquad (2)$$

ولـكى يكون منحنى السواء محدبا بالنسبة إلى نقطة الأصل يجب أن يتزايد الميل كلما زادات الـكمية المأخوذة من ك_1 أى يجب أن تـكون المشتقة للميل موجبة .

$$\frac{\text{د}\left(\dfrac{\text{د}\,\text{ك}_2}{\text{د}\,\text{ك}_1}\right)}{\text{د}\,\text{ك}_1} = \frac{\text{د}^2\,\text{ك}_2}{\text{د}\,\text{ك}_1^{2}} > \text{صفر}$$

وبتفاضل المعادلة (٢) بالنسبة إلى ك_1 .

$$\frac{\text{ء}^2\,\text{ك}_2}{\text{ء}\,\text{ك}_1^2} = -\left[\frac{\partial\left(\frac{\text{ف}_1}{\text{ف}_2}\right)}{\partial\,\text{ك}_1} + \frac{\partial\left(\frac{\text{ف}_1}{\text{ف}_2}\right)}{\partial\,\text{ك}_2} \times \frac{\text{ء}\,\text{ك}_2}{\text{ء}\,\text{ك}_1}\right] \qquad (٣)$$

ويمكن تفاضل المعادلة (٢) بقاعدة القسمة للتفاضل .

$$\frac{\partial\left(\frac{\text{ف}_1}{\text{ف}_2}\right)}{\partial\,\text{ك}_1} = \frac{\text{ف}_2\,\text{ف}_{11} - \text{ف}_1\,\text{ف}_{21}}{\text{ف}_2^2} \qquad (٤)$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\text{ف}_1}{\text{ف}_2}\right)}{\partial\,\text{ك}_2} = \frac{\text{ف}_2\,\text{ف}_{21} - \text{ف}_1\,\text{ف}_{22}}{\text{ف}_2^2} \qquad (٥)$$

وبإحلال المعادلتين (٤) ، (٥) فى معادلة (٣) وباستخراج $\frac{1}{\text{ف}_2^3}$ خارج القوس نستنتج أن :

$$\frac{\text{ء}^2\,\text{ك}_2}{\text{ء}\,\text{ك}_1^2} = -\frac{1}{\text{ف}_2^3}\left(\text{ف}_{11}\,\text{ف}_2^2 - 2\,\text{ف}_{21}\,\text{ف}_1\,\text{ف}_2 + \text{ف}_{22}\,\text{ف}_1^2\right) \qquad (٦)$$

ومن معادلة (٢) :

$$\text{ف}_1 = \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2}\,\text{ف}_2$$

وبإحلال هذه المعادلة السابقة فى معادلة (٩) واستخراج $\frac{ف_{2}^{3}}{ع_{2}^{2}}$ نجد أن :

$$\frac{د^{2} ك_{2}}{د ك_{1}^{2}} = \frac{-1}{ف_{2} ع_{2}^{3}} \left(ف_{11} ع_{2}^{2} - 2 ف_{21} ع_{1} ع_{2} + ف_{22} ع_{1}^{2} \right) \qquad (٧)$$

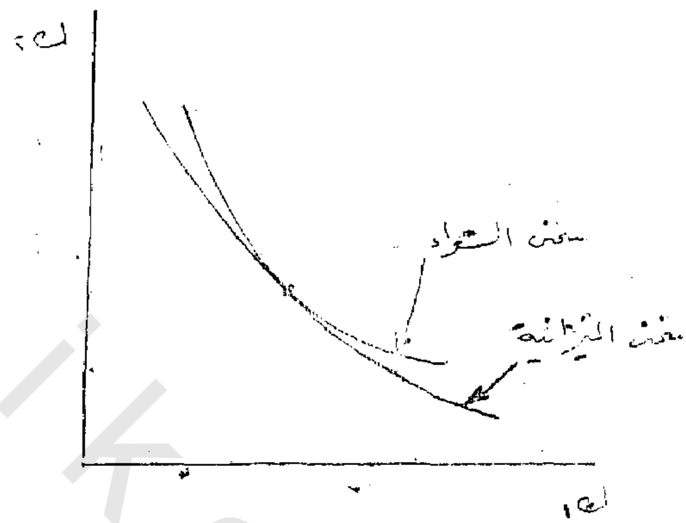
ونظراً لأن $ع_{2}^{2} > صفر$ ، $ف_{2} > صفر$ فلكى تكون $\frac{د^{2} ك_{2}}{د ك_{1}^{2}}$ > صفر يجب أن تكون الكمية بين الأقواس فى المعادلة (٧) سالبة .
أى أن :

$$ف_{11} ع_{2}^{2} - 2 ف_{21} ع_{1} ع_{2} + ف_{22} ع_{1}^{2} < صفر \qquad (٨)$$

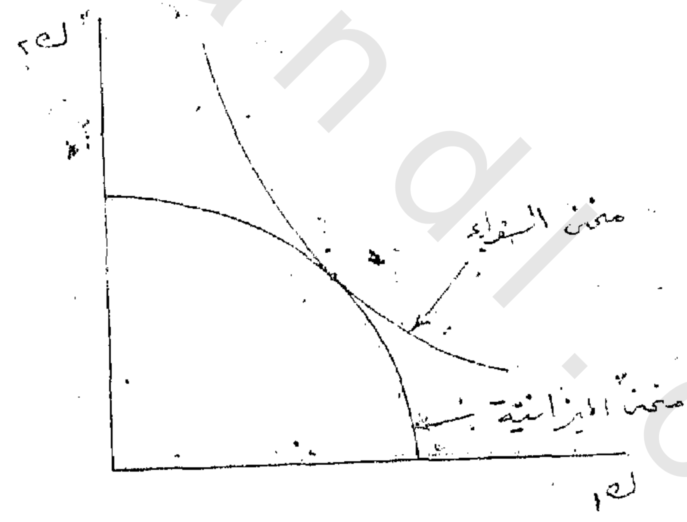
ويعنى هذا أن $\Delta_{1} > صفر$ حيث أن المعادلة (١) هى نفسها المعادلة (٨) والمشتقات الثانية لمعظمة المنفعة هى نفسها توضح أن منحنى السواء محدب بالنسبة إلى نقطة الأصل .

وفى حالة قيد الميزانية الخطى تكون هناك نقطة واحدة تمس منحنى السواء بخط الميزانية . أى أن هناك نقطة لمعظمة الاشباع حيث يتماس منحنى السواء بخط الميزانية . ويكون منحنى دالة الطلب له قيمة واحدة Single - Valued . أى أن لكل سعر معين كمية محددة أو العكس لكل كمية معينة سعر معين . أما إذا كان قيد الميزانية ليس فى صورة خطية ولكنه يمثل منحنى Curvilinear كما هو مبين فى الشكلين الآتيين فانه يجب أن يتماس منحنى الميزانية بمنحنى السواء فى نقطة واحدة حتى

يمكن أن يكون هناك نقطة معظمة أو نقطة مثلى للاشباع . ويكون استنباط دالة الطلب ذات قيمة واحدة .



شكل (١٩) معظمة الاشباع بين منحنى السواء ومنحنى الميزانية



شكل (٢٠) معظمة الاشباع بين منحنى السواء ومنحنى الميزانية

دوال الطلب :

أوضحنا سلفا أن دالة المنفعة تعتبر أداة لشرح كيفية تصرف المستهلك فى إنفاقه لدخله كما أوضحنا أنها أداة لإشتقاق دالة الطلب . وتتميز دالة الطلب المشتقة بالخصائص الآتية :

١ — فى حالة اشتقاق دالة الطلب فان سلوك المستهلك هو معظمة المنفعة عرضة إلى قيد الدخل .

٢ — دالة الطلب ذات قيمة واحدة للأسعار والدخل .

حالات دوال الطلب :

تعتبر دالة الطلب السابق اشتقاقها باستخدام منحنيات السواء دالة متجانسة Homogenous بدرجة صفرية للأسعار والدخل . وبفرض أن دالة الطلب للسلعة ك١ تعتمد على مجموعة ع١ من الأسعار حيث تبدأ ا من ١ إلى ں وكذلك الدخل ى فان دالة الطلب يمكن كتابتها كالتالى :

$$ك_١ = د (ع_١ ، ع_٢ ، . . . ، ع_ں ، ى)$$

وبفرض إرتفاع الأسعار بنسبة قدرها س لجميع السلع وإرتفاع الدخل بنفس النسبة فان الكمية المشتراة من السلعة ك١ لن يطرأ عليها تغيير . ويمكن كتابة الدالة كما يلى :

$$ك_١ = س^{صفر} ك_١ = د (س ع_١ ، س ع_٢ ، . . . ، س ع_ں ، س ى)$$

أى أنه لو تغير الدخل والأسعار بنفس النسبة فان الدخل الحقيقى لن يتغير وبالتالى لن تتغير الكمية المشتراة من ك١ وسيتصرف المستهلك بنفس الأسلوب السابق إيضاحه .

ويمكن إثبات أن المشتقات الأولى والثانية (فى حالة نموذج السلعتين السابق) لن تتغير بتغير مساو للأسعار والدخل .

وبفرض أن الأسعار والدخل قد إرتفعت بنسبة قدرها س أى أن س < صفر فان قيد الدخل يمكن كتابته كالتالى :

$$\text{س ى} = (\text{س ع}_1)\,\text{ك}_1 + (\text{س ع}_2)\,\text{ك}_2$$

وتكون دالة المنفعة هى :

$$\text{م} = \text{د}\,(\text{ك}_1 \text{ ، } \text{ك}_2)$$

وكذلك فان دالة لاجرانج لمظمة المنفعة عرضة إلى قيد الدخل كالتالى :

$$\text{ل} = \text{م} + \lambda\,(\text{س ى} - \text{س ع}_1\,\text{ك}_1 - \text{س ع}_2\,\text{ك}_2)$$

والمشتقات الأولى هى :

$$\text{ل}_1 = \frac{\partial\,\text{ل}}{\partial\,\text{ك}_1} = \text{ف}_1 - \lambda\,\text{س ع}_1 = \text{صفر} \qquad (١)$$

$$\text{ل}_2 = \frac{\partial\,\text{ل}}{\partial\,\text{ك}_2} = \text{ف}_2 - \lambda\,\text{س ع}_2 = \text{صفر} \qquad (٢)$$

$$\text{ل}_\lambda = \frac{\partial\,\text{ل}}{\partial\,\lambda} = \text{س ى} - \text{س ع}_1\,\text{ك}_1 - \text{س ع}_2\,\text{ك}_2 = \text{صفر} \qquad (٣)$$

$$\text{حيث ف}_i = \frac{\partial\,\text{م}}{\partial\,\text{ك}_i}$$

i تأخذ القيم ١ ، ٢ .

وبقسمة طرفى معادلة (٣) على س ان تتغير المعادلة .

أى أن :

$$\left(\frac{1}{س}\right) س \left(ى - ع_1 ك_1 - ع_2 ك_2 \right) = \frac{1}{س} \quad (صفر)$$

$$\therefore ن = ى - ع_1 ك_1 - ع_2 ك_2 = صفر .$$

ويعنى هذا أن قيد الدخل كما هو لم يتغير قبل وبعد التغير فى الأسعار والدخل .

ومن المعادلات (١) ، (٢) يتضح أن :

$$\frac{ف_1}{ف_2} = \frac{\lambda\, س\, ع_1}{\lambda\, س\, ع_2} = \frac{ع_1}{ع_2}$$

وتمثل نفس المشتقات السابقة . أى أن المشتقات الأولى لمعظمة المنفعة للمجموعة (س ع₁ ، س ع₂ ، س ى) هى نفسها للمجموعة (ع₁ ، ع₂ ، ى) . والمشتقات الثانية هى :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} ر_{11} & ر_{12} & ن_1 \\ ر_{21} & ر_{22} & ن_2 \\ ن_1 & ن_2 & صفر \end{vmatrix}$$

حيث أن :

$$ر_{اب} = \frac{\partial^2 ر}{\partial ك_ا\, \partial ك_ب}$$

حيث تأخذ ا ، ب القيم ١ ، ٢

$$ن_ا = \frac{\partial ن}{\partial ك_ا}$$

حيث تأخذ ا القيم ١ ، ٢

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \text{ف}_{11} & \text{ف}_{21} & -\text{س ع}_1 \\ \text{ف}_{21} & \text{ف}_{22} & -\text{س ع}_2 \\ -\text{س ع}_1 & -\text{س ع}_2 & \text{صفر} \end{vmatrix}$$

$$= \text{س}^2 \begin{vmatrix} \text{ف}_{11} & \text{ف}_{21} & -\text{ع}_1 \\ \text{ف}_{21} & \text{ف}_{22} & -\text{ع}_2 \\ -\text{ع}_1 & -\text{ع}_2 & \text{صفر} \end{vmatrix}$$

ونظراً لأن $\text{س}^2 >$ صفر ، فان ذلك يعنى أن Δ_1 ، Δ_2 لن تتأثر بالثابت س . ومن ثم فان المشتقات الثانية لن تتأثر أيضاً وتطبق نفس القواعد السابقة الدالة لاجرانج لمعظمة المنفعة .

ويمكن إيضاح أنه إذا تغيرت الأسعار والدخل بنفس النسبة فان الكمية المشتراة من السلعة لن تتغير من دالة الطلب السابق اشتقاقها كما يلى :

$$\text{ك}_1 = \frac{\text{ى}}{\text{٢ ع}_1}$$

وبفرض أن الدخل والسعر ارتفعا بنفس النسبة س حيث س $>$ صفر فان :

$$\text{س}^{\text{و}}\, \text{ك}_1 = \frac{\text{س ى}}{\text{٢ (س ع}_1\text{)}} = \text{س}^{\text{صفر}} \frac{\text{ى}}{\text{٢ ع}_1}$$

$$= \frac{\text{ى}}{\text{٢ ع}_1} = \text{ك}_1$$

ونظراً لأن و = صفر حيث هى عبارة عن درجة التجانس Degree of Homogenity

وهناك خاصية لدالة الطلب صفرية التجانس وهى أن مجموع المرونات السعرية لها يجب أن تساوى مرونة الدخل باشارة سالبة .

وبفرض أن دالة الطلب هى :

$$\text{ك}_1 = \text{د}\left(\text{ع}_1 \text{،} \ \text{ع}_2 \text{،} \cdots \text{ع}_{\text{ن}} \text{،} \ \text{ى}\right)$$

فمن نظرية إيلر :

$$\text{و}\ \text{ك}_1 = \frac{\partial \text{ك}_1}{\partial \text{ع}_1} \times \text{ع}_1 + \frac{\partial \text{ك}_1}{\partial \text{ع}_2} \times \text{ع}_2 + \cdots + \frac{\partial \text{ك}_1}{\partial \text{ع}_{\text{ن}}} \times \text{ع}_{\text{ن}} + \frac{\partial \text{ك}_1}{\partial \text{ى}} \times \text{ى} \qquad (١)$$

ونظراً لأن درجة التجانس = صفر أى أن و = صفر

$$\text{صفر} = \frac{\partial \text{ك}_1}{\partial \text{ع}_1} \times \text{ع}_1 + \frac{\partial \text{ك}_1}{\partial \text{ع}_2} \times \text{ع}_2 + \cdots + \frac{\partial \text{ك}_1}{\partial \text{ع}_{\text{ن}}} \times \text{ع}_{\text{ن}} + \frac{\partial \text{ك}_1}{\partial \text{ى}} \times \text{ى} \qquad (٢)$$

وبقسمة الطرفين على $\frac{1}{\text{ك}_1}$ نستنتج أن :

$$\frac{\partial \text{ك}_1}{\partial \text{ع}_1} \times \frac{\text{ع}_1}{\text{ك}_1} + \frac{\partial \text{ك}_1}{\partial \text{ع}_2} \times \frac{\text{ع}_2}{\text{ك}_1} + \cdots + \frac{\partial \text{ك}_1}{\partial \text{ع}_{\text{ن}}} \times \frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ك}_1} + \frac{\partial \text{ك}_1}{\partial \text{ى}} \times \frac{\text{ى}}{\text{ك}_1} = \text{صفر} \qquad (٢)$$

$$\underbrace{\frac{\partial \text{ك}_1}{\partial \text{ع}_1} \times \frac{\text{ع}_1}{\text{ك}_1}}$$

المرونة السعرية

Own Price Elasticity

$$+\underbrace{\frac{\partial \text{ك}_1}{\partial \text{ع}_2} \times \frac{\text{ع}_2}{\text{ك}_1} + \cdots + \frac{\partial \text{ك}_1}{\partial \text{ع}_{ن}} \times \frac{\text{ع}_{ن}}{\text{ك}_1}}$$

المرونات السعرية المتقاطعة

Cross Price Elasticities

$$= - \underbrace{\frac{\partial \text{ك}_1}{\partial \text{ى}} \times \frac{\text{ى}}{\text{ك}_1}} \qquad (٤)$$

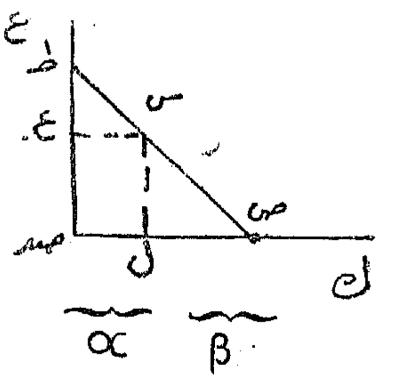
مرونة الدخل

Income Elasticity

ومن المبادىء الاقتصادية نعلم أن المرونة السعرية هى عبارة عن التغير النسبى للكمية مقسوما على التغير النسبى للسعر . أو هى عبارة عن استجابة الكمية للتغير من تغير السعر. ورياضيا هى :

$$\ni_{\text{ع}} = \frac{\frac{\Delta \text{ك}}{\text{ك}}}{\frac{\Delta \text{ع}}{\text{ع}}} \qquad \text{أو} \qquad \ni_{\text{ع}} = \frac{\text{دك}}{\text{دع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}}$$

ويمكن بيانيا حساب المرونة السعرية لدالة الطلب الخطية كما يلى :



شكل (٢١) حساب المرونة من دالة الطلب

$$\ni_{\text{ع}} = \frac{\text{ءك}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\text{سل}}{\text{صل}}} \times \frac{\text{ع.}}{\text{ك}}$$

$$\ni_{\text{ع}} = \frac{\text{صل}}{\text{سل}} \times \frac{\text{سل}}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$$

وكذلك فان الدخل هو عبارة عن التغير النسبي للكمية مقسوما على التغير النسبي للدخل . أو هو عبارة عن استجابة الكمية المتغير من تغير الدخل . ورياضيا هو :

$$\ni_{\text{ع}} = \frac{\frac{\text{ءك}}{\text{ك}}}{\frac{\text{ءى}}{\text{ى}}} \quad \text{أو} \quad \ni_{\text{ى}} = \frac{\text{ءك}}{\text{ءى}} \times \frac{\text{ى}}{\text{ك}}$$

ولذلك فان من معادلة (٤) يمكن كتابتها كالتالى :

$$\varepsilon_{ع_1} + \varepsilon_{ع_2} + \cdots + \varepsilon_{ع_ن} = -\varepsilon_{ى}$$

$$\sum_{١=١}^{ن} \varepsilon_{ع_1} = -\varepsilon_{ى}$$ حيث تبدأ ١ من ١ الى ن

أى أن مجموع المرونات السعرية لدالة الطلب صفرية التجانس تساوى مرونة الدخل باشارة سالبة .

ويمكن إيضاح ذلك من دوال الطلب المختلفة بالأمثلة التالية :

(١) $$ك_1 = \frac{ى}{٢ع_1}$$

$$\varepsilon_{ع_1} = \left(\frac{\partial ك_1}{\partial ع_1}\right)\left(\frac{ع_1}{ك_1}\right)$$

$$\varepsilon_{ع_1} = \left(\frac{-ى}{٢ع_1^{٢}}\right) \times \frac{ع_1}{\frac{ى}{٢ع_1}}$$

$$= \left(\frac{-ى}{٢ع_1^{٢}}\right) \times \frac{٢ع_1^{٢}}{ى} = -١$$

$$\varepsilon_{ى} = \left(\frac{\partial ك_1}{\partial ى}\right)\left(\frac{ى}{ك_1}\right) = \left(\frac{١}{٢ع_1}\right)\left(\frac{ى}{\frac{ى}{٢ع_1}}\right)$$

$$= \frac{١}{٢ع_1} \times \frac{٢ع_1 ى}{ى} = ١$$

$$\therefore \quad \partial\text{ع}_1 = -\,\partial\text{ى}$$

$$-1 = -1$$

$$(2)\quad \text{ك}_1 = \frac{\text{ى}\,\text{ع}_2}{2\,\text{ع}_1^2}$$

$$\partial\text{ع}_1 = \left(\frac{\partial\text{ك}_1}{\partial\text{ع}_1}\right)\left(\frac{\text{ع}_1}{\text{ك}_1}\right) = \left(\frac{-\,\text{ى}\,\text{ع}_2}{\text{ع}_1^3}\right)\left(\frac{\text{ع}_1}{\frac{\text{ى}\,\text{ع}_2}{2\,\text{ع}_1^2}}\right)$$

$$= \left(-\frac{\text{ى}\,\text{ع}_2}{\text{ع}_1^3}\right)\left(\frac{2\,\text{ع}_1^3}{\text{ى}\,\text{ع}_2}\right) = -2$$

$$\partial\text{ع}_2 = \left(\frac{\partial\text{ك}_1}{\partial\text{ع}_2}\right)\left(\frac{\text{ع}_2}{\text{ك}_1}\right) = \left(\frac{\text{ى}}{2\,\text{ع}_1^2}\right)\left(\frac{\text{ع}_2}{\frac{\text{ى}\,\text{ع}_2}{2\,\text{ع}_1^2}}\right)$$

$$\partial\text{ع}_2 = \left(\frac{\text{ى}}{2\,\text{ع}_1^2}\right)\left(\frac{2\,\text{ع}_2\,\text{ع}_1^2}{\text{ى}\,\text{ع}_2}\right) = 1$$

$$\partial\text{ى} = \left(\frac{\partial\text{ك}_1}{\partial\text{ى}}\right)\left(\frac{\text{ى}}{\text{ك}_1}\right) = \left(\frac{\text{ع}_2}{2\,\text{ع}_1^2}\right)\left(\frac{\text{ى}}{\frac{\text{ى}\,\text{ع}_2}{2\,\text{ع}_1^2}}\right)$$

$$= \left(\frac{\text{ع}_2}{2\,\text{ع}_1^2}\right)\left(\frac{\text{ى}\,2\,\text{ع}_1^2}{\text{ى}\,\text{ع}_2}\right) = 1$$

إذن : $\partial\text{ع}_1 + \partial\text{ع}_2 = -\,\partial\text{ى}$

$$-2 + 1 = -1$$

$$(٣)\quad \text{ل}_1 = \frac{\text{ا ى} + \text{ب ع}_2}{\text{ع}_1}$$

حيث ا ، ب ثابتين

$$\Rightarrow \text{ع}_1 = \left(\frac{\partial \text{ل}_1}{\partial \text{ع}_1}\right)\left(\frac{\text{ع}_1}{\text{ل}_1}\right) = -\left(\frac{\text{ا ى} + \text{ب ع}_2}{\text{ع}_1^2}\right)\left(\frac{\text{ع}_1}{\frac{\text{ا ى} + \text{ب ع}_2}{\text{ع}_1}}\right)$$

$$= -\left(\frac{\text{ا ى} + \text{ب ع}_2}{\text{ع}_1^2}\right)\left(\frac{\text{ع}_1^2}{\text{ا ى} + \text{ب ع}_2}\right) = -1$$

$$\Rightarrow \text{ع}_2 = \left(\frac{\partial \text{ل}_1}{\partial \text{ع}_2}\right)\left(\frac{\text{ع}_2}{\text{ل}_1}\right) = \left(\frac{\text{ب}}{\text{ع}_1}\right)\left(\frac{\text{ع}_2}{\frac{\text{ا ى} + \text{ب ع}_2}{\text{ع}_1}}\right)$$

$$= \left(\frac{\text{ب}}{\text{ع}_1}\right)\left(\frac{\text{ع}_2\,\text{ع}_1}{\text{ا ى} + \text{ب ع}_2}\right) = \frac{\text{ب ع}_2}{\text{ا ى} + \text{ب ع}_2}$$

$$\Rightarrow \text{ى} = \left(\frac{\partial \text{ل}_1}{\partial \text{ى}}\right)\left(\frac{\text{ى}}{\text{ل}_1}\right) = \left(\frac{\text{ا}}{\text{ع}_1}\right)\left(\frac{\text{ى}}{\frac{\text{ا ى} + \text{ب ع}_2}{\text{ع}_1}}\right)$$

$$= \left(\frac{\text{ا}}{\text{ع}_1}\right)\left(\frac{\text{ى ع}_1}{\text{ا ى} + \text{ب ع}_2}\right) = \frac{\text{ا}_1\text{ ى}}{\text{ا ى} + \text{ب ع}_2}$$

$$\therefore \epsilon_{\text{ع}_1} + \epsilon_{\text{ع}_2} = - \epsilon_{\text{ى}}$$

$$-1 + \frac{\text{ب ع}_2}{\text{ا ى} + \text{ب ع}_2} = - \frac{\text{ا ى}}{\text{ا ى} + \text{ب ع}_2}$$

وهناك خاصية يمكن اشتقاقها من قيد الدخل الذى اشتقت على أساسه دالة الطلب سالفة الذكر . وهى أن مجموع مرونات الدخل المرجحة Weighted of the Income Elasticities تساوى الوحدة . فبفرض أن المستهلك سينفق دخله على عدد ن من السلع ودوال الطلب لها كالتالى :

$$\text{ك}_1 = \text{د}_1 \left(\text{ع}_1 ، \text{ع}_2 ، \ldots ، \text{ع}_{\text{ن}} ، \text{ى}\right)$$

$$\text{ك}_2 = \text{د}_2 \left(\text{ع}_1 ، \text{ع}_2 ، \ldots ، \text{ع}_{\text{ن}} ، \text{ى}\right)$$

$$\vdots$$

$$\text{ك}_{\text{ن}} = \text{د}_{\text{ن}} \left(\text{ع}_1 ، \text{ع}_2 ، \ldots ، \text{ع}_{\text{ن}} ، \text{ى}\right)$$

وأن مرونة الدخل بالنسبة للسلع المختلفة هى :

$$\text{م}_{\text{ى ا}} = \frac{\text{ء ك}_{\text{ا}}}{\text{ء ى}} \times \frac{\text{ى}}{\text{ك}_{\text{ا}}}$$

حيث تبدأ ا من ١ إلى ن

وكذلك قيد الدخل هو :

$$\text{ى} = \sum_{\text{ا}=١}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ا}}\,\text{ك}_{\text{ا}}$$

حيث أن الأسعار ثابتة وأن ا تبدأ من ١ إلى ن

$$\text{ى} = \text{ع}_{١}\,\text{ك}_{١} + \text{ع}_{٢}\,\text{ك}_{٢} + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}}\,\text{ك}_{\text{ن}}$$

فبأخذ التفاضل لقيد الدخل بالنسبة إلى ى :

$$\frac{\text{ء ك}_{١}}{\text{ء ى}} \times \text{ع}_{١} + \frac{\text{ء ك}_{٢}}{\text{ء ى}} \times \text{ع}_{٢} + \cdots + \frac{\text{ء ك}_{\text{ن}}}{\text{ء ى}} \times \text{ع}_{\text{ن}} = ١$$

وبضرب كل من مكونات الطرف الأيمن المعادلة بالقيمة $\frac{\text{ى ك}_{\text{ا}}}{\text{ك}_{\text{ا}}\,\text{ى}} = ١$

حيث تبدأ من ١ إلى ن ان تتغير قيمة المعادلة . ومن ثم فان :

$$\frac{\text{ء ك}_{١}}{\text{ء ى}} \times \frac{\text{ى}}{\text{ك}_{١}} \left(\frac{\text{ع}_{١}\,\text{ك}_{١}}{\text{ى}}\right) + \frac{\text{ء ك}_{٢}}{\text{ء ى}} \times \frac{\text{ى}}{\text{ك}_{٢}} \left(\frac{\text{ع}_{٢}\,\text{ك}_{٢}}{\text{ى}}\right)$$

$$+ \cdots + \frac{\text{ء ك}_{\text{ن}}}{\text{ء ى}} \times \frac{\text{ى}}{\text{ك}_{\text{ن}}} \left(\frac{\text{ع}_{\text{ن}}\,\text{ك}_{\text{ن}}}{\text{ى}}\right) = ١$$

$$\ni_{ى_١}\, ج_١ + \ni_{ى_٢}\, ج_٢ + \cdots + \ni_{ى_ن}\, ج_ن = ١ .$$

حيث أن $ج_ا = \frac{ع_ا\, ك_ا}{ى}$

حيث تبدأ ا من ١ الى ن .

عبارة عن النسبة من الدخل ى المنفقة على $ك_ا$ وأن $١ \geq ج_ا \geq$ صفر ،

$\sum_{ا=١}^{ن} ج_ا = ١$ ، وعلى هذا فإن مجموع مرونات الدخل المرجحة تساوى الوحدة .

ومن دوال الطلب المشتقة سلفا يمكن توضيح أن :

$$ك_١ = \frac{ى}{٢ ع_١}$$

$$ك_٢ = \frac{ى}{٢ ع_٢}$$

والمرونات الدخلية لكل هى كالتالى :

$$\ni_{ى_١} = \left(\frac{د ك_١}{د ى}\right)\left(\frac{ى}{ك_١}\right) = \left(\frac{١}{٢ ع_١}\right)\left(\frac{ى}{\frac{ى}{٢ ع_١}}\right)$$

$$= \left(\frac{١}{٢ ع_١}\right)\left(\frac{ى\, ٢ ع_١}{ى}\right) = ١$$

$$م_{ى٢} = \left(\frac{د\,ك_{٢}}{د\,ى}\right)\left(\frac{ى}{ك_{٢}}\right) = \left(\frac{د\,ك_{٢}}{د\,ى}\right)\left(\frac{ى}{ك_{٢}}\right)$$

$$= \left(\frac{١}{٢\,ع_{٢}}\right)\left(\frac{ى}{\frac{ى}{٢\,ع_{١}}}\right)$$

$$= \left(\frac{١}{٢\,ع_{٢}}\right)\frac{ى\;٢\;ع_{٢}}{ى} = ١$$

وأن المرجحات هى :

$$ج_{١} = \frac{ع_{١}\,ك_{١}}{ى}$$

$$ج_{٢} = \frac{ع_{٢}\,ك_{٢}}{ى}$$

$$\therefore \left(\frac{ع_{١}\,ك_{١}}{ى}\right)(١) + \left(\frac{ع_{٢}\,ك_{٢}}{ى}\right)(١)$$

$$= \frac{ع_{١}\,ك_{١} + ع_{٢}\,ك_{٢}}{ى} = ١$$

ويعتمد التغير فى النسبة المنفقة لسلعة ما لتغير الدخل على مرونة هذا الدخل . فيفرض أن النسبة المنفقة على $ك_{١}$ هى $\frac{ع_{١}\,ك_{١}}{ى}$ وأن جميع الأسعار ثابتة وأن المتغيرين هما السلعة الأولى $ك_{١}$ بتغير الدخل ى ، فان التغير فى هذه النسبة المنفقة يمكن تحديدها بحساب المشتقة الأولى لهذه النسبة .

$$\frac{d\left(\frac{\text{ك}_1\text{ع}_1}{\text{ى}}\right)}{d\text{ى}} = \frac{\text{ى}\,\text{ع}_1\,\frac{d\text{ك}_1}{d\text{ى}} - \text{ك}_1\text{ع}_1}{\text{ى}^2}$$

$$= \frac{\text{ع}_1\text{ك}_1\,\frac{d\text{ك}_1}{d\text{ى}} \times \frac{\text{ى}}{\text{ك}_1} - \text{ك}_1\text{ع}_1}{\text{ى}^2}$$

$$= \frac{\text{ع}_1\text{ك}_1}{\text{ى}^2}\left(\frac{d\text{ك}_1}{d\text{ى}} \times \frac{\text{ى}}{\text{ك}_1} - 1\right)$$

$$= \frac{\text{ع}_1\text{ك}_1}{\text{ى}^2}\left(\ni_{\text{ى}_1} - 1\right)$$

ونظراً لأن $\frac{\text{ع}_1\text{ك}_1}{\text{ى}^2}$ موجبة فان إشارة هذه المشتقة تعتمد على المرونة الدخلية . وبفرض أن المرونة الدخلية $\ni_{\text{ى}_1} < 1$ فان النسبة المنفقة من الدخل ى على السلعة ك_1 تتناقص كلما زاد الدخل ، أما إذا كانت المرونة الدخلية أكبر من الوحدة $\ni_{\text{ى}_1} > 1$ فان النسبة المنفقة على السلعة ك_1 تزداد كلما إزداد الدخل .

ومن هنا يمكن أيضاً معرفة هل السلعة رديئة أم ممتازة . ففى الحالة الأولى تعتبر السلعة رديئة ($\ni_{\text{ى}_1} < 1$) وفى الحالة الثانية تعتبر السلعة ممتازة ($\ni_{\text{ى}_1} > 1$) .

العلاقة بين دوال الطلب والإيراد :

يمكن إيضاح أن دالة الطلب ودالة الإيراد المتوسط متساويان . فبفرض أن دالة الطلب هى :

$$ع = د(ك)$$

حيث يتغير السعر بتغير الكميات ، وأن الإيراد الكلى هو عبارة عن الكميات مضروبة فى سعرها فإن :

$$\text{الإيراد الكلى} = ع\,ك = ك\,د(ك)$$

$$\text{الإيراد المتوسط} = \frac{\text{الإيراد الكلى}}{ك} = \frac{ك\,د(ك)}{ك} = د(ك) = ع$$

يتضح من ذلك أن دالة الطلب ودالة الإيراد المتوسط متساويان .

مثــــال :

بفرض أن دالة الطلب الصريحة هى:

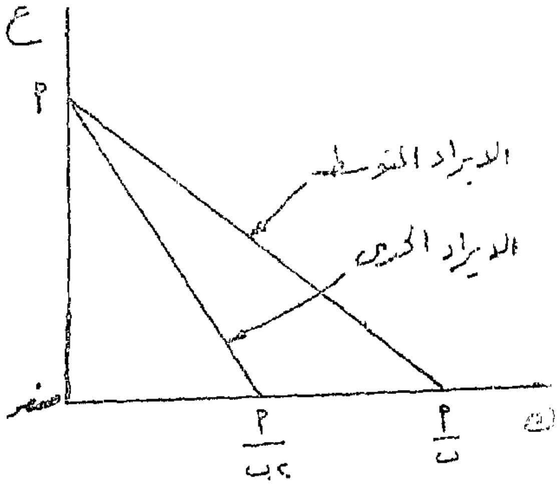
$$ع = ا - ب\,ك$$

وأن :

$$\text{الإيراد الكلى} = ع\,ك = ا\,ك - ب\,ك^{2}$$

$$\text{فإن الإيراد المتوسط} = \frac{\text{الإيراد الكلى}}{ك} = \frac{ا\,ك - ب\,ك^{2}}{ك} = ا - ب\,ك$$

ويبين الشكل التالى دالة الطلب (الإيراد المتوسط) وكذلك الإيراد الحدى . ويعرف بأنه التغير فى الإيراد الكلى نتيجة التغير فى الكمية وحدة واحدة .



شكل (٢٢) الإيراد المتوسط والإيراد الحدى

ومن المبادىء الأولية لعلم الاقتصاد يجب أن يكون الإيراد الحدى فى منتصف المسافة بين دالة الطلب (الإيراد المتوسط) والمحور السعرى .
ويمكن اشتقاق دالة الإيراد بتفاضل الإيراد الكلى بالنسبة إلى الكمية ك كالتالى :

$$\text{الإيراد الكلى} = ر ل = ع ك (ا - ب ك) = ا ك - ب ك^{٢}$$

حيث ر ل = الإيراد الكلى

$$\text{الإيراد الحدى} = ر ح = \frac{ء (ع ك)}{ء ك} = ا - ٢ ب ك$$

حيث ر ح = الإيراد الحدى

ومن دالة الطلب السابقة يمكن تعريف مرونة الطلب بأنها $\ni$ ع =

$$\frac{ء ك}{ء ع} \times \frac{ع}{ك}$$ ، والإيراد الكلى = ع ك . حيث أن ع = د (ك)

$$ر ح = \frac{ء (ر ل)}{ء (ك)} = \frac{ء (ع ك)}{ء (ك)} = ع + ك \frac{ء ع}{ء ك}$$

$$ر ح = ع + ك \frac{ء ع}{ء ك}$$

وبضرب الحد الأخير فى المعادلة السابقة فى $\frac{\text{ع}}{\text{ع}}$

$$\text{دح} = \text{ع} + \frac{\text{دع}}{\text{دك}} \times \frac{\text{ك}}{\text{ع}} \times \text{ع}$$

$$= \text{ع} \left(١ + \frac{١}{\ni\,\text{ع}} \right)$$

وبأخذ ميل دالة الطلب سالبة الإشارة تكون معادلة الإيراد الحدى كالتالى :

$$\text{دح} = \text{ع} \left(١ - \frac{١}{\ni\,\text{ع}} \right)$$

ومن المعلوم أن الإيراد الحدى والسعر متساويان تحت حالة المنافسة الحرة . ويمكن إثبات ذلك من المعادلة السابقة . ونظراً لأن مرونة الطلب تحت المنافسة الحرة تساوى مالا نهاية فإن :

$$\frac{١}{\ni\,\text{ع}} = \frac{١}{\infty} = \text{صفر أى :}$$

$$\text{دح} = \text{ع} \left(١ - \frac{١}{\infty} \right) = \text{ع}$$

الإيراد الحدى = السعر

ويمكن إثبات أن الإيراد الكلى يكون معظماً حينما يكون الإيراد الحدى مساويا للصفر كالآتى :

د ح = ع (١ − ١ / ع مـ) = صفر

ع (١ − ١ / ع مـ) = صفر

(١ − ١ / ع مـ) = صفر

١ / ع مـ = ١

ع مـ = ١

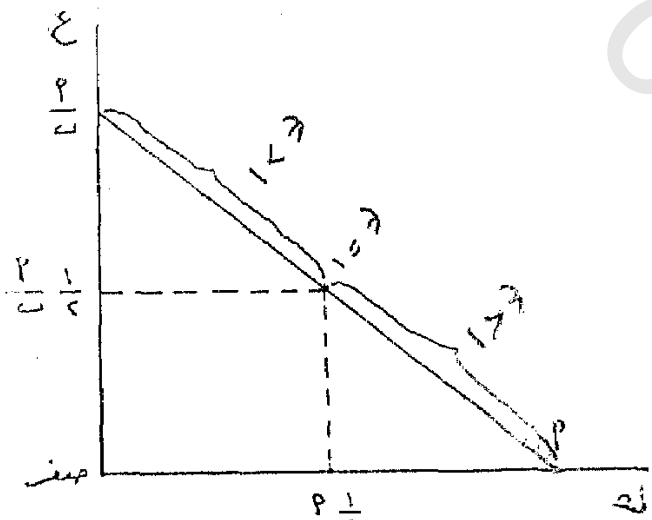
ولتوضيح ذلك نفرض أن دالة الطلب هى :

ك = أ − ب ع

والتى يمكن إعادة كتابتها فى الصورة التالية :

ع = أ / ب − ١ / ب ك

ويمكن إيضاح دالة الطلب بالشكل التالى :



شكل(٢٣) دالة الطلب والمرونة عند مستويات سعرية مختلفة

$$\ni_{\text{ع}} = \frac{\text{ءك}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}} = -\text{ب} \times \frac{\text{ع}}{\text{ا} - \text{ب ع}} = \frac{-\text{ب ع}}{\text{ا} - \text{ب ع}}$$

عندما تكون :

$$\ni_{\text{ع}} = 1$$

وبأخذ ميل دالة الطلب فى الاعتبار $\ni_{\text{ع}} = -1$

$$-1 = \frac{-\text{ب ع}}{\text{ا} - \text{ب ع}}$$

$$-\text{ا} + \text{ب ع} = -\text{ب ع}$$

$$\text{ا} = 2\,\text{ب ع}$$

$$\text{ع} = \frac{1}{2} \times \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$$

وبتعويض هذه القيمة الأخيرة فى دالة الطلب لإيجاد قيمة ك نجد أن :

$$\text{ع} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}} - \frac{1}{\text{ب}} \times \text{ك}$$

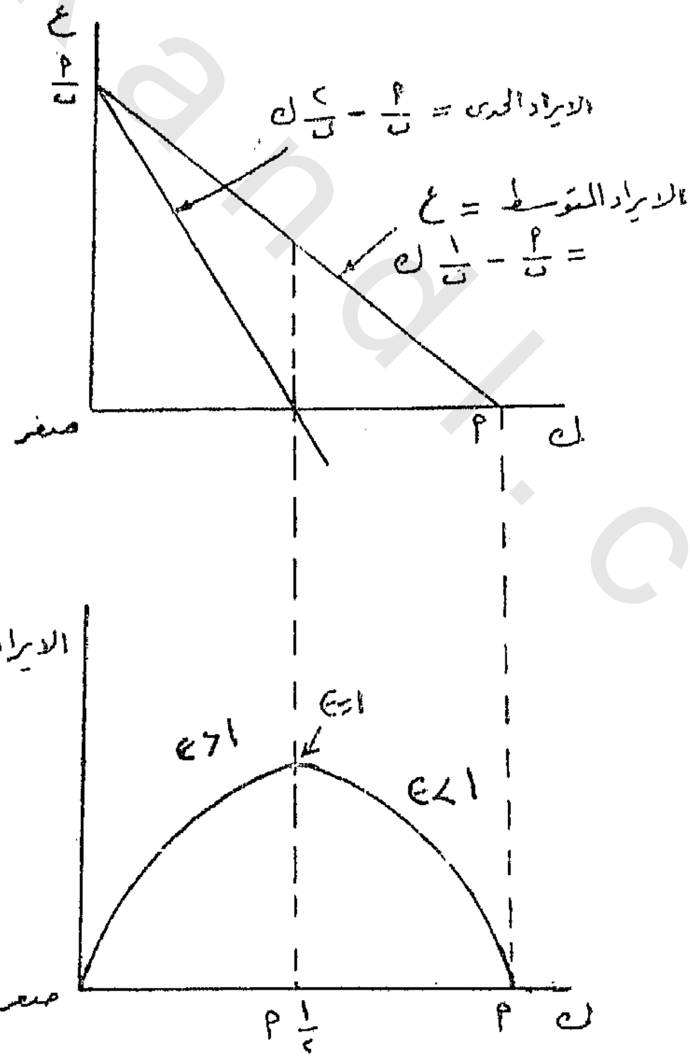
$$\frac{1}{2} \times \frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}} - \frac{1}{\text{ب}} \times \text{ك}$$

$$\frac{1}{\text{ب}} \times \text{ك} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}} - \frac{1}{2} \times \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$$

$$\frac{١}{ب} ك = \frac{١}{٢} \times \frac{أ}{ب}$$

$$ك = \frac{١}{٢} أ$$

ويمكن إيجاز العلاقة بين دالة الطلب والإيراد الكلى والمرونة السعرية لشكل التالى :



شكل (٢٤) العلاقة بين دالة الطلب والايراد الكلى والمرونة السعرية

وتتضح من ذلك أنه عندما تكون المرونة السعرية مساوية للوحدة أى

ع = ١ يكون السعر عند النقطة $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{ب}$ وتكون الكمية عند

$\frac{١}{٢}$ ا . وعندما تكون المرونة السعرية أيضاً تساوى الوحدة تكون هى تلك

النقطة على دالة الطلب الخطية التى تقسمها إلى شطرين متساويين . وتكون

المرونة السعرية على يسار هذه النقطة $\frac{١}{٢}$ ا أكبر من الوحدة كما سبق

ذكرها . وتكون دالة الطلب مرنة Elastic حيث يزداد الإيراد الكلى

بإنخفاض السعر . وتكون المرونة السعرية على يمين هذه النقطة $\frac{١}{٢}$ ا أصغر

من الوحدة وتكون دالة الطلب غير مرنة Inlastic حيث يقل الإيراد

الكلى بإنخفاض السعر . ويمكن إيجاز العلاقة بين المرونة السعرية والتغيرات

فى السعر والإيراد الكلى فى الجدول التالى :

المرونة السعرية	التغير فى السعر	التغير فى الإيراد الكلى
ع ث > ١	إرتفاع السعر إنخفاض السعر	نقص الإيراد الكلى زيادة الإيراد الكلى
ع ث = ١	إرتفاع السعر إنخفاض السعر	لاشىء لاشىء
ع ث < ١	إرتفاع السعر إنخفاض السعر	زيادة الإيراد الكلى نقص الإيراد الكلى

جدول (٢) العلاقة بين المرونة السعرية والتغيرات فى السعر والإيراد الكلى

بفرض أن دالة الطلب ليست خطية ولكنها تمثل قطع زائد Rectangular Hyperbola فإن دالتها الصريحة هى :

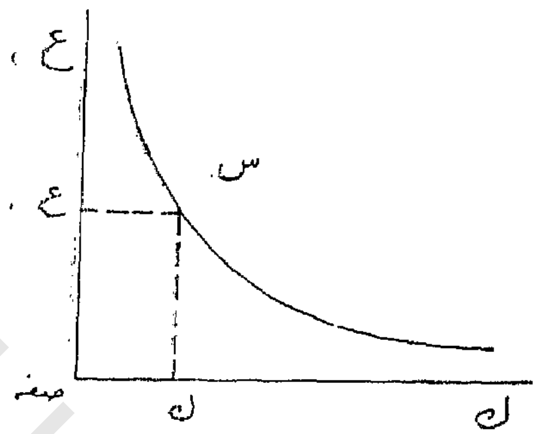
$$ك = \frac{ا}{ع}$$

حيث أن ا = ثابت

ومثل ذلك دالة الطلب السابق اشتقاقها :

$$ك_1 = \frac{ى}{2 ع_1}$$

ويبين الشكل التالى دالة الطلب للمعادلة السابقة :



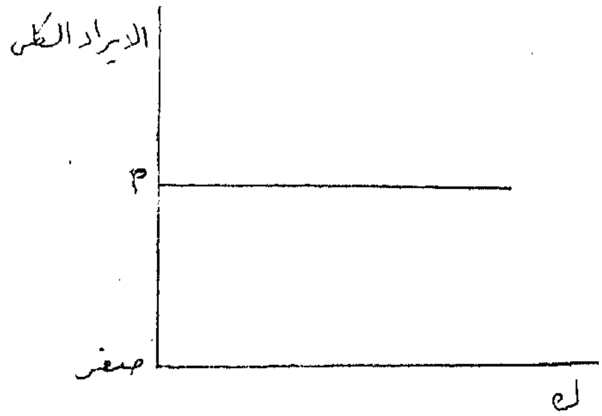
شكل (٢٥) دالة الطلب فى صورة قطع زائد

ويتميز هذا المنحنى لدالة الطلب بخاصية وحيدة Unique أى المساحة تحت المنحنى عند أى نقطة متساوية . وبفرض أن النقطة ع. ، ك. تمثل أحداثيي النقطة س فى الشكل السابق فتكون المساحة تحت المنحنى مساوية إلى ع. مضروبة فى ك. . وهى عبارة عن الإيراد الكلى (ر ل = ع. ك.). وتكون المساحة عند أى نقطة على المنحنى عبارة عن الإيراد الكلى وهو ثابتا على طول المنحنى لإحداثيات أى نقطة التى تمثل السعر ع ، الكمية ك :

$$ر ل = ع ك = ع \left(\frac{١}{ع} \right) = ١$$

$$\frac{ء ر ل}{ء ك} = ر ح = صفر$$

ويبين الشكل التالى دالة الإيراد الكلى الخطية .



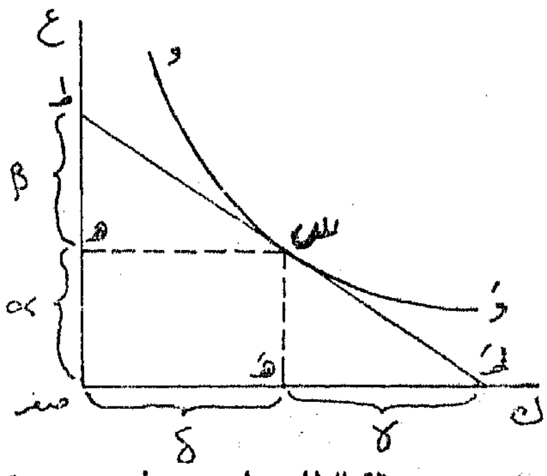
شكل (٢٦) دالة الإيراد الكلى الخطية

ويتميز هذا المنحنى لدالة الطلب السابقة أيضاً بأن المرونة السعرية للطلب مساوية للوحدة . ولإثبات ذلك مع أخذ إشارة دالة الطلب سالبة الإشارة فى الاعتبار فإن :

$$م_ط = \left(\frac{دك}{دع}\right)\left(\frac{ع}{ك}\right) = \left(-\frac{١}{ع}\right)\left(\frac{ع}{\frac{١}{ع}}\right)$$

$$= \frac{١}{ع^٢} \times \frac{ع^٢}{١} = ١$$

وبفرض أن دالة الطلب ليست قطعاً زائداً فإن المنحنى يأخذ الشكل التالى :



شكل (٢٧) منحنى دالة الطلب ليست فى صورة قطع زائد

ونهدف فى هذه الحالة إلى إيجاد المرونة السعرية لدالة الطلب عند أى نقطة مثل س . ويمكن إيجادها برسم خط مماس إلى منحنى دالة الطلب عند هذه النقطة . ويكون ميل الخط عند هذه النقطة مساويا للمسافة صفر — ط مقسوما على المسافة صفر — طَ . أى أن :

$$\frac{د\,ع}{د\,ك} = \frac{(\text{صفر} - ط)}{(\text{صفر} - طَ)} = \frac{(هـَ - س)}{(هـَ - طَ)}$$

ولكن السعر عند النقطة س مساويا المسافة (هـَ — س) = (صفر — هـ) وأن الكمية مساوية للمسافة (صفر — هـَ) . ويتضح من ذلك أن :

$$\frac{د\,ك}{د\,ع} = \frac{1}{\frac{د\,ك}{د\,ك}}$$

وتكون المرونة السعرية هى :

$$ع^{\ni} = \frac{د\,ك}{د\,ع} \times \frac{ع}{ك} = \frac{هـَ - طَ}{هـَ - س} \times \frac{هـَ - س}{\text{صفر} - هـَ}$$

$$= \frac{هـَ - طَ}{\text{صفر} - هـَ} = \frac{ȣ}{\delta}$$

ونظراً لأن المثلث ط هـ س قائم الزاوية فتكون $\frac{د\,ع}{د\,ك} = \frac{ط - هـ}{هـ - س}$

ويكون السعر ع = صفر ـ هـ وأن الكمية = ك = صفر ـ هـ َ = هـ ـ س وتكون المرونة السعرية هى :

$$\ni_{\text{ع}} = \frac{\text{دك}}{\text{دع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}} = \frac{\text{هـ} - \text{س}}{\text{ط} - \text{هـ}} \times \frac{\text{صفر} - \text{هـ}}{\text{هـ} - \text{س}}$$

$$= \frac{\text{صفر} - \text{هـ}}{\text{ط} - \text{هـ}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

وبفرض أن دالة الطلب الخطية فى الصورة التالية :

$$\text{ك} = \text{ا} - \text{ب ع}$$

حيث ا ، ب ثوابت

أو

$$\text{ع} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}} - \frac{1}{\text{ب}}\,\text{ك}$$

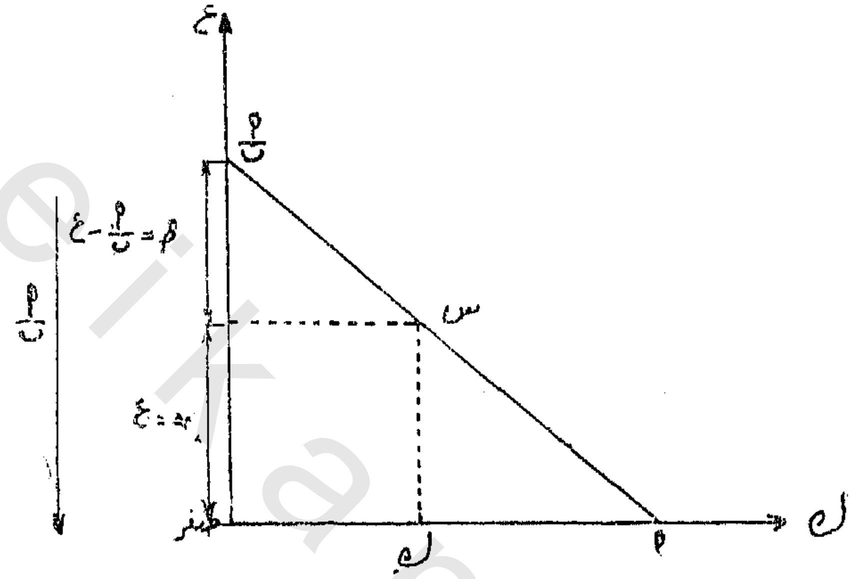
فإنه يمكن استخدام نفس الطريقة السابقة لحساب المرونة السعرية عند أى نقطة . فمثلا عند النقطة س تكون المرونة السعرية هى :

$$\ni_{\text{ع}} = \frac{\text{دك}}{\text{دع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}} = -\text{ب} \times \frac{\text{ع}}{\text{ا} - \text{ب ع}}$$

وبقسمة البسط والمقام على ب فإن :

$$\ni_{\text{ع}} = \frac{-\text{ع}}{\frac{\text{ا}}{\text{ب}} - \text{ع}} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

ومن الجدير بالذكر أنه عند حساب المرونة السعرية تأخذ فى الاعتبار إشارة دالة الطلب السالبة . ويبين الشكل التالى المرونة السعرية عند النقطة س .



شكل (٢٨) حساب المرونة السعرية عند النقطة س

تأثير الهوامش السوقية على المرونات السعرية للطلب

بافتراض وجود سوقين حيث يسرى نفس السعر فإن الكمية المشتراة فى السوق عبارة عن نسبة ثابتة من الكمية المطلوبة فى السوق الآخر أى أن :

$$ك_{2} = \lambda \, ك_{1} .$$

وبفرض أن السوق الثانى قد يكون سوق التجزئة وأن السوق الأول هو سوق الجملة وأن السوقين يبيعان نفس السلعة عند نفس السعر وبفرض أن $\lambda > ١$ ودوال الطلب السوقية خطية فإن :

$$ك_{1} = ا_{1} - ب_{1} ع \qquad (١)$$

$$ك_{2} = \lambda ا_{1} - \lambda ب_{1} ع = ا_{2} - ب_{2} ع \qquad (٢)$$

حيث ١ تمثل دالة طلب السوق الأول ، ٢ تمثل دالة طلب السوق الثانى .
وبحل المعادلتين السابقتين للسعر ع فإن :

$$ع = \frac{أ_١}{ب_١} - \frac{١}{ب_١} ك_١ = أ - \frac{١}{ب_١} ك_١ \qquad (١)$$

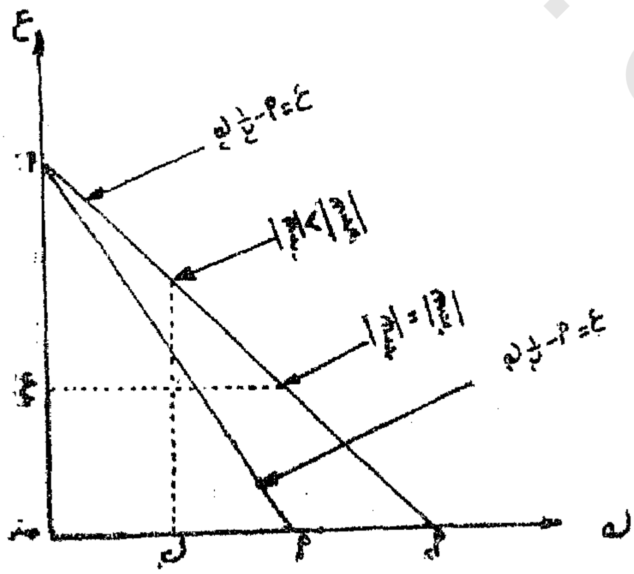
$$ع = \frac{\lambda أ_١}{\lambda ب_١} - \frac{١}{\lambda ب_١} ك_٢ = أ - \frac{١}{ب_٢} ك_٢$$

$$ع ب_١ \lambda = \lambda أ_١ - ك_٢$$

$$ع = \frac{\lambda أ_١}{\lambda ب_١} - \frac{١}{\lambda ب_١} ك_٢ = أ - \frac{١}{ب_٢} ك_٢$$

$$حيث أن \; أ = \frac{أ_١}{ب_١}$$

ويتضح من معادلات دوال الطلب السابقة أن لهما نفس المقطع Intercept ولكن ميلهما مختلف . وحيث أن $ب_٢ = \lambda ب_١ > ب_١$ فإن ميل دالة الطلب لسوق الجملة أكبر من ميل دالة الطلب لسوق التجزئة كما هو مبين فى الشكل التالى :



شكل (٢٩) دوال الطلب لكل من سوق التجزئة والجملة وبينهما الهامش السوقى

وتكون المرونات السعرية فى السوقين هى :

$$(1)\qquad \ni_{\text{ع}_1} = \frac{\text{د ك}_1}{\text{د ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}_1} = (-\text{ب}_1)\left(\frac{\text{ع}}{\text{ا}_1 - \text{ب}_1\text{ع}}\right)$$

$$= \frac{-\text{ع}}{\frac{\text{ا}_1}{\text{ب}_1} - \text{ع}} = \frac{-\text{ع}}{\text{ا} - \text{ع}}$$

$$(2)\qquad \ni_{\text{ع}_2} = \frac{\text{د ك}_2}{\text{د ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}_2} = (-\text{ب}_2)\left(\frac{\text{ع}}{\text{ا}_2 - \text{ب}_2\text{ع}}\right)$$

$$\ni_{\text{ع}_2} = \frac{-\text{ب}_2\text{ع}}{\text{ا}_2 - \text{ب}_2\text{ع}} = \frac{-\text{ع}}{\frac{\text{ا}_2}{\text{ب}_2} - \text{ع}} = \frac{-\text{ع}}{\text{ا} - \text{ع}}$$

ومن هنا يتضح أن عند نفس السعر تكون $\ni_{\text{ع}_1} = \ni_{\text{ع}_2}$ كما هو موضح بالشكل السابق .

ويمكن من المثال التالى إثبات أن $\ni_{\text{ع}_1} = \ni_{\text{ع}_2}$. فبفرض أن دوال الطلب كالتالى :

$$\text{ك}_1 = 40 - 0{,}2\,\text{ع} \qquad (1)$$

$$\text{ك}_2 = 80 - 0{,}4\,\text{ع} \qquad (2)$$

حيث أن $\lambda = 2$ ، وبحل المعادلتين للسعر فإن :

$$\text{ع} = 200 - 5\,\text{ك}_1 \qquad (1)$$

$$\text{ع} = 200 - 2{,}5\,\text{ك}_2 \qquad (2)$$

وبفرض ع = ١٠٠ فإن ك١ = ٢٠ ، ك٢ = ٤٠

وتكون المرونات السعرية :

$$\ni_{\text{ع}_1} = \frac{\text{ءك}_1}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}_1} = \left(-\frac{٢}{١٠}\right) \times \frac{١٠٠}{٢٠} = -١$$

$$\ni_{\text{ع}_2} = \frac{\text{ءك}_2}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}_2} = \left(-\frac{٤}{١٠}\right) \times \frac{١٠٠}{٤٠} = -١$$

$$\therefore \quad \ni_{\text{ع}_1} = \ni_{\text{ع}_2}$$

ويمكن إثبات ذلك رياضيا كالتالى :

$$\text{ك}_2 = \lambda \, \text{ك}_1$$

$$\text{ء ك}_2 = \lambda \, \text{ء ك}_1$$

$$\frac{\text{ءك}_2}{\text{ك}_2} = \frac{\lambda \, \text{ء ك}_1}{\lambda \, \text{ك}_1} = \frac{\text{ء ك}_1}{\text{ك}_1}$$

أى أن التغير النسبي فى الكمية متساو فى السوقين وأن التغير فى السعر

متساو أيضاً من فرضنا السابق $\left(\frac{\text{ء ع}}{\text{ع}}\right)$

$$\frac{\frac{\text{ءك}_1}{\text{ك}_1}}{\frac{\text{ء ع}}{\text{ع}}} = \frac{\frac{\text{ء ك}_2}{\text{ك}_2}}{\frac{\text{ء ع}}{\text{ع}}}$$

$$\therefore \quad \ni_{\text{ع}_1} = \ni_{\text{ع}_2}$$

وهناك حالة أخرى يمكن النظر إلى المرونات السعرية عند نفس الكمية (ك.) ولكن المستويات السعرية مختلفة كما هو موضح فى الشكل السابق .
ودوال الطلب هى كالتالى :

$$\text{ك} = \text{ا}_1 - \text{ب}_1 \text{ع}_1 \qquad (1)$$

$$\text{ك} = \text{ا}_2 - \text{ب}_2 \text{ع}_2 \qquad (2)$$

ونظراً لأن ك متساوية فى المعادلتين نستنتج الآتى :

$$\text{ا}_1 - \text{ب}_1 \text{ع}_1 = \text{ا}_2 - \text{ب}_2 \text{ع}_2$$

$$\text{ع}_2 = \frac{\text{ا}_1}{\text{ب}_1}\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda}\text{ع}_1$$

$$\text{ع}_2 = \text{ص}_1 + \text{ص}_2 \text{ع}_1$$

حيث $\text{ص}_1 >$ صفر ، $\text{ص}_2 >$ صفر نظراً لأن $\lambda > 1$.

وبحل معادلات الطلب يمكن إيجاد كل من ع_1 ، ع_2 كالتالى :

$$\text{ع}_1 = \text{ا} - \frac{1}{\text{ب}_1}\text{ك} = \frac{\text{ا}_1 - \text{ك}}{\text{ب}_1} \qquad (1)$$

$$\text{ع}_2 = \text{ا} - \frac{1}{\text{ب}_2}\text{ك} = \frac{\text{ا}_2 - \text{ك}}{\text{ب}_2} \qquad (2)$$

وتكون المرونات السعرية :

$$\text{ه}_{\text{ع}_1} = \frac{\text{دك}}{\text{دع}_1} \times \frac{\text{ع}_1}{\text{ك}} = (-\text{ب}_1) \times \left(\frac{\text{ا}_1 - \text{ك}}{\text{ب}_1 \text{ك}}\right)$$

$$= \frac{\text{ك} - \text{ا}_1}{\text{ك}} \qquad (1)$$

$$\ni_{\text{ع}_2} = \frac{\text{دك}}{\text{دع}_2} \times \frac{\text{ع}_2}{\text{ك}} = (-\text{ب}_2)\left(\frac{\text{ا ب}_2 - \text{ك}}{\text{ك ب}_2}\right)$$

$$= \frac{\text{ك} - \text{ا ب}_2}{\text{ك}} \qquad (٢)$$

حيث أن $\text{ا ب}_2 > \text{ا ب}_1$ فتكون $\text{ك} - \text{ا ب}_1 > \text{ك} - \text{ا ب}_2$

ويتضح من ذلك أن $\ni_{\text{ع}_1} > \ni_{\text{ع}_2}$ كما هو مبين فى الشكل السابق.

وتكون المرونة أكبر فى السوق الأول سعراً . ويتضح من المثال السابق أن :

$$\text{ك} = ٤٠ - ٠{,}٢\,\text{ع}_1$$

$$\text{ك} = ٨٠ - ٠{,}٤\,\text{ع}_2$$

حيث $\lambda = ٢$

ومن ثم فإن :

$$\text{ص}_1 = \left(\frac{\lambda - ١}{\lambda}\right)\frac{\text{ا}_1}{\text{ب}_1} = \left(\frac{١}{٢}\right)\left(\frac{٤٠}{\frac{٢}{١٠}}\right)$$

$$= ١٠٠$$

$$\text{ص}_2 = \frac{١}{\lambda} = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \text{ع}_2 = ١٠٠ + \frac{١}{٢}\,\text{ع}_1$$

وبفرض أن $ع_1$ = ١٠٠ فيكون $ع_2$ = ١٥٠ ، ك = ٢٠

$$\ni ع_1 = \frac{ءك}{ءع_1} \times \frac{ع_1}{ك} = \left(-\frac{٢}{١٠}\right)\left(\frac{١٠٠}{٢٠}\right)$$

$$= -١$$

$$\ni ع_2 = \frac{ءك}{ءع_2} \times \frac{ع_2}{ك} = \left(-\frac{٤}{١٠}\right)\left(\frac{١٥٠}{٢٠}\right) = -٣$$

$$\therefore \quad \ni ع_1 > \ni ع_2$$

أما إذا أخذت فى صورة قيمة مطلقة Absolute Value فإن :

$$|\ni ع_2| > |\ni ع_1|$$

ويمكن إثبات ذلك رياضيا كالتالى :

$$ع_2 = ص_1 + ص_2 ع_1$$

$$\frac{ءع_2}{ع_2} = \frac{ص_2 \, ءع_1}{ص_1 + ص_2 ع_1} = \frac{ءع_1}{\frac{ص_1}{ص_2} + ع_2} < \frac{ءع_1}{ع_1}$$

ونظراً لأن التغير فى الأسعار موجب القيمة $ءع_1 >$ صفر ، $ءع_2 >$ صفر فإن التغير فى الكمية يكون سالب القيمة . ولكن التغير النسبى فى الكمية $\frac{ءك}{ك}$ فى السوقين متساويان . ومن ثم يمكن استنتاج أن :

$$\frac{\left|\frac{ءك}{ك}\right|}{\frac{ءع_2}{ع_2}} > \frac{\left|\frac{ءك}{ك}\right|}{\frac{ءع_1}{ع_1}}$$

أى أن :

$$|\ni ع_2| > |\ni ع_1|$$

$$\therefore \quad \ni ع_1 > \ni ع_2$$

وبفرض حالة سوقية أخرى وهى أن الفروق الهامشية ثابتة للكمية المطلوبة عند مستويات سعرية مختلفة للسوقين . أى أن عند سعر معين يكون :

$$ك_2 = ك_1 + \lambda$$

وبفرض أن $\lambda >$ صفر ودوال الطلب الخطية هى كما يلى :

$$ك_1 = ا_1 - ب_1 ع = ا_1 - ب ع \qquad (1)$$

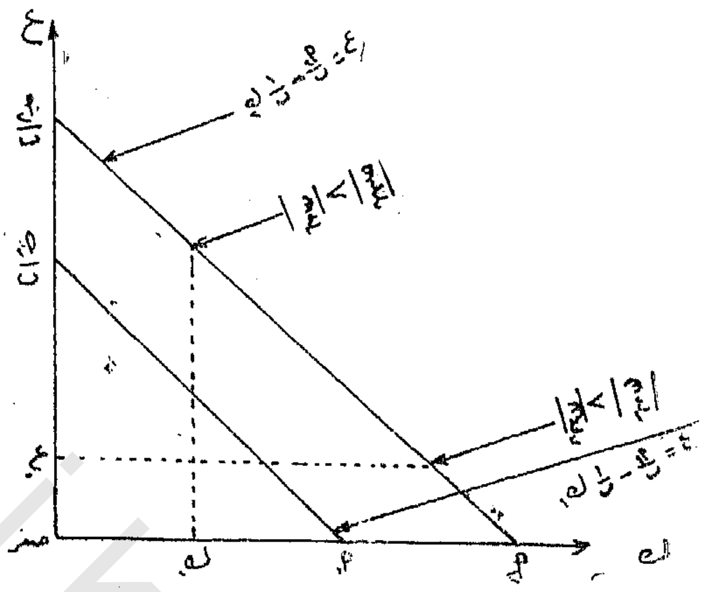
$$ك_2 = ك_1 + \lambda = ا_1 + \lambda - ب_1 ع = ا_2 - ب ع \qquad (2)$$

وبحل المعادلتين لإيجاد السعر ع للسوقين فإن :

$$ع = \frac{ا_1}{ب} - \frac{1}{ب} ك_1 \qquad (1)$$

$$ع = \frac{ا_2}{ب} - \frac{1}{ب} ك_2 \qquad (2)$$

أى أن معادلات دوال الطلب يكون لها نفس الميل ولكن التقاطعات مختلفة كما هو مبين فى الشكل التالى :



شكل (٢٠) الهوامش السوقية ثابتة بين السوقين

وتكون المرونات السعرية هى :

$$\Leftarrow \text{ع}_1 = \frac{\text{د ك}_1}{\text{د ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}_1} = (-\text{ب}) \left(\frac{\text{ع}}{\text{أ}_1 - \text{ب ع}}\right)$$

$$= \frac{\text{ع}}{\text{ع} - \frac{\text{أ}_1}{\text{ب}}} \qquad (1)$$

$$\Leftarrow \text{ع}_2 = \frac{\text{د ك}_2}{\text{د ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}_2} = (-\text{ب}) \left(\frac{\text{ع}}{\text{أ}_2 - \text{ب ع}}\right)$$

$$= \frac{\text{ع}}{\text{ع} - \frac{\text{أ}_2}{\text{ب}}} \qquad (2)$$

وحيث أن :

$$\frac{\text{أ}_2}{\text{ب}} = \frac{\text{أ}_1 + \lambda}{\text{ب}} > \frac{\text{أ}_1}{\text{ب}} \quad ، \quad \text{ع} - \frac{\text{أ}_1}{\text{ب}} > \text{ع} - \frac{\text{أ}_2}{\text{ب}}$$

نستنتج أن :

$$\text{ع}_1{}^{\ni} < \text{ع}_2{}^{\ni}$$

أو

$$\left| \text{ع}_2{}^{\ni} \right| < \left| \text{ع}_1{}^{\ni} \right|$$

أى عند السعر ع تكون دالة الطلب أكثر مرونة More Elastic في السوق الأول عنه فى السوق الثانى .

وبفرض أن λ = ٢٠ وأن دالة الطلب فى السوق الأول هى كما يلى :

$$\text{ل}_1 = \text{٢٠} - \text{٠,٢ ع} \qquad (1)$$

∴ تكون $\text{ل}_2 = \text{ل}_1 + \text{٢٠} = \text{٤٠} - \text{٠,٢ ع}$ (٢)

وبحل المعادلتين لإيجاد السعر ع

$$\text{ع} = \text{١٠٠} - \text{٥ ل}_1 \qquad (1)$$

$$\text{ع} = \text{٢٠٠} - \text{٥ ل}_2 \qquad (2)$$

وبفرض أن ع = ٥ فتكون الكميات ل_1 = ١٩ ، ل_2 = ٣٩

$$\text{ع}_1{}^{\ni} = \frac{\text{ء ل}_1}{\text{ء ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ل}_1} = \left(\frac{-\text{٢}}{\text{١٠}}\right)\left(\frac{\text{٥}}{\text{١٩}}\right)$$

$$= -\frac{\text{١}}{\text{١٩}}$$

$$\ni \text{ع}_{٢} = \frac{\text{ء ك}_{٢}}{\text{ء ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}_{٢}} = \left(\frac{-\text{٢}}{\text{١٠}}\right)\left(\frac{\text{٥}}{\text{٣٩}}\right)$$

$$= -\frac{\text{١}}{\text{٣٩}}$$

$$\therefore \quad \ni \text{ع}_{١} < \ni \text{ع}_{٢}$$

أو

$$|\ni \text{ع}_{٢}| < |\ni \text{ع}_{١}|$$

ويمكن إثبات ذلك رياضيا :

$$\text{ك}_{٢} = \text{ك}_{١} + \lambda$$

$$\text{ء ك}_{٢} = \text{ء ك}_{١}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ء ك}_{٢}}{\text{ك}_{٢}} = \frac{\text{ء ك}_{١}}{\text{ك}_{١} + \lambda} < \frac{\text{ء ك}_{١}}{\text{ك}_{١}}$$

وبفرض أن التغير فى الكمية موجبا ($\text{ء ك}_{١} > \text{صفر}$ ، $\text{ء ك}_{٢} > \text{صفر}$) لأن التغير فى السعر سالباً ($\text{ء ع} < \text{صفر}$) . ونظراً لأن التغير النسبى فى السوقين متساو $\left(\frac{\text{ء ع}}{\text{ع}}\right)$ يتضح الآتى :

$$\frac{\frac{\text{ء ك}_{٢}}{\text{ك}_{٢}}}{\left|\frac{\text{ء ع}}{\text{ع}}\right|} < \frac{\frac{\text{ء ك}_{١}}{\text{ك}_{١}}}{\left|\frac{\text{ء ع}}{\text{ع}}\right|}$$

$\therefore \quad |\epsilon_{ع_١}| > |\epsilon_{ع_٢}|$

وبفرض أن الكمية متساوية (ك.) لكل من دوال الطلب فى الشكل السابق ولكن المستويات السعرية مختلفة فى كلا السوقين ، فتكون دوال الطلب هى كالتالى :

$$ك = ا_١ - ب ع_١ \qquad (١)$$

$$ك = ا_٢ - ب ع_٢ \qquad (٢)$$

ومن ثم تكون العلاقة بين ع$_١$ ، ع$_٢$ هى :

$$ع_٢ = ع_١ + \frac{\lambda}{ب}$$

ويتضح من ذلك أن هناك فرقا هامشيا سعريا ثابتا فى السوقين وبحل معادلات دوال الطلب لكل من ع$_١$ ، ع$_٢$ نجد أن :

$$ع_١ = \frac{ا_١ - ك}{ب} \qquad (١)$$

$$ع_٢ = \frac{ا_٢}{ب} - \frac{١}{ب} \times ك = \frac{ا_٢ - ك}{ب} \qquad (٢)$$

وتكون المرونات السعرية هى :

$$\epsilon_{ع_١} = \frac{دك}{دع_١} \times \frac{ع_١}{ك} = (-ب) \left(\frac{ا_١ - ك}{ب ك} \right)$$

$$= \frac{ك - ا_١}{ك} \qquad (١)$$

$$= \frac{d\,ك}{d\,ع_2} \times \frac{ع_2}{ك} = (-ب)\left(\frac{ا_2 - ك}{ب\,ك}\right)$$

$$= \frac{ك - ا_2}{ك} \qquad (٢)$$

وحيث أن :

$$\because\ ا_2 > ا_1 \ ،\ ك - ا_1 > ك - ا_2$$

$$\therefore\ \epsilon_{ع_1} > \epsilon_{ع_2}$$

أو

$$|\epsilon_{ع_2}| > |\epsilon_{ع_1}|$$

ويتضح من ذلك أن دالة الطلب فى السوق الثانى أكثر مرونة من دالة الطلب فى السوق الأول إذا أخذت قيم المرونة فى صورة مطلقة أما إذا أخذت بدون قيم مطلقة فإن $\epsilon_{ع_1} > \epsilon_{ع_2}$ أى أن المرونة أكبر فى السوق ذى السعر الأقل . ومن مثالنا السابق :

$$\lambda = ٢٠ \ ،\ ع_1 = ١٠٠ - ٥ك \ ،\ ع_2 = ع_1 + ١٠٠$$

$$= ٢٠٠ - ٥ك$$

وبفرض أن $ك = ١٠$ نستنتج أن $ع_1 = ٥٠$ ، $ع_2 = ١٥٠$

$$\epsilon_{ع_1} = \frac{d\,ك}{d\,ع_1} \times \frac{ع_1}{ك} = \left(\frac{-١}{٥}\right)\left(\frac{٥٠}{١٠}\right)$$

$$= -١ \qquad (١)$$

$$\ni_{ع_٢} = \frac{ءك}{ءع_٢} \times \frac{ع_٢}{ك} = \left(- \frac{١}{٥} \right) \left(\frac{١٥٠}{١٠} \right)$$

$$= -٣ \qquad (٢)$$

$$\therefore \quad \ni_{ع_١} > \ni_{ع_٢}$$

أو

$$|\ni_{ع_٢}| < |\ni_{ع_١}|$$

ويمكن إثبات ذلك رياضيا كالتالى :

$$ع_٢ = ع_١ + ص$$

حيث أن ص > صفر

$$ءع_٢ = ءع_١$$

$$\frac{ءع_٢}{ع_٢} = \frac{ءع_١}{ع_١ + ص} < \frac{ءع_١}{ع_١}$$

وبفرض أن ءع$_٢$ > صفر ، ءع$_١$ > صفر فإن ءك < صفر وتكون $\frac{ءك}{ك}$ متساوية فى كلا السوقين . وبناء على ذلك فإن :

$$\frac{\left|\frac{ءك}{ك}\right|}{\frac{ءع_٢}{ع_٢}} < \frac{\left|-\frac{ءك}{ك}\right|}{\frac{ءع_١}{ع}}$$

$$\therefore \quad |\ni_{ع_٢}| < |\ni_{ع_١}|$$

بفرض أن السعر فى السوق الثانى يمثل نسبة مئوية ثابتة Markup من سعر السوق الأول .

$$\text{ع}_2 = \lambda \, \text{ع}_1$$

وبفرض أن الكمية واحدة فى السوقين وأن $\lambda > 1$ ودوال الطلب هى :

$$\text{ك} = \text{ا}_1 - \text{ب}_1 \text{ع}_1 = 1 - \text{ب}_1 \text{ع}_1 \qquad (1)$$

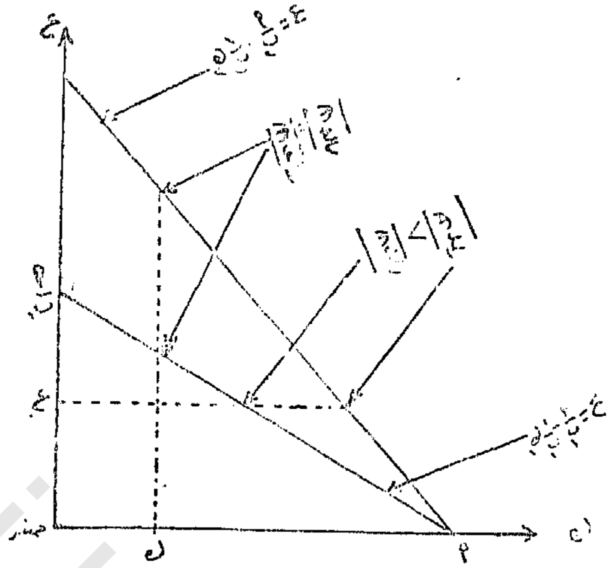
$$\text{ك} = \text{ا}_2 - \text{ب}_2 \text{ع}_2 = 1 - \text{ب}_2 \text{ع}_2 \qquad (2)$$

ونظراً لأن $\text{ع}_2 = \lambda \, \text{ع}_1$ وأن التقاطعات متساوية على محور الكمية أى أن : $\text{ا}_1 = \text{ا}_2 = 1$. وبحل المعادلات لإيجاد كل من ع_1 ، ع_2 نستنتج أن:

$$\text{ع}_1 = \frac{1}{\text{ب}_1} - \frac{1}{\text{ب}_1} \text{ك} \qquad (1)$$

$$\text{ع}_2 = \frac{1}{\text{ب}_2} - \frac{1}{\text{ب}_2} \text{ك} \qquad (2)$$

ويجب ملاحظة أن ميل دوال الطلب مختلفة وأن الأسعار مختلفة عند هذه الكمية المتساوية بالنسبة للسوقين كما هو موضح بالشكل التالى :



شكل (٢١) دوال الطلب وسوق التجزئة وسوق الجملة عند
تقاطع واحد على محور الكمية

وتكون المرونات السعرية لدوال الطلب هي :

$$\ni ع_١ = \frac{د ل}{د ع_١} \times \frac{ع_١}{ل} = (-ب_١) \times \frac{(١ - ل)}{(ل ب_١)}$$

$$= \frac{ل - ١}{ل} \qquad (١)$$

$$\ni ع_٢ = \frac{د ل}{د ع_٢} \times \frac{ع_٢}{ل} = (-ب_٢) \times \frac{(١ - ل)}{ل ب_٢}$$

$$= \frac{ل - ١}{ل} \qquad (٢)$$

$$\therefore \quad \ni ع_١ = \ni ع_٢$$

$$|\ni ع_١| = |\ni ع_٢|$$

ويتضح من ذلك أن المرونات السعرية متساوية فى السوقين عند نفس الكمية (ك.) . ويمكن إيضاح ذلك بالمثال التالى :

$$\text{ع}_1 = 5 - \frac{1}{20}\,\text{ك} \qquad (1)$$

$$\text{ع}_2 = 10 - \frac{1}{10}\,\text{ك} \qquad (2)$$

حيث $\lambda = 2$

ويمكن كتابة دوال الطلب فى الصورة التالية :

$$\text{ك} = 100 - 20\,\text{ع}_1 \qquad (1)$$

$$\text{ك} = 100 - 10\,\text{ع}_2 \qquad (2)$$

وبفرض $\text{ك} = 20$ $\quad\therefore\quad$ $\text{ع}_1 = 4$ ، $\text{ع}_2 = 8$

$$\epsilon_{\text{ع}_1} = \frac{d\,\text{ك}}{d\,\text{ع}_1} \times \frac{\text{ع}_1}{\text{ك}} = (-20) \times \frac{4}{20} = -4$$

$$\epsilon_{\text{ع}_2} = \frac{d\,\text{ك}}{d\,\text{ع}_2} \times \frac{\text{ع}_2}{\text{ك}} = (-10) \times \frac{8}{20} = -4$$

$$\therefore \quad \epsilon_{\text{ع}_1} = \epsilon_{\text{ع}_2}$$

ويمكن إثبات ذلك رياضيا كالتالى :

$$\text{ع}_2 = \lambda\,\text{ع}_1$$

$$d\,\text{ع}_2 = \lambda\, d\,\text{ع}_1$$

$$\frac{\text{ء}\,\text{ع}_2}{\text{ع}_2} = \frac{\lambda\,\text{ء}\,\text{ع}_1}{\lambda\,\text{ع}_1} = \frac{\text{ء}\,\text{ع}_1}{\text{ع}_1}$$

ونظراً لأن $\frac{\text{ء}\,\text{ك}}{\text{ك}}$ متساوية فى السوقين نستنتج الآتى:

$$\frac{\frac{\text{ء}\,\text{ك}}{\text{ك}}}{\frac{\text{ء}\,\text{ع}_2}{\text{ع}_2}} = \frac{\frac{\text{ء}\,\text{ك}}{\text{ك}}}{\frac{\text{ء}\,\text{ع}_1}{\text{ع}_1}}$$

$$\therefore \quad \left| \ni\,\text{ع}_2 \right| = \left| \ni\,\text{ع}_1 \right|$$

وبفرض أن دوال الطلب كما هو مبين فى الشكل السابق غير أن السع ثابتا عند ع وأن الكميات مختلفة فى السوقين فمن دوال الطلب :

$$\text{ع} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}_1} - \frac{1}{\text{ب}_1}\,\text{ك}_1 \qquad (1)$$

$$\text{ع} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}_2} - \frac{1}{\text{ب}_2}\,\text{ك}_2 \qquad (2)$$

يمكن اشتقاق العلاقة التالية بين ك_1، ك_2 كالتالى :

$$\text{ك}_2 = \text{ا}\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda}\,\text{ك}_1$$

$$\text{ك}_2 = \text{هـ}_1 + \text{هـ}_2\,\text{ك}_1$$

$$\text{حيث } \text{هـ}_1 = \text{ا}\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda}\right)$$

$$\text{هـ}_2 = \frac{1}{\lambda}$$

حيث أن هـ١ > صفر ، هـ٢ > صفر نظراً لأن λ > ١

والمرونات السعرية هى كالتالى :

$$\ni_{\text{ع}_1} = \frac{\text{د}\text{ك}_1}{\text{د}\text{ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}_1} = (-\text{ب}_1) \times \left(\frac{\text{ع}}{1 - \text{ب}_1\text{ع}} \right)$$

$$= \frac{\text{ع}}{\text{ع} - \frac{1}{\text{ب}_1}} \qquad (1)$$

$$\ni_{\text{ع}_2} = \frac{\text{د}\text{ك}_2}{\text{د}\text{ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}_2} = (-\text{ب}_2) \times \frac{\text{ع}}{1 - \text{ب}_2\text{ع}}$$

$$= \frac{\text{ع}}{\text{ع} - \frac{1}{\text{ب}_2}} \qquad (2)$$

ونظراً لأن ب١ > ب٢ ، $\frac{1}{\text{ب}_2} > \frac{1}{\text{ب}_1}$ ، $\text{ع} - \frac{1}{\text{ب}_1} > \text{ع} - \frac{1}{\text{ب}_2}$

نستنتج أن ∋ع١ > ∋ع٢ عند السعر ع . أما إذا أخذت فى صور قيم مطلقة فإن |∋ع١| > |∋ع٢| . ودالة الطلب فى السوق الأول أكبر منها فى السوق الثانى . ومن المثال السابق .

$$\text{ك}_1 = 200 - 20\,\text{ع}$$

،

$$ل_2 = ٥٠ + \frac{أ}{٢} ل_1$$

حيث أن $\lambda = ٣$

فبفرض أن ع $= ٤$ $\therefore$ $ل_1 = ٢٠$ ، $ل_2 = ٦٠$

$$م_1 = \frac{د ل_1}{د ع} \times \frac{ع}{ل_1} = (-٢٠) \times \frac{٤}{٢٠} = -٤ \quad (١)$$

$$م_2 = \frac{د ل_2}{د ع} \times \frac{ع}{ل_2} = (-١٠) \times \frac{٤}{٦٠} = -\frac{٢}{٣} \quad (٢)$$

$$\therefore \quad م_1 < م_2$$

أو

$$|م_1| > |م_2|$$

ولإثبات ذلك رياضيا :

$$ل_2 = هـ_1 + هـ_2 ل_1$$

$$د ل_2 = هـ_2 د ل_1$$

$$\frac{د ل_2}{ل_2} = \frac{هـ_2 د ل_1}{هـ_1 + هـ_2 ل_1} < \frac{د ل_1}{ل_1}$$

وبفرض أن $\frac{د ع}{ع}$ سالبة فى نفس السوقين .

$$\frac{\frac{د ك_2}{ك_2}}{\left|\frac{د ع}{ع}\right|} < \frac{\frac{د ك_1}{ك_1}}{\left|\frac{د ع}{ع}\right|}$$

$$\therefore \quad \left|\text{ه}_{ع_2}\right| < \left|\text{ه}_{ع_1}\right|$$

الطلب الكلى :

أوضحنا سلفا أن دالة الطلب الفردية يمكن اشتقاقها باستخدام إحدى الطرق الثلاثة هى :

(١) الطريقة الكلاسيكية .

(٢) طريقة منحنيات السواء .

(٣) طريقة مضروبات لاجرانج .

ولإشتقاق دالة الطلب الكلية Aggregate Demand يجب تجميع دوال الطلب الفردية . فبفرض عدم وجود تداخل بين المستهلكين يمكن اشتقاق دالة الطلب الكلية بجمع الكميات المطلوبة للمستهلكين عندمستويات سعرية مختلفة . وفرض عدم وجود تداخل بين المستهلكين يعنى وجود كميات متجانسة معروضة من السلعة لهؤلاء المستهلكين .

ومن الجدير بالذكر أن مشكلة التجميع Aggregation Problem تظهر بصورة جليه فى دنيا الحقيقة ، فهناك تداخل بين المستهلكين وعلى هذا

فعند تقدير دالة الطلب الكلية يجب أن يؤخذ هذا التداخل فى الاعتبار . ولكن ليس هدفنا شرح تلك المشكلة ولكن شرح تطور النظرية الاقتصادية .

ولكن يجب عند اشتقاق دالة الطلب الكلية أن نأخذ فى الاعتبار تلك المشكلة لأن تحليل الدالة المقدرة يعتمد على استنباط الباحث حتى لا تكون الدالة المقدرة متحيزة Biased Estimate

وبفرض أن دوال الطلب للمستهلك ١ والمستهلك ٢ هى كالتالى :

$$ك_١ = ٢٠ - ٢ ع$$

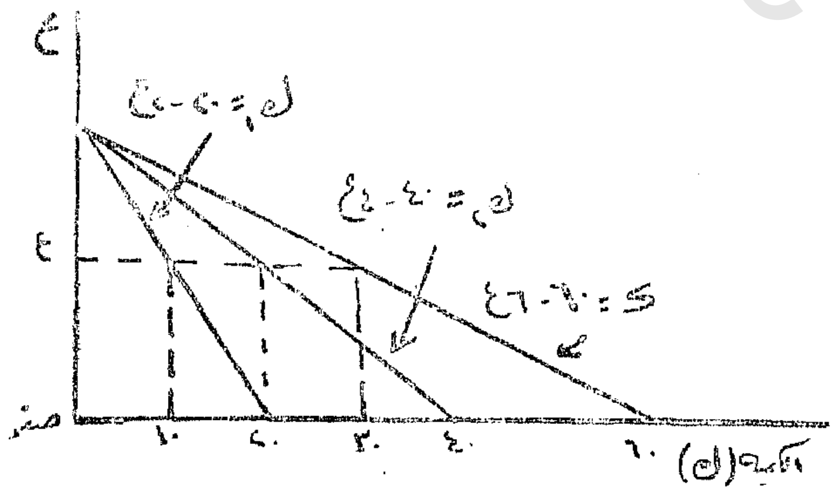
$$ك_٢ = ٤٠ - ٤ ع$$

حيث تمثل $ك_١$ ، $ك_٢$ الكميات المطلوبة من المستهلكين ١ ، ٢ ، ع تمثل السعر فيكون دالة الطلب الكلية هى :

$$ك = ك_١ + ك_٢ = ٦٠ - ٦ ع$$

حيث ك = تمثل الكمية الكلية المطلوبة عند السعر ع .

ويمكن رسم الدوال الثلاثة فى الشكل التالى :



شكل (٢٢) الدوال الفردية والدالة الكلية

ويجب ملاحظة أن الكميات هى التى جمعت وليست الأسعار . فمثلا عند السعر ٥ تكون الكميات :

$$ك_١ = ١٠ ، ك_٢ = ٢٠ ، ك = ٣٠ .$$

تجميع المرونات Aggregation Elasticities

بفرض أن عدد المستهلكين ن ، فإن دالة الطلب الكلية هى عبارة عن مجموع دوال الطلب الفردية للمستهلكين كالتالى :

$$ك = ك_١ + ك_٢ + \cdots + ك_ن$$

ويأخذ التفاضل الكلى إلى ك بالنسبة الى سعر السوق ع

$$\frac{ءك}{ءع} = \frac{ءك_١}{ءع} + \frac{ءك_٢}{ءع} + \cdots + \frac{ءك_ن}{ءع}$$

ومن الجدير بالذكر أن السعر ثابتا لجميع المستهلكين ولكن تختلف الكميات المشتراة بالنسبة لكل مستهلك. وبضرب التفاضل فى $\frac{ع}{ك}$

$$\frac{ءك}{ءع} \times \frac{ع}{ك} = \frac{ءك_١}{ءع} \times \frac{ع}{ك} + \frac{ءك_٢}{ءع} \times \frac{ع}{ك}$$

$$+ \cdots + \frac{ءك_ن}{ءع} \times \frac{ع}{ك}$$

ويمثل الطرف الأيمن لهذه المعادلة المرونة السعرية الكلية لدالة الطلب

وبضرب كل حد من الطلب الأيسر في $\frac{ك_ا}{ك_ا}$ (ا = ١ ، ٢ ، ... ، ن)

ونظراً لأن النسبة تساوي الوحدة فإن الطرف الأيسر لا تتغير قيمته .

$$\ni = \left(\frac{دك_١}{دع} \times \frac{ع}{ك_١}\right)\left(\frac{ك_١}{ك}\right) + \left(\frac{دك_٢}{دع} \times \frac{ع}{ك_٢}\right)\left(\frac{ك_٢}{ك}\right) + \cdots + \left(\frac{دك_ن}{دع} \times \frac{ع}{ك_ن}\right)\left(\frac{ك_ن}{ك}\right)$$

$$\ni = ج_١ \ni_١ + ج_٢ \ni_٢ + \cdots + ج_ن \ni_ن$$

$$= \sum_{ا=١}^{ن} ج_ا \ni_ا$$

حيث أن $\ni_ا = \frac{دك_ا}{دع} \times \frac{ع}{ك_ا}$ (ا تبدأ من ١ إلى ن) عبارة عن

المرونة السعرية للمستهلك ا وأن $ج_ا = \frac{ك_ا}{ك}$ (ا تبدأ من ١ إلى ن) .

وهي عبارة عن النسبة المطلوبة من السلعة للمستهلك ا . وتكون المرونة السعرية الكلية عبارة عن المرونات السعرية الفردية المرجحة ، حيث :

$١ \geq ج_ا \geq$ صفر وأن :

$$\sum_{ا=١}^{ن} ج_ا = ١$$

مثال :

دوال الطلب الفردية هى كالتالى :

$$\text{ك}_1 = 20 - 2\,\text{ع}$$

$$\text{ك}_2 = 40 - 4\,\text{ع}$$

∴ تكون المرونات السعرية الفردية هى :

$$\epsilon_1 = \frac{\text{د ك}_1}{\text{د ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}_1} = (-2) \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}_1}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\text{د ك}_2}{\text{د ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}_2} = (-4) \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}_2}$$

وأن النسبة المطلوبة الفردية من الكمية الكلية هى :

$$\text{ج}_1 = \frac{\text{ك}_1}{\text{ك}}$$

$$\text{ج}_2 = \frac{\text{ك}_2}{\text{ك}}$$

حيث أن :

$$\text{ك} = \text{ك}_1 + \text{ك}_2 = 60 - 6\,\text{ع}$$

فمن العلاقة السابقة المشتقة لمرونة الطلب الكلية يستنتج التالى

$$\epsilon = \text{ج}_1\,\epsilon_1 + \text{ج}_2\,\epsilon_2$$

$$= \frac{\text{ك}_1}{\text{ك}}\left(\frac{-2\,\text{ع}}{\text{ك}_1}\right) + \frac{\text{ك}_2}{\text{ك}}\left(\frac{-4\,\text{ع}}{\text{ك}_2}\right) = \frac{-6\,\text{ع}}{\text{ك}}$$

ويمكن اشتقاق المرونة السعرية الكلية مباشرة من دالة الطلب الكلية كالتالى :

$$\text{ح} = \frac{\text{د ك}}{\text{د ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}} = \frac{-٦\,\text{ع}}{\text{ك}}$$

وبفرض أن ع = ٥ ، ك$_١$ = ١٠ ، ك$_٢$ = ٢٠ ، ك = ٣٠

وتكون المرونات السعرية وترجيحاتها هى كالتالى :

$$\text{ح}_١ = \frac{-٢\,\text{ع}}{\text{ك}_١} = \frac{(-٢)(٥)}{١٠} = -١$$

$$\text{ج}_١ = \frac{\text{ك}_١}{\text{ك}} = \frac{١٠}{٣٠} = \frac{١}{٣}$$

$$\text{ح}_٢ = \frac{-٤\,\text{ع}}{\text{ك}_٢} = \frac{(-٤)(٥)}{٢٠} = -١$$

$$\text{ج}_٢ = \frac{\text{ك}_٢}{\text{ك}} = \frac{٢٠}{٣٠} = \frac{٢}{٣}$$

$$\text{ح} = \left(\frac{١}{٣}\right)(-١) + \left(\frac{٢}{٣}\right)(-١) = -١$$

ومن دالة الطلب الكلى :

$$\text{ح} = \frac{-٦\,\text{ع}}{\text{ك}} = \frac{(-٦)(٥)}{٣٠} = -١$$

وهناك بعض الحالات الخاصة سنوجزها فيما يلى :

الحالة الأولى :

بفرض أن الكمية المطلوبة لكل فرد متساوية ، أى أن :

$$\text{ك}_{1} = \text{ك}_{2} = \cdots = \text{ك}_{\text{ن}} = \text{ك}$$

فيكون الطلب الكلى :

$$\text{ى} = \sum_{\text{ا}=1}^{\text{ن}} \text{ك}_{\text{ا}} = \sum_{\text{ا}=1}^{\text{ن}} \text{ك} = \text{ن ك}$$

ومن هنا يستنتج أن النسب المطلوبة من السلعة لكل مستهلك هى :

$$\frac{\text{ك}_{\text{ا}}}{\text{ى}} = \frac{\text{ك}}{\text{ى}} = \frac{\text{ك}}{\text{ن ك}} = \frac{1}{\text{ن}}$$

حيث ا تبدأ من ١ إلى ن

وتكون المرونة السعرية الكلية :

$$\epsilon = \sum_{\text{ا}=1}^{\text{ن}} \frac{\text{ك}_{\text{ا}}}{\text{ى}} \times \epsilon_{\text{ا}} = \sum_{\text{ا}=1}^{\text{ن}} \frac{\text{ك}}{\text{ى}} \epsilon_{\text{ا}}$$

$$= \frac{1}{\text{ن}} \sum_{\text{ا}=1}^{\text{ن}} \epsilon_{\text{ا}}$$

أى أن المرونة السعرية الكلية هى عبارة عن المتوسط للمرونات السعرية الفردية .

مثال :

بفرض أن:

$$\text{ل}_{١} = ١٤ - ٢\,\text{ع}$$

$$\text{ل}_{٢} = ١٠ - \text{ع}$$

$$\text{ل}_{٣} = ٨ - \tfrac{١}{٢}\,\text{ع}$$

فيكون الطلب الكلى :

$$\text{ك}_{\text{ط}} = \text{ل}_{١} + \text{ل}_{٢} + \text{ل}_{٣} = ٣٢ - ٣\tfrac{١}{٢}\,\text{ع}$$

$\text{ك}_{\text{ط}}$ = الكمية الكلية المطلوبة

وبفرض أن الكمية المعروضة $\text{ك}_{\text{ر}} = ١٨$. فعند التوازن تكون:

$$\text{ك}_{\text{ط}} = \text{ك}_{\text{ر}}$$

$$٣٢ - ٣\tfrac{١}{٢}\,\text{ع} = ١٨$$

$$\text{ع} = ٤$$

وعند السعر $\text{ع} = ٤$ تكون $\text{ل}_{١} = ٦$ ، $\text{ل}_{٢} = ٦$ ، $\text{ل}_{٣} = ٦$.

وتكون المرونات السعرية الفردية هى :

$$\ni_{1} = \frac{\text{ء}\,\text{ك}_{1}}{\text{ء}\,\text{ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}_{1}} = (-\text{٢})\left(\frac{\text{٤}}{\text{٦}}\right) = -\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$$

$$\ni_{2} = \frac{\text{ء}\,\text{ك}_{2}}{\text{ء}\,\text{ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}_{2}} = (-\text{١})\left(\frac{\text{٤}}{\text{٦}}\right) = -\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$$

$$\ni_{3} = \frac{\text{ء}\,\text{ك}_{3}}{\text{ء}\,\text{ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}_{3}} = (-\tfrac{1}{2})\left(\frac{\text{٤}}{\text{٦}}\right) = -\frac{\text{١}}{\text{٣}}$$

فنى حالتنا هذه تكون ن = ٣ ، وتكون المرونة السعرية الكلية :

$$\ni = \frac{\text{١}}{\text{٣}}\left(\ni_{1} + \ni_{2} + \ni_{3}\right) = \left(\frac{\text{١}}{\text{٣}}\right)\left(\frac{-\text{٧}}{\text{٣}}\right)$$

$$= -\frac{\text{٧}}{\text{٩}}$$

ونفس القيمة يمكن اشتقاقها مباشرة من دالة الطلب الكلى :

$$\ni = \frac{\text{ء}\,\text{كر}}{\text{ء}\,\text{ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{كر}} = \left(\frac{-\text{٧}}{\text{٢}}\right)\left(\frac{\text{٤}}{\text{١٨}}\right) = -\frac{\text{٧}}{\text{٩}}$$

الحالة الثانية :

بفرض أن المرونات السعرية الفردية متساوية :

$$\ni_{1} = \ni_{2} = \cdots = \ni_{\text{ن}} = \ni$$

تكون المرونة السعرية الكلية :

$$\ni = \sum_{\text{ا}=1}^{\text{ن}} \frac{\text{ك}_{\text{ا}}}{\text{ك}} \times \ni^{*} = \frac{\ni^{*}}{\text{ك}} \sum_{\text{ا}=1}^{\text{ن}} \text{ك}_{\text{ا}}$$

$$= \frac{\ni^{*}}{\text{ك}} \times \text{ك} = \ni^{*}$$

أى أن المرونة السعرية الكلية مساوية للمرونة السعرية الفردية .

<u>أمثلة :</u>

(١) بفرض أن هناك سعر عالمى ثابت لسلعة معينة وأن دالة الطلب فى السوق المحلية Home Morket تمثلها الدالة التالية :

$$\text{ك}_{h} = ١٥ + ٣\text{ع} - \text{ع}^{٢}$$

حيث ك_{h} = تمثل الكمية المطلوبة فى السوق المحلى

وأن دالة الطلب فى السوق الخارجى Foreign Market تمثلها أيضاً المعادلة التالية :

$$\text{ك}_{f} = ١٠ - \text{ع} .$$

حيث ك_{f} = تمثل الكمية المطلوبة فى السوق الخارجى

فتكون دالة الطلب للسوق العالمى هى :

$$\text{ك}_{\text{ط}} = \text{ك}_{h} + \text{ك}_{f} = ٢٥ + ٢\text{ع} - \text{ع}^{٢}$$

وبفرض أن الكمية المعروضة فى السوق العالمى لهذه السلعة $ك_ر$ ($ك_ر = ٢٥$). فعند التوازن يكون:

$$ك_ط = ك_ر$$

$$٢٥ + ٢ع - ع^٣ = ٢٥$$

$$ع = ٢$$

وعند السعر ع = ٢ تكون $ك_h = ١٧$ ، $ك_f = ٨$ ، $ك_ر = ٢٥$.

وتكون المرونات السعرية فى السوقين هى:

$$\ni_h = \frac{دك_h}{دع} \times \frac{ع}{ك_h} = (٣ - ٢ع)\left(\frac{ع}{ك_h}\right)$$

$$= (-١)\left(\frac{٢}{١٧}\right) = -\frac{٢}{١٧}$$

حيث $\ni_h$ = المرونة السعرية فى السوق المحلى

$$\ni_f = \frac{دك_f}{دع} \times \frac{ع}{ك_f} = (-١)\left(\frac{٢}{٨}\right) = -\frac{١}{٤}$$

حيث $\ni_h$ = المرونة السعرية فى السوق الخارجى

وتكون الترجيحات فى السوقين المحلى والخارجى Weights هى:

$$ج_h = \frac{ك_h}{ك_ط} = \frac{١٧}{٢٥}$$

$$ج_f = \frac{ك_f}{ك_ط} = \frac{٨}{٢٥}$$

وتكون المرونة السعرية الكلية هي :

$$\ni = ج_h \ \ni_h + ج_f \ \ni_f = \left(\frac{١٧}{٢٥}\right)\left(\frac{-٢}{١٧}\right)$$

$$+ \left(\frac{٨}{٢٥}\right)\left(-\frac{١}{٤}\right) = -\frac{٤}{٢٥}$$

ويمكن اشتقاق المرونة السعرية الكلية من دالة الطلب كالتالى :

$$\ni = \frac{د ك_ط}{د ع} \times \frac{ع}{ك_ط} = (٢ - ٢ع) \times$$

$$\frac{ع}{ك_ط} = -\frac{٤}{٢٥}$$

ويمكن استنتاج مما سبق ذكره أنه بفرض معرفة المرونة السعرية الكلية ∋ وكذلك المرونة السعرية لدالة الطلب فى السوق المحلية $\ni_h$ فيمكن حساب

ج h ، ج f من البيانات الموجودة فبدون معرفة دوال الطلب للدولتين يمكن حساب المرونة السعرية لدالة الطلب الخارجية .

$$\backepsilon_f = \frac{\backepsilon}{\text{ج}_f} - \frac{\text{ج}_h}{\text{ج}_f} \times \backepsilon_h$$

ومن الجدير بالذكر أن للمعادلة السابقة تطبيقات عملية كثيرة .

(٢) فى كثير من الأحيان قد يراد معرفة تأثير تغير السعر العالمى لسلعة ما على الكميات المصدرة Exported من هذه السلعة للأسواق العالمية عبارة عن الفرق بين الكميات المطلوبة $\text{ك}_{\text{ط}}$ والعرض الأجنبى $\text{ك}_{\text{ر}}$

$$\text{ك}_E = \text{ك}_{\text{ط}} - \text{ك}_{\text{ر}}$$

حيث ك_E = عبارة عن الكميات المصدرة من السلعة

وبفرض وجود سعر واحد معين لهذه السلعة ، فبأخذ التفاضل الكلى للمعادلة السابقة وبضرب الطرفين الأيمن والأيسر بالقيمة $\frac{\text{ع}}{\text{ك}_E}$ يستنتج التالى :

$$\frac{\text{د ك}_E}{\text{د ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}_E} = \frac{\text{د ك}_{\text{ط}}}{\text{د ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}_E} - \frac{\text{د ك}_{\text{ر}}}{\text{د ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ك}_E}$$

ويعرف الطرف الأيمن من هذه المعادلة بالمرونة السعرية للتصدير ($\ni_E$).

وبضرب الحد الأول للطرف الأيسر بالقيمة $\frac{ك_ط}{ك_ط}$ وكذلك الحد الثانى بالقيمة $\frac{ك_ر}{ك_ر}$ يستنتج أن :

$$\ni_E = \frac{ءك_ط}{ءع} \times \frac{ع}{ك_ط} \times \frac{ك_ط}{ك_E} - \frac{ءك_ر}{ءع} \times$$

$$\frac{ع}{ك_ر} \times \frac{ك_ر}{ك_E}$$

$$\ni_E = \ni_ط \, ج_ط + \ni_ر \, ج_ر$$

$$\ni_ط = -\frac{ءك_ط}{ءع} \times \frac{ع}{ك_ط} \quad ، \quad ج_ط = \frac{ك_ر}{ك_E}$$

$$\ni_ر = \frac{ءك_ر}{ءع} \times \frac{ع}{ك_ر} \quad ، \quad ج_ر = \frac{ك_ر}{ك_E}$$

ومن ذلك يمكن استنتاج أن المرونة السعرية للتصدير عبارة عن مجموع المرونة السعرية للطلب الخارجى الأجنبى والمرونة السعرية للعرض الأجنبى مرجحة .

(٣) قد يراد فى بعض الأحيان معرفة تأثير الكميات المرسلة لسوق من سلعة ما على الدخل الصافى Net Revenue . ويعرف الدخل الصافى بأنه عبارة عن الفرق بين الإيراد الكلى والتكاليف الكلية .

ى ص = ر ل — ت ل

حيث ى ص = الدخل الصافى

ر ل = الإيراد الكلى

ت ل = التكاليف الكلية

وبأخذ التفاضل لهذه المعادلة بالنسبة إلى الكمية :

$$\frac{\text{ء (ى ص)}}{\text{ء ك}} = \frac{\text{ء (ر ل)}}{\text{ء ك}} - \frac{\text{ء ت ل}}{\text{ء ك}}$$

وبضرب طرفى المعادلة بالقيمة $\frac{\text{ك}}{\text{ى ص}}$

$$\frac{\text{ء (ى ص)}}{\text{ء ك}} \times \frac{\text{ك}}{\text{ى ص}} = \frac{\text{ء (ر ل)}}{\text{ء ك}} \times \frac{\text{ك}}{\text{ى ص}} - \frac{\text{ء (ت ل)}}{\text{ء ك}} \times \frac{\text{ك}}{\text{ى ص}}$$

ويعرف الطرف الأيمن لهذه المعادلة السابقة بمرونة الكمية للدخل الصافى وبضرب الحد الأول للطرف الثانى بالقيمة $\frac{(\text{ر ل})}{(\text{ر ل})}$ وكذلك الحد الثانى بالقيمة $\left(\frac{\text{ت ل}}{\text{ت ل}}\right)$

$$\ni_{\text{ك}(\text{ى ص})} = \left\{\left(\frac{\text{ى}(\text{ر ل})}{\text{ى ك}} \times \frac{\text{ك}}{\text{ر ل}}\right)\right\} \frac{\text{ر ل}}{\text{ى ص}} - \left\{\left(\frac{\text{ى}(\text{ت ل})}{\text{ى ك}} \times \frac{\text{ك}}{(\text{ت ل})}\right)\right\} \frac{\text{ت ل}}{\text{ى ص}}$$

$$= \ni_{\text{ك}(\text{ر ل})}\,\text{ج}_1 + \ni_{\text{ك}(\text{ت ل})}\,\text{ج}_2$$

حيث أن :

$$\ni_{\text{ك}(\text{ر ل})} = \frac{\text{ى}(\text{ر ل})}{\text{ى ك}} \times \frac{\text{ك}}{\text{ر ل}} \quad ، \quad \text{ج}_1 = \frac{\text{ر ل}}{\text{ى ص}}$$

$$\ni_{\text{ك}(\text{ت ل})} = \frac{\text{ى}(\text{ت ل})}{\text{ى ك}} \times \frac{\text{ك}}{\text{ت ل}} \quad ، \quad \text{ج}_2 = - \frac{\text{ت ل}}{\text{ى ص}}$$

ويمكن استنتاج أن مرونة الدخل الصافى عبارة عن مجموع مرجحات مرونة الدخل الكلى ومرونة التكاليف الكلية .

ومن المعلوم أن :

$$\ni_{\text{ك}(\text{رل})} = \frac{\text{د}(\text{رل})}{\text{دك}} \times \frac{\text{ك}}{\text{رل}}$$

$$\text{الإيراد الحدى} = \text{رح} = \frac{\text{د}(\text{رل})}{\text{دك}}$$

$$\ni_{\text{ك}(\text{رل})} = \text{رح} \times \frac{\text{ك}}{\text{رل}}$$

ولقد سبق اشتقاق أن :

$$\text{رح} = \text{ع}\left(١ + \frac{١}{\ni_{\text{ع}}}\right)$$

حيث ع = السعر $\qquad$ $\ni_{\text{ع}}$ = المرونة السعرية .

$$\ni_{\text{ك}(\text{رل})} = \text{ع}\left(١ + \frac{١}{\ni_{\text{ع}}}\right) \times \frac{\text{ك}}{\text{رل}} = ١ + \frac{١}{\ni_{\text{ع}}}$$

حيث أن ع ك = رل

وعلى هذا يمكن اشتقاق مرونة الدخل الصافى .

$$\ni_{\text{ك}(\text{ىص})} = \left(١ + \frac{١}{\ni_{\text{ع}}}\right) \frac{\text{رل}}{\text{ىص}} - \ni_{\text{ك}(\text{تل})} \times \frac{\text{تل}}{\text{ىص}}$$

ولإيضاح ذلك بفرض أن مرونة التكاليف الكلية تساوى الصفر مثلاً.

وأن المرونة السعرية لدالة الطلب هى ـ ٤ر٠ ($\ni$ع = ـ ٤ر٠)

وأن الإيراد الكلى ٣٠ جنيه مصرى والإيراد الصافى ٩ جنيه مصرى فعلى هذا :

$$\ni\, \text{ك}_{(\text{ى ص})} = \left(١ + \frac{١}{\frac{-٤}{١٠}}\right)\left(\frac{٣٠}{٩}\right) = \left(\frac{-٣}{٢}\right)$$

$$\left(\frac{٣٠}{٩}\right) = -٥$$

أى أن ١ ٪ زيادة فى الكمية له تأثيرات هى إنخفاض السعر بمقدار ٥ر٢ ٪ ، ٥ر١ ٪ إنخفاض فى الإيراو الكلى ، ٥ ٪ إنخفاض فى الدخل الصافى .