الباب الثالث

نظرية سلوك المنشأة

أوضحنا سلفا أن علم الإقتصاد أحد العلوم الإجتماعية التى تدرس كيفية سلوك الفرد سواء كان هذا الفرد شخصا بذاته (المستهلك) أو معنوى (مؤسسة أو منشأة) ولذلك فإن هدف علم الإقتصاد هو قيادة هذا الفرد ورشده إلى التصرف الأمثل Optimum Behavior . ويهتم علم الإقتصاد أيضاً بتصرف المجتمع وأفراده من حيث الاستهلاك والإنتاج والاستثمار والإدخار . . . إلخ .

وقد أوضحنا فى الباب السابق تصرف المستهلك ، وسنقوم بشرح التصرف الأمثل للوحدة الإنتاجية أو المنشأة فى هذا الباب .

وتعرف المنشأة بأنها الوحدة الفنية Technical Unit التى تنتج السلع والخدمات . ومن ثم فإن المشاكل الفنية للإنتاج تهتم دائماً وأبداً بالعلاقات المختلفة بين عناصر الإنتاج والسلع المنتجة من استخدام هذه العناصر . ويعرف عنصر الإنتاج بأنه السلعة أو الخدمة التى تضيف إلى الإنتاج . ويجب أن تستخدم هذه العوامل بشكل كفاءة ممكنة حتى يمكن الوصول إلى مجتمع الرفاهة إذ كلما استخدمت مثل هذه العناصر بغير كفاءة فإن النتيجة الحتمية هى كثرة التكاليف وقلة الإنتاج وبالتالى زيادة الأعباء على المجتمع ،

ولذلك لابد أن يكون للوحدة المنتجة مرشد أو مدير يعمل على تنظيم هذه العناصر وإدارتها وربطها ببعضها إلى أن يصل إنتاجه إلى أقصى درجة من الإنتاج بأقل التكاليف الممكنة . ويتوقف الوصول إلى هذا الهدف على عوامل معينة :

(١) معرفة كيفية استخدام عناصر الإنتاج .

(٢) المعرفة الفنية للمدير بوحدته الإنتاجية .

(٣) كيفية حل مشاكل الإنتاج بسرعة وبدقة .

(٤) معرفة مدير المنشأة ماهية المطلوب من الإنتاج وإلى من سيرسل ذلك الإنتاج وفى أى وقت حتى لايتعرض مثلا لمشاكل التخزين .

وتقسم عناصر الإنتاج بالنسبة إلى الوقت أو المدى الذى تستخدم فيه إلى ثابتة ومتغيرة .

ففى المدى القصير تعتبر مثلا مبانى المؤسسة ثابتة ولكن تعتبر أجور العمال وتكاليف الشحن . . . إلخ متغيرة . ولكن يعرف المدى الطويل بأنه ذلك المدى الذى يعتبر جميع عناصر الإنتاج متغيرة .

وقد تختلف الأهداف التى تقوم على أساسها المنشأة إلا أنه بصفة عامة فإن الهدف الأساسى لمدير المؤسسة هو معظمة الإنتاج بالنسبة إلى تكاليف معينة ، أى الوصول بالإنتاج إلى أكبر ما يمكن تحقيقه وتقليل النفقة إلى أقل ما يمكن حتى يمكن معظمة الربح Profit Maximization .

وسنناقش فى هذا الباب مشا كل مدير المنشأة الذى يستخدم عنصرى إنتاج بمستويات مختلفة لإنتاج سلعة معينة . ولذلك سنقوم بتعريف دالة الإنتاج وكيفية اشتقاق منحنيات الإنتاج Productivity Curves ، منحنيات تماثل الإنتاج Isoquant ثم نماذج التصرف الأمثل للمنشأة .

دالة الإنتاج :

تعرف دالة الإنتاج بأنها العلاقة الفنية Technical Relationship بين عوامل الإنتاج والإنتاج نفسه . فبفرض أن منشأة ما تستخدم إثنين من عوامل الإنتاج وتنتج سلعة معينة فيمكن كتابتها رياضيا كالتالى :

$$ك = د(س_1 ، س_2)$$

حيث ك = الكمية المنتجة

$س_ا$ = عوامل الإنتاج

حيث ا تأخذ القيم ١ ، ٢

أى أن السلعة المنتجة ك تعتمد على عناصر الإنتاج $س_1$ ، $س_2$.

منحنيات الإنتاج :

يعرف الإنتاج الكلى (ا ل) لعامل من عوامل الإنتاج $س_1$ لإنتاج سلعة ما (ك) بأنها عبارة عن الكمية المنتجة من استخدام ذلك العامل بفرض ثبات العوامل الأخرى . ورياضيا يرمز لها بالعلاقة التالية :

$$ك = د\,(س_{1} ، س_{2} ، \ldots ، س_{ن})$$

حيث $ك$ = الكمية المنتجة .

$س_{1} ، \ldots ، س_{ن}$ = عناصر الإنتاج.

وبفرض استخدام عنصر الإنتاج $س_{1}$ بكميات متساوية مع ثبات عنصر الإنتاج الأخرى فإن الإنتاج يمر بمراحل مختلفة فيزداد الإنتاج زيادة متزايدة (المرحلة الأولى) ثم بزيادة متناقصة (المرحلة الثانية) ثم يتناقص الإنتاج بزيادة ذاك العامل (المرحلة الثالثة) وهذا ما يعرف بقانون تناقص الغلة . Law of Diminishing Returns ويطلق عليه بعض الاقتصاديون قانون النسب المتغيرة Law of Variable Portions .

ويمكن إيضاً تعريف متوسط الإنتاج Average Pradactivity لذلك العامل $س_{1}$ بأنه عبارة عن الإنتاج الكلى لذلك العامل مقسوما على الكمية المستخدمة منه.

$$م_{1} = \frac{ك}{س_{1}} = \frac{د\,(س_{1} ، س_{2})}{س_{1}}$$

حيث $م_{1}$ = متوسط الإنتاج .

كذلك يعرف الإنتاج الحدى Marginal Productivity لعنصر الإنتاج $س_{1}$ بأنه عبارة عن نسبة التغير فى الإنتاج الكلى بالنسبة إلى التغير فى الكمية المستخدمة من عامل الإنتاج وحدة واحدة . ورياضيا هو عبارة عن التفاضل الجزئى لدالة الإنتاج بالنسبة لعامل الإنتاج $س_{1}$.

$$ا ح = \frac{\partial ك}{\partial س_1} = \frac{\partial د(س_1 ، س_2)}{\partial س_1}$$

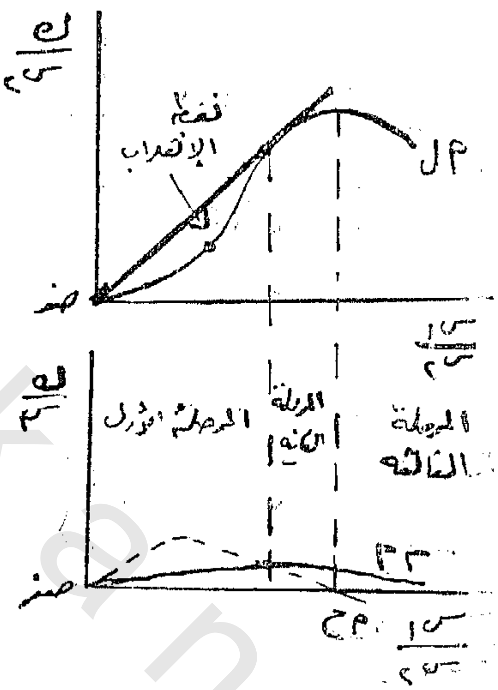
حيث اح = الإنتاج الحدى.

ويمكن من الجدول التالى اشتقاق العلاقات المختلفة بين الإنتاج الكلى والمتوسط والحدى . فبفرض أن المتغير الوحيد هو عنصر العمل مع ثبات العوامل الأخرى .

جدول الإنتاج الكلى والحدى والمتوسط لعنصر العمل

الأرض	العمل	الإنتاج الكلى	الإنتاج الحدى	متوسط الإنتاج	بيان
١	١	٥	٥	٥	المرحلة الأولى
١	٢	١٢	٧	٦	
١	٣	٢١	٩	٨	
١	٤	٢٨	٧	٧	اح = م ا
١	٥	٣٣	٥	$٦\frac{٣}{٥}$	المرحلة الثانية
١	٦	٣٦	٣	٦	
١	٧	٣٧	١	$٥\frac{٢}{٧}$	
١	٨	٣٧	٥	$٤\frac{٥}{٨}$	المرحلة الثالثة
١	٩	٣٦	١ —	٤	
١	١٠	٣٠	٦ —	٣	

ويبين الشكل التالى العلاقات المختلفة بين منحنيات الإنتاج .



شكل (٣٣) الإنتاج الكلى والحدى والمتوسط
حيث عند نقطة الإنقلاب يكون الإنتاج الحدى معظما

ويتضح من الشكل السابق أن منحنى متوسط الإنتاج يأخذ فى الزيادة حتى نهاية المرحلة الأولى حيث يصل إلى أقصى مايمكن أن يصل إليه متوسط الوحدة الإنتاجية . وفى هذه المرحلة أيضاً يزداد الإنتاج الحدى بزيادة الوحدات المستخدمة إلا أنه يصل إلى نقطة المعظمة قبل نهاية المرحلة الأولى عند نقطة الإنقلاب لمنحنى الإنتاج الكلى وعندما يكون متوسط الإنتاج فى نقطة المعظمة يكون متوسط الإنتاج مساويا الإنتاج الحدى وهى نهاية المرحلة الأولى وبداية المرحلة الثانية ويقع منحنى الإنتاج الحدى فوق منحنى متوسط الإنتاج . وفى المرحلة الثانية يكون منحنى متوسط الإنتاج فوق

الإنتاج الحدى وتتناقص قيمتهما بزيادة الوحدات من عنصر العمل س١ .

ومن الجدير بالذكر أن تلك القيم تكون موجبة فى تلك المرحلة . وعندما يكون الإنتاج الكلى ممعظما يكون الإنتاج الحدى مساويا للصفر وهى نهاية المرحلة الثانية وبزيادة عنصر العمل يبدأ الإنتاج الكلى فى النقصان ويكون الإنتاج الحدى أقل من الصفر .

وبفرض أن دالة الإنتاج[1] هى :

$$\text{ل} = \text{د}\,(\text{س}_1 \,،\, \text{س}_2)$$

$$\text{ل} = \text{ا}\,\text{س}_1^{2}\,\text{س}_2^{2} - \text{ب}\,\text{س}_1^{3}\,\text{س}_2^{3}$$

حيث ا ، ب ثوابت

س١ ، س٢ عناصر الإنتاج

ولإيجاد قيمة متوسط الإنتاج حينما يكون ممعظما يأخذ التفاضل الجزئى له بالنسبة إلى عنصر الإنتاج س١ وتوضع المعادلة مساوية للصفر .

$$\text{م ا} = \frac{\text{د}\,(\text{س}_1 \,،\, \text{س}_2)}{\text{س}_1}$$

---

(1) J. E. Henderson and R. C. Quandt « Micraeconomic Theory A Mathematical Approach » Mcgraw - Hill Book Company, Inc., New york 1958.

$$\frac{\partial \text{م}_1}{\partial \text{س}_1} = \frac{\text{س}_1 \, \text{د}_1 (\text{س}_1 \text{ ، } \text{س}_2) - \text{د} (\text{س}_1 \text{ ، } \text{س}_2)}{\text{س}_1^2}$$

حيث أن $\text{د}_1 (\text{س}_1 | \text{س}_2)$ عبارة عن تفاضل دالة الإنتاج بالنسبة لعنصر الإنتاج س_1 .

$$\text{س}_1 \, \text{د}_1 (\text{س}_1 \text{ ، } \text{س}_2) - \text{د} (\text{س}_1 \text{ ، } \text{س}_2) = \text{صفر}$$

$$\text{د}_1 (\text{س}_1 \text{ ، } \text{س}_2) = \frac{\text{د} (\text{س}_1 \text{ ، } \text{س}_2)}{\text{س}_1}$$

ومن الجدير بالذكر هنا أن :

$$\text{د}_1 (\text{س}_1 \text{ ، } \text{س}_2) = \frac{\partial \, \text{د} (\text{س}_1 \text{ ، } \text{س}_2)}{\partial \text{س}_1} = \text{اح} \, .$$

أى عندما يكون متوسط الإنتاج معظما يكون الإنتاج الحدى مساويا له .
ويجب ملاحظة أنه بإختلاف الكميات الثابتة من س_2 يمكن اشتقاق دوال إنتاج مختلفة ، فمن دوال الطلب السابقة :

$$\text{ك} = \text{ا} \, \text{س}_1^2 \, \text{س}_2^2 - \text{ب} \, \text{س}_1^3 \, \text{س}_2^3$$

$$\text{بفرض أن } \text{ا} \, \text{س}_2^2 = \text{هـ}_1 \quad \text{،} \quad \text{ب} \, \text{س}_2^3 = \text{هـ}_2$$

$$\therefore \text{ك} = \text{هـ}_1 \, \text{س}_1^2 - \text{هـ}_2 \, \text{س}_1^3$$

وتعتمد قيم كل من هـ_1 ، هـ_2 على الكميات الثابتة المعطاة من س_2 حيث بإختلاف هذه الكميات الثابتة يمكن اشتقاق دوال إنتاج مختلفة .

$$\text{م ا} = \text{هـ}_{١}\,\text{س}_{١} - \text{هـ}_{٢}\,\text{س}_{١}^{٢}$$

$$\text{ا ح} = ٢\,\text{هـ}_{١}\,\text{س}_{١} - ٣\,\text{هـ}_{٢}\,\text{س}_{١}^{٢}$$

ويكون متوسط الانتاج معظما عند النقطة :

$$\frac{\partial(\text{م ا})}{\partial \text{س}_{١}} = \text{هـ}_{١} - ٢\,\text{هـ}_{٢}\,\text{س}_{١}$$

$$\text{هـ}_{١} - ٢\,\text{هـ}_{٢}\,\text{س}_{١} = \text{صفر}$$

$$\text{س}_{١} = \frac{\text{هـ}_{١}}{٢\,\text{هـ}_{٢}}$$

حيث أن $\frac{\partial^{٢}(\text{م ا})}{\partial \text{س}_{١}^{٢}} = -٢\,\text{هـ}_{٢}$ (١)

ويكون الانتاج الحدى معظما عند النقطة :

$$\frac{\partial(\text{ا ح})}{\partial \text{س}_{١}} = ٢\,\text{هـ}_{١} - ٦\,\text{هـ}_{٢}\,\text{س}_{١}$$

$$٢\,\text{هـ}_{١} - ٦\,\text{هـ}_{٢}\,\text{س}_{١} = \text{صفر}$$

$$\text{هـ}_{١} - ٣\,\text{هـ}_{٢}\,\text{س}_{١} = \text{صفر}$$

$$\text{س}_{١} = \frac{\text{هـ}_{١}}{٣\,\text{هـ}_{٢}}$$

حيث أن $\frac{\partial^{٢}(\text{ا ح})}{\partial \text{س}_{١}^{٢}} = -٦\,\text{هـ}_{٢}$ (٢)

ونظراً لأن هـ_1 ، هـ_2 ، $\text{س}_1 >$ صفر فيمكن استنتاج من المعادلتين (١) ، (٢) أن الانتاج الحدى يصل إلى نقطة المعظمة عند كمية من العنصر س_1 أقل من عند نقطة المعظمة لمتوسط الانتاج . ويمكن إيجاد النقطة التى يتساوى عندها الايراد الحدى بنقطة معظمة متوسط الانتاج كالتالى :

$$\text{م ا} = \text{اح}$$

$$\text{هـ}_1\text{س}_1 - \text{هـ}_2\text{س}_1^2 = 2\,\text{هـ}_1\text{س}_1 - 3\,\text{هـ}_2\text{س}_1^2$$

$$\text{هـ}_1 - \text{هـ}_2\text{س}_1 = 2\,\text{هـ}_1 - 3\,\text{هـ}_2\text{س}_1$$

$$2\,\text{هـ}_2\text{س}_1 = \text{هـ}_1$$

$$\text{س}_1 = \frac{\text{هـ}_1}{2\,\text{هـ}_2}$$

وهى النقطة التى يكون عندها متوسط الانتاج معظما اشتقت سابقاً .

أمثلة لدوال الانتاج .

$$(1)\quad \text{ك} = 10\,\text{س}^2 - \text{س}^3$$

$$(2)\quad \text{ك} = -16 + 20\,\text{س} - \text{س}^2$$

أوجد قيم كل من س التى تقسم الدالة إلى مراحلها الثلاثة .

$$(1)\quad \text{ك} = 10\,\text{س}^2 - \text{س}^3$$

$$\frac{\text{د ك}}{\text{د س}} = 20\,\text{س} - 3\,\text{س}^2$$

$$\text{س}\,(20 - 3\,\text{س}) = \text{صفر}$$

$$\text{س} = \text{صفر أو س} = \frac{٢٠}{٣}$$

نقطة معظمة الإنتاج الكلى

نهاية المرحلة الثانية وبداية المرحلة الثالثة

حيث أن :

$$\frac{\text{د}^{٢}\text{ك}}{\text{د س}^{٢}} = ٢٠ - ٦\text{س} = ٢٠ - ٦\left(\frac{٢٠}{٣}\right) = -٢٠ < \text{صفر}$$

$$٢٠ - ٦\ \text{س} = \text{صفر}$$

$$\text{س} = \frac{٢٠}{٦} = \frac{١٠}{٣}$$

نقطة معظمة الإنتاج الحدى

$$\text{م ا} = ١٠\ \text{س} - \text{س}^{٢}$$

$$\frac{\text{د (م ا)}}{\text{د س}} = ١٠ - ٢\ \text{س}$$

$$١٠ - ٢\ \text{س} = \text{صفر}$$

$$\text{س} = ٥$$

نقطة معظمة متوسط الإنتاج ونهاية المرحلة الأولى وإبتداء المرحلة الثانية

أو

$$٢٠\ \text{س} - ٣\ \text{س}^{٢} = ١٠\ \text{س} - \text{س}^{٢}$$

$$٢٠ - ٣\,\text{س} = ١٠ - \text{س}$$

$$٢\,\text{س} = ١٠ \qquad \text{س} = ٥$$

(٢) $\text{ك} = -١٦ + ٢٠\,\text{س} - \text{س}^{٢}$

$$\frac{\text{ءك}}{\text{ءس}} = ٢٠ - ٢\,\text{س}$$

$$٢٠ - ٢\,\text{س} = \text{صفر} \qquad \text{س} = ١٠$$

عندما يكون الإنتاج الكلى معظما بداية
المرحلة الثالثة ونهاية المرحلة الثانية

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ك}}{\text{ءس}^{٢}} = -٢ < \text{صفر}$ أى أن عندما تكون س = ٢ يكون الإنتاج معظما .

$$\text{م أ} = \frac{\text{ك}}{\text{س}} = \frac{-١٦ + ٢٠\,\text{س} - \text{س}^{٢}}{\text{س}} = -\frac{١٦}{\text{س}} + ٢٠ - \text{س}$$

$$\frac{\text{ء}(\text{م أ})}{\text{ءس}} = \frac{١٦}{\text{س}^{٢}} - ١$$

$$\frac{١٦}{\text{س}^{٢}} - ١ = \text{صفر} \qquad \text{س}^{٢} = ١٦ \qquad \text{س} = ٤$$

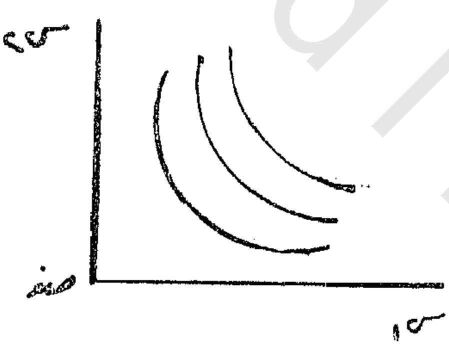
نقطة معظمة متوسط الإنتاج نهاية المرحلة
الأولى وبداية المرحلة الثانية

منحنيات الإنتاج المتماثل والمعدل الحدى للإحلال :

بينا سلفا طبيعة منحنيات السواء وعرضنا منحنى السواء بأنه المنحنى الذى يوضح مختلف التوليفات من السلعتين ك١ ، ك٢ التى يعطى كل منها إشباع متساو للمستهلك . ومنحنيات الإنتاج المتماثل تشابه منحنيات السواء فى طبيعتها ويعرف منحنى الاشباع المتماثل Isoquant بأنه عبارة عن مختلف التوليفات من عنصرى الإنتاج س١ ، س٢ التى يعطى كل منها نفس الإنتاج . ويمكن كتابة دالتها الرياضية فى الصورة التالية :

ك. = د (س١ ، س٢)

ويوضح الشكل التالى خريطة منحنيات الإنتاج المتماثل :



شكل (٣٤) خريطة منحنيات الإنتاج المتماثل

ونظراً لأن دالة الإنتاج متصلة فإنه يوجد على كل منحنى إشباع متماثل عدد لا نهائى من التوليفات من عنصرى الإنتاج س١ ، س٢ . ويكون ميل منحنى الإشباع المتماثل عند أى نقطة عليه تمثل النسبة التى يحل بها عنصر من عناصر الإنتاج بدلا من الآخر ، ويطلق عليها الاقتصاديون المعدل الحدى

للإحلال . وقد يطلق عليه بعض الاقتصاديون النسبة الفنية للإحلال Rate of Technical Substitution ونظراً لأن التغير يكون فى التوليفات لكل منحنى اشباع متماثل مع ثبات الكمية المنتجة فيمكن حساب ذلك التغير كما يلى :

كمية الإنتاج المفقود = $\text{ى س}_{2} \times (\text{ا ح})_{2}$

كمية الإنتاج المكتسب = $\text{ى س}_{1} \times (\text{ا ح})_{1}$

ونظراً لأن المنشأة على نفس منحنى الاشباع المتماثل أى الإنتاج ثابتا فإن :

كمية الإنتاج المفقود = كمية الإنتاج المكتسب

$$\text{ى س}_{2} \times (\text{ا ح})_{2} = \text{ى س}_{1} \times (\text{ا ح})_{1}$$

$$\frac{\text{ى س}_{2}}{\text{ى س}_{1}} = \frac{(\text{ا ح})_{1}}{(\text{ا ح})_{2}}$$

ونظراً لأن ميل منحنى الاشباع المتماثل سالبا فإن :

$$-\frac{\text{ى س}_{2}}{\text{ى س}_{1}} = \frac{(\text{ا ح})_{1}}{(\text{ا ح})_{2}}$$

وتعرف $\frac{\text{ى س}_{2}}{\text{ى س}_{1}}$ بالمعدل الحدى للاحلال (م ح ل) س_{1} بدلا من س_{2} . أو هى عبارة عن الكمية من عنصر الإنتاج س_{2} التى تريد المنشأة إعطاؤها لأخذ كمية أخرى من عنصر الإنتاج س_{1} مساوية لها فى إعطاء الإنتاج .

وبأخذ التفاضل الكلى لدالة الإنتاج يمكن اشتقاق المعدل الحدى للاحلال بين عنصرى الإنتاج $س_1$ ، $س_2$.

$$د ل = ف_1 \, د س_1 + ف_2 \, د س_2$$

$$\text{حيث أن } ف_1 = \frac{\partial ل}{\partial س_1} = (ا ح)_1$$

$$ف_2 = \frac{\partial ل}{\partial س_2} = (ا ح)_2$$

ونظراً لأن التغير على طول منحنى الإنتاج المماثل بالنسبة للكمية يساوى الصفر فإن :

$$ف_1 \, د س_1 + ف_2 \, د س_2 = \text{صفر}$$

$$(م ح ل) = - \frac{د س_2}{د س_1} = \frac{ف_1}{ف_2}$$

أى أن المعدل الحدى للاحلال يساوى الإنتاج الحدى لعنصر الإنتاج $س_1$ مقسوما على الإنتاج الحدى لعنصر الإنتاج $س_2$. ويمكن اشتقاق منحنى الإنتاج المماثل من دالة الإنتاج . فبفرض أن دالة الإنتاج فى الصورة التالية :

$$ل = د (س_1 ، س_2)$$

$$س_2 = د (س_1 ، \bar{ل})$$

حيث $\bar{ل}$ ثابتة عند مستوى معين .

وبفرض أن دالة الإنتاج فى صورة دالة الإنتاج لكوب دوجلاس Cobb - Douglas فإن :

$$\text{ك} = \text{ا}\ \text{س}_1^{\alpha}\ \text{س}_2^{\beta}$$

وتبين المعالم Coefficients α ، β العائد إلى السعة Returns to Scale فإذا كان مجموع $\alpha + \beta = ١$ فإن زيادة كل من عنصرى الإنتاج س$_1$ ، س$_2$ بنسبة واحدة λ (حيث $\lambda >$ صفر) فإن ذلك يؤدى إلى زيادة الإنتاج بنفس النسبة λ أو العائد إلى السعة يكون ثابتا Constant Returns to scale وحينما يكون $\alpha + \beta > ١$ أو $\alpha + \beta < ١$ فإن الكمية المنتجة من استخدام عنصر الإنتاج تزيد أو تقل على التوالى عن النسبة التى زاد بها كل من عنصرى الإنتاج . ويمكن اشتقاق المعدل الحدى للاحلال من دالة الإنتاج التالية كالتالى :

$$\text{ك} = \text{ا}\ \text{س}_1^{\alpha}\ \text{س}_2^{\beta}$$

$$-\frac{\text{د س}_2}{\text{د س}_1} = \frac{\dfrac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}_1}}{\dfrac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}_2}} = \frac{\text{ف}_1}{\text{ف}_1}$$

$$\frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}_1} = \text{ا}\ \alpha\ \text{س}_1^{\alpha - 1}\ \text{س}_2^{\beta}$$

$$\frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}_2} = \text{ا}\ \beta\ \text{س}_1^{\alpha}\ \text{س}_2^{\beta - 1}$$

$$-\frac{\text{ى}\,\text{س}_2}{\text{ى}\,\text{س}_1}=\frac{\text{ا}\,\alpha\,\text{س}_1^{\alpha-1}\,\text{س}_2^{\beta}}{\text{ا}\,\beta\,\text{س}_1^{\alpha}\,\text{س}_2^{\beta-1}}=$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\text{س}_1}\right)\left(\text{س}_2\right)=\left(\frac{\alpha\,\text{س}_2}{\beta\,\text{س}_1}\right)$$

سلوك المنظمة :

بفرض أن المنشأة تستخدم عنصرى الإنتاج س_1 ، س_2 لإنتاج السلعة ك وبفرض ثبات الأسعار ووجود سوق حره لشراء تلك العناصر ، يمكن كتابة دالة التكاليف فى الصورة التالية :

$$\text{ت ل} = \text{د}_1\,\text{س}_1 + \text{د}_2\,\text{س}_2 + \text{ت ث}$$

حيث :

ت ل = التكاليف الكلية

$\text{د}_{\text{ا}}$ = أسعار عناصر الإنتاج حيث ا تأخذ القيم ١ ، ٢

ت ث = التكاليف الثابتة

ويعرف خط التكاليف المتماثل Isocost بأنه عبارة عن التوليفات المختلفة من عناصر الإنتاج التى يمكن شراؤها بقدر معين من التكاليف . وبفرض أن (ت ل). تمثل هذا القدر من التكاليف الكلية فيمكن كتابة الدالة ثابتة فى الصورة الآتية :

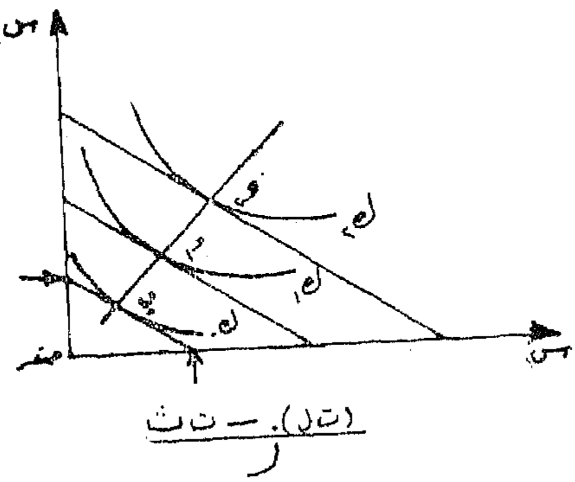
$$(\text{ت ل})_{.} = \text{د}_1\,\text{س}_1 + \text{د}_2\,\text{س}_2 + \text{ت ث}$$

$$س_٢ = \frac{(ت\,ل)}{د_٢} - \frac{د_١\,س_١}{د_٢} - \frac{ت\,ث}{د_٢}$$

$$س_٢ = \frac{(ت\,ل) - ت\,ث}{د_٢} - \frac{د_١}{د_٢}\,س_١$$

$$\frac{ى\,س_٢}{ى\,س_١} = - \frac{د_١}{د_٢}$$

أى أن ميل خط التكاليف المتماثل مساويا لنسبة أسعار سلع عناصر الإنتاج فى صورة سالبة . ويكون المقطع لخط التكاليف المتماثل على محور كميات عنصر الإنتاج $س_١$ هو $\frac{(ت\,ل) - ت\,ث}{د_١}$ ، أى عبارة عن الكمية من $س_١$ لو أنفقت المؤسسة جميع التكاليف على العنصر $س_١$ ، وكذلك يكون المقطع على محور كميات عنصر الإنتاج $س_٢$ هو $\frac{(ت\,ل) - ت\,ث}{د_٢}$ أى عبارة عن الكمية من $س_٢$ لو أنفقت المؤسسة جميع التكاليف على العنصر $س_٢$. ويلاحظ فى حالة زيادة دخل المؤسسة ورغبتها فى إنتاج كميات أكبر من السلعة ، كلما زادت تكاليف الإنتاج لشراء كميات أكبر من عناصر الإنتاج وكلما زادت التقاطعات على محور الكميات $س_١$ ، $س_٢$. ويمكن إيضاح ذلك بالشكل التالى :



شكل (٣٥) نقط التوازن بين منحنى الإنتاج المتماثل
وخط التكاليف المتماثل للمؤسسة

وتمثل النقط و. ، و۱ ، و۲ نقط التوازن بين منحنى الإنتاج المتماثل وخط التكاليف المتماثل للمؤسسة حيث :

$$\frac{ى\,س_{2}}{ى\,س_{1}} = -\frac{ر_{1}}{ر_{2}}$$

وإذا تم توصيل نقط التوازن المشار إليها فى الشكل السابق فإن هذا الخط أو المنحنى يسمى بالممر الممتد للمنشأة Firm Expansion Path .

معظمة الإنتاج عرضة لقيد التكاليف :

بينا سلفا كيفية حصول المستهلك على معظمة الإشباع عرضة لقيد الدخل . وفى هذا المجال سنبين كيفية معظمة المنشأة لإنتاجها بالنسبة إلى قدر معين من التكاليف أو قيد التكاليف Cost Constraint فمن دالة الإنتاج السابقة .

$ل = د (س_١ ، س_٢)$

$ت ل = ر_١ س_١ + ر_٢ س_٢ + ت ث$

$ت ل - ر_١ س_١ - ر_٢ س_٢ - ت ث = صفر$

يمكن استخدام مضروبات لاجرانج لبيان كيفية معظمة دالة الإنتاج معرضة إلى قيد التكاليف . ويمكن كتابة دالة لاجرانج فى الصورة التالية :

$م = ل + \delta (ت ل - ر_١ س_١ - ر_٢ س_٢ - ت ث)$

حيث أن $\delta \neq$ صفر وأن δ عبارة عن مضروب لاجرانج غير المحدد ، وبأخذ التفاضل الجزئى لدالة لاجرانج بالنسبة إلى س١ ، س٢ ، δ ومساواة المعادلات بالصفر نستنتج التالى :

$$\frac{\partial م}{\partial س_١} = ف_١ - \delta ر_١ = صفر \qquad (١)$$

$$\frac{\partial م}{\partial س_٢} = ف_٢ - \delta ر_٢ = صفر \qquad (٢)$$

$$\frac{\partial م}{\partial \delta} = ت ل - ر_١ س_١ - ر_٢ س_٢ - ت ث = صفر \qquad (٣)$$

$$حيث\ أن\ ف_١ = \frac{\partial د (س_١ ، س_٢)}{\partial س_١}$$

حيث تأخذ القيم ١ ، ٢

ومن المعادلتين ١ ، ٢ يمكن اشتقاق العلاقة التالية :

$$\frac{\text{ف}_1}{\text{ف}_2} = \frac{\text{ر}_1}{\text{ر}_2}$$

أى أن المعدل الحدى للاحلال بين س_1 ، س_2 يكون مساويا لنسبة أسعار عناصر الإنتاج . ويمكن أيضاً من المعادلتين (١) ، (٢) استنتاج أن :

$$\delta = \frac{\text{ف}_1}{\text{ر}_1} = \frac{\text{ف}_2}{\text{ر}_2}$$

ويعنى هذا أن الإضافة للانتاج من آخر جنيه (الوحدة النقدية) منفقة على كل عنصر من عناصر الإنتاج يجب أن يكون متساويا . وتكون δ مضروب لاجرانج عبارة عن التفاضل الكلى للانتاج بالنسبة للتكاليف . ويمكن إثبات ذلك رياضيا بفرض أن التكاليف متغيرة كالتالى :

بأخذ التفاضل الكلى لمعادلة التكاليف نستنتج التالى :

$$\text{د}(\text{ث ل}) = \text{ر}_1 \, \text{د س}_1 + \text{ر}_2 \, \text{د س}_2$$

وبإحلال العلاقات $\text{ر}_1 = \frac{\text{ف}_1}{\delta}$ ، $\text{ر}_2 = \frac{\text{ف}_2}{\delta}$ من المشتقات الأولى

فى المعادلة السابقة

$$ى\,(ت\,ل) = \frac{١}{\delta}\,(ف_{١}\,ى\,س_{١} + ف_{٢}\,ى\,س_{٢}) \quad \ldots \quad (١)$$

ومن التفاضل الكلى لدالة الإنتاج سبق استنتاج أن :

$$ى\,ك = ف_{١}\,ى\,س_{١} + ف_{٢}\,ى\,س_{٢} \quad \ldots \quad (٢)$$

وبقسمة العلاقة (٢) على العلاقة (١) :

$$\frac{ى\,ك}{ى\,(ت\,ل)} = \delta\,\frac{ف_{١}\,ى\,س_{١} + ف_{٢}\,ى\,س_{٢}}{ف_{١}\,ى\,س_{١} + ف_{٢}\,ى\,س_{٢}} = \delta$$

ويتضح من المشتقات الأولى السابقة أن سلوك المعظمة بالنسبة للمنشأة يكون عند نقطة تساوى المعدل الحدى لإحلال عناصر الإنتاج لنسبة أسعارها . أى أن العلاقات التالية أو إحداها تحدد سلوك المعظمة وهى :

$$\frac{ف_{١}}{ف_{٢}} = \frac{ر_{١}}{ر_{٢}} \qquad (١)$$

$$\delta = \frac{ف_{١}}{ر_{١}} = \frac{ف_{٢}}{ر_{٢}} \qquad (٢)$$

$$(م\,ح\,ل) = \frac{ر_{١}}{ر_{٢}} \qquad (٣)$$

ويمكن شرح العلاقة التالية بالشكل السابق حيث تكون أفضل توليفة من عناصر الإنتاج هى التى تمثل نقطة التماس بين منحنى الإنتاج المماثل وخط التكاليف المماثل .

وسلوك المعظمة بالنسبة للمنشأة يتطلب أن يكون محدد هاسين موجب القيمة . أى أن :

$$\begin{vmatrix} \text{ف}_{11} & \text{ف}_{21} & -\text{ر}_{1} \\ \text{ف}_{12} & \text{ف}_{22} & -\text{ر}_{2} \\ -\text{ر}_{1} & -\text{ر}_{2} & \text{صفر} \end{vmatrix} > \text{صفر}$$

أو بمعنى آخر يمكن استخدام المشتقات الثانية لايضاح أن نسبة التغير لميل المماس لمنحنى الإنتاج المماثل يجب أن يكون موجبا ($\frac{\text{ى}^{2}\text{س}_{2}}{\text{ى}\,\text{س}_{1}^{2}} >$ صفر) عند نقطة التماس مع خط التكاليف المماثل . ويعنى ذلك أن منحنيات الإنتاج المماثل يجب أن تكون محدبة اتجاه نقطة الأصل . ويمكن إيضاح سلوك المعظمة بالنسبة المنشأة . بفرض أنها تستخدم عنصرى إنتاج س_{1} ، س_{2} لإنتاج سلعة واحدة لو لمعظمة ذلك الإنتاج بأقل نفقة ممكنة . فمن دالة التكاليف بفرض أن التكاليف كلها متغيرة نجد أن :

$$\text{ت ل} = \text{ر}_{1}\text{س}_{1} + \text{ر}_{2}\text{س}_{2}$$

$$\text{ر}_{2}\text{س}_{2} = \text{ت ل} - \text{ر}_{1}\text{س}_{1}$$

$$\text{س}_{2} = \frac{\text{ت ل}}{\text{ر}_{2}} - \frac{\text{ر}_{1}}{\text{ر}_{2}}\text{س}$$

$$\frac{\text{ى}\,\text{س}_{2}}{\text{ى}\,\text{س}_{1}} = -\frac{\text{ر}_{1}}{\text{ر}_{2}} \quad \text{أو} \quad -\frac{\text{ى}\,\text{س}_{2}}{\text{ى}\,\text{س}_{1}} = \frac{\text{ر}_{1}}{\text{ر}_{2}}$$

ويمكن إيضاح ذلك بالنسبة لمنشأة تستخدم عدد قدره ن من عناصر الإنتاج لإنتاج سلعة معينة ك .

دالة الإنتاج :

$$\text{ك} = \text{د}\left(\text{س}_{١} ، \text{س}_{٢} ، \ldots ، \text{س}_{\text{ن}}\right)$$

وقيد الدخل :

$$(\text{ت ل})_{.} = \text{ر}_{١}\,\text{س}_{١} + \text{ر}_{٢}\,\text{س}_{٢} + \ldots + \text{ر}_{\text{ن}}\,\text{س}_{\text{ن}}$$

وتكون دالة لاجرانج هى :

$$\text{م} = \text{د}\left(\text{س}_{١} ، \text{س}_{٢} ، \ldots ، \text{س}_{\text{ن}}\right) + \delta$$
$$\left\{(\text{ت ل})_{.} - \text{ر}_{١}\,\text{س}_{١} - \text{ر}_{٢}\,\text{س}_{٢} \ldots \text{ر}_{\text{ن}}\,\text{س}_{\text{ن}}\right\}$$

$$\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{س}_{١}} = \frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}_{١}} - \delta\,\text{ر}_{١} = \text{صفر} \qquad (١)$$

$$\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{س}_{٢}} = \frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}_{٢}} - \delta\,\text{ر}_{٢} = \text{صفر} \qquad (٢)$$

⋮

$$\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{س}_{\text{ن}}} = \frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}_{\text{ن}}} - \delta\,\text{ر}_{\text{ن}} = \text{صفر} \qquad (\text{ن})$$

$$\frac{\partial \text{ر}}{\partial \delta} = (\text{ت ل}) - \text{د}_1 \text{س}_1 - \text{د}_2 \text{س}_2 - \cdots$$

$$- \text{د}_{\text{ن}} \text{س}_{\text{ن}} = \text{صفر}$$

$$\delta = \frac{\frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}_1}}{\text{د}_1} \text{ ، } \delta = \frac{\frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}_2}}{\text{د}_2} \text{ ، } \cdots \text{ ، } \delta = \frac{\frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}_{\text{ن}}}}{\text{د}_{\text{ن}}}$$

ولقد اثبت أن δ مضروب لاجرانج الغير محدد هو عبارة عن التغير فى الإنتاج بالنسبة للتغير فى التكاليف وحدة واحدة . وتعرف التكاليف الحدية بأنها عبارة عن التغير فى التكاليف الكلية نتيجة تغير الإنتاج وحدة واحدة ، و نظراً لأن :

$$\delta = \frac{\text{د ك}}{\text{د (ت ل)}} \text{ فتكون } \frac{\text{د (ت ل)}}{\text{د ك}} = \frac{1}{\delta} = \text{ت ح} \text{ حيث ت ح}$$

هى عبارة عن التكالف الحدية . ومن المشتقات الأولى لدالة لاجرانج يكون سلوك المنظمة بالنسبة للمنشأة كالتالى :

$$\frac{\frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}_1}}{\text{د}_1} = \frac{\frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}_2}}{\text{د}_2} = \cdots = \frac{\frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}_{\text{ن}}}}{\text{د}_{\text{ن}}} = \delta = \frac{1}{\text{ت ح}}$$

$$\frac{ف_{1}}{ر_{1}} = \frac{ف_{2}}{ر_{2}} = \cdots = \frac{ف_{ن}}{ر_{ن}} = \delta = \frac{1}{ح_{ت}}$$

ويتضح من هذه العلاقة أنه لكى تقلل المنشأة التكاليف إلى أقل ما يمكن يجب أن يكون الإنتاج الحدى لعناصر الإنتاج بالنسبة لوحدة النقود متساو .

ومن المعادلتين (١) ، (٢) يمكن استنتاج أن :

$$\frac{\frac{\partial ك}{\partial س_{1}}}{\frac{\partial ك}{\partial س_{2}}} = \frac{ء س_{2}}{ء س_{1}} = \frac{ر_{1}}{ر_{2}}$$

وبأخذ الميل السالب لمنحنى الإنتاج المتماثل فى الإعتبار :

$$-\frac{ء س_{2}}{ء س_{1}} = \frac{ر_{1}}{ر_{2}}$$

وبصفة عامة :

$$-\frac{ء س_{ا}}{ء س_{ب}} = \frac{ر_{ب}}{ر_{ا}}$$

حيث تأخذ القيم ا ، ب من ١ إلى ن

مثال :

إذا كانت دالة الإنتاج لمنشأة معينة هى $ك = س_{١}^{\frac{١}{٣}} س_{٢}^{\frac{٢}{٣}}$ لها دخل معين تريد إنفاقه مقدراً بالمبلغ ١٢٠ جنيها على عناصر الإنتاج $س_{١}$ ، $س_{٢}$. وضح كيف يمكن لهذه المنشأة تنظيم الإنتاج عرضه إلى تقليل النفقة إلى أقل ما يمكن باستخدام طريقة مضروبات لاجرانج إذا علم أن سعر الوحدة من $س_{١} = ٢$ ، $س_{٢} = ٤$.

$$ك = س_{١}^{\frac{١}{٣}} س_{٢}^{\frac{٢}{٣}}$$

$$١٢٠ = ٢ س_{١} + ٤ س_{٢}$$

$$م = س_{١}^{\frac{١}{٣}} س_{٢}^{\frac{٢}{٣}} + \delta (١٢٠ - ٢ س_{١} - ٤ س_{٢})$$

$$\frac{\partial م}{\partial س_{١}} = \frac{١}{٣} س_{١}^{-\frac{٢}{٣}} س_{٢}^{\frac{٢}{٣}} - ٢ \delta = صفر \qquad (١)$$

$$\frac{\delta م}{\partial س_{٢}} = \frac{٢}{٣} س_{١}^{\frac{١}{٣}} س_{٢}^{-\frac{١}{٣}} - ٤ \delta = صفر \qquad (٢)$$

$$\frac{\partial م}{\partial \delta} = ١٢٠ - ٢ س_{١} - ٤ س_{٢} = صفر \qquad (٣)$$

وبقسمة المعادلة (٢) على (١) :

$$\frac{\frac{٢}{٣} س_{١}^{\frac{١}{٣}} س_{٢}^{-\frac{٢}{٣}}}{\frac{١}{٣} س_{١}^{-\frac{٢}{٣}} س_{٢}^{\frac{١}{٣}}} = \frac{٤ \delta}{٢ \delta}$$

$$\frac{٢\,س_{١}}{س_{٢}} = \frac{٢}{١}$$

∴ $س_{١} = س_{٢}$ (٤) وتعرف هذه بمعادلة الممر الممتد للمنشأة

وبتعويض المعادلة رقم (٤) فى المعادلة رقم (٣) يتضح ما يلى:

$$١٢٠ - ٢\,س_{٢} - ٤\,س_{١} = \text{صفر}$$

$$١٢٠ = ٦\,س_{١} \qquad س_{١} = ٢٠$$

$$، س_{٢} = ٢٠ \qquad \text{حيث أن } س_{١} = س_{٢}$$

$$ل = (٢٠)^{\frac{١}{٣}} (٢٠)^{\frac{٢}{٣}} = ٢٠$$

$$ه = \frac{\frac{١}{٣}\,س_{١}^{-\frac{٢}{٣}}\,س_{٢}^{\frac{٢}{٣}}}{٢} = \frac{(\frac{١}{٣})\,(٢٠)^{-\frac{٢}{٣}}(٢٠)^{\frac{٢}{٣}}}{٢} = \frac{١}{٦}$$

$$ه = \frac{\frac{٢}{٣}\,س_{١}^{\frac{١}{٣}}\,س_{٢}^{-\frac{١}{٣}}}{٤} = \frac{(\frac{٢}{٣})\,(٢٠)^{\frac{١}{٣}}(٢٠)^{-\frac{١}{٣}}}{٤} = \frac{١}{٦}$$

ومن هنا يتضح أن النفقة الحدية:

$$ت\,ح = \frac{١}{ه} = ٦$$

تقليل التكاليف : Cost Minimization

قد يكون هدف المنشأة تقليل أو تصغير التكاليف عرضه إلى إنتاج قدر معين من الإنتاج . وبفرض أن دالة الإنتاج هى :

$$\text{ك} = \text{د}\left(\text{س}_1 ، \text{س}_2\right) \qquad (1)$$

$$، \text{ت ل} = \text{ر}_1 \text{س}_1 + \text{ر}_2 \text{س}_2 \qquad (2)$$

أى هدف المنشأة تصغير التكاليف (٢) عرضه إلى (١) . وتكون دالة لاجرانج هى :

$$\text{م} = \text{ر}_1 \text{س}_1 + \text{ر}_2 \text{س}_2 + \lambda \left\{ \text{ك} - \text{د}\left(\text{س}_1 ، \text{س}_2\right) \right\}$$

وبوضع التفاضلات الجزئية مساوية للصفر بالنسبة إلى س_1 ، س_2 ، يستنتج التالى :

$$\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{س}_1} = \text{ر}_1 - \lambda\ \delta\ \text{ف}_1 = \text{صفر} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{س}_1} = \text{ر}_2 - \lambda\ \delta\ \text{ف}_2 = \text{صفر} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \text{م}}{\partial \lambda} = \text{ك} - \text{د}\left(\text{س}_1 ، \text{س}_2\right) = \text{صفر} \qquad (3)$$

ومن المعادلتين (١) ، (٢) :

$$\frac{\text{ف}_1}{\text{ف}_2} = \frac{\text{ر}_1}{\text{ر}_2} \qquad \text{أو} \qquad \frac{1}{\lambda} = \frac{\text{ف}_1}{\text{ر}_1} = \frac{\text{ف}_2}{\text{ر}_2}$$

او $$م ح ل = \frac{د_{١}}{د_{٢}}$$

وتشبه المشتقات الأولى لتصغير التكاليف عرضه إلى قدر معين من الإنتاج معظمة الإنتاج عرضه إلى قيد الدخل ويكون المحدد λ هو مقلوب المحدد δ أو التفاضل الكلى لدالة التكاليف بالنسبة للإنتاج وهذا ما يعرف بالنفقة الحدية . وعموما لتصغير التكاليف يجب أن يكون المعدل الحدى للإحلال مساويا لنسبة أسعار عناصر الإنتاج أو

$$-\frac{ى س_{ا}}{ى س_{ب}} = \frac{د_{ب}}{د_{ا}}$$

حيث تأخذ القيم ا، ب من ١ إلى ن.

<u>مثال :</u>

بين كيف يمكن لمنشأة دالة إنتاجها $ك = س_{١}^{\frac{١}{٢}} س_{٢}^{\frac{١}{٢}}$ أن تقلل النفقة إلى أصغر ما يمكن عرضه إلى إنتاج ذلك القدر المعين من الإنتاج إذا علم أن القدر المطلوب من الإنتاج هو ١٦ وحدة وأن سعر الوحدة من $س_{١} = ٢$ ، سعر الوحدة من $س_{٢} = ٨$.

$$م = ٢ س_{١} + ٨ س_{٢} + \lambda \left\{ ١٦ - س_{١}^{\frac{١}{٢}} س_{٢}^{\frac{١}{٢}} \right\}$$

$$\frac{\partial م}{\partial س_{١}} = ٢ - \frac{١}{٢} \lambda \, س_{١}^{-\frac{١}{٢}} س_{٢}^{\frac{١}{٢}} = صفر \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \text{ت}}{\partial \text{س}_2} = 8 - \lambda \, \tfrac{1}{2} \, \text{س}_1^{\frac{1}{2}} \, \text{س}_2^{-\frac{1}{2}} = \text{صفر} \qquad (٢)$$

$$\frac{\partial \text{ت}}{\partial \lambda} = 10 - \text{س}_1^{\frac{1}{2}} \, \text{س}_2^{\frac{1}{2}} = \text{صفر} \qquad (٣)$$

$$\frac{\tfrac{1}{2} \, \text{س}_1^{\frac{1}{2}} \, \text{س}_2^{-\frac{1}{2}}}{\tfrac{1}{2} \, \text{س}_1^{-\frac{1}{2}} \, \text{س}_2^{\frac{1}{2}}} = \frac{8}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{س}_1}{\text{س}_2} = \frac{4}{1} \qquad \text{س}_1 = 4 \, \text{س}_2$$

وبالتعويض فى المعادلة رقم (٣)

$$16 = (4 \, \text{س}_2)^{\frac{1}{2}} \left(\text{س}_2^{\frac{1}{2}}\right) = 2 \, \text{س}_2$$

$$\text{س}_2 = 8 \qquad \text{س}_1 = 32$$

ومن ثم لكى تنتج المنشأة هذا القدر من الإنتاج يجب أن تكون التكاليف هى :

$$\text{ت ل} = 2 \times 32 + 8 \times 8 = 64 + 64 = 128$$

أما عن المشتقات الثانية لمحدد هاسين فيجب أن يكون أقل من الصفر أى أن :

$$\begin{vmatrix} -\lambda\,\text{ف}_{١١} & -\lambda\,\text{ف}_{٢١} & -\text{ف}_{١} \\ -\lambda\,\text{ف}_{١٢} & -\lambda\,\text{ف}_{٢٢} & -\text{ف}_{٢} \\ -\text{ف}_{١} & -\text{ف}_{٢} & \text{صفر} \end{vmatrix} > \text{صفر}$$

وبإحلال العلاقات $-\text{ف}_{١} = -\frac{\text{د}_{١}}{\lambda}$ ، $-\text{ف}_{٢} = -\frac{\text{د}_{٢}}{\lambda}$ وبضرب العمودين (١) ، (٢) بالمعامل $-\frac{١}{\lambda}$ ثم ضرب الصف الثالث بالمعامل $-\lambda^{٢}$ والصف الثالث بالمعامل λ يستنتج التالى :

$$\begin{vmatrix} -\lambda\,\text{ف}_{١١} & -\lambda\,\text{ف}_{٢١} & -\frac{\text{د}_{١}}{\lambda} \\ -\lambda\,\text{ف}_{١٢} & -\lambda\,\text{ف}_{٢٢} & -\frac{\text{د}_{٢}}{\lambda} \\ -\frac{\text{د}_{١}}{\lambda} & -\frac{\text{د}_{٢}}{\lambda} & \text{صفر} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^{٢} \begin{vmatrix} \text{ف}_{١١} & \text{ف}_{٢١} & -\frac{\text{د}_{١}}{\lambda} \\ \text{ف}_{١٢} & \text{ف}_{٢٢} & -\frac{\text{د}_{٢}}{\lambda} \\ \frac{\text{د}_{١}}{\lambda^{٢}} & \frac{\text{د}_{٢}}{\lambda^{٢}} & \text{صفر} \end{vmatrix}$$

$$-\frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} ف_{11} & ف_{21} & -ر_{1} \\ ف_{12} & ف_{22} & -ر_{2} \\ -ر_{1} & -ر_{2} & صفر \end{vmatrix} > صفر$$

حيث أن $\lambda >$ صفر

وإذا كانت المشتقات الثانية تتطابق مع محدد هامين تكون كل نقطة تماس بين منحنى الإنتاج المتماثل وخط التكاليف المتماثل نقط معظمة الإنتاج وتصغير التكاليف فى آن واحد .

معظمة الربح : Profit Maximization

إن الهدف الأساسى للمنشأة هو معظمة الربح ويعرف بأنه الفرق بين إيراد المنشأة وتكاليفها . فالإيراد تحت حالة المنافسة الحرة بالنسبة للمنشأة هو عبارة عن حاصل ضرب الكميات المباعة فى سعر الوحدة وعلى هذا فيعرف الربح (π) بالمعادلة التالية .

$$\pi = ع\, ك - ت\, ل$$

$$ك = د\,(س_{1}\text{ ، }س_{2})$$

$$ت\, ل = ر_{1}\, س_{1} + ر_{2}\, س_{2}$$

$$\pi = ع\, د\,(س_{1}\text{ ، }س_{2}) - ر_{1}\, س_{1} - ر_{2}\, س_{2}$$

ولمعظمة دالة الربح حيث أنه يعتمد على $س_{1}$ ، $س_{2}$ تأخذ التفاضلات الجزئية بالنسبة لها ثم تساوى بالصفر كالتالى :

$$\frac{\partial \pi}{\partial س_1} = ع ف_1 - ر_1 = صفر \qquad (١)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial س_2} = ع ف_2 - ر_2 = صفر \qquad (٢)$$

ومن المعادلتين (١) ، (٢) يمكن استنتاج التالى :

$$ع ف_1 = ر_1 \quad ، \quad ع ف_2 = ر_2$$

أى أن المشتقات الأولى لمظمة الربح تتطلب أن يكون استخدام عنصر الإنتاج حتى يكون قيمة الإنتاج الحدى ($ع ف_1$) لهذا العنصر مساويا لسعر الوحدة منه . وعلى هذا فإن مدير المنشأة يمكنه زيادة ربحه طالما زيادة استخدام ذلك العنصر تؤدى إلى زيادة فى الدخل أكبر من التكاليف . ويجب أن تكون محددات هاسين متبادلة الإشارة أى أن :

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial س_1^2} < صفر \quad ، \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \pi}{\partial س_1^2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial س_1 \partial س_2} \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial س_2 \partial س_1} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial س_2^2} \end{vmatrix} > صفر$$

وقيمة هذا المحدد هى :

$$\left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial س_1^2} \times \frac{\partial^2 \pi}{\partial س_2^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial س_1 \partial س_2} \right)^2 > صفر$$

حيث أن :

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial س_1 \partial س_2} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial س_2 \partial س_1} \quad \text{وكذلك} \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial س_1^2} > \text{صفر}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial س_1 \partial س_2}\right)^2 < \text{صفر} \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial س_2^2} > \text{صفر}$$

ومن الجدير بالذكر هنا إذا وصلت المنشأة لهذه النقطة ومطابقة محدد هاسين فإن زيادة استخدام $س_1$ ، $س_2$ يؤدى إلى نقص الربح .

استخدام نظرية إيلر : Uses of Euerl's Theorm

(١) يمكن استخدام نظرية إيلر لبيان هل عائد السعة Return fo Scale ثابتا متزايداً أم متناقصا كما سبق شرحه . فإذا كانت دالة الإنتاج :

$$ك = د (س_1 ، س_2)$$

$$ك = س_1^{\frac{1}{2}} س_2^{\frac{1}{2}}$$

فمن نظرية إيلر :

$$و ك = \frac{\partial ك}{\partial س_1} \times س_1 + \frac{\partial ك}{\partial س_2} \times س_2 + \cdots +$$

$$\frac{\partial ك}{\partial س_ن} \times س_ن$$

حيث و = درجة التجانس .

وبفرض أن و = ١ وحساب الإنتاج الحدى لكل من $س_١$ ، $س_٢$ يتضح التالى :

$$ك = \tfrac{١}{٢} س_١^{-\frac{١}{٢}} س_٢^{\frac{١}{٢}} (س_١) + \tfrac{١}{٢} س_١^{\frac{١}{٢}} س_٢^{-\frac{١}{٢}} \times س_٢$$

فإذا كانت درجة تجانس دالة الإنتاج الوحدة فإن عائد السعة يكون ثابتا :

$$ك = \tfrac{١}{٢} س_١^{\frac{١}{٢}} س_٢^{\frac{١}{٢}} + \tfrac{١}{٢} س_١^{\frac{١}{٢}} س_٢^{\frac{١}{٢}} = س_١^{\frac{١}{٢}} س_٢^{\frac{١}{٢}}$$

وبفرض أن $١ < و$

فمن نظرية إيلر :

$$و ك = \frac{\partial ك}{\partial س_١} \times س_١ + \frac{\partial ك}{\partial س_٢} \times س_٢ + \cdots +$$

$$\frac{\partial ك}{\partial س_ن} \times س_ن \qquad ١ > و$$

$$ك > \sum_{ا=١}^{ن} \frac{\partial ك}{\partial س_ا} س_ا$$

حيث تأخذ ا القيم ١ إلى ن

وبضرب الطرفين فى ع

$$ع\ ك > \sum_{ا=١}^{ن} \frac{\partial ك}{\partial س_{ا}} ع\ س_{ا}$$

ونظراً لأن :

$$ف_{١} ع = د_{١} \quad ، \quad ف_{٢} ع = د_{٢} .$$

أى أن : $ف_{ا}\ ع = د_{ا}$

حيث تأخذ ا القيم ١ إلى ن

$$\frac{\partial ك}{\partial س_{ا}} \times ع = د_{ا}$$

$$ع\ ك > \sum_{ا=١}^{ن} د_{ا}\ س_{ا}$$

أى أن العائد للسعة أقل من المنفق على الإنتاج .

(٢) يمكن استخدام نظرية إيلر لإيجاد النقط التى تكون فيها عائد السعة ثابتا : Constant Return to Scale .

فبفرض أن دالة الإنتاج هى :

$$ك = ٣\ س_{١}^{٢} س_{٢}^{٢} - ٤\ س_{١}^{٣} س_{٢}^{٣}$$

$$\frac{\partial ك}{\partial س_{١}} = ٦\ س_{١} س_{٢}^{٢} - ١٢\ س_{١}^{٢} س_{٢}^{٣}$$

$$\frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}_2} = 6\,\text{س}_1^3\,\text{س}_2 - 12\,\text{س}_1^3\,\text{س}_2^3$$

$$3\,\text{س}_1^3\,\text{س}_2^2 - 4\,\text{س}_1^3\,\text{س}_2^3 = \{(6\,\text{س}_1\,\text{س}_2^3 - 12\,\text{س}_1^2\,\text{س}_2^3)\}\,\text{س}_1$$

$$+ \{(6\,\text{س}_1^2\,\text{س}_2 - 12\,\text{س}_1^3\,\text{س}_2^2)\}\,\text{س}_2$$

$$= 12\,\text{س}_1^3\,\text{س}_2^2 - 24\,\text{س}_1^3\,\text{س}_2^3$$

$$9\,\text{س}_1^3\,\text{س}_2^2 - 20\,\text{س}_1^3\,\text{س}_2^3 = \text{صفر}$$

$$\text{س}_1^3\,\text{س}_2^2\,(9 - 20\,\text{س}_1\,\text{س}_2) = \text{صفر}$$

$$20\,\text{س}_1\,\text{س}_2 = 9$$

$$\therefore \text{س}_1 = \frac{9}{20\,\text{س}_2}$$

٣) يمكن استخدام نظرية إيلر لتقسيم دالة الإنتاج إلى مراحلها المختلفة بفرض أن الكمية المنتجة تستخدم عنصراً واحداً من عناصر الإنتاج وبفرض أن عائد السعة ثابتا فيستنتج التالى :

$$\text{ك} = \text{د}\,(\text{س}_1)$$

فمن نظرية إيلر :

$$\text{ك} = \frac{\text{ء ك}}{\text{ء س}_1} \times \text{س}_1$$

وبقسمة الطرفين على ك :

$$١ = \frac{ءك}{ءس_١} \times \frac{س_١}{ك} = \frac{اح}{ام} \qquad (*)$$

$$١ = \ni ك س_١ = \frac{اح}{ام} \qquad اح = ام$$

أى أنه حينما يكون الإنتاج الحدى يساوى متوسط الإنتاج تكون مرونة الإنتاج تساوى الوحدة وهى بداية المرحلة الثانية ونهاية المرحلة الأولى .
ويمكن أيضاً إيجاد نهاية المرحلة الثالثة كالتالى :

$$\ni ك س_١ = \frac{ءك}{ءس_١} \times \frac{س_١}{ك} = صفر \times \frac{س_١}{ك} = صفر$$

ومن الجدير بالملاحظة أن فى المرحلة الأولى :

(*) ويمكن إثبات ذلك رياضيا كالتالى عند نهاية المرحلة الأولى وبداية المرحلة الثانية تكون :

$$اح = ام$$

$$\frac{ءك}{ءس_١} = \frac{ك}{س_١} \qquad \therefore \frac{\frac{ءك}{ءس_١}}{\frac{ك}{س_١}} = ١$$

$$\frac{ءك}{ءس_١} \times \frac{س_١}{ك} = \ni ك س = ١$$

$$ا ح > م ا$$

$$\frac{ا ح}{م ا} > ١$$

$$\frac{\frac{ى ك}{ى س_١}}{\frac{ك}{س_١}} > ١ \therefore \frac{ى ك}{ى س_١} \times \frac{س_١}{ك} > ١ \Leftarrow ك_{س_١} > ١$$

(٤) تحت حالة المنافسة الحرة تعتبر نظرية إيلر نظرية توزيع Theory of Distribution بفرض أن درجة تجانس دالة الإنتاج تساوى الوحدة فمن نظرية إيلر :

$$ك = \frac{\partial ك}{\partial س_١} \times س_١ + \frac{\partial ك}{\partial س_٢} \times س_٢ + \cdots + \frac{\partial ك}{\partial س_ن} \times س_ن$$

وبضرب الطرفين فى سعر السلعة ك وهو ع

$$ع ك = \frac{\partial ك}{\partial س_١} \times ع \times س_١ + \frac{\partial ك}{\partial س_٢} \times ع \times س_٢ + \cdots + \frac{\partial ك}{\partial س_ن} \times ع \times س_ن$$

ومن المعلوم أن $ع \frac{\partial ك}{\partial س_١} = ر_١$

دوال التكاليف :

تعرف التكاليف بأنها إجمالى النفقة التى تتكبدها المنشأه لإنتاج السلع والخدمات وتختلف التكاليف حسب طبيعتها[1] وكذلك من حيث المدى الزمنى فالمدى قصير الأجل كما بينا سلفا هو ذلك المدى الذى لا يكون هناك وقت كاف للمنشأه لتغيير هيكلها الثابت Scale of Plant أما المدى طويل الأجل فهو ذلك المدى الذى يكون هناك وقت طاف للمنشأه لتغيير جميع موارد إنتاجها ثابتا أم متغيراً .

دوال التكاليف فى المدى قصير الأجل وطويل الأجل

تشمل الدوال فى المدى قصير الأجل دوال التكاليف الثابتة والمتغيره والكليه . تكاليف الموارد الثابته لابد وأن تتكبدها المنشأه سواء أنتجت أم لم تنتج سلع وخدمات أما التكاليف المتغيره فهى إجمالى نفقة المنشأه على موارد الانتاج المتغيره وتمثل التكاليف الكلية مجموع التكالف الثابته والمتغيره . وتشمل دوال التكاليف فى المدى قصير الأجل متوسطات التكاليف الثابتـه والمتغيره والكلية .

$$م ت ث = \frac{ت ث}{ك}$$

حيث م ت ث = متوسط التكاليف الثابته

(١) أنظر المرجع التالى

Richard H. Ieftwich "; Price System And; Resource Allocation' Revised Edition , New York : Rinehart and Winston 1964 .

$$\text{م ت غ} = \frac{\text{ت غ}}{\text{ك}}$$

م ت غ = متوسط التكاليف المتغيرة

$$\text{م ت ل} = \frac{\text{ت ل}}{\text{ك}}$$

حيث م ت ل = متوسط التكاليف الكليه

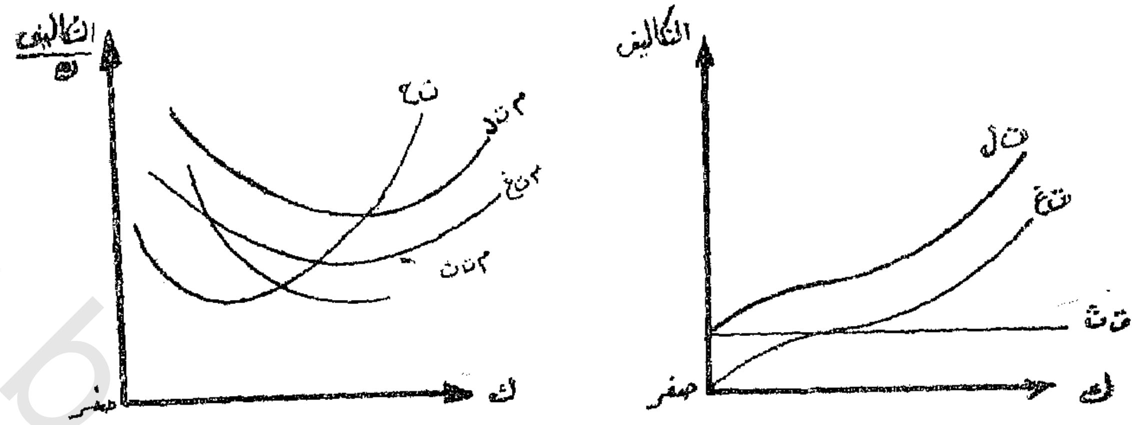
وتعرف التكاليف الحدية بأنها التغير فى التكاليف الكلية أو المتغيره بالنسبة للتغير فى الأنتاج وحدة واحدة ورياضيا هى عبارة عن التفاضل لدالة التكاليف الكلية أو المتغيره بالنسبة للتغير فى الانتاج وحدة واحدة أى أن :

$$\text{ت ح} = \frac{\text{ء ت ل}}{\text{ء ك}} = \frac{\text{ء (ت غ + ت ث)}}{\text{ء ك}} = \frac{\text{ء ت غ}}{\text{ء ك}} + \frac{\text{ء ت ث}}{\text{ء ك}}$$

$$= \frac{\text{ء ت غ}}{\text{ء ك}} + \text{صفر} = \frac{\text{ء ت غ}}{\text{ء ك}}$$

حيث ت ح = التكاليف الحديه

وقد تأخذ دوال التكاليف أشكال مختلفة ولكن الشكل العام يمكن ايضاحه بالشكلين الآتيين :



شكل (٠٠) منحنيات التكاليف المختلفة متوسطاتها وكذلك منحنى التكاليف الحدية .

ويتضح أن دالة التكاليف دالة تكعيبيه ، أما عن متوسطات التكاليف الكلية والمتغيرة ودالة التكاليف الحديه فهى دوال تربيعيه حيث تأخذ فى النقصان بزيادة الانتاج ثم يصل كل منها إلى نقطة تصغير Minimum Point ثم تزداد بزيادة الانتاج ، ويصل منحنى التكاليف الحديه إلى نقطه تصغيره قبل أن يصلا منحنى متوسطات التكاليف الكلية والمتغيره الى نقطتى تصغيرهما ، ولكن يصل منحنى التكاليف المتغيره قبل منحنى متوسط التكاليف الكلية وأن منحنى التكاليف الحديه يقطع منحنى متوسط التكاليف الكلية والمتغيره عند نقطتى تصغيرهما ويمكن إثبات ذلك رياضيا كالتالى :

$$\text{متوسط التكاليف الكلية} = \frac{\text{ت ك}}{\text{ك}}$$

$$\frac{d\left(\frac{\text{ت ك}}{\text{ك}}\right)}{d\,\text{ك}} = \frac{\text{ك}\,\frac{d(\text{ت ك})}{d\,\text{ك}} - \text{ت ك}}{\text{ك}^2} \qquad (1)$$

ولتصغير المعادلة (١) توضع مساويه للصفر :

$$\frac{\text{ك}\,\dfrac{\text{ى}\,(\text{ت ل})}{\text{ى ك}} - \text{ت ل}}{\text{ك}^{٢}} = \text{صفر} \qquad (٢)$$

وبضرب الطرفين فى الوسطين يستنتج التالى :

$$\text{ك}\,\frac{\text{ى}\,(\text{ت ل})}{\text{ى ك}} - \text{ت ل} = \text{صفر}$$

$$\text{ك}\,(\text{ت ح}) - \text{ت ل} = \text{صفر}$$

$$\text{ت ح} = \frac{\text{ت ل}}{\text{ك}} = \text{م ت ل} \qquad (٣)$$

وأيضاً

$$\text{متوسط التكاليف المتغيرة} = \frac{\text{ت غ}}{\text{ك}}$$

$$\frac{\text{ى}\left(\dfrac{\text{ت غ}}{\text{ك}}\right)}{\text{ى ك}} = \frac{\text{ك}\,\dfrac{\text{ى}\,(\text{ت غ})}{\text{ى ك}} - \text{ت غ}}{\text{ك}^{٢}}$$

ولتصغير المعادله (٤) توضع مساويه للصفر :

$$\text{ك}\,\frac{\text{ى}\,(\text{ت غ})}{\text{ى ك}} - \text{ت غ} = \text{صفر}$$

$$ك\ (ت\ ح) - ت\ غ = صفر$$

$$ت\ ح = \frac{ت\ غ}{ك} = م\ ت\ غ \qquad (٥)$$

ومن العلاقات (٣) ، (٥) يتضح أن التكاليف الحديه تمر بنقطتى تصغير كل من متوسط التكاليف الكلية والمتغيرة :

ومن الجدير بالملاحظة أن مدير المنشأة الذى هدفه معظمة الربح يريد أن يحصل على ذلك القدر من الإنتاج الذى يحقق ذلك الهدف ، وباعتبار العلاقات الثلاثة التالية وهى دالة الإنتاج ومعادلة التكاليف ودالة الممر الممتد للمنشأة وهى على التوالى :

$$ك = د\ (س_{١}\ ،\ س_{٢})$$

$$ت\ ل = ر_{١}\ س_{١} + ر_{٢}\ س_{٢} + ت\ ث$$

$$صفر = و\ (س_{١}\ ،\ س_{٢})$$

ويمكن إختصار العلاقات السابقة بالمعادلة التالية حيث أن التكاليف عبارة عن دالة ضمنية الإنتاج مضافا إلى هذه الدالة الضمنية التكاليف الثابتة أى أن :

$$ت\ ل = د\ (ك) + ت\ ث$$

ويتضح من ذلك أن إيراد المنشأة يتوقف على الكميات المبيعة وبفرض ثبات سعر الوحدة من السلعة المباعة يتوقف الربح أيضا هى تلك الكمية من السلعة .

$$\pi = ع ك - د(ك) - ت ث$$

ولمظمة الربح يؤخذ التفاضل بالنسبة إلى ك وتوضع المعادلة مساوية للصفر كالتالى :

$$\frac{ى\pi}{ى ك} = ع - دَ(ك) = صفر$$

$$ع - دَ(ك) = صفر$$

$$دَ(ك) = ع$$

ويتضح مما سبق لمظمة الربح يجب أن تتساوى التكاليف الحدية بسعر الوحدة المباعة (الإيراد الحدى) . ولمظمة الربح يجب تكون المشتقات الثانية كالتالى:

$$\frac{ى^{٢}\pi}{ى ك^{٢}} = - \frac{ى^{٢}(ت ل)}{ى ك^{٢}} > صفر$$

$$- \frac{ى^{٣}(ت ل)}{ى ك^{٢}} > صفر$$

وبضرب كل من الحدى الأيمن والأيسر للعلاقة السابقة بـ — ١

$$\frac{ى^{٢}(ت ل)}{ى ك^{٢}} > صفر$$

أما عن المدى طويل الأجل فيمكن للمنشأة أن تغير من هيكلها وبناء وحدات إنتاجية أخرى لإنتاج السلع حيث تعطى كل وحدة إنتاجية أقل

ما يمكن بالنسبة لوحدة الإنتاج عند ذلك المستوى المعين ويأخذ أيضاً متوسط التكاليف الكلية فى المدى طويل الأجل شكل حرف U ويعنى تناقصه أن هناك إقتصاديات السلعة Economies of Scale أما تزايده بعد يصل إلى نقطة تصغيره فمعنى عدم وجود إقتصاديات السلعة dliseccmonies of Scale وقد تعزى الأولى إلى الكفاءة الإقتصادية (التى تسبب فى تناقص متوسط التكاليف الكلية) التى تتناقص بزيادة الإنتاج أما الثانية فقد تعزى أن هناك مقدرة إنتاجية محدده تصل الكفاءة أقصاها ثم تتناقص بزيادة الإنتاج (وهذا ما يسبب فى زيادة متوسط التكاليف الكلية). أما عن التكاليف الحدية فهى عبارة عن التغير فى التكاليف الكلية نتيجة تغير فى الإنتاج وحدة واحدة فى المدى طويل الأجل.

مثال :

١ — بفرض أن الدالة[1] التالية هى دالة التكاليف وأن سعر الوحدة هو أربعة جنيهات فأوجد كمية الإنتاج الذى يعظم الربح .

$$ت ل = ٠٫٠٤ ل^{٣} - ٠٫٩ ل^{٢} + ١٠ ل + ٥$$

ولمعظمة الربح يجب أن :

$$ت ح = ع$$

(I) JM. Henderson And R. E. Quandt 'Microeconomic Theory. A Mathematical Approach .' McGraw - Hill Book Company, Inc.

$$١٢ر ل^٢ - ١٨ر ل + ١٠ = ٤$$

$$ل^٢ - ١٥ ل + ٥٠ = صفر$$

$$ل = ٥ \quad ، \quad ل = ١٠$$

$$\frac{د^٢ (ت ل)}{د ل^٢} = ٢٤ر٠ ل - ١٨ر١$$

وعند الكمية ل = ٥ تكون $\frac{د^٢ (ت ل)}{د ل^٢} < صفر$.

الكمية ل = ١٠ تكون $\frac{د^٢ (ت ل)}{د ل^٢} > صفر$.

وعليه فإن الإنتاج الذى يعطى معظمة الربح هو ل = ١٠ .