

# القسم الثاني

يشمل :

— عمل الطمانينة والتأمينات والبرمجيات الحاسوبية .

— المتخصصين .

— التكاليف .

— الطموحات .

— الطموحات الرياضية .

obeykandi.com

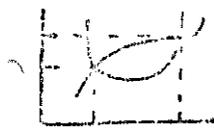
## الباب الخامس

### حل المعادلات والتباينات

حل نظام معين من المعادلات عبارة عن مجموعة من القيم للمتغيرات التي تجعل كل معادلة في هذا النظام صحيحة . وبعبارة أخرى فإن هذه القيم تمثل المجاهيل في المعادلات .

ومن الممكن إيضاح ما نعنيه بحل نظام معين من المعادلات وذلك بالرجوع إلى التمثيل البياني لهذه المعادلات . حيث أن حلول المعادلات تحدث عند تقاطع الأشكال البيانية للمعادلات . ومن الطبيعي يمكن قراءة قيم هذه الحلول من المحور السيني والصادي .

ومن الواضح أن معادلتين في مجهولين قد يكون لها حلا واحدا أو أكثر من حل واحد أو عدم وجود حل كما هو موضح بعدد مرات التقاطع بالأشكال البيانية الآتية :



شكل (٣٧)

وتوضع كل من الأشكال السابقة نظاماً معيناً من معادلتين في مجهولين ومن الواضح أن المعادلتين في الشكل إلى اليمين ليس لهما حلا . أما المعادلتين في الشكل الذي يقع في الوسط فلمهما حلين . أما الشكل إلى اليسار فله حل واحد

من معادلة خطية في مجهول واحد :

نقصد بحل المعادلة الخطية في مجهول واحد من تحديد قيمة من التي تستوفي  
أو تحقق المعادلة . فإذا كان لدينا مثلاً المعادلة  $5s - 2 + 12$  فإنه يمكن  
حلها بإضافة العدد ٣ إلى جانبي المعادلة كالآتي :

$$5s - 2 + 12 = 3 + 3 - 2 + 12$$

$$5s = 15$$

وإذا قسمنا جانبي المعادلة على ٥ نجد أن :

$$\frac{5s}{5} = \frac{15}{5}$$

$$s = 3$$

ولمراجعة هذا الحل في المعادلة الأصلية نجد أن :

$$12 = 3 - (3 \times 5)$$

$$12 = 3 - 15$$

وهذا صحيح ، وذلك فإن الحل بأن  $s = 3$  صحيحاً :

مثال :

افترض أن منشأة معينة تعطى خصماً انبائياً بمقدار ٢٠٪ عن مشترياتهم  
إذا دفعوا في ظرف مدة معينة . فإذا اشترى عميلاً بضاعة بمبلغ ٥٠٠ جنياً  
على الحساب وقام بدفع المبلغ في المدة المعينة . فما هو قيمة الخصم ؟

الحل :

حل هذا النظام الذي يشرح هذه المشكلة يكون بالضرب كالآتي :

$$\text{الخصم} = 500 \times 20$$

$$= 100 \text{ جنيهاً}$$

ومن الطبيعي أن إيجاد حل هذا النظام يعتبر بسيطاً جداً ولكن هناك نظماً أخرى تحتوى على مجاهيل ومعاملات كثيرة يكون حلها أكثر تعقيداً، وهذه النظام قد يكون لها حلاً واحداً أو أكثر من حل واحد أو عدم وجود حل.

هل معادلتين خطيتين في مجهولين :

نفترض أن هناك قسمين من أقسام الإنتاج ١ و ٢ بمصنع معين ينتجون وحدات مشتركة بالنسب الموضحة بعد لكل ساعة عمل :

القسم الأول

ب

٣

٤

١

٥

٢

كبروسين بمئات للبرميل

بنزين » »

فما هي عدد توافق تشغيل القسمين التي تسمح بتنفيذ الطلب التالي بدون زيادة إنتاج الكبروسين أو البنزين :

بنزين

٨

كبروسين

١٥

الطلب بمئات البراميل

يمكن بالطبع تكوين معادلتين في مجهولين للمشكلة السابقة كما يلي :

$$15 = 3 + 10$$

$$8 = 4 + 12$$

حيث :

١ = عدد ساعات تشغيل القسم الأول

ب = د د د د الثاني

ويمكن حل هاتين المعادلتين بضرب المعادلة الأولى في ٢ لمعادلة الثانية في ٥ ثم طرح المعادلة الثانية من الأولى للتخلص من ١ .

$$30 = 2b + 110$$

$$40 = 5b + 110$$

$$10 = -3b$$

أى أن :

$$\frac{10}{-3} = b$$

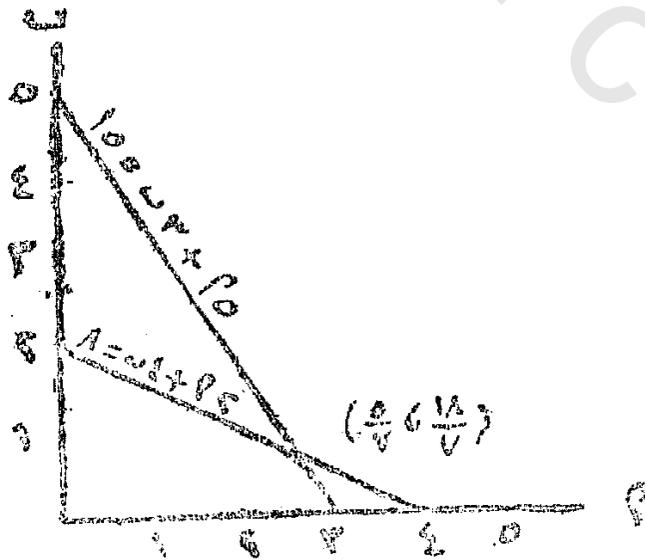
$$b = -\frac{10}{3}$$

وبالتعويض في المعادلة الأولى بقيمة  $b$  تنتج قيمة ١

$$10 = -\frac{10}{3} \times 3 + 10$$

$$\frac{20}{3} = 10$$

كما يمكن إيجاد قيمتي  $a$  و  $b$  بيانياً برسم المعادلتين الأصليتين كالآتي :



(شكل ٣٨)

ويلاحظ أن المعادلتين السابقتين لهما حلا واحدا يحقق المعادلتين في آن واحد ، ولذلك يطلق على هذا النوع من المعادلات بالمعادلات المستقلة .

وإذا كان لدينا معادلتين في مجهولين

$$ص = ٥ + س$$

$$٣ ص = ١٥ + ٣ س$$

فإن هاتين المعادلتين متساويتين حيث أن لو قسمنا المعادلة الثانية على ٣ فإننا نحصل على نفس المعادلة الأولى . ولذلك يطلق على هذا النوع من المعادلات بالمعادلات التابعة ولها عدد لانهاى من الحلول التي تحقق المعادلتين في آن واحد .

أما إذا كان لدينا معادلتين:

$$ص = ٥ + س$$

$$ص = ١٠ + س$$

أى أن معاملي س متساويين . وبعبارة أخرى ميل كل منهما متساو مع الآخر أى أن هذين الخطين متوازيين . ولذلك نجد أن ليس لهما حلا معيناً ولذلك يطلق على هذا النوع من المعادلات بالمعادلات غير المتسقة .

ويصفة عامة فإن أى نظام للمعادلات يكون فيه عدد المعادلات مساو لعدد المجهيل ولا يحتوى على معادلات تابعة أو غير متسقة فإن له حلا وحيداً .

هل ثلاث معادلات خطية في ثلاث مجاهيل:

إذا كان لدينا ثلاث معادلات خطية في ثلاثة مجاهيل فإن هذا النظام قد يكون متسقاً ومستقلاً وغير متسق أو تابع . وفي هذا البند سنتناول فقط نظام المعادلات الذى يكون متسقاً ومستقلاً أى له حلا وحيداً .

مثال :

افترض أن لدينا المعادلات الخطية الآتية :

$$(١) \quad ٤س - ص + ٥ع = ١٠$$

$$(٢) \quad ٦س + ص - ٤ع = ٤$$

$$(٣) \quad ٤س - ٢ص + ٩ع = ١٧$$

ولحل المعادلات الثلاث أى إيجاد س و ص و ع التى تحقق المعادلات الثلاثة فى آن واحد ، سنتخلص من ص من المعادلتين الأولى والثانية وذلك بإضافة المعادلة الأولى إلى الثانية كالتالى :

$$٤س - ص + ٥ع = ١٠$$

$$٦س + ص - ٤ع = ٤$$

$$(٤) \quad \begin{array}{r} ٤س - ص + ٥ع = ١٠ \\ ٦س + ص - ٤ع = ٤ \\ \hline ١٠س + ع = ١٤ \end{array}$$

نقوم أيضا بحذف ص من المعادلة الثانية والثالثة وذلك بضرب المعادلة الثانية فى ٢ ثم إضافتها إلى المعادلة الثالثة كالتالى :

$$١٢س + ٢ص - ٨ع = ٨$$

$$٤س - ٢ص + ٩ع = ١٧$$

$$(٥) \quad \begin{array}{r} ١٢س + ٢ص - ٨ع = ٨ \\ ٤س - ٢ص + ٩ع = ١٧ \\ \hline ١٦س - ١٦ع = ٢٥ \end{array}$$

يطرح المعادلة (٤) من المعادلة (٥) فينتج أن :

$$١٠س + ع = ٦$$

$$١٦س + ع = ٩$$

$$٦س = ٣$$

$$\frac{١}{٢}س = ١$$

نعوض قيمة س =  $\frac{1}{4}$  في المعادلة (٤) فنحصل على قيمة ع كالآتي :

$$٦ = ع + \frac{1}{4} \times ١٠$$

$$٦ = ع + ٥$$

$$١ = ع$$

وأخيراً نقوم بالتعويض بقيمة س =  $\frac{1}{4}$  في المعادلة (١) فنحصل على قيمة ص كالآتي :

$$١٠ = ١ \times ٥ + ص - \frac{1}{4} \times ٤$$

$$١٠ = ٥ + ص - ١$$

$$٣ = ص$$

$$٣ = ص$$

أى أن حل المعادلات هو ( س =  $\frac{1}{4}$  ، ص = ٣ ، ع = ١ )

من المعادلات غير الخطية والمتقطعة :

ليس المجال هنا شرح أنواع المعادلات غير الخطية ولكن سنقوم بعرض بعض الأنواع البسيطة للمعادلات غير الخطية. ونبدأ بمعادلات الدرجة الثانية في مجهول واحد أى التى فيها أعلى قيمة للأس للمتغير هى ٢ . والصورة العامة لهذه المعادلات هى :

$$١ + ب س + ح س^٢ = صفر$$

حيث ح لا تساوى صفرأ .

ومن المعروف أن حل معادلات الدرجة الثانية يكون باستعمال المعادلة

الآتية :

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ح١}}{٢ح}$$

وتستخدم هذه المعادلة في حل معادلات الدرجة الثانية في مجهول واحد ،  
ولكن يجب مراجعة الحل بالتعريض في المعادلة الأصلية للتأكد من أنه  
يحقق المعادلة الأصلية . وقد يتساءل البعض عن وجود معادلات كمعادلة  
الدرجة الثانية لحل معادلات من الدرجتين الثالثة والرابعة ، فنقول أن هناك  
معادلات لحل معادلات حتى الدرجة الرابعة ، ولكن لا توجد معادلات  
معينة لحل معادلات الدرجة الخامسة فما فوق إلا إنه يجدر القول أنه بالرغم  
من عدم وجود معادلات معينة لحل معادلات الدرجة الخامسة فما فوق  
إلا أنه توجد طرفا مختلفة لحل هذه المعادلات .

افترض منحني الطلب لساعة معينة هو  $v = 2 - 2c$  وأن منحني  
العرض لهذه هو  $s = c$  . وإذا وضعنا الطلب يساوي العرض  
للحصول على التوازن ، فنحل على معادلة من الدرجة الثانية .

$$-2 = 2c + c + 2 \text{ ضفر}$$

وللحصول على قيمة  $c$  التي تحقق المعادلة نستعمل معادلة الدرجة الثانية  
وفي هذا المثال نجد أن :

$$1 = 2 - 2c \quad 6 \quad 1 = c \quad 6 \quad 2 - = 1$$

ولذلك :

$$\frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-2)}}{2} = c$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8}}{2} =$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} =$$

$$1 = \quad \text{أو} \quad 2 -$$

ومن الطبيعي أننا نهمل الحل الثاني أى أن  $E = 2$  حيث أن السعر لا يمكن أن يكون بالسالب . ولذلك فإن الحل الصحيح هو أن  $E = 1$  ، ولذلك فإن سعر التوازن هو  $E = 1$  حيث تكون كمية الطاب تساوى كمية العرض  $= 1$  .

وهناك نوع آخر من المعادلات يعرف بالمعادلات المختلطة أى التى تحتوى على معادلات خطية وغير خطية . افترض أن هناك شركة تنتج نوعاً معيناً من المنتجات . وقد وجدت بالتجربة أن متوسط التكلفة ينخفض كلما ارتفع الإنتاج حتى يصل إلى نقطة معينة يرتفع بعدها متوسط التكلفة كلما زاد الإنتاج افترض أيضاً أن متوسط التكلفة لهذا المنتج يمكن تمثيله بالمعادلات الآتية :

$$M = 10 - 3S + \frac{S^2}{2}$$

حيث :

$M =$  متوسط التكلفة للوحدة الواحدة بالقروش .

$S =$  متوسط الإنتاج بالآلاف الوحدات يومياً .

وقد وجدت الشركة أيضاً أن متوسط الإيراد للوحدة الواحدة ينخفض

كلما زادت مبيعات الوحدات لضرورة خفض السعر لبيع كميات كبيرة .

وقد وجدت أن العلاقة بين متوسط الإيراد والمبيعات يمكن تمثيلها بالمعادلة

الآتية :

$$M = 9 - \frac{S}{2}$$

حيث :

$M =$  متوسط الإيراد للوحدة الواحدة بالقروش

$S =$  مبيعات الوحدات بالآلاف يومياً

ويمكن إيجاد معدلات الإنتاج والمبيعات التي تحقق الربح عندما يكون  
م = م<sub>١</sub> وذلك بحل المعادلتين السابقتين :

$$م = ١٠ - ٣س + \frac{س^2}{٢}$$

$$م = ٩ - \frac{س}{٢}$$

وحيث أن م = م<sub>١</sub> = م<sub>٢</sub> فيمكن كتابة المعادلتين السابقتين كالآتي :

$$ص = ١٠ - ٣س + \frac{س^2}{٢}$$

$$ص = ٩ - \frac{س}{٢}$$

أي أن :

$$\frac{س^2}{٢} + ٣س - ١٠ = \frac{س}{٢} - ٩$$

$$\frac{س^2}{٢} + ٣س - ١ = \frac{س}{٢}$$

$$١ = \frac{س^2}{٢} + ٣س - ١$$

$$٢ = ٥س + س^2$$

والآن يمكن إيجاد قيمة س وذلك باستعمال معادلة الدرجة الثانية .

- ٢٧١ -

$$\frac{514 - 2\sqrt{\pm 5}}{2} = \text{س}$$

$$\frac{1 - 20\sqrt{\pm 5}}{2} =$$

$$\frac{17\sqrt{\pm 5}}{2} =$$

$$\frac{4.123 \pm 5}{2} =$$

∴ س = ٥٦١، أو ٤٣٩.

ويمكن إيجاد قيمة ص وذلك بالتعويض في المعادلة

$$\frac{\text{س}}{2} - 9 = \text{ص}$$

$$\frac{4,061}{2} - 9 =$$

$$6,719 =$$

$$\frac{4,439}{2} - 9 = \text{ص}$$

$$8,780 =$$

ولذلك نجد أن هناك حلين للنظام المختلط للمعادلات هو :

$$6719 = \text{ص} \quad 6 \quad 4,061 = \text{س}$$

$$8,780 = \text{ص} \quad 6 \quad 4,439 = \text{س}$$

### التباينات والبرامج الخطية :

إن كثير من المشاكل الاقتصادية يمكن عرضها مشاكلها بسهولة ووضوح باستعمال التباينات . وقد زاد في السنوات الأخيرة بعد الحرب العالمية الثانية الاهتمام بحل أنواع معينة من المشاكل التي تحتوي على المتساويات والتباينات . والعلم الذي يدرس هذه النظم قد سمي بالبرمجة الخطية Linear programming أو البرمجة الرياضية programming Mathematical . ونود أن نعطي فكرة بسيطة عن هذا الموضوع وخاصة لأنه يتصل بمناقشتنا للنظم المختلفة للمعادلات .

افترض شركة معينة ترغب في تخطيط إنتاجها الشهر القادم . وتقوم هذه الشركة بإنتاج نوعين من المنتجات يحتاج كل منهما إلى عمليات صناعية داخل ثلاثة أقسام وهي السبك ، الآلات ، التشطيب كما هو موضح بالجدول التالي

المنتج	السبك	الآلات	التشطيب
س <sub>١</sub>	٦ ساعات للوحدة	٣ ساعات للوحدة	٤ ساعات للوحدة
س <sub>٢</sub>	٦ ساعات للوحدة	٦ ساعات للوحدة	٢ ساعة للوحدة

افترض أن الطاقة الإنتاجية للأقسام السابقة في الشهر القادم هي كالآتي .

السبك	٤٢٠	ساعة
الآلات	٣٠٠	ساعة
التشطيب	٢٤٠	ساعة

وبهذه المعلومات يمكن عرض العلاقة بين الكميات التي يمكن إنتاجها بين كل منتج في الشهر القادم والطاقة الإنتاجية ( التي نعتبرها قيود ) لكل قسم من ثلاثة تباينات كالآتي :

$$\begin{array}{l} \text{المسبك} \\ \text{الآلات} \\ \text{التشطيب} \end{array} \quad \begin{array}{l} ٤٢٠ \geq ٦س_١ + ٦س_٢ \\ ٤٢٠ \geq ٦س_١ + ٣س_٢ \\ ٢٤٠ \geq ٦س_١ + ٤س_٢ \end{array}$$

حيث أنه لا يمكن أن تكون  $س_١$  أو  $س_٢$  لها قيمة سالبة ، فمعنى ذلك أن لدينا القيود الضمنية التالية :

$$س_١ \leq \text{صفر}$$

$$س_٢ \leq \text{صفر}$$

لذلك نجد أن لدينا نظام معيناً من التباينات مكوناً من خمسة قيود التالية والتي يجب أن تحقق في آن واحد إذا ما رغبتنا في إيجاد حل أمثل .

$$٤٢٠ \geq ٦س_١ + ٦س_٢$$

$$٣٠٠ \geq ٦س_١ + ٣س_٢$$

$$٢٤٠ \geq ٦س_١ + ٤س_٢$$

$$س_١ \leq \text{صفر}$$

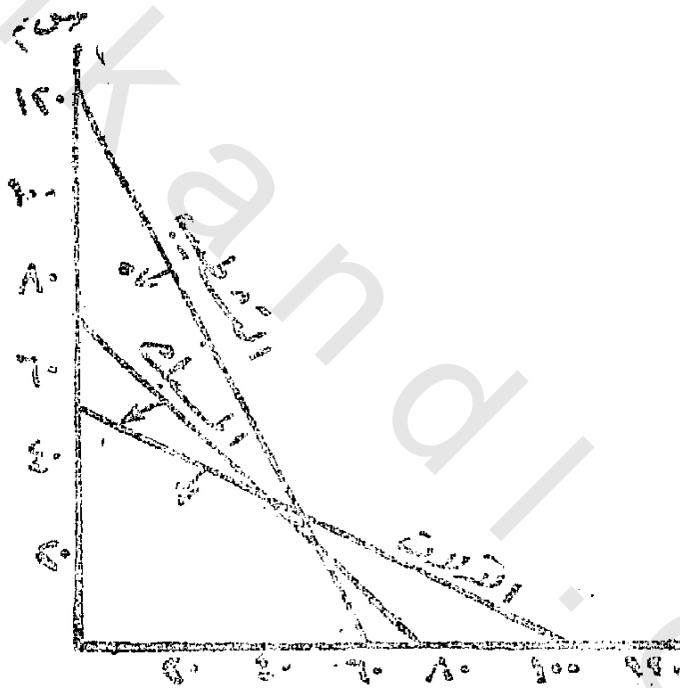
$$س_٢ \leq \text{صفر}$$

ومن الواضح أن أحد الحلول التي نسمى إليها وهي معرفة كمية الإنتاج من كل نوع هي :

$$س١ = \text{صفر}$$

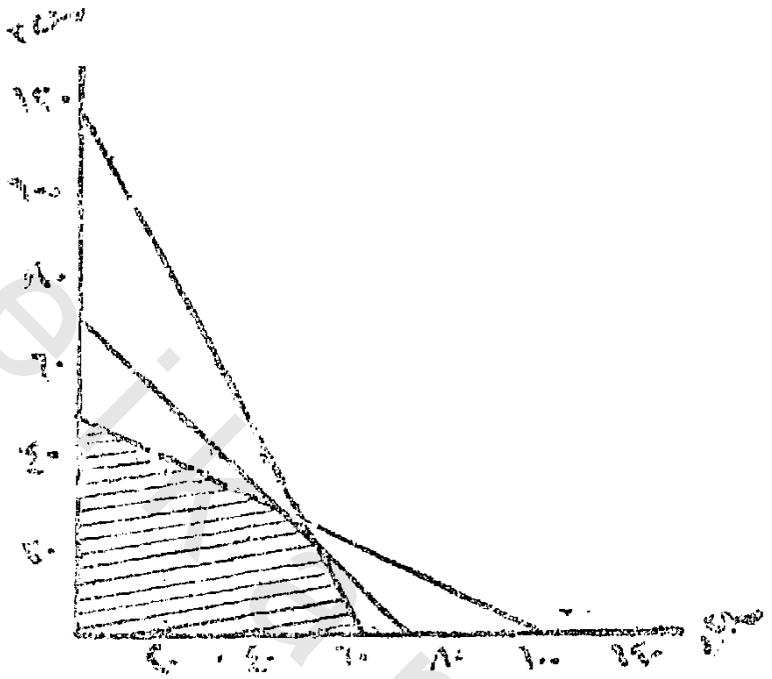
$$س٢ = \text{صفر}$$

حيث أنها تحقق التباينات الخمسة في آن واحد . ولكن هناك طبعاً حلولاً كثيرة نستطيع الحصول عليها برسم التباينات كالاتي :



( شكل ٣٩ )

ولرسم التباينات بيانياً نحوها إلى معادلات ونقوم برسمها كما هو موضح بالشكل السابق . وفي هذا الشكل نجد أن مجموعة النقاط التي تحقق كل من هذه التباينات تقع في اتجاه السهم الصغير في نهاية كل خط ، أما النقاط التي تحقق التباينات الخمسة في آن واحد فهي عبارة عن الجزء المظلل في الشكل التالي :



(شكل ٤٠)

ويشمل الجزء المظل على التوافق المختلفة من المنتجين س<sub>١</sub> س<sub>٢</sub> التي تستطيع الشركة إنتاجهما في الشهر القادم دون أن تتجاوز الطاقة الإنتاجية لكل قسم . ولكن قد ترغب الشركة في إنتاج أكثر ما يمكن في حدود هذه القيود أي قيود الطاقة الإنتاجية لكل قسم . ففي الحالة نجد أن الشركة يجب أن تقوم بإنتاج كمية من س<sub>١</sub> س<sub>٢</sub> تقع على الحد الخارجي أو الأقصى لمجموعة الحلول المبينة في شكل ٣٩ ولكن يواجهنا سؤال آخر هو ما هو الحد الخارجي الذي يكون أكثر ربحاً في النهاية.

في هذه الحالة يلزمنا معرفة ربحية كل نوع من هذين المنتجين، افترض أن النوع الأولي س<sub>١</sub> يربح من كل وحدة ثلاثين قرشا وأن النوع الثاني يربح عشرين قرشا . ويمكن عرض ذلك رياضياً بالمعادلة الآتية :

$$س = ٣, س_١ + ٢, س_٢$$

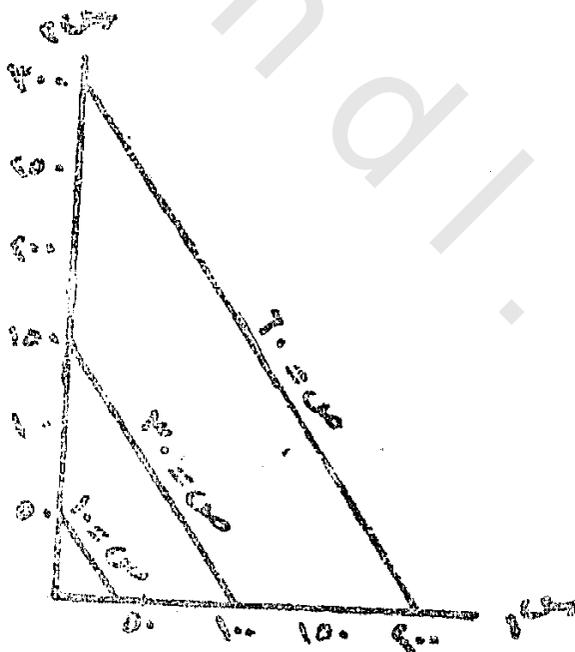
حيث ص تمثل الربح  
إلا أن الشركة ترغب في تحقق أكبر ربح ممكن ، ولمعرفة الحل الذي  
يعطى هذا الربح نفترض القيم التالية للأرباح حتى نرى سلوك معادلة الربح

$$ص = ١٠$$

$$ص = ٣٠$$

$$ص = ٦٠$$

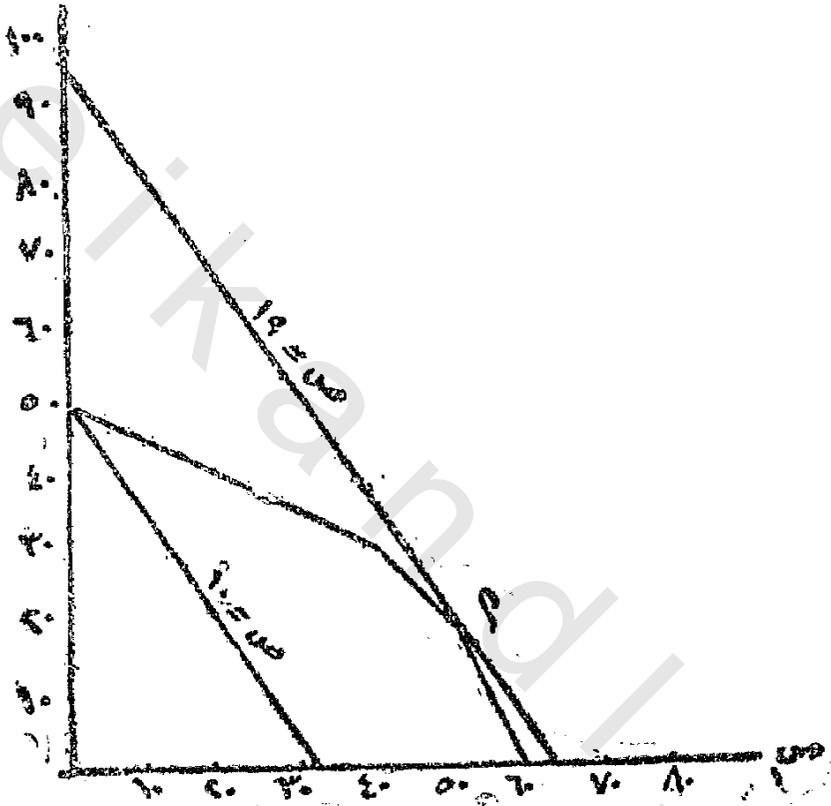
ومن الطبيعي يمكننا رسم معادلة الربح لهذا القيم كما هو موضح  
بالشكل التالي :



شكل (٤١)

ومن الواضح في هذا الشكل أنه كلما زادت قيمة ص فإن الخط يبتعد  
عن نقطة الأصل ولكن ميل الخط لا يعتبر . ويتضح الآن أنه يمكن حل

هذه المشكلة الآن وكذلك بضم الشكلين ٤٠ و ٤١ مع بعضها . ولذلك نستطيع إيجاد الحل الأمثل من الشكل ٤٢ باختيار النقطة على حدود مجموعة الحلول للتباينات التي تعطى أكبر قيمة للمتغير ص .



(شكل ٤٢)

ويلاحظ من الشكل ٤٢ أن النقطة التي تحقق أكبر قيمة للمتغير ص أي النقطة التي تحقق أكبر ربح ممكن هي التي رمزنا لها في شكل بالرمز ١ وهي نقطة تقاطع حدود معادلتى المسبك والتشطيب . ومن الطبيعي يمكن إيجاد قيمتي س ١ و س ٢ بقراءة قيمتها من على المحورين في شكل ٤١ أو بحل المعادلتين الآتيتين

$$٤٢٠ = ١س٦ + ١س٦$$

$$٢٤٠ = ١س٤ + ٢س٢$$

اللتين تعطيان القيمتين الآتيتين :

$$س_١ = ٥٠ \quad ٦ \quad س_٢ = ٢٠$$

لذلك نقول أن هاتين القيمتين تحقق القيود الخمسة السابقة وكذا تحقق أكبر ربح ممكن .

وأخيرا نقول أن هذا المثال يعتبر من الأمثلة السهلة البسيطة في البرامج الرياضية ، إلا أن المسألة تتعقد قليلا عند وجود أكثر من متغيرين . وفي هذه الحالة يازم إستعمال طرقا أخرى منها طريقة السمبلكس Simplex Method أو طريقة النقل أو التوزيع-Transportation Method .