

الباب السادس

التفاضل

أولاً : تفاضل الدوال

الدوال الصريحة والدوال الضمنية :

نود في هذا الباب أن نشرح بعض خصائص الدوال إلا أننا بدلاً من استخدام رمزاً للدالة سنستخدم رمزاً آخر وهو Φ .

فقد سبق أن أوضحنا أن $\Phi = \Phi(s)$ تعني أن Φ هي دالة s وأن قيمة Φ تعتمد أو تتوقف على قيمة s . وأطلقنا على Φ المتغير التابع وعلى s المتغير المستقل . ولذلك نقول أنه إذا كان هناك متغيرين s ، Φ مثلاً وأن قيمة Φ تتوقف على قيمة s فإن هذه الدالة تسمى دالة صريحة فمثلاً إذا كانت Φ تمثل الربح الذي يحصل عليه صاحب المنشأة لعدد s من الوحدات المباعة عندما يكون ربح الوحدة المباعة هو ϵ قروش ، فإن المعادلة الآتية :

$$\Phi = \epsilon s$$

تمثل دالة صريحة للمتغير Φ بالنسبة للمتغير s أما إذا وضعنا المعادلة السابقة في الصورة الآتية :

$$\epsilon = \frac{\Phi}{s}$$

فإنه يطلق عليها دالة ضمنية إذ أن الفرق بين الدالة الضمنية والدالة الصريحة هو أن الدالة الضمنية لا تعطي ما يساوي Φ إلا إذا عملنا بعض التغيرات في المعادلة . أي أننا إذا لم نتمكن من وضع الدالة على الصورة $\Phi = \Phi(s)$ بل وضعت على الصورة .

$$\Phi (س، ص) = \text{صفر}$$

أطلق على الدالة دالة ضمنية . فمثلا الدالة $\sqrt{ص^2 - ٢س}$ = صفر
نعتبر دالة ضمنية . وقد يكون من الصعوبة في بعض الأحيان تغير الدوال
الضمنية إلى دوال صريحة والعكس . فمثلا نجد أن في المعادلة الآتية :

$$ص = س^٦ + ص^٧$$

لا يمكن تحويلها إلى دالة صريحة بالنسبة لأي من المتغيرين . ولكن
في معظم الأحيان نجد أنه يمكن تحويل الدالة الضمنية إلى دالة صريحة
فبالنسبة للمعادلة :

$$\frac{س}{ص} = ٤$$

يمكن تحويلها إلى معادلة صريحة بالنسبة لأي من المتغيرين . فمثلا
نستطيع إيجاد قيمة ص بالنسبة للمتغير س كالآتي :

$$ص = ٤ س$$

أو أنه إذا كان لدينا العلاقة الضمنية الآتية :

$$\Phi (س، ص) = ٣س - ص - ٥ = \text{صفر}$$

فإنه يمكن تحويلها إلى دالة صريحة باعتبار أن ص دالة
س كالآتي :

$$٣س - ص - ٥ = \text{صفر}$$

$$- ص = ٥ - ٣س$$

$$ص = ٣س - ٥$$

ولذلك فإن :

$$\Phi(2) = 3 \times 2 - 5$$

$$= 1$$

$$\Phi(0) = 3 \times 0 - 5$$

$$= -5$$

وهكذا . ومن المفهوم طبعاً أن الأعداد داخل الأقواس عبارة عن قيم المتغير المستقيم s .

إلا أنه ليس من الضروري استبدال قيمة s بعدد باستمرار ولكن يمكن طبعاً استبدال قيمتها بقيمة غير معينة ولتكن b مثلاً . وفي هذه الحالة فإن :

$$\Phi(b) = 3b - 5$$

نهايات الدوال :

إذا رمزنا إلى نهاية دالة بالرمز Φ ، فإننا نستطيع كتابة نهاية الدالة $\Phi(s)$ عندما تقرب s من قيمة معينة a كالآتي :

$$\Phi(s) \rightarrow \Phi(a)$$

ويعنى هذا التعبير أن الدالة $\Phi(s)$ تقرب من قيمة محددة $\Phi(a)$ كلما قربت s من a . وبكلام آخر فإذا كانت s هي عدد قريب من a ولكنه يختلف عنه فإن قيمة الدالة $\Phi(s)$ تقرب من $\Phi(a)$.

مثال :

افترض أن الدالة الآتية .

$$\phi(s) = 3s + 2$$

وأننا نرغب في حساب نهاية الدالة عندما تقرب s القيمة ϵ .

نها $\phi(s)$

$s \leftarrow \epsilon$

نستطيع أن نبدأ بقيم مختلفة للمتغير s إما بقيم تكون أكبر أو أقل من ϵ كما هو موضح بالجدول التالي حتى نقيين نهاية الدالة .

s	$\phi(s) = 3s + 2$
١	٥
٢	٧
٣	٩
٣,٥	١٠
٣,٩	١٠,٨
٤,١	١١,٢
٤,٥	١٢
٥,٥	١٣
٦	١٥
٧	١٧

من الواضح طبعاً من ملاحظة سلوك الدالة أن نقول أن نهاية الدالة ϕ (س) عندما تقترب ϵ هي ١١ . أى أنه إذا كان .

$$\phi (س) = ٢ س + ٣$$

$$\text{فإن} \quad \text{نهاية} = ١١$$

$$\text{س} \leftarrow \epsilon$$

ولا نود أن يفهم أن طريقة إيجاد نهاية الدالة هو بإيجاد ϕ (ϵ) بدلا من استعمال الجدول السابق . إذا أن ذلك يخالف مفهوم نهاية الدالة السابق شرحه إلا أن في مثالنا الحالي نجد أن ϕ (ϵ) نتج عنها فعلا النهاية الصحيحة وقد يحدث في كثير من الأمثلة ، ولكن من المفهوم أن هناك حالات كثيرة لن يصلح فيها استخدام هذه الطريقة كما هو موضح بالمثال التالي :

$$\text{افترض أن لدينا الدالة } \phi (س) = \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$$

وأننا نرغب في حساب نهاية الدالة عندما تقترب س من ٢ . أى

$$\text{نهاية} \phi$$

$$\text{س} \leftarrow ٢$$

في هذه الحالة إذا قمنا بالتعويض عندما تكون س = ٢ فإن

$$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \frac{٤ - ٤}{٢ - ٢} = \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$$

$$= \text{أى عدد}$$

ولذلك نجد أنه بالتعويض لا يمكن إيجاد الكسر .

ويمكن بالطبع حساب نهاية الدالة وذلك بفرض أن س = ٢ - م حيث م تمثل قيمة صغيرة صغراً لا نهائياً . وذلك نجد أن :

$$\frac{\varepsilon - m + m\varepsilon - \varepsilon}{2 - m - 2} = \frac{\varepsilon - (m - 2)^2}{2 - (m - 2)} = \frac{\varepsilon - 2}{2 - m}$$

$$\frac{2m + m\varepsilon -}{m -} =$$

$$m - \varepsilon =$$

$$\varepsilon = (s) \Phi$$

$$s \leftarrow 2$$

وذلك لأن عندنا $s \leftarrow 2$ فإن $\Phi (s) \leftarrow \varepsilon$ ويتضح ذلك من الجدول الآتي :

س	$\Phi (s)$
١	٣
١,٤	٣,٤
١,٥	٣,٥
١,٦	٣,٦
١,٨	٣,٨
١,٩	٣,٩
١,١	٤,١
١,٢	٤,٢
١,٤	٤,٤
١,٦	٤,٦
٣	٥

أن أنه يتضح من الجدول اقتراب قيمة $\Phi (s)$ من ε عندما تقترب s من ٢

ولنفقو بشرح النهايات لدالة أخرى . فإذا كانت الكمية 1 تمثل الكميات الثابتة المستخدمة سنوياً في الإنتاج وأن $ص$ تمثل عدد الشحنات السنوية التي ترد لمصنع معين فإن $س$ تمثل حجم الشحنة الواحدة ، فيكون لدينا المعادلة الآتية :

$$1 = س ص$$

وبتحويل هذه المعادلة إلى معادلة صريحة بالنسبة للمتغير $س$ فإنها تساوى :

$$ص = \frac{1}{س}$$

أى أن $ص$ هي دالة للمتغير $س$ ويمكن كتابة ذلك بصورة أخرى كالآتى:

$$\phi(س) = \frac{1}{س}$$

فإذا زاد حجم الشحنات بدرجة كبيرة جداً أى لا تصل إلى اللانهاية فى الكبر فإن :

$$\begin{aligned} \phi(س) &= \frac{1}{س} \\ \text{ش} &\leftarrow \infty \\ &= \text{صفر} \end{aligned}$$

وفى هذه الحالة نجد أن هناك قيمة محددة أى أن عدد الشحنات يقرب من الصفر كلها كبر حجم الشحنات إلى اللانهاية فى الكبر .

أى أنه إذا زادت قيمة $س$ زيادة كبيرة إلى أن تقرب من اللانهاية فإن قيمة الدالة تصغر لانهاية إلى أن تقرب من الصفر .

أما إذا صغر حجم الشحنات بدرجة كبيرة جداً أى تصغر قيمة س صغراً لا نهائياً إلى أن تقرب من الصفر فإن :

$$\phi(s) = \frac{1}{\text{صفر}}$$

$$= \infty$$

وحيث أنه لا تعرف قيمة هذا الكسر حيث أنه لا توجد طريقة لقسمة ثابت على صفر ، فإن نهاية الكسر ∞ فيه حينما تصل س إلى الصفر .
الدوال المتصلة وغير المتصلة :

تعرف الدالة بأنها متصلة عندما يكون خطها البياني لا يوجد تقطع فيه .
ويلاحظ أن معظم الدوال التي درسناها هي عبارة عن دوال متصلة . ومن المفهوم أن قيم الدالة المتصلة تتغير بانتظام . وبالإضافة إلى ذلك فإنه لا يمكن أن تتغير قيمة الدالة المتصلة من السالب إلى الموجب دون أن تمر على الصفر .
وإذ لك نقول أن $\phi(s) = \text{ص}$ دالة متصلة إذا كانت قيمة ص حقيقة معينة لجميع قيم س الحقيقية أى أنه يقال أن $\phi(s)$ دالة متصلة عند النقطة $s = 1$ إذا كان $\phi(1)$ يمكن تعريفها عند هذه النقطة وكانت $\phi(s) = \phi(1)$. وبكلام آخر فإن الدالة $\phi(s)$ دالة متصلة $s \leftarrow 1$

عند النقطة $s = 1$ إذا استبدلنا س بالقيمة 1 في الدالة وكانت الدالة تعطى قيمة معينة وليس قيمة غير محددة مثل صفر أو ثابت على صفر .
بالإضافة إلى ذلك فإن الدالة $\phi(s)$ يجب أن ينتج عنها قيمة محددة للدالة $\phi(1)$ عندما تقرب س من 1 من أى اتجاه

ويقال للدالة بأنها غير متصلة إذا أعطيناها قيمة معينة للمتغير س ونتج عنها قيمة لانهائية للمتغير ص فمثلاً إذا كان لدينا دالة :

$$\phi(s) = \frac{s^2 - 5}{s - 2}$$

فإن $\text{ص} = \infty$ عندما تكون $s = 2$

ولذلك يقال لهذه الدالة أنها غير متصلة ويكون الخط البياني غير متصل

عند $s = 2$

التفاضل :

أوضحنا في فصل سابق تعريف ميل المستقيم وقلنا أنه يوضح كمية التغير في s لكل وحدة تغير في المتغير المستقل s . فإذا كانت لدينا المعادلة :

$$f = 5 + 2s$$

حيث :

f = التكاليف الكلية للإنتاج

s = عدد الوحدات المنتجة

5 = التكاليف الثابتة حتى حالة عدم إنتاج أية وحدات

2 = تكلفة الوحدة

فإن ميل هذه الدالة هو 2 أى أنه لكل وحدة تغير في عدد الوحدات

المنتجة فإن التكاليف الكلية تتغير بمقدار 2 .

ويرمز عادة للتغير بالرمز Δ بدون تحديد قيمة هذا التغير . ولذلك فإن

أى تغير في s سواء كان كبيراً أو صغيراً فـ s بالرمز Δs وكذلك

التغير في f نرمز له بالرمز Δf . هذا ويقرأ (Δs) بدلتا s وكذا

Δf بدلتا f . وهذا الرمز لا يمكن تجزئته فهو لا يدل على حاصل ضرب

Δs أو Δf .

وبالنظر إلى المعادلة السابقة $f = 5 + 2s$ ج فإننا نلاحظ أن أى تغير

في s يجب أن يحدث تغير في f حتى تكون المعادلة حقيقة فإذا لم نعرف

مقدار التغير في s أى Δs ، فمن الطبيعي لا يمكن معرفة التغير المناظر

△ ف الذى يجب أن يكون ولكن من الواضح أننا نعرف لهذه المعادلة بالذات أن النسبة بين △ ف ٦ △ ج يجب أن تكون ٢ : ١
أى أن :

$$٢ = \frac{\triangle ف}{\triangle ج}$$

وهذه النسبة أى نسبة التغير فى ف والتغير فى ج ماهى إلا عبارة عن ميل المعادلة نفسها . ولو غيرنا قليلا الرموز المستعملة كالآتى :

$$ف \Phi (ج) = ٥ + ٢ ج$$

فإننا نقول أن أى تغير بسيط △ ف المناظر للتغير △ ج يكن إيجاد بطرح قيمة الدالة Φ (ج) عند قيمتها الأولى للمتغير ج من قيمة الدالة عند القيمة المتغيرة للمتغير ج أى عند ج + △ ج ، ولذلك .

فإن :

$$\triangle ف = \Phi (ج + \triangle ج) - \Phi (ج)$$

وحيث أن :

$$٢ = \frac{\triangle ف}{\triangle ج}$$

فإن :

$$\frac{\Phi (ج + \triangle ج) - \Phi (ج)}{\triangle ج}$$

$$\frac{\Phi (\Delta + \Delta - \Phi) (\Delta)}{\Delta}$$

عندما تقرب Δ ج من الصفر . ويتضح أنه بصرف النظر عن صغر Δ ج في التغير المناظر Δ ف أو $\Phi (\Delta + \Delta) - \Phi (\Delta)$ ستكون قيمته ضعف هذا التغير . وبينما Δ ج تصغر صغراً لانهائياً فإن النسبة السابقة تبقى ثابتة وتساوي ٢ .

ولذلك فإن :

$$\frac{\Phi (\Delta + \Delta - \Phi) (\Delta)}{\Delta} = 2$$

أى أن نهايتها قيمة محددة ونهاية هذه النسبة يعرف بتفاضل الدالة $\Phi (\Delta)$ بالنسبة إلى ج .

وبصفة عامة إذا كان لدينا معادلة من الصورة الآتية :

$$\Phi (\Delta) = \Phi (\Delta + \Delta) - \Phi (\Delta)$$

فإن تفاضل هذه الدالة بالنسبة إلى س يمكن حسابه بإيجاد النهاية :

$$\frac{\Phi (\Delta + \Delta) - \Phi (\Delta)}{\Delta}$$

وهناك صور كثيرة للتعبير عن تفاضل دالة . فن الرمز المستحقة هي ص أو $\Phi (\Delta)$ أو الرمز الذي سنسير عليه في هذا الكتاب وهو :

$$\frac{\Delta}{\Delta}$$

وهذا الرمز كما ه واضح من شرحنا السابق ليس خارج قسمة كمية

على أخرى . وهذا الرمز يسمى المعامل التفاضلي الأول للدالة بالنسبة إلى s أو المشتقة الأولى للدالة للتغير s

هذا وقد وجدنا أن تفاضل الدالة $f = 5 + 2j$ أو $\Phi(j)$ (ج)
 $= 5 + 2j$ ج يساوى ٢ وبالرمز .

$$2 = \frac{df}{dj}$$

وهذا التفاضل يمكن تفسيره على أنه عبارة عن ميل الخط عند نقطة محدودة أو عبارة عن معدل التغير في f بالنسبة إلى j . لاحظ أن التفاضل ثابت أو محدد أى أنه بصرف النظر عن القيمة الأولى للمتغير j فإن التغير الصغير في j سيؤدى إلى تغير في f يساوى ضعفه . ولذلك نقول أن الدوال الخطية أو المستقيمة لها باستمرار تفاضل ثابت .

وقد سبق أن عرفنا ميل المنحنى عند أية نقطة معينة بأنه ميل المستقيم الذى يمس المنحنى عند هذه النقطة . ولذلك نقول أن ميل المنحنى يتغير عند كل النقط الموجودة على المنحنى . فإذا كان الميل لا يتغير فمعنى ذلك أنه خط مستقيم أو أن العلاقة الموجودة هي علاقة خطية ولايجاد ميل منحنى توجد نهاية الدالة عندما يقرب التغير في s من الصفر . أى

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta s}$$

وحيث أن $\Delta f = \Phi(s + \Delta s) - \Phi(s)$ فإن :

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta s}$$

$$\frac{\phi - (\phi + \Delta \phi) \Delta \phi}{\Delta \phi} = -$$

= ميل المنحنى عند النقطة س

ولذلك فإن تفاضل معادلة غير خطية عند نقطة معينة هو عبارة عن ميل المنحنى عند النقطة ، وبمعنى آخر فإن التفاضل يعبر عن معدل التغير لقيمة الدالة بالنسبة إلى المتغير المستقل ، وحيث أن معدل التغير على المنحنى يتغير باستمرار فإن المعامل التفاضلي سيتغير باستمرار وقيمته ستعتمد على النقطة على المنحنى المقصود .

مثال :

افترض أن قسم الإنتاج بشركة معينة يوضح العلاقة بين إنتاج آلة معينة والوقت المستخدم في الإنتاج ومعدل إنتاج الآلة في الدقيقة بالدالة الآتية :

$$\frac{س^2}{٥} = ص$$

حيث :

ص = الإنتاج الكلى للآلة

س = الوقت المستخدم في الإنتاج

٥ = معدل الإنتاج الآلى (كمية ثابتة) بالدقيقة

ونود معرفة المعامل التفاضلي الأول وذلك بإيجاد نهاية هذه الدالة .

الخطوة الأولى هي إيجاد Δ س ← . $\frac{\Delta}{\Delta} \text{ ص}$ مع الأخذ في الاعتبار أن $\Delta \text{ ص} = \Phi$ (س + Δ س - Φ (س) . أى نفرض أنه قد حدث تغيرا قدره Δ س تتج عنه تغيرا صغيرا في ص قدره Δ ص ، أى أن المتغير المستقل يصبح س + Δ س والمتغير التابع ص + Δ ص .

$$\frac{\text{س}^2}{\text{ه}} = \text{ص}$$

فإن :

$$\frac{\text{ص}(\text{س} + \Delta \text{س})^2}{\text{ه}} = \text{ص} + \Delta \text{ص}$$

وبالطرح :

$$\frac{\text{س}^2}{\text{ه}} = \frac{\text{ص}(\text{س} + \Delta \text{س})^2}{\text{ه}} = \text{ص} + \Delta \text{ص}$$

$$\frac{\text{س}^2}{\text{ه}} - \frac{\text{ص}(\text{س} + \Delta \text{س})^2}{\text{ه}} = \Delta \text{ص}$$

$$\frac{\text{س}^2}{\text{ه}} - \frac{\text{ص}(\text{س} + \Delta \text{س})^2}{\text{ه}} = \Delta \text{ص}$$

وبالقسمة على Δ س فإن .

$$\frac{2(\Delta \text{ س})}{\Delta \text{ س}} + \frac{2 \Delta \text{ س}}{\Delta \text{ س}} = \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}}$$

$$\frac{2 \Delta \text{ س}}{\Delta \text{ س}} + \frac{2 \text{ س}}{\Delta \text{ س}} =$$

ولذلك فإن :

$$\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} \leftarrow \Delta \text{ س}$$

$$= \frac{2 \text{ س}}{\Delta \text{ س}} \leftarrow \Delta \text{ س}$$

$$\frac{2 \text{ س}}{\Delta \text{ س}} =$$

مثال .

أوجد المعامل التفاضلي الأول للدالة $\text{ص} = 10 \text{ س}$

الحل :

$$\Delta \text{ ص} + \text{ص} = 10 (\Delta \text{ س} + \text{س})$$

$$\Delta \text{ ص} = 10 (\Delta \text{ س} + \text{س}) - \text{ص}$$

$$= 10 \Delta \text{ س} + 10 \text{ س} - \text{ص}$$

$$= 10 \Delta \text{ س}$$

وبالقسمة على $\Delta \text{ س}$ فإن :

$$\frac{10 \Delta \text{ س}}{\Delta \text{ س}} = \frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}}$$

$$\therefore \frac{ص}{س} = \frac{١}{٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلي الأول للدالة $ص = ٥ + ٤ س + ٢ س^٢$

الحل :

$$\begin{aligned} \Delta ص + \Delta ص &= ٥ + ٤ (س + \Delta س) + ٢ (س + \Delta س)^٢ \\ \Delta ص &= ٥ + ٤ (س + \Delta س) + ٢ (س + \Delta س)^٢ - (٥ + ٤ س + ٢ س^٢) \\ &= ٤ \Delta س + ٢ (س^٢ + ٢ س \Delta س + \Delta س^٢) - ٢ س^٢ \\ \Delta ص &= ٤ \Delta س + ٤ س \Delta س + ٢ \Delta س^٢ \\ &= ٤ \Delta س + ٤ س \Delta س + ٢ \Delta س^٢ \end{aligned}$$

$$\Delta ص = ٤ \Delta س + ٤ س \Delta س + ٢ \Delta س^٢$$

وبالقسمة على $\Delta س$ فإن :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٤ \Delta س + ٤ س \Delta س + ٢ \Delta س^٢}{\Delta س} = ٤ + ٤ س + ٢ \Delta س$$

$$= ٤ + ٤ س + ٢ \Delta س$$

$$\therefore \frac{ص}{س} = ٤ + ٤ س + ٢ \Delta س$$

مثال :

افترض أن منحنى التكاليف الكلية هو $ص = ٢ س^٢$

ما هو منحنى التكلفة الحدية ، حيث $ص$ تمثل التكاليف الكلية و $س$ تمثل

عدد الوحدات المنتجة .

الحل :

من المعروف في الإقتصاد أن التكلفة الحدية عبارة عن خارج قسمة الزيادة في التكاليف الكلية الناتجة من الزيادة في الكميات المنتجة على الزيادة في الكميات المنتجة . أى أن التكلفة الحدية عبارة عن نهاية النسبة .

الزيادة في التكاليف الكلية
الزياد في الإنتاج

عندما تقرب الزيادة في الإنتاج إلى الصفر . وبالرموز فإن التكلفة الحدية هي :

$$\frac{\Delta C}{\Delta Q} = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q}$$

$$C + \Delta C = C + \Delta C$$

$$\Delta C = C + \Delta C - C$$

$$= C + 2\Delta C + \Delta C^2 - C$$

$$= 2\Delta C + \Delta C^2$$

$$\frac{\Delta C}{\Delta Q} = \frac{2\Delta C + \Delta C^2}{\Delta Q}$$

$$= 2 + \Delta C$$

$$\therefore \frac{\Delta C}{\Delta Q} = 2$$

ويوضح هذا منحنى التكلفة الجدية . فمثلا عند إنتاج ٤ وحدات

$$\text{فإن } \frac{\Delta C}{\Delta Q} = 8$$

مثال :

افترض أن منحني الطلب لسلعة معينة هو

$$ص = \Phi (ع) = ١٠ - ٢ع$$

ماهو منحني الإيراد الحدى

الحل :

يمكن تعريف الإيراد الكلى بأنه عبارة عن حاصل ضرب السعر في الكميات المباعة . ولذلك فإن $ص$ عبارة عن المتحصلات الكلية للبائعين أو مجموع المصاريف للمشتريين ، أما الإيراد الحدى فهو عبارة عن النسبة بين الزيادة في الإيراد الكلى والزيادة في الكميات المباعة . أى أن الإيراد الحدى عبارة عن نهاية النسبة :

$$\frac{\text{الزيادة في الإيراد الكلى}}{\text{الزيادة في المبيعات}}$$

عندما تقرب الزيادة في المبيعات إلى صفر . أى أن الإيراد الكلى

$$= \lim_{\Delta ع \rightarrow 0} \frac{\Delta ص}{\Delta ع}$$

$$\lim_{\Delta ع \rightarrow 0} \frac{\Delta ص}{\Delta ع} = \frac{ص}{ع}$$

ولذلك فبالنسبة للمثال الحالى فإن الإيراد الكلى يساوى

$$ص = (١٠ - ٢ع) \times ع$$

$$= ١٠ع - ٢ع^2$$

$$\therefore \Delta ص + ص = ١٠(ع + \Delta ع) - (ع + \Delta ع)^2$$

$$= ١٠(ع + \Delta ع) - [ع^2 + ٢ع\Delta ع + (\Delta ع)^2]$$

$$= ١٠ع + ١٠\Delta ع - ع^2 - ٢ع\Delta ع - (\Delta ع)^2 - ١٠ع - ٢\Delta ع^2 - (\Delta ع)^2$$

$$\therefore \Delta \sqrt{e} = 10e + \Delta 10e - e\Delta 10 - e^2 - \Delta e^2 - (\Delta e)^2 - 10e + e^2 =$$

$$= 10(\Delta e) - (\Delta e)e^2 - (\Delta e)^2 - (\Delta e)^2$$

$$\therefore \frac{\Delta \sqrt{e}}{\Delta e} = 10 - e - \Delta e$$

$$\therefore \frac{\sqrt{e}}{e} = 10 - e$$

ويوضح هذا منحني الإيراد الحدى .

قواعد التفاضل :

من الطبيعي أنه يمكن إيجاد تفاضل أى دالة ياتباع الإجراءات السابق شرحها فى الصفحات السابقة ، إلا أن هذه الطريقة تعتبر طريقة مطولة لإيجاد المعامل التفاضلى . وحيث أن هناك أنواعاً معينة من الدوال تستخدم فى كثير من التطبيقات ، ولذلك فإن من السهولة بمكان معرفة طريقة إيجاد المعامل التفاضلى لهذه الأنواع بدلا من استعمال الطريقة السابقة .

١ - المعامل التفاضلى للدالة $y = f(x)$

إذا كانت n عدداً موجباً أو سالباً صحيحاً أو كسراً فإن :

$$\frac{y^{(n)}}{y} = \frac{f^{(n)}(x)}{f(x)}$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$$

أى أن المعامل التفاضلى للدالة $y = f(x)$ هو $y^{(n)}$ أى $f^{(n)}(x)$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلي للدالة $v = s^5$

الحل :

$$\frac{dv}{ds} = n s^{n-1}$$

$$= 5 s^{5-1}$$

$$= 5 s^4$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلي $v = s^3$

الحل :

$$\frac{dv}{ds} = n s^{n-1}$$

$$= 3 s^{3-1}$$

$$= 3 s^2$$

$$=$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلي للدالة $v = s^{\frac{3}{4}}$

الحل :

$$\frac{dv}{ds} = \frac{3}{4} s^{\frac{3}{4}-1}$$

$$= \frac{3}{4} s^{-\frac{1}{4}}$$

مثال :

$$\frac{1}{س^3} = \text{الدالة ص}$$

الحل :

$$\therefore \frac{1}{س^3} = س^{-3}$$

$$\therefore \frac{س}{س} = س^{-3} - 3 = س^{-4}$$

٢ — المعامل التفاضلي للكمية الثانية :

إذا كانت ١ كمية ثابتة وكان لدينا

$$ص = ١$$

فإن

$$\frac{س}{س} = (١) = \frac{س}{س} \quad \text{نم} \quad \frac{١}{س} = \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \text{صفر}$$

حيث أنه من الواضح أن الدالة مستقلة عن س وبصرف النظر عن التغير الذي يحدث في س فإنه لا يحدث تغير في قيمة الدالة أى أن $\Delta ص = \text{صفر}$

$$\text{ولذلك فإن } \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \text{صفر} \quad 6 \quad \frac{س}{س} = \text{صفر}$$

أى أن المعامل التفاضلي للكمية ثابتة يساوى صفر .

مثال :

أوجد المعامل التفاضلي للدالة $v = 6s^4$

الحل :

$$\frac{dv}{ds} = 6 \times 4 s^3$$

$$= 24 s^3$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلي للدالة $v = 5s^{-2}$

الحل :

$$\frac{dv}{ds} = 5 \times -2 s^{-3}$$

$$= -10 s^{-3}$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلي للدالة $v = \frac{1}{s}$

الحل :

$$\therefore \frac{dv}{ds} = \frac{1}{s^2}$$

$$\therefore \frac{dv}{ds} = \frac{1}{s^2} = -\frac{1}{s^3}$$

٥ — المعامل التفاضلي للمجموع الجبري لدالتين أو أكثر :

إذا كانت $ص = ل + ع + م$ وكان كل من $س$ $ع$ $م$ دوال للمتغير المستقل $س$ فإن :

$$\frac{ص}{س} = \frac{ل}{س} + \frac{ع}{س} + \frac{م}{س}$$

أي أن تفاضل المجموع الجبري لدالتين أو أكثر يساوي مجموع تفاضل هذه الدوال .

مثال :

أوجد المعامل التفاضلي للدالة $ص = ٤س^٣ - ٣س^٢ - س + ٥$:
الحل :

$$\frac{ص}{س} = ١٢س^٢ - ٦س - ١$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلي للدالة $ص = ٥س^٢ - ٤س - ٣$ عندما تتكون $س = ٣$:

الحل :

$$\frac{ص}{س} = ١٠س - ٤$$

$$\therefore \frac{ص}{س} = ٣ = ١٠ \times ٣ - ٤ = ٢٦ \text{ عندما } س = ٣$$

٦ — المعامل التفاضلي لحاصل ضرب الدالتين :

إذا كانت $ص = ل \times ع$ وكان كل من $ل$ و $ع$ دالة للمتغير $س$ فإن :

$$\frac{ل}{س} \times ع + \frac{ع}{س} \times ل = \frac{ص}{س}$$

أى أن المعامل التفاضلي لحاصل ضرب دالتين يساوى الدالة الأولى مضروبة فى تفاضل الدالة الثانية من الدالة الثانية مضروبة فى تفاضل الدالة الأولى .

ويمكن القول أيضاً إذا كانت $ص = ل \times ع \times م$ وكان كل من $ل$ و $ع$ و $م$ دوال للمتغير $س$ فإن :

$$\frac{ل(ع)م}{س} + \frac{م}{س} (ل ع) = \frac{ص}{س}$$

$$ل ع م \frac{ل}{س} + \frac{ل}{س} م ع + \frac{م}{س} ل ع =$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلي للدالة $(س + ٢) (س + ٣)$

الحل :

$$١ \times (س + ٣) + ١ \times (س + ٢) = \frac{ص}{س}$$

$$= ٢س + ٥$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلي للدالة $v = (s^2 + 5)(3s - 1)$

الحل :

$$\frac{dv}{ds} = (s^2 + 5) \times 3 + (3s - 1) \times 2s$$

$$= 3s^2 + 10 + 6s^2 - 2s$$

$$= 9s^2 - 2s + 10$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلي للدالة $v = (s + 4)(3s - 2)(5s + 9)$

$$v = (s + 4)(3s - 2)(5s + 9)$$

الحل :

$$\frac{dv}{ds} = (s + 4) \times 3 \times (5s + 9) +$$

$$(5s + 9) \times (3s - 2) \times 1 +$$

$$(s + 4) \times (3s - 2) \times 5$$

$$+ (s + 4) \times (5s + 9) \times 3$$

$$+ (٥س ٩) (٤ + س)$$

$$\times \frac{٥}{٥س} (٢ - ٣س)$$

$$= (٥س ٩) (٤ + س) \times (٢ - ٣س)$$

$$+ (١س ٩) (٢ - ٣س) \times$$

$$+ (٢س ٩) (٤ + س)$$

٧ - المعامل التفاضلي لخارج قسمة دالتين :

إذا كانت $\frac{ل}{ع} =$ حيث $ل$ دوال للمتغير $س$ فإن :

$$\frac{١}{ع^٢} \left[\frac{ل}{ع} \times \frac{٥}{س} - \frac{٥}{س} \times ل \right] = \frac{٥ص}{س}$$

أى أن المعامل التفاضلي لخارج قسمة دالتين يساوى

$$\frac{\text{المقام} \times \text{تفاضل البسط} - \text{البسط} \times \text{تفاضل المقام}}{\text{مربع المقام}}$$

ولا يكون المقام يساوى صفراً .

مثال :

$$\frac{٣س ٢}{٤س - ١} =$$

(م ٢٠ الاقتصاد الرياضى)

الحل:

$$\frac{٤ \times (٣س^٢) - (٦س)(١ - ٤س)}{٢(١ - ٤س)} = \frac{٤ص}{٤س}$$

$$\frac{٢٤س^٢ - ٦س - ١٢س}{٢(١ - ٤س)} =$$

$$\frac{١٢س - ٦س}{٢(١ - ٤س)} =$$

٨ - المعامل التفاضلى لمرات الرات :

إذا كانت ص دالة للمتغير لـ وكانت لـ دالة للمتغير س فتكون ص دالة للمتغير س . أى أن ص دالة الدالة .

$$ص = \Phi (ل)$$

$$ل = \Phi (س) \quad \text{حيث}$$

فمثلاً من المعروف أن الإنتاج الكلى يكون دالة لعدد ساعات العمل وأن الإنتاج للعامل فى الساعة قد يكون دالة لكمية الآلات الميكانيكية المستخدمة فإذا كان عدد ساعات العمل ثابتة فإن الإنتاج الكلى يكون دالة للإنتاج بالساعة الذى يكون دالة لكمية الآلات أو أن الإنتاج دالة الدالة .

ولذلك بصفة عامة ، فإن المعامل التفاضلى إذا كانت ص دالة للمتغير لـ وكانت لـ دالة للمتغير س يساوى :

$$\frac{ص}{س} \times \frac{ل}{ص} = \frac{ل}{س}$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلي للدالة الآتية بالنسبة إلى س

$$ص = (س^٢ - ٣س + ٥)^٤$$

الحل :

$$نضع أولا ل = س^٢ - ٣س + ٥$$

ولذلك تصبح ص دالة للمتغير ل أي أن

$$ص = ل^٤$$

ولذلك فإن المعامل التفاضلي للدالة ص بالنسبة إلى ل :

$$\frac{دص}{دل} = ٤ل^٣$$

وكذلك فإن المعامل التفاضلي للدالة ص بالنسبة إلى س :

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دل}{دس} (٤ل^٣)$$

المعامل التفاضلي للدالة ص بالنسبة إلى س يساوي :

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دل}{دس} \times ٤ل^٣$$

$$= ٤(س^٢ - ٣س + ٥)^٣ (٢س - ٣)$$

$$= ٤(س^٢ - ٣س + ٥)^٣ (٢س - ٣)$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلي للدالة $v = \frac{1}{\sqrt{3+4s^2}}$ بالنسبة إلى s .

الحل :

$$\text{نفرض أن } v = \frac{1}{\sqrt{3+4s^2}}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{v}} = v$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{v}}$$

$$v^{\frac{3}{2}} = 1$$

$$\therefore \frac{3}{2} v^{\frac{1}{2}} = \frac{dv}{ds}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{3}{2} v^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dv}{v^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{\sqrt{v}}$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{1}{\sqrt{v}}$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{1}{\sqrt{v}} (3+4s^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{1}{\sqrt{v}} (3+4s^2)^{\frac{1}{2}}$$

مثال :

$$\frac{و}{و س} \text{ أوجد } \frac{و}{و س} \text{ إذا كانت } ص = ٦ (٤ س^٢ - ٤) - (٤ س^٢ - ٤)$$

الحل :

$$\frac{و}{و س} = \frac{١٨ - (٤ س^٢ - ٤) ٨ \times ٨ س}{و س}$$

مثال :

$$\frac{و}{و س} \text{ أوجد } \frac{و}{و س} \text{ إذا كانت } ص = ١٥ (٤ \sqrt{س} + س) - (٤ \sqrt{س} + س)$$

الحل :

$$\frac{و}{و س} = \frac{١٥ (٤ \sqrt{س} + س) - (٤ \sqrt{س} + س) ٢ (٢ س (س) + ١)}{و س}$$

أى أنه يمكن القول بصفة عامة إنه لإيجاد المعامل التفاضلى لدالة يكون على الوجه الآتى :

$$\frac{و}{و س} = \frac{و}{و ل} \times \frac{و ل}{و م} \times \frac{و م}{و س} \text{ وهكذا}$$

٩ - المعامل التفاضلى للدالة العكسية :

الدالة العكسية تكون على الصورة الآتية :

$$س = \phi (ص)$$

ونريد إيجاد المعامل التفاضلى للدالة ص بالنسبة إلى س . وقد يكون
فى بعض الحالات من السهل إيجاد تفاضل هذه الدالة العكسية وذلك بتحويلها
أولاً إلى دالة صريحة للمتغير ص بالنسبة إلى س . ولكن لا يكون فى إمكاننا
ذلك فى كل الأحوال كما هو موضح بالدالة الآتية :

$$س = ص + ص$$

إلا أنه يمكن إيجاد المعامل التفاضلى على الوجه الآتى :
حيث أن :

$$\frac{1}{\frac{ص}{س}} = \frac{ص}{س}$$

فإنه يمكن إيجاد المعامل التفاضلى للدالة س بالنسبة إلى ص أولاً ثم إيجاد

$$\frac{ص}{س} \text{ كما هو موضح أعلاه}$$

مثال :

$$\text{إذا كانت } س = ص + ص \text{ أوجد } \frac{ص}{س}$$

الحل :

$$\frac{ص}{س} = ص + ١$$

$$\therefore \frac{1}{1 + ص} = \frac{ص}{س}$$

المعامل التفاضلي للمراوطة الضمنية :

سبق أن أوضحنا أن الدالة الضمنية تكون أعلى الصورة الآتية :

$$\Phi (s, 6) = 1$$

ولايجاد المعامل التفاضلي للدالة Φ بالنسبة إلى s أو للدالة Φ بالنسبة إلى 6 فإن إحدى الطرق لإيجاده تكون بتغيير الدالة الضمنية إلى دالة صريحة فمثلاً .

$$\frac{\Phi}{s} = 2$$

$$\text{يمكن تحويلها إلى } \Phi = 2s \text{ أو } s = \frac{\Phi}{2}$$

ومن الطبيعي الآن يمكن إيجاد المعامل التفاضلي بسهولة .

إلا أنه ليس من السهولة دائماً تحويل الدالة الضمنية إلى دالة صريحة. ولإيجاد

$\frac{\partial \Phi}{\partial s}$ تحسب التفاضل بالنسبة إلى s لجميع حذر الطرفين ثم تجمع الحدود التي بها

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} \text{ وتوجد قيمة } \frac{\partial \Phi}{\partial s}$$

مثال :

$$\text{أوجد } \frac{\partial \Phi}{\partial s} \text{ للمعادلة } s^4 + s^3 - 2s^2 - 5s = 0$$

الحل :

نأخذ التفاضل بالنسبة إلى s لجميع الحدود في الطرفين .

$$\therefore \text{ بالنسبة للحد الأول } \frac{s}{s} (s^4) = 4s^3$$

$$\text{الثنائي } \frac{s}{s} (s^3) = 3s^2$$

$$= 3s^2 + 2s^2 = 5s^2$$

لاحظ أننا نعتبر أن s دالة غير معروفة بالنسبة إلى s

$$\text{بالنسبة للحد الثالث } \frac{s}{s} (s - s) = 0$$

$$\text{الرابع } \frac{s}{s} (0) = 0$$

و نستخدم هذه النتائج لإيجاد المعامل التفاضلي للمعادلة كلها :

$$= 5s^2 + 3s^2 + 2s^2 = 10s^2$$

$$\therefore \frac{10s^2}{s} = 10s$$

مثال :

$$\text{أوجد } \frac{d}{ds} (s^3 + 5s^2 + 3s - 5) = 3s^2 + 10s + 3$$

الحل :

$$٠ = ٣ص \frac{وص}{وس} + ٥ \left(س \times \frac{وص}{وس} + ١ \times ص \right) + ٦س$$

$$٣ص \frac{وص}{وس} + ٥س \frac{وص}{وس} = (٥ص + ٦س) -$$

$$\therefore \frac{وص}{وس} (٢ص + ٥س) = (٥ص + ٦س) -$$

$$\therefore \frac{٥ص + ٦س}{٢ص + ٥س} = \frac{وص}{وس}$$

١١ — المعامل التفاضلى للدوال الأسية :

تعرف الدالة الأسية التى يكون فيها ه مرفوعه إلى قوه تسمى بالأس
والمعامل التفاضلى للدالة ه س بالنسبة إلى س يساوى الدالة نفسها أى أن

$$ص = ه س$$

$$\therefore \frac{وص}{وس} = ه س$$

مثال :

$$\text{إذا كانت } ص = ه٣ \text{ أوجد } \frac{وص}{وس}$$

الحل :

$$\text{نجد أن } \Phi(s) = 2s$$

$$\therefore \frac{s}{s} = \Phi(s) = 2$$

ولذلك حيث أن

$$\begin{aligned} & \left[\frac{s}{s} \right]_{\Phi(s)} \\ & = \left[\frac{s}{s} \right]_{\Phi(s)} = \frac{s}{s} = 2 \\ & \therefore \frac{s}{s} = 2 \end{aligned}$$

مثال :

$$\text{إذا كانت } s = 5 + 3s \text{ أوجد } \frac{s}{s}$$

الحل :

$$\frac{s}{s} = 5 + 3s \times (12s)$$

$$= 12s + 3s \times 5$$

مثال :

إذا كانت $\frac{و}{س} = ٤$ هـ $٢س٢$ أوجد $\frac{و}{س}$

الحل :

$$\frac{و}{س} = ٤س٢ = [٤س٢ \times ٢س٢] + [٢س٢] = ٢٠س٢$$

١٢ - المعامل المفاضلي المردال اللوغاريتمي :

إذا كانت $\frac{و}{س} = ١$ لو هـ $١س١$ فإن :

$$\frac{و}{س} = ١$$

مثال :

أوجد $\frac{و}{س}$ للدالة $\frac{و}{س} = ١س١$ مع ملاحظة أن الأساس اللوغاريتمي هو هـ في حالة عدم ذكره

الحل :

$$١س١ = ١س١$$

$$\frac{و}{س} = ١س١$$

$$\frac{1}{5 + 4س} = \frac{1}{م} = \frac{وص}{وم}.$$

$$4 = \frac{م}{وص} \quad 6.$$

$$\frac{وم}{وص} \times \frac{وص}{م} = \frac{وص}{وص}.$$

$$\frac{4}{5 + 4س} =$$

مثال :

$$\frac{وص}{وص} \text{ إذا كانت ص } = \text{ لو } \frac{س}{1 - 3س} \text{ أوجد } \frac{وص}{وص}$$

الحل :

$$\frac{س}{\frac{1}{3}(1 - 3س)} = \text{ص}$$

$$\text{ص} = \text{لو س} - \frac{1}{3} \text{ لو } (س^4 1)$$

$$\frac{1}{3س^3} \times \frac{1}{(1 - 3س)^2} - \frac{1}{س} = \frac{دس}{دص}.$$

$$\frac{2س(1 - 3س)}{3س^3} - \frac{1}{س} =$$

مثال :

$$\text{أوجد } \frac{\text{ص}}{\text{س}} \text{ للدالة } \text{ص} = \text{أو} (٤ \text{ س}^٢ + ٧)$$

الحل :

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{١}{(٤ \text{ س}^٢ + ٧)} \times ٨ \text{ س}$$

$$= \frac{٨ \text{ س}}{(٤ \text{ س}^٢ + ٧)}$$

١٣ - التفاضل اللوغاريتمي :

قد يكون من الأحسن أحيانا إيجاد المعامل التفاضلي لبعض الدوال وذلك يأخذ لوغاريتم الطرفين بالأساس هو قبل إجراء التفاضل وخاصة في الأحوال التي تكون فيها ص دالة لعدة دوال مضروبة في بعضها أو في الرفع إلى القوى أو استخراج الجذور.

مثال :

$$\text{إذا كانت } \text{ص} = \text{س} \text{ س} \text{ س} \text{ أوجد } \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

الحل :

لوغاريتم الطرفين :

$$\text{لص} = \text{س} \text{ س} \text{ س} \text{ لو} \text{ س}$$

$$\therefore \frac{1}{ص} \times \frac{ص}{ص} = ص \times \frac{1}{ص} + 1 \times ص$$

$$\therefore \frac{ص}{ص} = ص [1 + ص]$$

$$= ص [1 + ص]$$

مثال :

$$\frac{ص}{ص} \text{ أوجد إذا كانت } ص = (ص + ٣) \sqrt{ص + ٤}$$

الحل

لو غاريتم الطرفين :

$$لو ص = لو (ص + ٣) \sqrt{ص + ٤}$$

$$\therefore \frac{1}{ص} \times \frac{ص}{ص} = \frac{1}{(ص + ٣)} + \frac{1}{٢(ص + ٤)}$$

$$\therefore \frac{ص}{ص} = \left[\frac{1}{(ص + ٣)} + \frac{1}{٢(ص + ٤)} \right] ص$$

$$= \left[\frac{(ص + ٤) + ٢(ص + ٣)}{٢(ص + ٣)(ص + ٤)} \right] (ص + ٣) \sqrt{ص + ٤}$$

$$= \left[\frac{٣ص + ١١}{٢(ص + ٣)(ص + ٤)} \right] (ص + ٣) \sqrt{ص + ٤}$$

٥٠انيا . المعاملات التفاضلية العليا :

أوضحنا سلفاً أن تفاضل الدالة $\varphi = \varphi(s)$ عبارة عبارة عن $\Delta s \leftarrow$.

— Δs . وقد أطلقنا عليه المعامل التفاضلي الأول بالنسبة إلى s . فإذا
فاضلنا المعامل التفاضلي الأول ينتج لدينا المعامل التفاضلي الثاني للدالة .
وبالمثل إذا فاضلنا المعامل التفاضل للثاني ينتج لدينا المعامل التفاضل الثالث
وهكذا .

ولذلك نجد أنه لإيجاد المعامل التفاضلي النوني لأي دالة فإننا نقوم
بتفاضل المعامل التفاضلي الذي ترتيبه $n - ١$. وإعادة ما نستخدم الرموز
التالية للمعامل التفاضلي الثاني .

ص

$\varphi(s)$

أو

$\frac{d^2 \varphi}{ds^2}$

أو

وبالمثل نستعمل رموز متشابهة للمعاملات التفاضلية العليا فمثلاً إذا كان
لدينا الدالة الآتية :

$$\text{ص} = \text{س}^7 + \text{س}^4 - \text{س}^2 - ٥$$

فإن :

$$\text{المعامل التفاضلى الأولى} = \frac{\text{و}^1 \text{ص}}{\text{و}^1 \text{س}} = \text{س}^6 + \text{س}^8$$

$$\text{الثانى} = \frac{\text{و}^2 \text{ص}}{\text{و}^2 \text{س}} = \text{س}^3 + \text{س}^{10}$$

$$\text{الثالث} = \frac{\text{و}^3 \text{ص}}{\text{و}^3 \text{س}} = \text{س}^{12}$$

$$\text{الرابع} = \frac{\text{و}^4 \text{ص}}{\text{و}^4 \text{س}} = \text{س}^{16}$$

$$\text{الخامس} = \frac{\text{و}^5 \text{ص}}{\text{و}^5 \text{س}} = \text{س}^{20}$$

$$\text{السادس} = \frac{\text{و}^6 \text{ص}}{\text{و}^6 \text{س}} = \text{س}^{27}$$

$$\text{السابع} = \frac{\text{و}^7 \text{ص}}{\text{و}^7 \text{س}} = \text{صفر}$$

وبالطبع فإن المعاملات التفاضلية التى بعد ذلك أيضاً قيمتها تساوى صفرًا.

ومن الملاحظ أنه بالرغم من أنه يمكن إيجاد المعاملات التفاضلية العليا

إلا أنه يكثر استخدام المعامل التفاضلى الأول والثانى . وقد سبق أن عرفنا

المعامل التفاضلى الأول بالنسبة إلى المتغير المستقل يوضح معدل تغير

الدالة بالنسبة إلى هذا المتغير . وقد قلنا أيضاً أن المعامل التفاضلى من الوجهة

الهندسية هو عبارة عن ميل هذه الدالة عند قيمة معينة للمتغير المستقل .
وإذا كان المعامل التفاضلي الأول موجباً فإنه يوضح أن قيمة الدالة في تزايد
للقيم المتزايدة للمتغير المستقل . أما إذا كان المعامل التفاضلي الأول سالباً
فإنه يوضح أن قيمة الدالة في تناقص للقيم المتزايدة للمتغير المستقل .

أما المعامل التفاضلي الثاني فإنه يوضح ما إذا كانت الدالة تتغير بالزيادة
أو بالنقصان أو بمعدل ثابت وبمعنى آخر فإن المعامل التفاضلي الثاني يوضح
ما إذا كان المعامل التفاضلي الأول في زيادة أو نقص أو يبقى ثابتاً للزيادة
في المتغير المستقل .

ومثال للدالة التي يكون فيها المعامل التفاضلي الأول ثابتاً وأن المعامل
التفاضلي الثاني يساوى صفر هي الدالة الخطية التي تمثل الإيراد الكلى من
المبيعات .

$$\text{ص} = ٢ \text{ س}$$

حيث :

$$\text{ص} = \text{الإيراد الكلى}$$

$$\text{س} = \text{عدد الواحدات المباعة}$$

وإذا مثلنا هذه الدالة بيانياً فاننا نجد أنها عبارة عن خط مستقيم بميل
موجب قيمة تساوى ٢ . أى أن المعامل التفاضلي الأول .

$$٢ = \frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$$

وحيث أن ميل الخط ثابتاً فاننا نتوقع المعامل التفاضلى الثانى يساوى
صفر أى أن $\frac{v^2}{s} = \text{صفر}$. ويلاحظ طبعاً أنه فى حالة ما إذا كان المعامل

التفاضلى الأول سالبا فإن المعامل التفاضلى الأول ثابتاً .

ولضرب الآن مثلاً يكون فيه المعامل التفاضلى الثانى موجبا . الدالة
التالية تمثل دالة التكلفة : $v = 2s$

حيث .

v = التكاليف الكلية بمئات الجنيهات

s = الإنتاج بمئات الوحدات

ولإذا أخذنا المعامل التفاضلى الأول لهذه الدالة فنجد أن :

$$\frac{dv}{ds} = 2$$

ومن الواضح أن المعامل التفاضلى ليس ثابتاً وأنه موجب ، والمعامل
التفاضلى الثانى هو :

$$\frac{d^2v}{ds^2} = 0$$

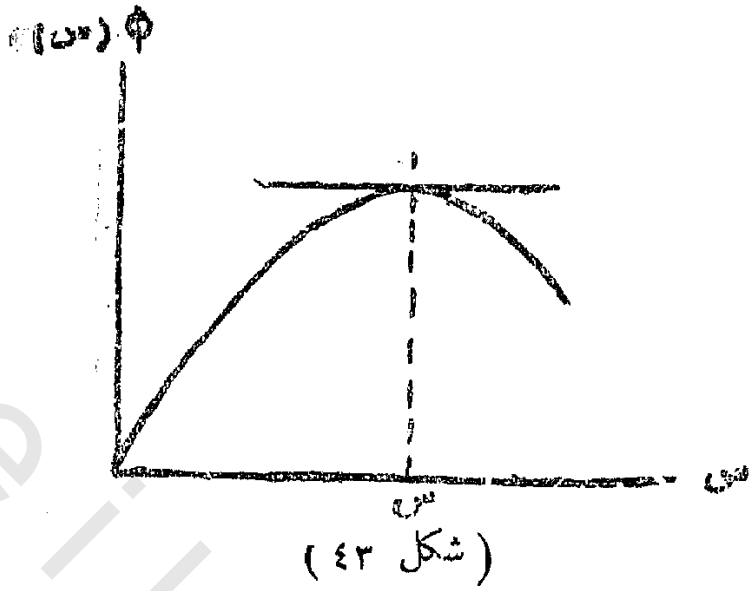
ومن الواضح أيضاً أن إشارة المعامل التفاضلى الثانى موجبة ، ويظهر
ذلك بوضوح فى حالة تمثيل هذه الدالة بيانياً .

وتلخيصاً لما سبق نجد أنه في حالة كون المعامل التفاضلي الأول موجباً عند نقطة معينة فإن معنى ذلك أن المنحنى المناظر لهذه الدالة يكون صاعداً عند هذه النقطة أما إذا كان سالباً فإن معنى ذلك أن الدالة تكون متناقصة ومن الواضح أيضاً أن المعامل التفاضلي الأول يعطى ميل الخط الذي يمس المنحنى عند النقطة (س ٦ ص) .

أما إذا كان المعامل التفاضلي الثاني موجباً فإن ذلك يوضح أن المعامل التفاضلي الأول في ازدياد . أما إذا كان المعامل التفاضلي الثاني سالباً فإن معنى ذلك أن المعامل التفاضلي الأول الذي هو عبارة عن ميل الخط المستقيم الذي يمس المنحنى عند النقطة (س ٦ ص) في تناقص .

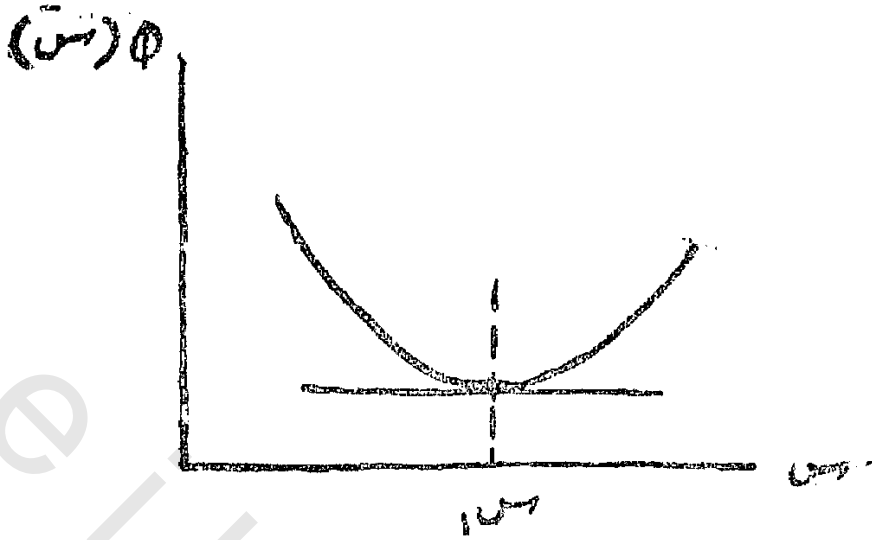
ثالثاً : النهايات العظمى والصغرى ونقط الانقلاب

من المفهوم أن الدوال التي تتناقص أو تتزايد باستمرار لكل القيم للمتغير المستقل لا يكون لها نهايات عظمى أو صغرى : إلا أنه يوجد في الحياة الاقتصادية كثير من الدوال مثل دوال الربح ، ودوال الإيرادات ، ودوال التكلفة ، . . . الخ لها قيم كبرى وصغرى المناظرة لقيم معينة للمتغير المستقل أو المتغيرات المستقلة . ويمكن إيجاد قيم هذه النهايات الكبرى أو الصغرى وذلك بملاحظة سلوك المعامل التفاضلي الأول للدالة . والشكل الآتي يوضح دالة معينة .



افترض أن هذا الشكل يمثل دالة الأرباح الكلية حيث S تمثل عدد الوحدات المباعة وأن $\phi(S)$ تمثل الأرباح الكلية . ويلاحظ أن دالة الربح تصل إلى نهايتها العظمى عند بيع S من الوحدات . ومن المفهوم الآن من مناقشتنا السابقة أن المعامل التفاضلي الأول يكون موجباً إلى يسار S لأن المنحنى يتصاعد أو يتزايد ، كما أنه يكون سالباً إلى يمين S لأن المنحنى يتناقص . وحيث أن المعامل التفاضلي الأول يتغير من قيم موجبة إلى قيم سالبة عند النقطة S فإن المعامل التفاضلي يجب أن يكون قيمته تساوى صفراً عند النقطة S .

ولنناقش دالة أخرى . افترض أن الشكل الآتي يمثل دالة متوسط التكلفة حيث S تمثل عدد الوحدات المنتجة وأن $\phi(S)$ تمثل متوسط التكلفة لكل وحدة منتجة . وفي الحالة فإن المعامل التفاضلي الأول للدالة سيكون سالباً إلى يسار S وموجباً إلى يمين S وسأوى صفراً عند S وهي النقطة الصغرى للدالة .

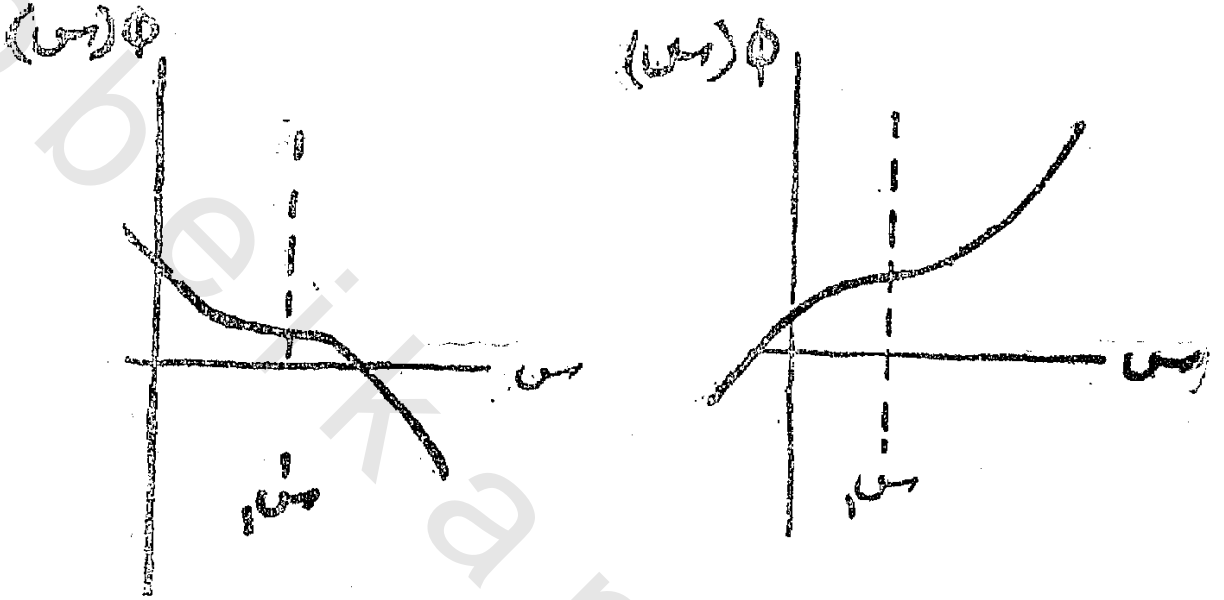


(شكل ٤٤)

ولذلك فمن الواضح بين هذين المثالين أنه يمكن إيجاد النقطة العظمى والنقطة الصغرى لأي دالة وذلك بوضع المعامل التفاضلي الأول للدالة يساوي صفر ثم حلل المعادلة لإيجاد قيمة المتغير المستقل . وهذا الإجراء قد ينتج عنه عدم وجود نقطة ممكنة أو ينتج عنه عدم وجود النقطة . ويستلزم في هذه الحالة معرفة ما إذا كانت هذه النقطة تمثل نقط عظمى أو صغرى أو لا هذا ولا ذاك . ومن الواضح الآن أنه إذا تغير المعامل التفاضلي الأول من موجب إلى سالب ، فإنه يوجد لدينا نقطة عظمى ، أما إذا تغير المعامل التفاضلي الأول من سالب إلى موجب فإنه يوجد لدينا نقطة صغرى .

هذا وقد يحدث أحيانا أن يتغير المعامل التفاضلي الأول من موجب إلى صفر إلى موجب أو من سالب إلى صفر إلى سالب مع قيم متزايدة للمتغير المستقل . وفي الحالات ، فإنه بالرغم من أن المعامل التفاضلي الأول

للدالة قد يكون صفراً لقيمة معينة للمتغير المستقل ، فإنه لا يوجد نقطة عظمى أو صغرى كما هو واضح من الأشكال الآتية :



(شكل ٤٥)

لذلك يقال للدالة عند قيمة معينة للمتغير أنها نهاية عظمى إذا كان مقدار الدالة عند هذه القيمة أكبر من أى مقدار لها لقيم المتغير المستقل الأصلى سواء كانت أكبر أو أصغر من القيمة المذكورة كما يقال للدالة أنها نهاية عظمى إذا كان مقدار الدالة عند هذه القيمة أصغر من أى مقدار لها لقيم المتغير المستقل الأصلى سواء كانت أكبر أو أصغر من القيمة المذكورة .

هذا وقد قلنا أنه لاختيار ما إذا كان هناك نهايات عظمى أو صغرى عند نقطة معينة حيث المعامل التفاضلى الأول يساوى صفراً هو معرفة سلوك المعامل التفاضلى الأول فى المنطقة المجاورة إلى اليسار وفى المنطقة المجاورة إلى اليمين للنقطة التى عندها المعامل التفاضلى الأول يساوى صفراً .

وهناك طريقة أخرى وهي إيجاد المعامل التفاضلي الثاني للدالة عند النقطة التي يكون فيها المعامل التفاضلي الأول يساوى صفر .
ولذلك إذا كان المعامل التفاضلي الثاني موجباً عند النقطة التي فيها المعامل التفاضلي الأول يساوى صفر فإن المنحنى يجب أن يكون مقعر إلى أعلى ولا يوجد في هذه الحالة نهاية صغرى . أما إذا كان المعامل التفاضلي الثاني سالباً عند النقطة التي فيها المعامل التفاضلي الأول يساوى صفر . فإن المنحنى يجب أن يكون مقعراً إلى أسفل عند هذه النقطة ويوجد في هذه الحالة نهاية عظمى .

مثال :

افترض أن لدينا المنحنى $\phi(s) = s^3 - 3s^2 + 1$ ولذلك فإن المعامل التفاضلي الأول :

$$\frac{d\phi}{ds} = 3s^2 - 2s$$

والمعامل التفاضلي الثاني

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = 6s - 2$$

ولمعروفة وجود نهايات عظمى أو صغرى يجب أن يكون

$$6s - 2 = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{3}$$

ولذلك فإن $V = \text{صفر}$ عندما $S = 1$ G $S = -1$ فإذا كانت $S = 1$ فإن :

$V = (1) = 6$ وهي أكبر من صفر

ولذلك فإنه عند النقطة $S = 1$ G $V = -1$ توجد نهاية صغرى
أما إذا كانت $S = -1$ فإن :

$V = (1 - 1) = -6$ وهي أصغر من صفر

ولذلك فإنه عند النقطة $S = -1$ G $V = 3$ توجد نهاية عظمى .

مثال :

افترض أننا نرغب في حساب كمية الطلب الاقتصادية السابق الإشارة إليها في باب سابق في هذا الكتاب : افترض أن هناك التكلفة الآتية :

١ — تكلفة شراء المواد ٢ قرش لكل وحدة

٢ — افترض أن تكلفة عمل الطلب بصرف النظر عن الكمية المطلوبة هي ٤٠ قرشاً .

٣ — تكلفة تخزين المواد ١٠ ٪ سنوياً على كمية المخزون

فإذا كان معدل استعمال هذه المادة هو ١٠٠٠٠ وحدة سنوياً ، وإذا كانت S تمثل حجم الطلب فإنه يكون لدينا التعبير التالي للتكلفة السكائية V في السنة .

$$\frac{ص}{٢} + ٤٠ \times \frac{١٠٠٠٠٠}{س} + ١٠٠٠٠٠ \times ٢ = ص$$

$$\times ٢ (١٠\%)$$

أو

$$ص = ٢٠٠٠٠ + \frac{٤٠٠٠٠٠}{س} + ١, س$$

فإذا أخذنا المعامل التفاضلي الأول لهذا التعبير فإن

$$\frac{ص}{س} = - \frac{٤٠٠٠٠٠}{س^٢} + ١, س$$

ولمعرفة وجود نهاية صغرى، نضع المعامل التفاضلي الأول يساوى صفر

ثم نوجد قيمة س

$$- \frac{٤٠٠٠٠٠}{س^٢} + ١, س = صفر$$

$$س^٢ = ٤٠٠٠٠٠٠$$

$$س = \pm ٢٠٠٠$$

حيث أنه من غير الممكن أن تكون كمية الطلب بالسالب ولذلك

فيكون لإهمال — ٢٠٠٠ والاستفسار فقط عن النقطة التي عندها

س = ٣٠٠٠ لمعرفة النهاية العظمى أو الصغرى عند النقطة . وستقوم بحق المثل بالطريقتين السابق شرحهما

إذا أخذنا قيمة س أقل من ٢٠٠٠ ولتكن ١٩٩٩ فإن قيمة المعامل التفاضلى الأول عند هذه النقطة يساوى :

$$\frac{ص}{س} = \frac{٤٠٠٠٠٠}{٢(١٩٩٩)} - ١$$

ومن الواضح أن القيمة ستكون سالبة ، وإذا أخذنا قيمة س أكبر من ٢٠٠٠ ولتكن ٢٠٠٠١ فإن المعامل التفاضلى الأول عند هذه النقطة يساوى :

$$\frac{ص}{س} = \frac{٤٠٠٠٠٠}{٢(٢٠٠١)} - ١$$

ومن الواضح أن القيمة ستكون موجبة ولذلك نستطيع القول أنه عند س = ٢٠٠٠ ينتج نهاية صغرى للتكلفة الكلية حيث أن المعامل التفاضلى الأول يتغير من سالب إلى صفر إلى موجب عند هذه النقطة .

٥٠٠٠	٣٠٠٠	٢٠٠٠	١٠٠٠	٥٠٠	س
٢٠٥٨٠	٢٠٤٢٣	٢٠٤٠٠	٢٠٥٠٠	٢٠٨٥٠	ص

والطريقة الثانية لمعرفة النهايات العظمى والصغرى وهى الطريقة السهلة

التي نوصى باستخدامها لتحديد ما إذا كان عند النقطة $s = ٢٠٠٠$ توجد نهاية صغرى هي بإيجاد المعامل التفاضلى الثانى عند هذه النقطة .

$$\frac{٤٠٠٠٠٠}{٢س} + ١ = \frac{٤ص}{س}$$

$$\left(\frac{٤٠٠٠٠٠}{٢س} - ١ \right)^٢ = \frac{٤ص^٢}{س^٢}$$

$$\frac{٨٠٠٠٠٠}{٢س} = \frac{٤ص^٢}{س^٢} \text{ أى } \frac{٨٠٠٠٠٠}{٢س} = \frac{٤ص^٢}{س^٢}$$

ومن الواضح أنه لا داعى لإيجاد قيمة المعامل التفاضلى الثانى عند النقطة $s = ٢٠٠٠$ وذلك لأن إشارة المعامل التفاضلى الثانى موجبة عند هذه النقطة . وهذا يكفي لتحديد أن منحنى التكلفة الكلية يكون مقعرا إلى أعلى عند النقطة $s = ٢٠٠٠$ ، ولذلك نستنتج أن التكلفة الكلية تنتج نهاية صغرى عند $s = ٢٠٠٠$.

مثال :

أوجد نقط النهايات العظمى والصغرى للدالة

$$ص = ٢س^٣ - ٢٤س + ٥٠$$

$$\frac{٤ص}{س} = \frac{٣س^٢ - ٢٤}{س}$$

$$\frac{و ص}{و س} = ٣ س ٢ - ٦ س - ٢٤$$

$$\frac{و ص^٢}{و س^٢} = ٦ س - ٦$$

$$نضع ٣ س ٢ - ٦ س - ٢٤ = صفر$$

$$أى ٣ (س - ٤) (س + ٢) = صفر$$

$$\therefore س = ٤ \quad أو \quad س = -٢$$

أى أن :

$$\frac{و ص}{و س} = صفر \quad عندما س = ٤ \quad أو \quad س = -٢$$

$$٦ \frac{و ص^٢}{و س^٢} = ٤ \quad تساوى$$

$$١٨ = ٦ - ٤ \times ٦$$

$$٦ \frac{و ص^٢}{و س^٢} = ٢ \quad عندما س = -٢$$

$$١٨ = ٦ - ٢ \times ٦$$

وإذ لك فهناك نهاية عظمى عند س = ٤

ونهاية صغرى عند س = -٢

توجد قيمة النهاية العظمى بوضع س = ٤ في الدالة الأصلية وكذلك
لنهاية الصغرى بوضع س = -٢ في الدالة الأصلية .

∴ النهاية العظمى للدالة $= {}^2(٤) - ٣(٤) - ٢٤ + ٥٠$

$$= ٥٠ + ٩٦ - ٤٧ - ٦٤ =$$

$$= ٣٠$$

∴ النهاية الصغرى للدالة $= {}^2(٢) - ٣(٢) - ٢٤ + ٥٠$

$$= ٥٠ + ٢٤ - ١٢ - ٤٨ =$$

$$= ١٠$$

نقط الانقلاب :

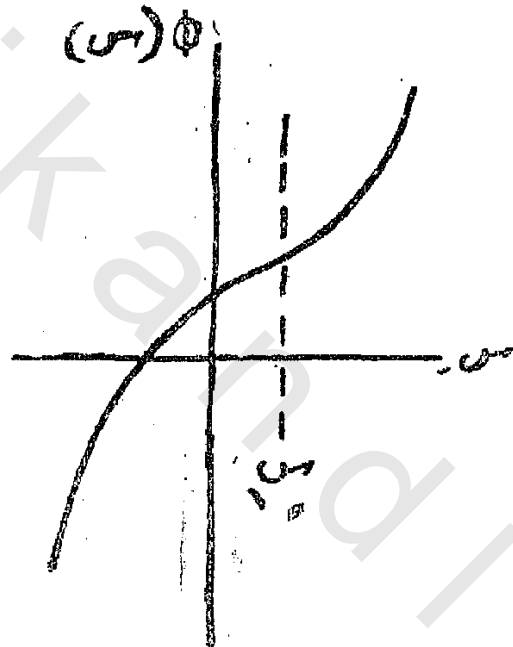
عندما يتغير المعامل التفاضلي الثاني للدالة من موجب إلى سالب أو من سالب إلى موجب لقيم متزايدة للمتغير المستقل ، يوجد لدينا ما يعرف بنقطة الانقلاب عند قيمة المتغير المستقل حيث وجد هذا التغير . لذلك عند هذه النقطة يجب أن يكون المعامل التفاضلي الثاني يساوى صفر إذا كانت له إشارة واحدة في جانب واحد والإشارة عكسية في الاتجاه الآخر . ومن الوجهة الهندسية نجد أنه عند نقطة الانقلاب يتغير شكل الدالة من منحنى مقعر إلى أسفل إلى منحنى مقعر إلى أعلى إذا تغير المعامل التفاضلي الثاني من سالب إلى صفر إلى موجب ، كما هو موضح بالشكل التالي :

أى أن اتجاه المنحنى ينقلب من أسفل إلى أعلى أى أن $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

متزايدة مع ازدياد x وبذلك يكون المعامل التفاضلي الثالث عند هذه النقطة موجبة . أى أنه عند نقطة الانقلاب على منحنى الدالة $\frac{d^3y}{dx^3} > 0$

(س) يكون المعامل التفاضلي الثاني يساوى صفر عند هذه النقطة ، وتتغير إشارة المعامل التفاضلي الثاني من موجب قبل النقطة مباشرة إلى سالب بعد النقطة مباشرة أو العكس أو يكون المعامل التفاضلي الثاني يساوى صفر المعامل التفاضلي الثالث لا يساوى صفر عند هذه النقطة .

ولذلك لإيجاد نقطة الانقلاب نضع المعامل التفاضلي الثاني يساوى صفر ثم نحل المعادلة لإيجاد قيمة س



(شكل ٤٦)

مثال :

أوجد نقطة الانقلاب للدالة $ص = س^٣ - ٣س^٢ - ٢٤س + ٥٠$

الحل :

$$\frac{ص}{س} = س^٢ - ٦س - ٢٤$$

$$\frac{ص^٢}{س^٢} = س - ٦$$

نضع $س - ٦ = صفر$

أى أن :

$$٦ (س - ١) = صفر$$

∴ $س = ١$ توجد عندها نقط انقلاب

$$٦ = \frac{٢ص}{س} = موجب$$

أى أن شكل الدالة أن المنحنى ينقلب من أسفل إلى أعلى . أى أننا نتوقع أن هناك نقطة انقلاب عند النقطة $س = ١$ $٦ ص = ٢٤$ على المنحنى .

ولذلك نجد أن نقطة انقلاب توجد بحيث يتغير تقدير المنحنى . إذ أن المنحنى قد يتغير من مقعر إلى أعلى إلى مقعر إلى أسفل أو بالعكس . وقد أوضحنا سلفاً أنه إذا كان المعامل التفاضلى الثانى موجبا فإن المنحنى يكون مقعرا إلى أعلى ، أما إذا كان سالباً فإن المنحنى يكون مقعرا إلى أسفل . ولذلك من الواضح الآن أنه عند النقطة التى يتغير فيها تقدير المنحنى فإن المعامل التفاضلى الثانى يجب أن يتغير من موجب إلى سالب أو من سالب إلى موجب . ومن ثم فإن المعامل التفاضلى الثانى يجب أن يكون

صفر عند هذه النقطة. ولذلك، بصفة عامة، إذا كان $\frac{٢ص}{س} = صفر$ فهناك

نقطة انقلاب على المنحنى .

رابعاً : التفاضل الجزئى

تكلمنا فى فصول سابقة عن الدوال التى تحتوى على أكثر من متغير مستقل واحد . إلا أن فى دراستنا للتفاضل اقتصرنا حتى الآن فى مناقشة الدوال التى تحتوى على متغير مستقل واحد . ومهمتنا الآن توضيح فكرة أو مفهوم التفاضل بالنسبة للدوال التى تحتوى على متغيرين أو أكثر .

هذا وقد عرفنا سلفاً المعامل التفاضلى الأول بأنه عبارة عن :

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\phi(s + \Delta s) - \phi(s)}{\Delta s}$$

افترض أن لدينا f وهى دالة للمتغيرين s و v أى أن $f = \phi(s, v)$. فإذا أردنا أن نحسب المعامل التفاضلى لهذه الدالة فإننا يجب أن نختار أولاً المتغير الذى ستلحقه زيادة مع تثبيت المتغير الآخر وحساب المعامل التفاضلى للدالة بالنسبة إلى المتغير الذى سمح له بالتغير وحيث أنه من المستحيل إيجاد المعامل التفاضلى للدالة بالنسبة إلى المتغيرين فى نفس الوقت ، فإن عملية تثبيت متغير ثم إيجاد المعامل التفاضلى للدالة بالنسبة إلى المتغير الآخر تعرف بالتفاضل الجزئى . هذا ويستعمل الرمز ∂ للإشارة إلى المعامل التفاضلى الجزئى .

ولذلك نستطيع القول الآن أن التفاضل الجزئى للدالة Φ (س ص) للمتغيرين المستقلين هما كالآتى :

$$\frac{\partial \Phi (س ص)}{\partial س} = \frac{\partial \Phi (س + \Delta س, ص) - \partial \Phi (س, ص)}{\Delta س}$$

$$\frac{\partial \Phi (س ص)}{\partial ص} = \frac{\partial \Phi (س, ص + \Delta ص) - \partial \Phi (س, ص)}{\Delta ص}$$

هذا ويلاحظ أنه إذا كان لدينا دالة تحتوى على من المتغيرات المستقلة ، فإنه يمكن إيجاد التفاضل الجزئى بالنسبة إلى أى واحد من هذه المتغيرات .

ولإيجاد التفاضل الجزئى للدالة التى تحتوى على أكثر من متغير واحد . ليس هناك معادلات جديدة لاستخدامها فى الحالة بل يمكن استعمال المعادلات السابق شرحها ، مع ملاحظة أن هناك متغير واحد فقط هو الذى نسمح له بالزيادة وأن المتغيرات الأخرى يجب تثبيتها .

فمثلا إذا كان لدينا الدالة الآتية التي تحتوى على متغيرين مستقلين :

$$\Phi (s, v) = s^2 - 3s^2 v - v^2 + 10$$

فإذا أردنا إيجاد المعامل التفاضلى الأول بالنسبة إلى s مع تثبيت v فإنه يساوى :

$$\frac{\partial \Phi (s, v)}{\partial s} = 2s - 6s v$$

وبالمثل إذا أردنا إيجاد المعامل التفاضلى الأول بالنسبة إلى v مع تثبيت s ، فإنه يساوى :

$$\frac{\partial \Phi (s, v)}{\partial v} = -3s^2 - 2v$$

وهكذا تتبع نفس الإجراءات عند إيجاد المعامل التفاضلى الجزئى للدالة التي تحتوى على أى عدد من المتغيرات . فمثلا إذا كان لدينا الدالة .

$$\Phi (s, v, e) = 2s^2 + v^2 + s v e$$

$$\frac{\partial \Phi (s, v, e)}{\partial s} = 4s + v e$$

$$\frac{2}{ص} (س ٦ ص ٦ ع) = ٢ ص + س ع$$

$$\frac{2}{ع} (س ٦ ص ٦ ع) = س ص$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلى الجزئى للدالة الآتية إلى س

$$ف = (٥ س^٢ + ص + ٤ ع)^٢$$

الحل :

$$\frac{2}{س} ف = ٢ (٥ س^٢ + ص + ٤ ع) \times ١٥ س$$

وهذا يمكن إيجاد المعاملات التفاضلية العليا للدالة ، أى يمكن إيجاد المعامل التفاضلى الثانى والثالث ... الخ باتباع نفس القواعد السابق شرحها عند الكلام عن المعامل التفاضلى الثانى للدالة التى تحتوى على متغير واحد . فمثلا إذا كان لدينا الدالة السابقة وهى :

$$\Phi (س ٦ ص) = س^٢ - ٣ س^٢ ص - ص^٥ + ١٠$$

فإن المعامل التفاضلى الجزئى الأول بالنسبة إلى س :

$$\frac{2}{ص} (س ٦ ص) = ٣ س^٢ - ٦ س ص$$

والمعامل التفاضلي الجزئي الأول بالنسبة إلى ص :

$$\frac{\partial (س ك ص)}{\partial ص} = ٣ س٢ - ٥ ص٤$$

والمعامل التفاضلي الجزئي الثاني إلى س :

$$\frac{\partial^2 (س ك ص)}{\partial س \partial ص} = ٦ س - ٦ ص$$

والمعامل التفاضلي الثاني بالنسبة إلى ص :

$$\frac{\partial^2 (س ك ص)}{\partial ص^2} = ٢٠ ص٣$$